

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PAMPA
CURSO DE ENGENHARIA MECÂNICA

QUELER RIBEIRO DOS SANTOS

**IMPLEMENTAÇÃO DA TEORIA PERIDINÂMICA NO ANSYS LS-DYNA PARA A
ANÁLISE DA FRATURA DE MATERIAIS**

Alegrete
2024

QUELER RIBEIRO DOS SANTOS

**IMPLEMENTAÇÃO DA TEORIA PERIDINÂMICA NO ANSYS LS-DYNA PARA A
ANÁLISE DA FRATURA DE MATERIAIS**

Monografia apresentada ao Curso de Engenharia Mecânica da Universidade Federal do Pampa, como requisito parcial para obtenção do Título de Bacharel em Engenharia Mecânica.

Orientador: Prof. Dr. Leandro Ferreira Friedrich

**Alegrete
2024**

QUELER RIBEIRO DOS SANTOS

**IMPLEMENTAÇÃO DA TEORIA PERIDINÂMICA NO ANSYS LS-DYNA PARA A ANÁLISE DA
FRATURA DE MATERIAIS**

Monografia apresentada ao Curso de Engenharia Mecânica da Universidade Federal do Pampa, como requisito parcial para obtenção do grau de Bacharel em Engenharia Mecânica.

Monografia defendida e aprovada em 05 de dezembro de 2024.

Banca examinadora:

Prof. Dr Leandro Ferreira Friedrich
Orientador
(UNIPAMPA)

Prof. Dr. Tonilson de Souza Rosendo
(UNIPAMPA)

Prof. Dr. Vicente Bergamini Puglia
(UNIPAMPA)



Assinado eletronicamente por **TONILSON DE SOUZA ROSENDO, PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR**, em 05/12/2024, às 09:37, conforme horário oficial de Brasília, de acordo com as normativas legais aplicáveis.



Assinado eletronicamente por **VICENTE BERGAMINI PUGLIA, PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR**, em 05/12/2024, às 09:45, conforme horário oficial de Brasília, de acordo com as normativas legais aplicáveis.



Assinado eletronicamente por **LEANDRO FERREIRA FRIEDRICH, PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR**, em 05/12/2024, às 09:47, conforme horário oficial de Brasília, de acordo com as normativas legais aplicáveis.



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.unipampa.edu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **1616306** e o código CRC **B10AF4E4**.

RESUMO

Este trabalho explora a mecânica da fratura, uma área crucial da mecânica dos materiais dedicada à análise da propagação de trincas em materiais sólidos. Após revisar os fundamentos da mecânica da fratura tradicional, incluindo os conceitos de energia de superfície e fator de intensidade de tensões de Griffith e Irwin, o estudo avança para a integração de métodos numéricos modernos. Entre eles, a peridinâmica (PD) se destaca como uma teoria inovadora baseada em interações não locais, que modela a formação e propagação de trincas de maneira mais precisa. Paralelamente, o método dos elementos finitos (MEF), amplamente testado, é ideal para análise em regiões contínuas do material. O trabalho foca na verificação da implementação da peridinâmica dentro do software de elementos finitos ANSYS LS-DYNA para futura hibridização, ou seja, modelos PD e MEF unidos. Na metodologia, são detalhados os passos para a implementação da peridinâmica no ANSYS LS-DYNA, chamada de PD-DYNA, abordando a definição das propriedades do material, cálculo de parâmetros peridinâmicos, geração de nós e ligações, e aplicação de condições de contorno. Os testes, realizados em modelos bidimensionais, demonstraram que o PD-DYNA é eficaz na previsão de padrões de fratura, replicando resultados da literatura com precisão. Os resultados destacam a eficiência computacional e a aplicabilidade do método em análises estruturais. O trabalho reforça a potencialidade da integração entre PD e LS-DYNA como uma ferramenta avançada para a análise de fraturas na engenharia de materiais, apontando caminhos promissores para aplicações em novos materiais, condições de carregamento variadas e problemas tridimensionais.

Palavras-Chave: Mecânica da Fratura, Peridinâmica, Método dos Elementos Finitos, LS-DYNA.

ABSTRACT

This work explores fracture mechanics, a crucial area of material mechanics dedicated to analyzing crack propagation in solid materials. After reviewing the fundamentals of traditional fracture mechanics, including the concepts of surface energy and stress intensity factors by Griffith and Irwin, the study advances to the integration of modern numerical methods. Among these, peridynamics (PD) stands out as an innovative theory based on nonlocal interactions, which models the formation and propagation of cracks more accurately. In parallel, the finite element method (FEM), widely tested, is ideal for analysis in continuous regions of the material. This work focuses on verifying the implementation of peridynamics within the ANSYS LS-DYNA finite element software for future hybridization, i.e., combining PD and FEM models. The methodology details the steps for implementing peridynamics in ANSYS LS-DYNA, called PD-DYNA, addressing the definition of material properties, calculation of peridynamic parameters, generation of nodes and bonds, and application of boundary conditions. Tests conducted on two-dimensional models demonstrated that PD-DYNA is effective in predicting fracture patterns, replicating results from the literature accurately. The results highlight the computational efficiency and applicability of the method in structural analyses. The work emphasizes the potential of integrating PD and LS-DYNA as an advanced tool for fracture analysis in material engineering, pointing to promising paths for applications in new materials, varied loading conditions, and three-dimensional problems.

Keywords: Fracture Mechanics, Peridynamic, Finite Element Method, LS-DYNA.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Modos de carregamento atuantes na fratura.....	12
Figura 2 – Principais parâmetros da peridinâmica.....	15
Figura 3 – Modelo peridinâmico padrão para simular danos.....	16
Figura 4 – Exemplo de mais de um ponto dentro do horizonte considerado.....	19
Figura 5 – Exemplo de um ponto nos limites da superfície.....	20
Figura 6 – Representação esquemática do acoplamento do Método dos Elementos Finitos (MEF) com a Peridinâmica (PD).....	21
Figura 7 – Placa de PMMA pré-entalhada sob carga de tração.....	23
Figura 8 – Modelo PD-DYNA da aplicação I.....	23
Figura 9 – Placa com entalhes na borda sob carga impulsiva.....	24
Figura 10 – Modelo PD-DYNA para a aplicação II.....	25
Figura 11 – Placa pré-entalhada com um furo circular sob carga de tração.....	26
Figura 12 – Modelo PD-DYNA para a aplicação III com os diferentes valores de h.....	26
Figura 13 – Resultado da aplicação I no modelo PD-DYNA com tempos de (a) 30 μ s, (b) 40 μ s e (c) 50 μ s; padrões de fraturas encontrados por (d) Song <i>et al.</i> , 2008, (e) Braun e Fernández-Sáez, 2014 e (f) Islam e Shaw, 2020	29
Figura 14 – (a) Resultado da aplicação I com variação das cargas aplicadas no PD-DYNA; (b) padrões encontrados por Islam e Shaw, 2020	30
Figura 15 – (a) Resultado da aplicação II com PD-DYNA; (b) resultados experimentais de Kalthoff e Winkler, 1988; resultados numéricos de (c) Braun e Fernández-Sáez, 2014 e (d) Song <i>et al.</i> , 2008	31
Figura 16 – (a) Resultados da aplicação III com o modelo PD-DYNA; padrões encontrados por (b) Islam e Shaw, 2020, (c) Ni <i>et al.</i> , 2018 e (d) Tabiei e Wu, 2003	33

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	9
1.1 Justificativa	10
1.2 Objetivo Geral e Específicos.....	10
1.3 Estruturação do Trabalho.....	11
2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	12
2.1 Mecânica da Fratura Linear Elástica	12
2.1.1 Critério de Energia de Griffith.....	13
2.1.2 Fator de Intensidade de Tensões.....	13
2.1.3 Relação entre G e K.....	14
2.2 Teoria Peridinâmica	14
2.2.1 Peridinâmica Baseada em Ligações.....	15
2.2.2 Modelo Constitutivo.....	16
2.3 Fatores de Correção.....	18
2.3.1 Fator de Correção de Volume.....	18
2.3.2 Fator de Correção de Superfície.....	19
2.4 Modelos Híbridos.....	20
3. METODOLOGIA	22
3.1 Implementação PD-DYNA.....	22
3.2 Verificação.....	22
3.2.1 Aplicação I.....	23
3.2.2 Aplicação II	24
3.2.3 Aplicação III	25
4. RESULTADOS	28
4.1 Resultados da aplicação I.....	28
4.2 Resultados da aplicação II.....	31
4.3 Resultados da aplicação III.....	32
5. CONCLUSÃO	34
6. SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	35
7. REFERÊNCIAS	36

1. INTRODUÇÃO

A mecânica da fratura é uma área da mecânica dos materiais responsável por estudar a propagação de trincas em materiais sólidos. Ela utiliza conceitos da mecânica dos sólidos e da ciência dos materiais para prever falhas em componentes estruturais. A abordagem clássica da mecânica da fratura, desenvolvida por Griffith (1921), introduziu o conceito de energia de superfície para explicar a formação e o crescimento de trincas em materiais frágeis. Posteriormente, Irwin (1957) expandiu essa teoria para incluir materiais dúcteis, introduzindo a noção de intensidade de tensões na ponta da trinca e o fator de intensidade de tensão (K). Essas teorias permitem prever o comportamento de fraturas sob diversas condições de carregamento e em diferentes tipos de materiais.

Nos últimos anos, métodos numéricos avançados, como a peridinâmica e o método dos elementos finitos (MEF), têm sido amplamente aplicados na mecânica da fratura para modelar e simular a propagação de trincas em estruturas complexas onde essas falhas podem ocorrer em componentes críticos, como aeronaves, pontes ou equipamentos industriais. Esses métodos avançados fornecem ferramentas mais robustas e precisas para prever falhas, especialmente em materiais heterogêneos e anisotrópicos (SILLING; ASKARI, 2005; BELYTSCSKO *et al.*, 2014).

A peridinâmica (PD), proposta por Silling (2000), é uma teoria recente que reformula a mecânica dos sólidos ao considerar interações a distância entre pontos materiais. Diferentemente das abordagens tradicionais baseadas em equações diferenciais parciais locais, a peridinâmica utiliza integrais para descrever o comportamento do material, permitindo modelar de forma natural a formação e propagação de trincas e outras descontinuidades (SILLING, 2000). Essa característica torna a peridinâmica especialmente útil para simular fraturas complexas e problemas em que a continuidade do material é severamente comprometida (MADENCI; OTERKUS, 2014).

Por outro lado, o MEF é uma técnica amplamente consolidada que discretiza um domínio contínuo em subdomínios menores, chamados elementos finitos. Através da formulação de equações de equilíbrio para cada elemento e da aplicação de condições de contorno, o MEF oferece alta eficiência e precisão em regiões contínuas onde o material permanece íntegro (ZIENKIEWICZ *et al.*, 2005).

A combinação da peridinâmica com o MEF tem sido explorada para aproveitar as vantagens de ambos os métodos. Enquanto a peridinâmica lida eficazmente com a propagação

de trincas e descontinuidades, o MEF proporciona eficiência e precisão em regiões onde o material é contínuo. Métodos de acoplamento, como os desenvolvidos por Seleson *et al.* (2013), permitem uma transição suave entre as zonas peridinâmicas e as de elementos finitos. Nesse contexto, o acoplamento dessas metodologias em softwares comerciais, como o ANSYS LS-DYNA, tem se mostrado promissor para simulações complexas na mecânica dos materiais. Por exemplo, em um modelo acoplado, a peridinâmica pode ser utilizada para simular apenas a propagação de trincas e danos em áreas críticas, enquanto o MEF é aplicado no restante da simulação em regiões de comportamento linear e contínuo do material.

1.1 Justificativa

A importância do estudo sobre a mecânica da fratura dos materiais é grande dentro da engenharia, tendo em vista que com o conhecimento do comportamento do material em determinadas situações, pode-se evitar perdas e impactos negativos. Diante disso, os métodos numéricos são uma das formas para esses estudos. Neste trabalho, a aplicação da PD dentro do ANSYS LS-DYNA é verificada utilizando estudos de caso clássicos. Esta etapa é fundamental para uma futura introdução ampla do método PD-DYNA em análises de fraturas, esperando-se uma maior eficiência no processo em relação as abordagens convencionais.

1.2 Objetivo Geral e Específicos

Este trabalho tem como objetivo geral estudar a implementação numérica do PD-DYNA para análise qualitativa da fratura de materiais.

Objetivos específicos deste trabalho são:

- Implementar numericamente o método PD-DYNA;
- Simular e analisar o comportamento de fratura em uma placa de PMMA pré-entalhada sob carga de tração;
- Simular e analisar o comportamento de fratura em uma placa com entalhes na borda sob carga impulsiva;
- Simular e analisar o comportamento de fratura em uma placa pré-entalhada com um furo circular sob carga de tração, considerando três diferentes distâncias do entalhe.

1.3 Estruturação do Trabalho

Este trabalho está estruturado em seis capítulos, organizados da seguinte forma: uma breve introdução da importância do estudo da mecânica da fratura dos materiais e dos métodos numéricos no capítulo 1, uma fundamentação teórica no capítulo 2, onde os aspectos da mecânica da fratura e seus tipos são descritos. Ainda neste capítulo, a formulação clássica da Peridinâmica é mostrada. Logo após, a metodologia a ser adotada para o alcance dos objetivos é apresentada no capítulo 3, com a implementação do método PD-DYNA e os estudos de caso. No quarto capítulo são apresentados os resultados e as análises, detalhando os comportamentos de fratura simulados e as observações realizadas com diferentes condições de carga e geometrias. O quinto capítulo conta com tópicos das conclusões feitas a partir dos resultados obtidos. Por fim, no sexto e último capítulo são descritas sugestões para trabalhos futuros.

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

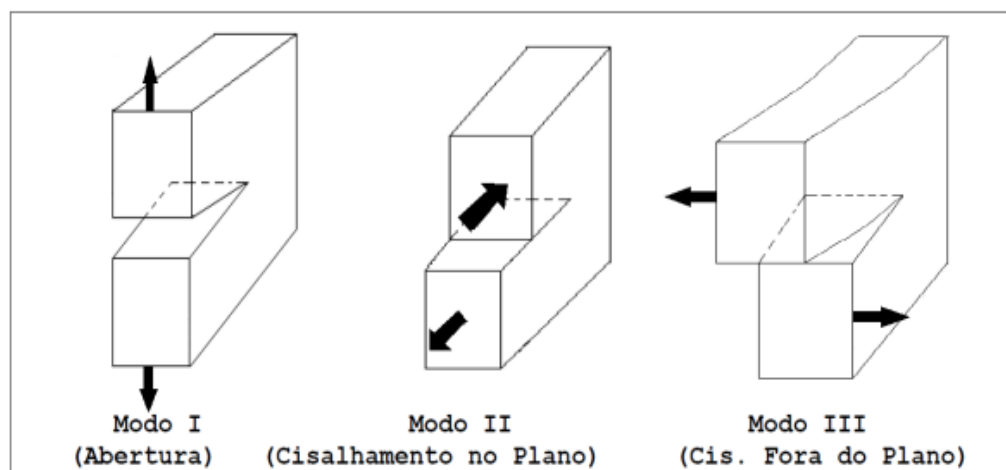
2.1 Mecânica da Fratura Linear Elástica

A Mecânica da Fratura tem como foco o comportamento de um material em situações que este contenha uma descontinuidade interna ou superficial, como uma trinca. O processo de ruptura ou falha do material ocorre pelo crescimento dessa trinca. No caso da Mecânica da Fratura Linear Elástica, essa ruptura do material acontece antes mesmo que ocorra uma deformação plástica, ou seja, ainda dentro da fase elástica da deformação e com níveis de tensão dentro dos admissíveis.

A resistência coesiva teórica de um material é aproximadamente E/π , mas isso não é verificado na fratura de materiais frágeis, já que experimentalmente os valores são três ou quatro ordens de magnitude abaixo desse valor (ANDERSON, 2017). O que explica isso é a presença de trincas no interior desses materiais, que acabam elevando o nível de tensão ao seu redor.

Conforme Silva (2015), as trincas que ocorrem em um determinado material podem estar sujeitas a um ou mais modos de carregamentos de forma simultânea. Sendo os três modos de carregamento definidos como (ver Figura 1): (A) Modo I, denominado modo de tração ou abertura; (B) Modo II, denominado modo de cisalhamento no plano ou de deslizamento; e (C) Modo III, denominado modo de cisalhamento fora do plano ou modo de rasgamento.

Figura 1 – Modos de carregamento atuantes na fratura.



Fonte: Silva (2015).

É importante entender o desempenho do material nestas condições para garantir segurança e integridade para ele na função em que deve ser aplicado. Sendo feito através de análises e cálculos numéricos precisos, levando em conta a presença das fissuras ou trincas. E devido às limitações no conhecimento desses efeitos, surgiu a Mecânica da Fratura Linear Elástica, incorporando conceitos como o Fator de Intensidade de Tensões (K) e o Critério de Energia de Griffith (G).

2.1.1 Critério de Energia de Griffith

Em 1921, Griffith baseou-se na Primeira Lei da Termodinâmica para apresentar um balanço energético empregado na formação de trincas. Este estudo trouxe uma relação quantitativa entre a tensão de fratura e o tamanho de uma trinca. Porém, o critério de Griffith, também chamado de critério da taxa de liberação de energia (G), só pode ser aplicado a casos em que o material é idealmente frágil. A fratura do material ocorre quando $G = G_c$, sendo G_c uma propriedade do material, a taxa de liberação de energia crítica. Considerando uma placa infinita com uma trinca interna de comprimento $2a$ no estado plano de tensões (Modo I), a taxa de liberação de energia fica definida como:

$$G = \frac{\pi\sigma^2 a}{E} \quad (1)$$

2.1.2 Fator de Intensidade de Tensões

Os principais responsáveis pelo desenvolvimento do conceito de Fator de Intensidade de Tensões (FIT - K) foram Irwin e Williams, que na década de 50, chegaram aos mesmos resultados em trabalhos independentes. Estes trabalhos combinados estabeleceram uma base fundamental da mecânica da fratura. Pode-se dizer que o fator de intensidade de tensões tem como finalidade quantificar o campo de tensões e medir as tensões na ponta da trinca para materiais com comportamento linear elástico. Como o campo ao redor da trinca é igual mesmo para materiais, geometrias e carregamento diferentes, mas sendo alterada apenas a intensidade das tensões em cada caso, o critério ficou designado como Fator de Intensidade de Tensões.

No instante da falha o K_I (onde o subscrito I indica o modo de falha da Figura 1) chega a um valor crítico para o material, de forma que $K_I = K_{IC}$, onde K_{IC} é tenacidade à fratura, ou seja, uma medida da resistência do material. E de acordo com a teoria de Griffith, K_{IC} corresponde a expressão:

$$K_{IC} = \sqrt{2E\gamma} \quad (2)$$

Já o fator de intensidade de tensão (K_I) é a força motriz da fratura e, no caso da placa infinita com uma tensão de tração remota e uma trinca interna de comprimento $2a$ (Modo I), é dado por:

$$K_I = \sigma_0 \sqrt{\pi a} \quad (3)$$

2.1.3 Relação entre G e K

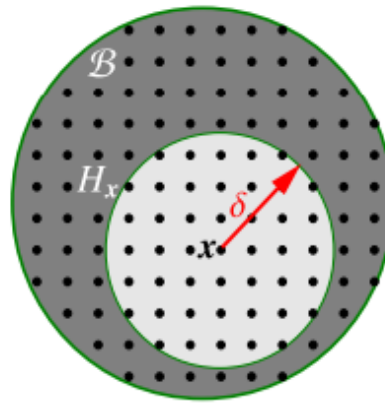
Mesmo sendo a taxa de liberação de energia (G) um parâmetro do comportamento global e o fator de intensidade de tensões (K) um parâmetro local, eles podem ser relacionados diretamente através da equação descrita como:

$$G = \frac{K_I^2}{E} \quad (4)$$

2.2 Teoria Peridinâmica

A peridinâmica é um campo de estudo na mecânica dos sólidos, que foi introduzida por Silling (2000), e se baseia na análise de materiais em escala não local. Isso quer dizer que, dentro de uma vizinhança H_x com distância δ de uma partícula ou ponto material em x , como mostra a Figura 2, interações acontecem e não podem ser descritas apenas com base na proximidade espacial da mecânica clássica do contínuo.

Figura 2 – Principais parâmetros da peridinâmica.



Fonte: JAVILI *et al.* (2019).

Segundo Hobbs (2021), é crescente o interesse e reconhecimento do potencial da Teoria Peridinâmica, tendo em vista a abrangência em que esse método pode ser utilizado para descrever materiais com comportamento não local, como fraturas e trincas.

A peridinâmica tem duas categorias principais de formulação, uma baseada no estado e outra baseada na ligação, sendo esta última a aplicada neste trabalho.

2.2.1 Peridinâmica Baseada em Ligações

A equação peridinâmica que define a teoria baseada em ligações corresponde a formulação original de Silling (2000), que tem o coeficiente de Poisson limitado a um valor fixo. Essa, pode ser compreendida como uma expressão integral do equilíbrio do momento linear na Mecânica Clássica do Contínuo (MCC), e é escrita como:

$$\rho \ddot{u}(x, t) = \int_{H_x} f(u(x', t) - u(x, t), x' - x) dV_{x'} + b(x, t) \quad (5)$$

onde f é a função de força entre pares que representa a força que a partícula x' exerce sobre a partícula x (em dimensão de força por volume ao quadrado), u é o campo de deslocamento, b é o campo de força do corpo e ρ é a densidade de massa.

O domínio da integral é H_x , conhecido como horizonte ou vizinhança, que é definido ponto a ponto como a região do corpo onde as partículas estão localizadas a uma distância menor que um raio δ , também chamado de horizonte, na configuração de referência, como

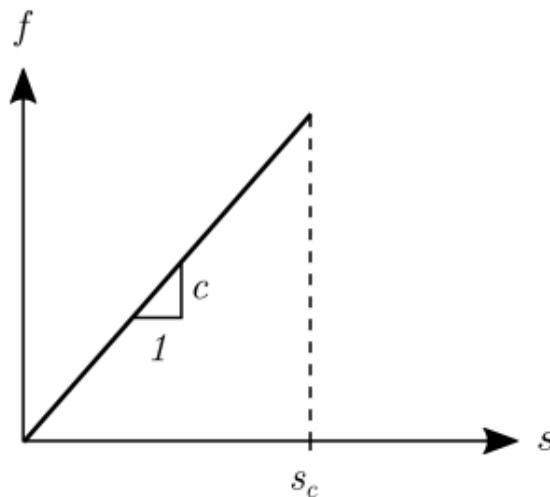
mostrado na Figura 1. O conjunto de partículas que compõem a vizinhança da partícula x é chamado de família de x (CABRAL *et al.*, 2019).

2.2.2 Modelo Constitutivo

Dentro da peridinâmica baseada em ligações, se expressa o comportamento constitutivo de um material como uma relação entre a força escalar da ligação f e o alongamento s . As ligações são basicamente molas, que podem possuir características lineares ou não lineares. Nessas ligações, há interação entre dois pontos, onde tal interação é governada pela primeira lei constitutiva da peridinâmica, conhecida como modelo de Protótipo Microelástico Frágil (*Prototype Microelastic Brittle - PMB*). Esse modelo representa o comportamento de um material elástico linear, como exemplificado na Figura 3, e é definido por:

$$f = \vartheta cs \quad (6)$$

Figura 3 – Modelo peridinâmico padrão para simular danos.



Fonte: Hobbs (2021).

O micromódulo c é geralmente um valor constante e frequentemente chamado de rigidez da ligação ou constante da mola. Assim, assume-se que a força escalar da ligação f depende apenas do estiramento da ligação s , dado pela expressão:

$$s = \frac{|\xi + \eta| - |\xi|}{|\xi|} \quad (7)$$

onde ξ é o vetor da posição relativa entre dois pontos e η é o vetor de deslocamento relativo, ambos na configuração de referência, sendo tais parâmetros definidos como:

$$\xi = x' - x \quad (8)$$

$$\eta = u(x', t) - u(x, t) \quad (9)$$

Conforme apresentado em Silling e Askari (2005), o micromodulo c depende da dimensão do problema e é dado por:

$$c = \begin{cases} \frac{6E}{\pi\delta_0^4(1-2\nu)} & \text{para } 3D \\ \frac{6E'}{\pi\delta_0^3(1-\nu')e} & \text{para } 2D \\ \frac{2E}{\delta_0^2A} & \text{para } 1D \end{cases} \quad (10)$$

onde e é a espessura do domínio se a análise for 2D e A a área de seção transversal se a análise for 1D. Com $E' = E$ e $\nu' = \nu$ no estado plano de tensão (EPT) e $E' = E / (1 - \nu^2)$ e $\nu' = \nu / (1 - \nu)$ para o estado plano de deformação (EPD). Além disso, na peridinâmica baseada em ligação, o coeficiente de Poisson é restrito em 1/3 para EPT e 1/4 para EPD e problemas 3D (CABRAL *et al.*, 2019).

O dano é introduzido no modelo peridinâmico por meio da quebra de ligação quando um limite s_0 é atingido, como mostra a Figura 3. O modelo é dependente do histórico de carregamento, pois a ruptura da ligação é irreversível. Para associar o valor do alongamento crítico s_0 a uma propriedade conhecida do material, Silling e Askari (2005) propuseram calibrar esse parâmetro com a tenacidade G_f . Como é necessário romper todas as ligações que unem partículas em ambos os lados de uma área de controle para gerar uma superfície de fratura, a energia dissipada nas rupturas das ligações sobre a área de controle deve ser igual a G_f . Ficando as expressões de s_0 definidas como:

$$s_0 = \begin{cases} \sqrt{\frac{5G_f(1-2\nu)}{3E\delta_0}} & \text{para } 3D \\ \sqrt{\frac{2\pi G_f(1-\nu')}{3E'\delta_0}} & \text{para } 2D \\ \sqrt{\frac{3G_f}{E\delta_0}} & \text{para } 1D \end{cases} \quad (11)$$

Na equação 6, ϑ é a função escalar da ligação, ou seja, define a situação da ligação e é dada por:

$$\vartheta = \begin{cases} 1 & \text{se } s < s_0 \\ 0 & \text{se } s \geq s_0 \end{cases} \quad (12)$$

Tendo conhecimento da função escalar da ligação, ϑ , é possível encontrar o dano local φ através da equação:

$$\varphi = \frac{\int_{H_x} \vartheta dv\xi}{\int_{H_x} dv\xi} \quad (13)$$

Então, no caso de uma partícula não ter nenhuma ligação quebrada, o seu dano local é $\varphi = 0$ e, no caso de a partícula estar completamente desconectada do restante do corpo, seu valor de dano local é $\varphi = 1$ (CABRAL *et al.*, 2019).

2.3 Fatores de Correção

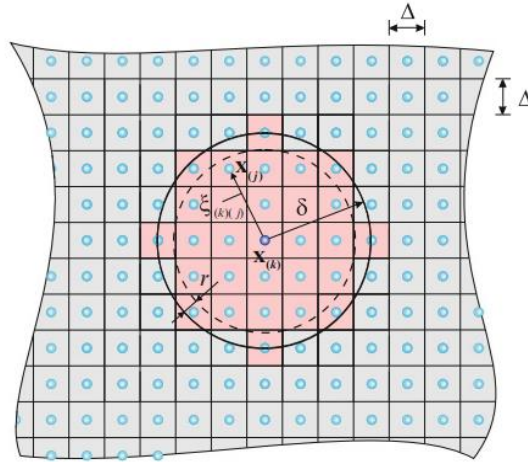
Deve-se considerar dois fatores de correção para uma melhor precisão e eficiência na execução da teoria peridinâmica. São eles: o fator de correção de volume e o fator de correção de superfície.

2.3.1 Fator de Correção de Volume

Como a equação de movimento da peridinâmica é descrita com cada partícula estando localizada no centro de cada subdomínio, é de grande importância levar em conta o fator de

correção de volume. Isso porque uma partícula j pode estar dentro do horizonte da partícula k com $\|x_j - x_k\| \leq \delta$ e então o volume associado à partícula j estará parcialmente dentro do horizonte de k , como na figura a seguir:

Figura 4 – Exemplo de mais de um ponto dentro do horizonte considerado.



Fonte: Madenci e Oterkus (2014).

Desta forma, a execução do cálculo acaba prejudicada se o fator de correção não for utilizado. Segundo Giannakeas (2019) o fator de correção de volume $v(\xi_{i,j})$ reduz o volume efetivo das partículas que estão parcialmente dentro do horizonte da partícula considerada, sendo este definido como:

$$v(\xi_{i,j}) = \begin{cases} \frac{\delta - \|\xi_{i,j}\|}{2r_j} + \frac{1}{2} & \text{se } (\delta - r_j) \leq \|\xi_{i,j}\| \leq \delta \\ 1 & \text{se } \|\xi_{i,j}\| \leq (\delta - r_j) \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (14)$$

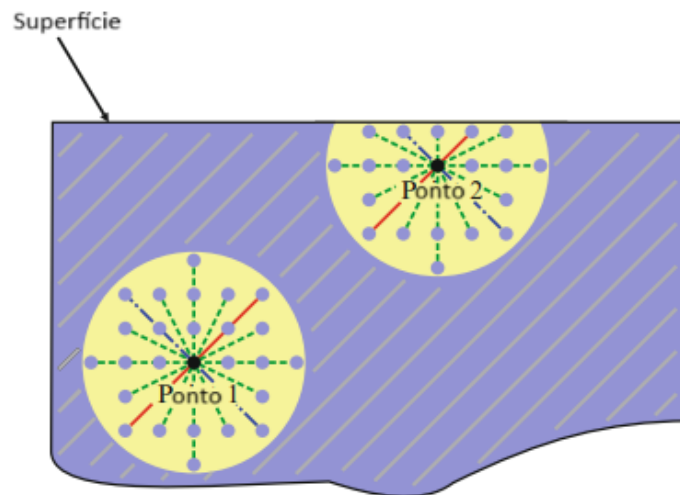
onde $\|\xi_{i,j}\| \leq \|x_j - x_i\|$ e r_j é uma constante geralmente definida como sendo igual à metade do espaçamento da grade ($\Delta/2$). A distância acima da qual o volume de um nó precisa ser corrigido corresponde ao comprimento $\delta - r_j$.

2.3.2 Fator de Correção de Superfície

Outro fator de correção importante a se analisar é o fator de correção de superfície, pois sendo a teoria peridinâmica baseada nas relações entre os pontos materiais dentro do horizonte,

num caso em que a forma do horizonte é incompleta porque está localizado próximo à superfície de um modelo, como o Ponto 2 mostrado na Figura 5, esse ponto acaba não se comportando de forma tão correta quanto o Ponto 1 se o fator de correção de superfície for desconsiderado.

Figura 5 – Exemplo de um ponto nos limites da superfície.



Fonte: Madenci e Oterkus (2014).

Em Giannakeas (2019) o cálculo do fator de correção de superfície $\lambda_{i,j}$ foi feito da seguinte forma:

$$\lambda_{i,j} = \frac{2V_0}{V_j - V_i} \quad (15)$$

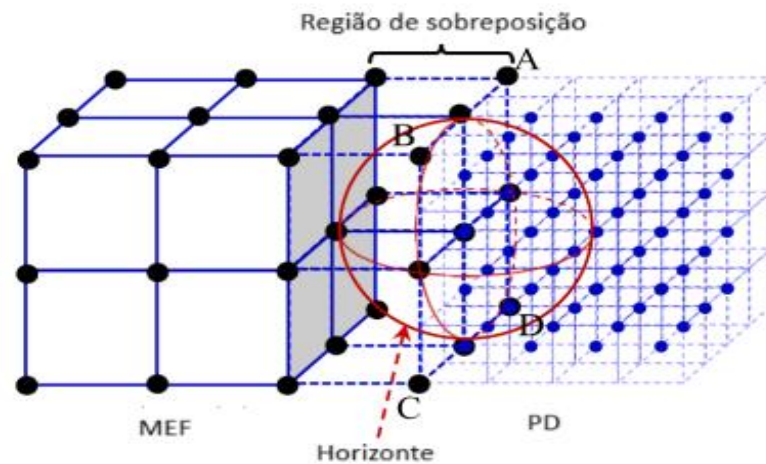
onde V_i e V_j são os números de pontos para os nós i e j , respectivamente, e V_0 é o número total de pontos que estão completamente dentro do horizonte.

2.4 Modelos Híbridos

A implementação prática de modelos híbridos, integrando a peridinâmica com os elementos finitos do ANSYS LS-DYNA, envolve a definição cuidadosa dos parâmetros peridinâmicos já discutidos, como o raio do horizonte e os fatores de correção de volume e superfície, em conjunto com a simulação dinâmica do LS-DYNA. Algumas das vantagens de usar esses modelos incluem a capacidade de simular com precisão e de forma otimizada a propagação de falhas e danos em materiais heterogêneos e complexos. Para isso, onde é

esperada a falha, são incorporados os elementos da peridinâmica, enquanto o restante da estrutura é modelado usando a dinâmica explícita convencional dos elementos finitos do LS-DYNA. Para garantir o acoplamento dos dois métodos, uma região de sobreposição é utilizada, conforme mostrado na Figura 6 da implementação de Zhang *et al.* (2022).

Figura 6 – Representação esquemática do acoplamento do Método dos Elementos Finitos (MEF) com a Peridinâmica (PD).



Fonte: Adaptado de Zhang *et al.* (2022).

Para modelos em 3D, Scabbia e Enea (2023) utilizaram o método *Carrera Unified Formulation (CUF)* para resolver o acoplamento e obtiveram uma redução significativa na demanda computacional. Esse método permite que sejam acoplados modelos 3D com a formulação peridinâmica a modelos de elementos finitos 1D. Os modelos híbridos são essenciais para simular a propagação de fraturas em materiais complexos, permitindo avanços significativos em análises estruturais.

3. METODOLOGIA

A presente seção descreve os procedimentos adotados para a implementação da teoria peridinâmica no ANSYS LS-DYNA, denominada PD-DYNA, e os modelos selecionados para a verificação da implementação.

3.1 Implementação do PD-DYNA

A implementação do método peridinâmico no ANSYS LS-DYNA foi realizada integrando a programação da teoria PD com elementos finitos do LS-DYNA, utilizando os recursos de pré-processamento e pós-processamento disponíveis no software. O processo de implementação seguiu as etapas descritas abaixo:

- Declaração das propriedades do material (E , G_f , ρ , ν) e do modelo peridinâmico (Δ , δ , número de pontos nas direções x , y e z);
- Cálculo do micromódulo, c , e do estiramento crítico, s_0 , usando as Equações 10 e 11, respectivamente;
- Geração dos nós e ligações;
- Cálculo do fator de correção de volume e do fator de correção de superfície a partir das Equações 14 e 15, respectivamente;
- Atribuição da lei constitutiva da Equação 6 a cada ligação através do elemento *Explicit Spring-damper* (COMBIN165);
- Distribuição das massas aos nós através do elemento *Explicit 3-D Structural Mass* (MASS166), configurando o modelo PD-DYNA;
- Aplicação das condições de contorno;
- Solução do problema computacional.

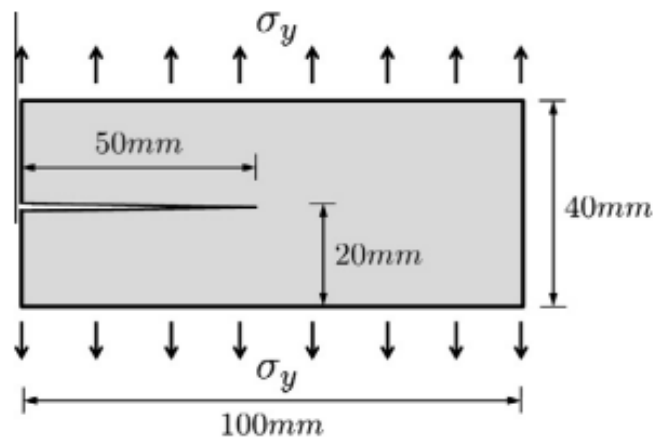
3.2 Verificação

Nesta subseção são apresentados os problemas selecionados que serão utilizados para a verificação do método PD-DYNA, com foco em modelos para análises de fratura de materiais. São descritas as aplicações baseadas em exemplos retirados da literatura científica.

3.2.1 Aplicação I

O primeiro modelo, representado na Figura 7, foi adaptado do estudo de Braun e Fernández-Sáez (2014), no qual uma placa retangular finita de PMMA, com um entalhe localizado no centro da placa e partindo transversalmente da borda esquerda, foi analisada. As propriedades do material consideradas para o modelo são: módulo de Young $E = 32$ GPa, densidade $\rho = 2450$ kg/m³, coeficiente de Poisson $\nu = 0,33$ e energia de fratura $G_f = 3,0$ N·m. A tensão, σ_y , aplicada na borda superior e inferior da placa é igual a 1 MPa.

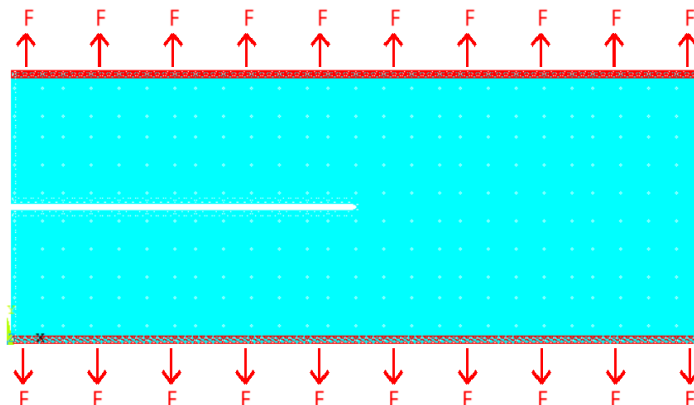
Figura 7 – Placa de PMMA pré-entalhada sob carga de tração.



Fonte: Braun e Fernández-Sáez (2014).

O modelo 2D PD-DYNA, apresentado na Figura 8, consiste em 100 x 40 nós igualmente espaçados em ambas as direções x e y , respectivamente. O espaçamento entre pontos materiais, Δ , estabelecido é de 1 mm. Já o valor do horizonte, δ , é definido como $\delta = 3,015\Delta$.

Figura 8 – Modelo PD-DYNA da aplicação I.



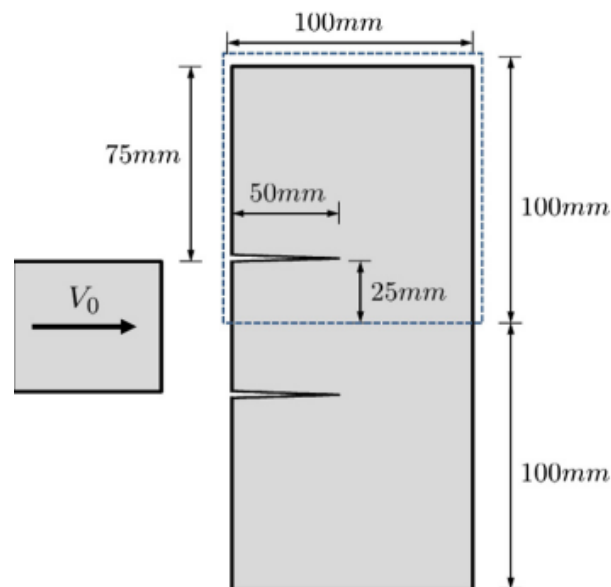
Fonte: Autor (2024).

Em relação as condições de contorno, nas bordas superior e inferior (regiões em vermelho) a tensão foi aplicada no formato de forças distribuídas igualmente (indicada pelas setas no modelo) nos nós presentes nas regiões referidas. A força distribuída, F , foi calculada da seguinte forma: $F = \sigma_y (nDivX \Delta^2) / (3 nDivX)$, sendo $nDivX$ o número de nós na direção x .

3.2.2 Aplicação II

O segundo problema também tem como referência a análise feita numericamente por Braun e Fernández-Sáez (2014), porém inicialmente esse modelo foi testado experimentalmente e relatado por Kalthoff e Winkler (1988). Trata-se de uma placa com dois entalhes iniciais na borda, impactada por um projétil, como pode ser visto na Figura 9. O material escolhido para o modelo foi um Aço Maraging 18Ni1900, com módulo de Young $E = 190$ GPa, coeficiente de Poisson $\nu = 0,33$, densidade $\rho = 8000$ kg/m³ e energia de fratura $G_f = 22170$ N·m. A condição de contorno aplicada para o projétil foi uma velocidade prescrita de 16,5 m/s começando em $t = 0$ (BRAUN; FERNÁNDEZ-SÁEZ, 2014).

Figura 9 – Placa com entalhes na borda sob carga impulsiva.

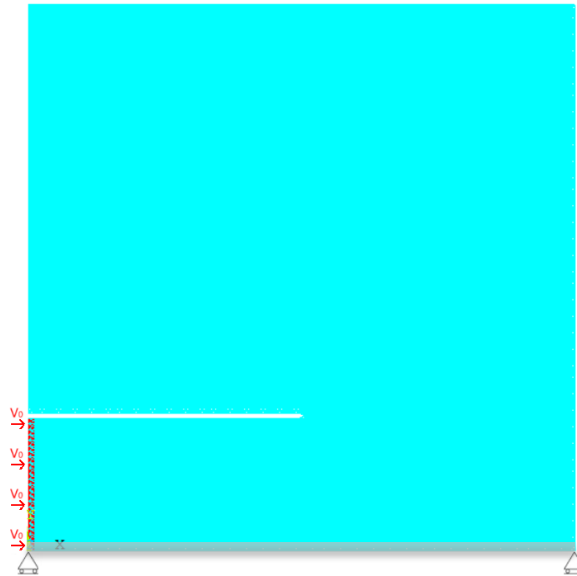


Fonte: Braun e Fernández-Sáez (2014).

O modelo 2D PD-DYNA consiste em 100 x 100 nós distribuídos igualmente ao longo das direções x e y , respectivamente, representando a metade superior da placa, conforme

mostrado na Figura 10. Desta forma, o espaçamento entre os pontos materiais, Δ , é de 1 mm. O valor do horizonte, δ , é definido como $\delta = 3,015\Delta$.

Figura 10 – Modelo PD-DYNA para a aplicação II.



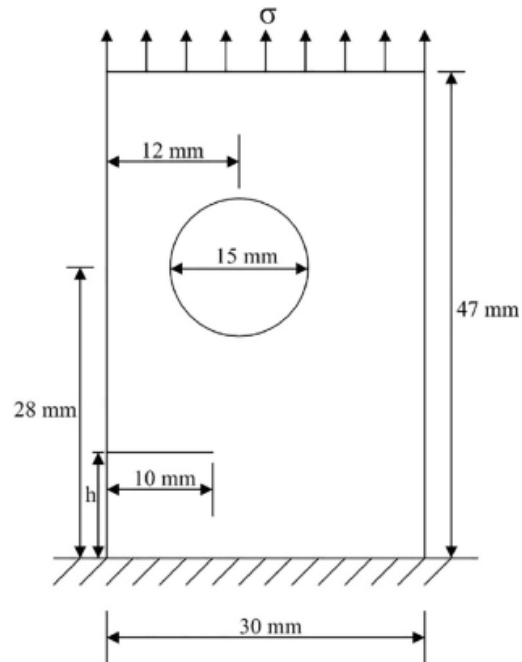
Fonte: Autor (2024).

Como condições de contorno, na borda sob impacto da carga impulsiva (região em vermelho) aplicou-se a velocidade prescrita distribuída igualmente (indicado pelas setas horizontais) nos nós presentes na região. Além disso, devido à simetria escolhida para o modelo, na borda inferior da placa (região em cinza) os nós foram restringidos na direção y , conforme indicado pelos engastes na Figura 10.

3.2.3 Aplicação III

O último modelo é baseado no trabalho de Islam e Shaw (2020), no qual uma placa com um furo circular engastada na base e submetida a tração foi utilizada. Este estudo, contou com diferentes posicionamentos do entalhe inicial para a análise da fratura do modelo. Os parâmetros utilizados foram o módulo de Young $E = 71,4$ GPa, a densidade $\rho = 2700$ kg/m³, o coeficiente de Poisson $\nu = 0,25$, e a energia de fratura $G_f = 1000$ N·m. As tensões, σ , aplicadas variam conforme as distâncias do entalhe para a base da placa (5 mm, 10 mm e 15 mm), sendo 22 MPa, 26 MPa e 28 MPa, respectivamente, conforme Ni *et al.* (2018). A Figura 11 mostra as dimensões do modelo e condições de contorno empregadas.

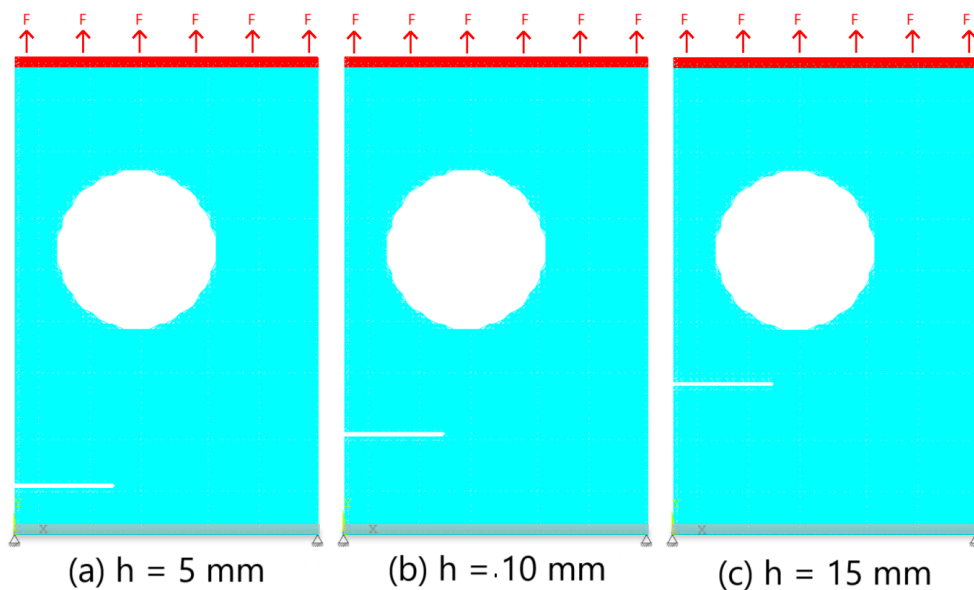
Figura 11 – Placa pré-entalhada com um furo circular sob carga de tração.



Fonte: Islam e Shaw (2020).

O modelo 2D PD-DYNA para cada um dos casos com as três alturas da trinca, mostrado na Figura 12, consiste em 60×94 nós distribuídos igualmente ao longo das direções x e y , respectivamente. Assim, o valor do espaçamento entre pontos materiais, Δ , aplicado foi de 0,5 mm. O valor do horizonte, δ , é definido como $\delta = 3,015\Delta$.

Figura 12 – Modelo PD-DYNA para a aplicação III com os diferentes valores de h .



Fonte: Autor (2024).

As condições de contorno incluem a tensão aplicada no formato de uma força distribuída igualmente (indicado pelas setas no modelo) nos nós presentes na borda superior de cada caso (regiões em vermelho). Nos nós localizados na borda inferior de cada caso (regiões em cinza), foram aplicadas restrições nas direções x e y , conforme indicado pelos engastes (Figura 12). A força distribuída, F , foi calculada da mesma maneira mostrada na primeira aplicação.

4. RESULTADOS

A implementação do método peridinâmico no ANSYS LS-DYNA (PD-DYNA) foi realizada com base na metodologia descrita na Seção 3.1. Para isso, foi desenvolvido um código em MATLAB que automatiza a geração dos modelos peridinâmicos, facilitando o pré-processamento e a definição dos parâmetros necessários. A partir da definição do código, o tempo médio para serem obtidos os resultados de cada simulação ficou entre cinco e dez minutos, com um uso aceitável de processamento, utilizando uma máquina de nível intermediário do mercado. A interface de script do MATLAB ainda possibilitou o controle detalhado de cada etapa do processo, desde a atribuição de propriedades materiais e leis constitutivas específicas até a criação de nós e ligações.

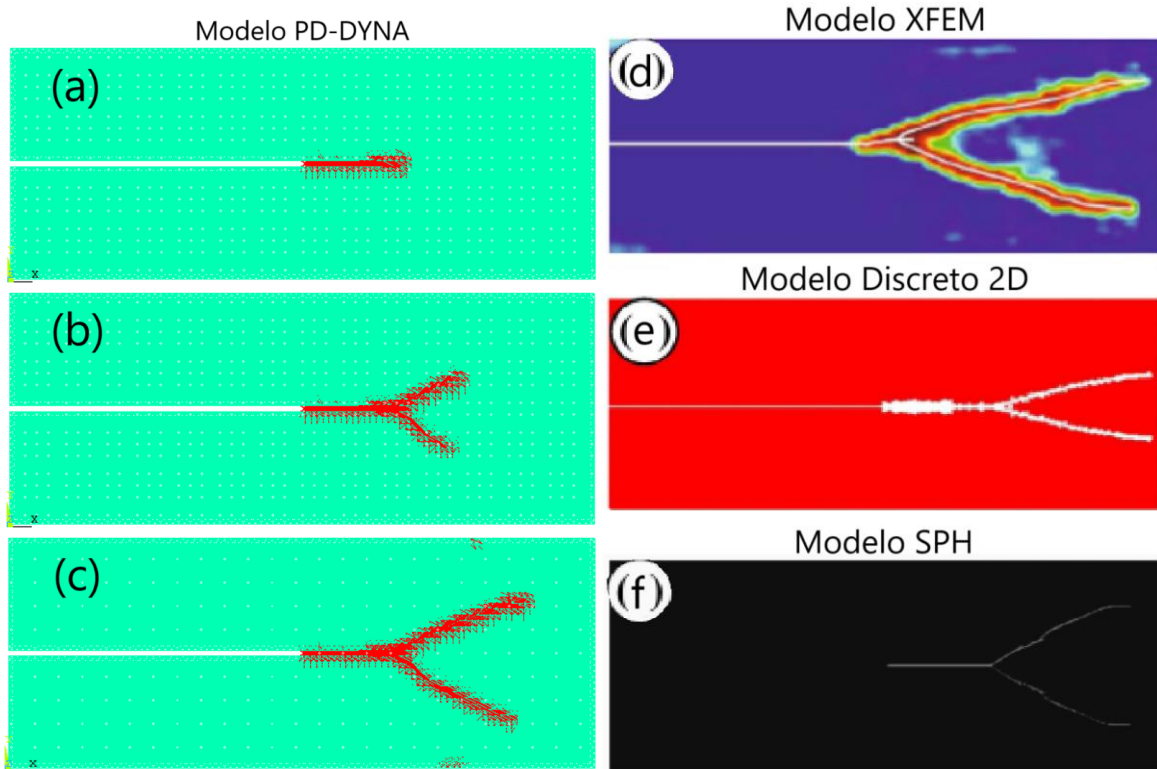
O código desenvolvido também incluiu a capacidade de modelar descontinuidades, como trincas iniciais, permitindo análises detalhadas sobre a propagação de fraturas em materiais submetidos a condições de carregamento específicas. Essa abordagem não apenas agilizou o processo de construção dos modelos, mas também garantiu maior controle sobre as variáveis envolvidas na simulação, proporcionando maior confiabilidade aos resultados obtidos. A seguir, são apresentados os resultados da implementação do método PD-DYNA e da verificação por meio das aplicações descritas na seção anterior.

4.1 Resultados da aplicação I

Na simulação primária da placa de PMMA, utilizando os parâmetros indicados na seção 3.2.1, observa-se, na Figura 13(a)-(c), o desenvolvimento da trinca em três diferentes instantes de tempo. As análises indicam que a fratura se propagou rapidamente, com uma ramificação perceptível ao longo do material. Esse comportamento é explicado pela alta concentração de tensões na ponta da trinca, que facilita o avanço da falha em múltiplas direções, em conformidade com as teorias clássicas de fratura.

A Figura 13(d)-(f) apresenta os padrões de fratura encontrados por outros autores na literatura. Song *et al.* (2008) aplicou o Método dos Elementos Finitos Estendidos (*eXtended Finite Element Method – XFEM*), Braun e Fernández-Sáez (2014) utilizou o método dos Modelos Discretos 2D e, por fim, Islam e Shaw (2020) fez o uso do método da Hidrodinâmica de Partículas Suavizadas (*Smoothed Particle Hydrodynamics - SPH*) com pseudo-molas.

Figura 13 – Resultado da aplicação I no modelo PD-DYNA com tempos de (a) $30 \mu s$, (b) $40 \mu s$ e (c) $50 \mu s$; padrões de fraturas encontrados por (d) Song *et al.*, 2008, (e) Braun e Fernández-Sáez, 2014 e (f) Islam e Shaw, 2020.

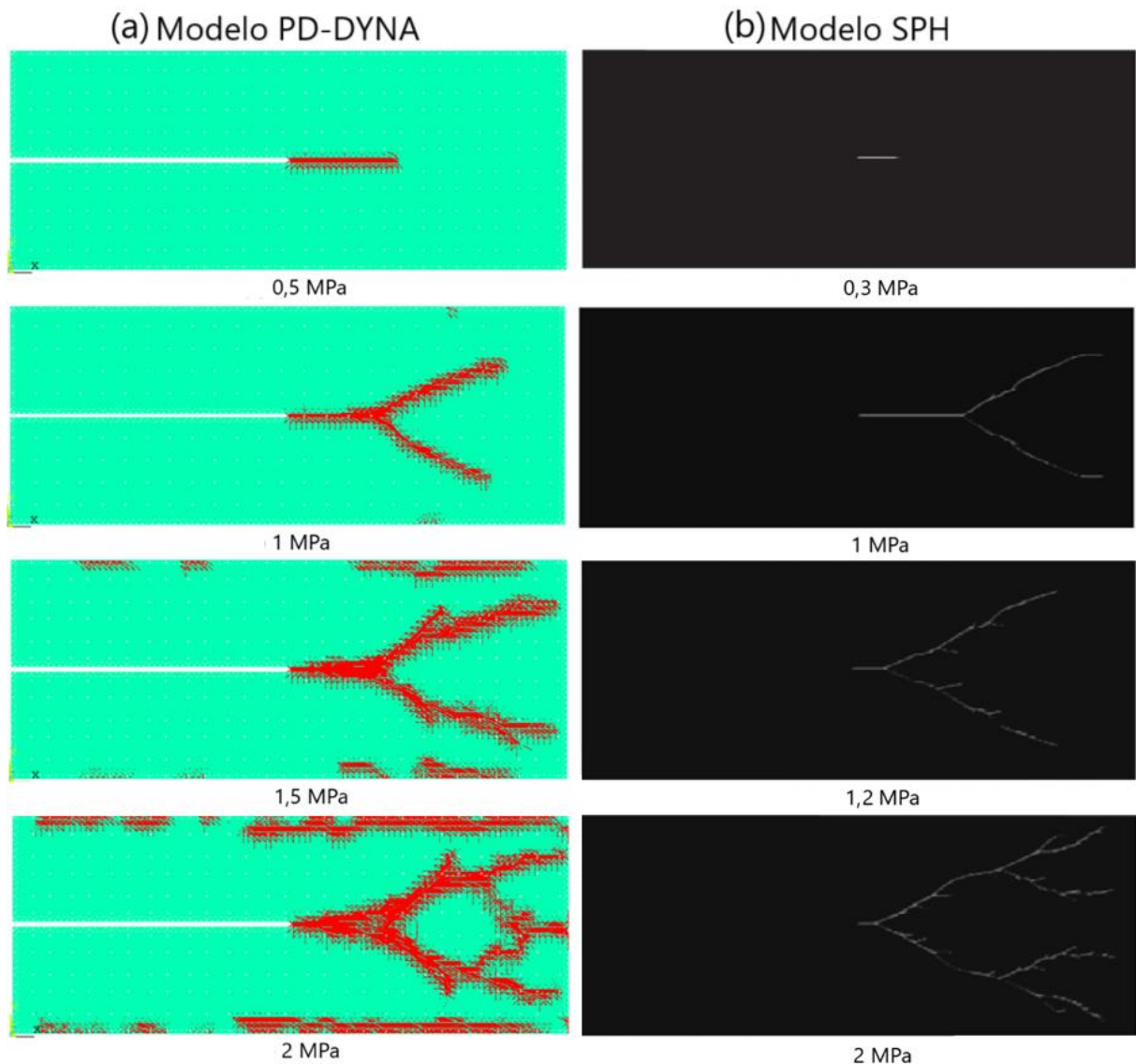


Fonte: Autor (2024).

Pode-se afirmar que os padrões de ramificação final encontrados no PD-DYNA são comparáveis aos demais métodos numéricos utilizados na análise de fratura, o que reforça a confiabilidade e a precisão dos resultados obtidos. Essa similaridade indica que o método implementado não apenas reproduz o comportamento esperado das fraturas em materiais submetidos a tensões específicas, mas também se apresenta como uma ferramenta promissora para análises futuras.

Com o intuito de ampliar e diversificar a verificação dos resultados, na aplicação I ainda foi realizada uma análise adicional, considerando diferentes níveis de tensão aplicados à amostra. Essa abordagem visou avaliar como variações nos carregamentos impactam os padrões de propagação e ramificação da fratura. Os resultados, ilustrados na Figura 14, demonstram que o PD-DYNA mantém consistência na reprodução dos padrões de fratura mesmo em cenários de carregamento variados.

Figura 14 – (a) Resultado da aplicação I com variação das cargas aplicadas no PD-DYNA; (b) padrões encontrados por Islam e Shaw, 2020.



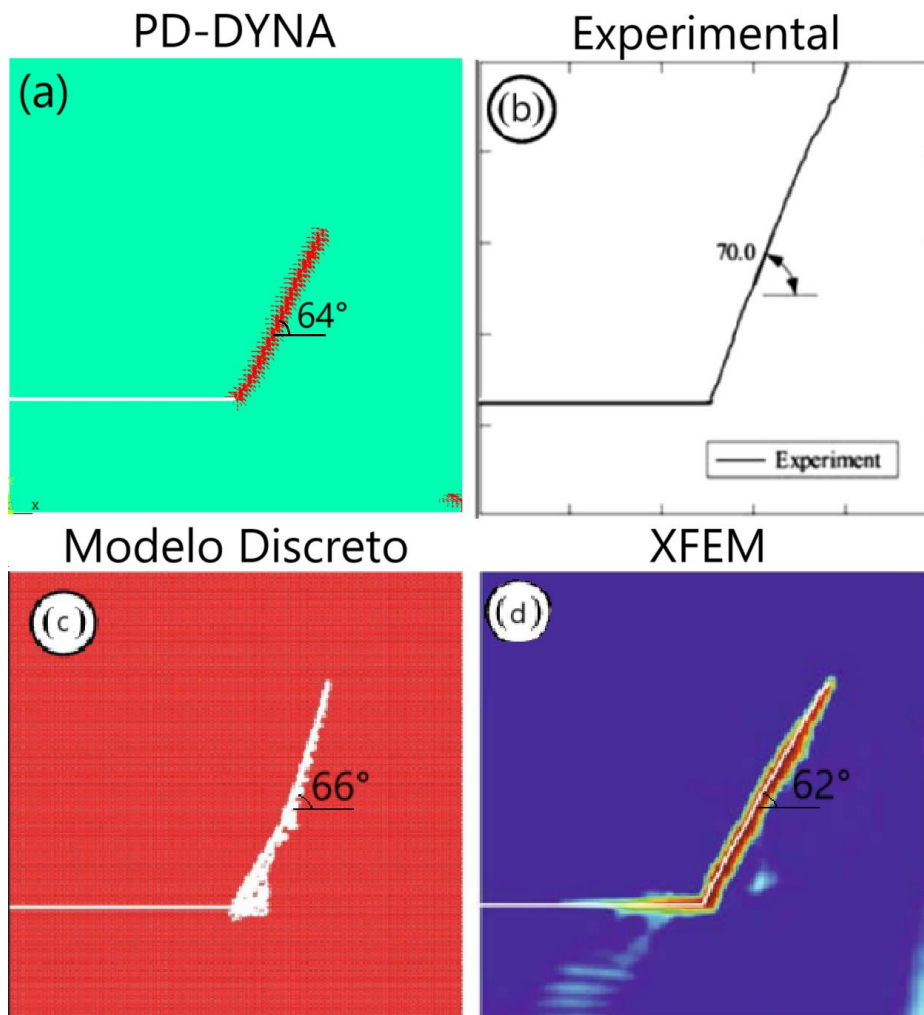
Fonte: Autor (2024).

Com uma tensão de 0,5 MPa, observa-se que a trinca se propaga linearmente sem ramificação significativa, indicando uma propagação controlada e uniforme. Por outro lado, para tensões de 1,5 MPa e 2 MPa, ocorrem ramificações mais extensas, com trajetórias mais complexas. Esse comportamento reflete a sensibilidade da propagação da trinca à magnitude das cargas aplicadas. Pode-se afirmar que os resultados estão de acordo com os de Islam e Shaw (2020) em que, com a placa de PMMA e valores de carga semelhantes, também foi verificada a influência da tensão nesta aplicação.

4.2 Resultados da aplicação II

A simulação da aplicação II, descrita na seção 3.2.2, com o método PD-DYNA (Figura 15(a)) apresentou um ângulo de propagação similar ao comportamento esperado com base em resultados experimentais disponíveis na literatura (Figura 15(b)). Após atingir o limite de resistência à tração, a trinca seguiu um ângulo médio de aproximadamente 64° , um padrão que pode ser considerado próximo ao observado em experimentos, como os de Kalthoff e Winkler (1988). Esse alinhamento sugere que o PD-DYNA é adequado para modelar cenários como este, de fraturas sob cargas impulsivas.

Figura 15 – (a) Resultado da aplicação II com PD-DYNA; (b) resultados experimentais de Kalthoff e Winkler, 1988; resultados numéricos de (c) Braun e Fernández-Sáez, 2014 e (d) Song *et al.*, 2008.



Fonte: Autor (2024).

A Figura 15(c)-(d) mostra os resultados numéricos encontrados na literatura referentes a este problema. Mais precisamente, em Braun e Fernández-Sáez (2014) um modelo discreto 2D foi utilizado, enquanto Song *et al.* (2008) empregou o modelo XFEM.

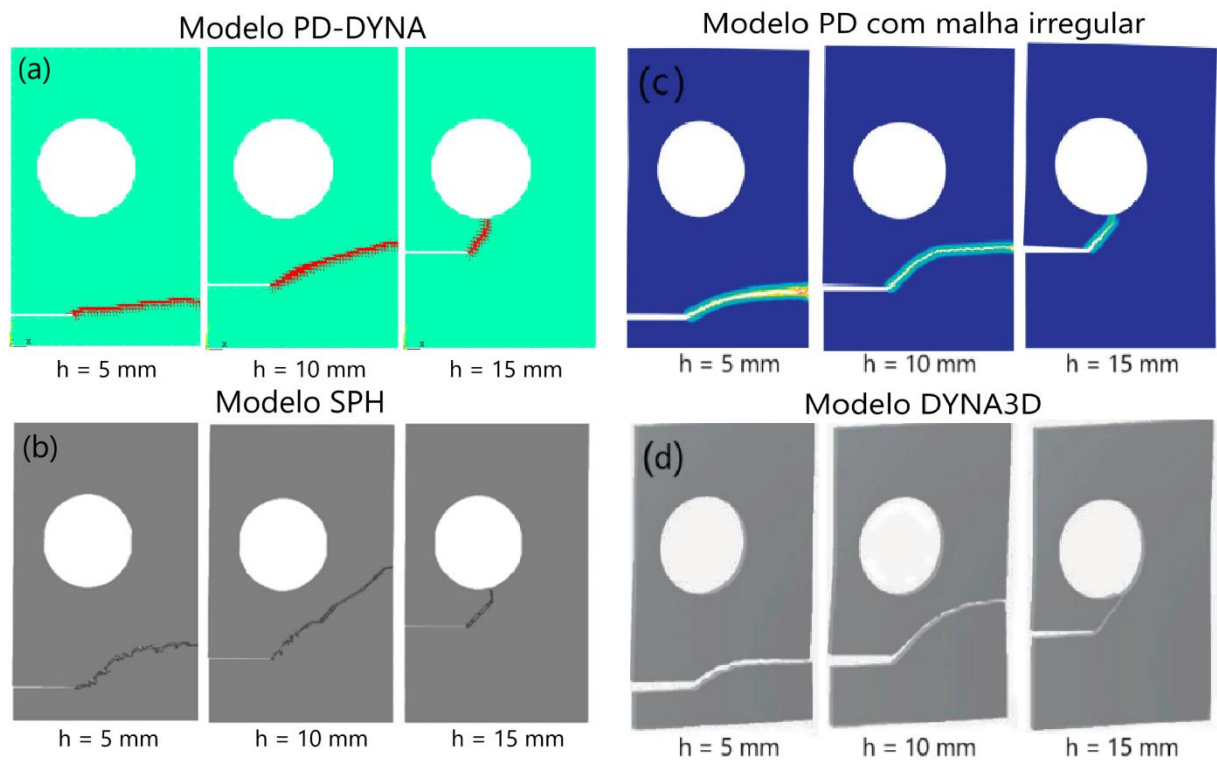
O ângulo médio aproximado de inclinação da trinca foi calculado para o modelo PD-DYNA e cada um dos outros métodos numéricos citados. Estes cálculos foram feitos aproximando as trincas para retas, e com o auxílio da ferramenta de medição de ângulo do software SOLIDWORKS, foram encontrados os ângulos mostrados na Figura 15. Para garantir confiabilidade, verificou-se inicialmente o ângulo do resultado experimental e foi encontrado 69°, sendo este muito próximo do valor esperado de 70°. Apesar de pequenas variações, pode-se considerar que o método está de acordo com os demais modelos numéricos avaliados.

4.3 Resultados da aplicação III

Conforme a literatura, na placa com furo submetida às tensões descritas na seção 3.2.3, a trinca localizada na parte inferior tende a se propagar de forma curvilínea e alcançar o furo apenas quando a distância entre a trinca e o furo é suficientemente curta. Nesses casos, o furo, atuando como um concentrador de tensão, influencia significativamente o comportamento da propagação, como observado na simulação realizada com $h = 15$ mm. Entretanto, em distâncias maiores, o impacto do furo sobre a propagação da trinca diminui drasticamente, e a trinca passa a seguir um caminho inclinado, direcionando-se à extremidade oposta da placa sem interagir diretamente com o furo. Essa diferenciação de comportamentos reforça a influência crítica da distância entre a trinca e o concentrador de tensão no padrão de propagação

A Figura 16 ilustra claramente esses comportamentos observados nas simulações realizadas com o modelo PD-DYNA, permitindo uma comparação direta com padrões apresentados em outros estudos numéricos disponíveis na literatura. Mais especificamente, em (b), o trabalho de Islam e Shaw (2020) empregou o método hidrodinâmico de partículas suavizadas com pseudo-molas. Em (c), Ni *et al.* (2018) utilizou o método peridinâmico com malha irregular de elementos finitos. Por fim, em (d), o estudo conduzido por Tabiei e Wu (2003) empregou o método DYNA3D.

Figura 16 – (a) Resultados da aplicação III com o modelo PD-DYNA; padrões encontrados por (b) Islam e Shaw, 2020, (c) Ni *et al.*, 2018 e (d) Tabiei e Wu, 2003.



Fonte: Autor (2024).

Pode-se observar um padrão semelhante em todos esses estudos, não sendo diferente com o método aplicado neste trabalho, onde se pode ver que a simulação capturou de forma eficaz e precisa a relação entre a trinca e o furo, ou seja, a interação da fratura com concentradores de tensões, reforçando a capacidade do modelo de lidar com problemas com descontinuidades geométricas.

5. CONCLUSÃO

- A implementação do método peridinâmico no ANSYS LS-DYNA demonstrou ser uma abordagem promissora para otimizar a simulação de fraturas em materiais.
- Restringir a aplicação da peridinâmica a áreas com descontinuidades possibilitou representar, de maneira detalhada e confiável, a propagação das trincas, maximizando a eficiência computacional nas simulações.
- Integrar o método com um código desenvolvido em MATLAB foi crucial para automatizar a geração dos modelos peridinâmicos, permitindo ajustes rápidos nos parâmetros e variáveis, e assim, facilitando sua aplicação em diferentes cenários de análise.
- Resultados obtidos confirmaram que o método é capaz de reproduzir, de forma consistente, os comportamentos de fratura nas diferentes aplicações presentes no trabalho, corroborando a robustez e a confiabilidade da abordagem peridinâmica integrada à eficiência do ANSYS LS-DYNA.

6. SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Algumas perspectivas para estudos complementares que valem ser destacadas são:

- Comparações e verificações de forma quantitativa;
- Simulações experimentais para análises comparativas com as aplicações numéricas presentes no trabalho;
- Aplicação do modelo em outros tipos de materiais, como compósitos e heterogêneos que apresentam comportamentos mais complexos de fratura devido às diferentes fases e propriedades anisotrópicas;
- Utilização do método em contextos de fadiga, permitindo prever o crescimento de trincas em ciclos de carregamento prolongados;
- Verificação do método para simulações de fraturas em problemas tridimensionais.

Estes desenvolvimentos, entre outros, aliados com as verificações realizadas neste trabalho, podem colocar o modelo PD-DYNA como uma abordagem de destaque para análises de fratura no contexto da engenharia moderna, contribuindo para a obtenção de soluções seguras e eficientes em diversos projetos estruturais.

7. REFERÊNCIAS

AGWAI, A.; GUVEN, I.; MADENCI, E. Predicting crack propagation with peridynamics: a comparative study. **International Journal of Fracture**, v. 171, p. 65-78, 2011.

ANDERSON, T. L. **Fracture mechanics: fundamentals and applications**. 4. ed. Boca Raton: CRC Press, 2017.

BELYTSCHKO, T.; LIU, W. K.; MORAN, B.; ELKHODARY, K. **Nonlinear finite elements for continua and structures**. 2. ed. John Wiley & Sons, 2014.

BRAUN, M.; FERNÁNDEZ-SÁEZ, J. A new 2D discrete model applied to dynamic crack propagation in brittle materials. **International Journal of Solids and Structures**, v. 51, n. 21-22, p. 3787-3797, 2014.

CABRAL, N. R.; INVALIDI, M. A.; D'AMBRA, R. B.; ITURRIOZ, I. An alternative bilinear peridynamic model to simulate the damage process in quasi-brittle materials. **Engineering Fracture Mechanics**, Elsevier, v. 216, p. 106494, 2019.

GIANNAKEAS, I. N. **Peridynamic and finite element coupling strategies for the simulation of brittle fracture**. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica)—Brunel University London, Londres, 2020.

HEO, J. **Peridynamics and its implementation in finite element framework**. 2019.

HOBBS, M. **Three-dimensional peridynamic modelling of quasi-brittle structural elements**. 2021. Tese de Doutorado.

ISLAM, M. R. I.; SHAW, A. Numerical modelling of crack initiation, propagation and branching under dynamic loading. **Engineering Fracture Mechanics**, v. 224, p. 106760, 2020.

JAVILI, A.; MORASATA, R.; OTERKUS, E.; OTERKUS, S. **Peridynamics review. Mathematics and Mechanics of Solids**, SAGE Publications Sage UK: London, England, v. 24, n. 11, p. 3714–3739, 2019.

KALTHOFF, J. F.; WINKLER, S. Failure mode transition at high rates of shear loading. **DGM Informationsgesellschaft mbH, Impact Loading and Dynamic Behavior of Materials**, v. 1, p. 185-195, 1988.

KOSTESKI, L.; BARRIOS D'AMBRA, R.; ITURRIOZ, I. Crack propagation in elastic solids using the truss-like discrete element method. **International journal of fracture**, v. 174, p. 139-161, 2012.

MADENCI, E.; OTERKUS, E. **Peridynamic theory and its applications**. Springer, 2014.

NI, T.; ZHU, Q. Z.; ZHAO, L. Y.; LI, P. F. Peridynamic simulation of fracture in quasi brittle solids using irregular finite element mesh. **Engineering Fracture Mechanics**, v. 188, p. 320-343, 2018.

SELESON, P; LITTLEWOOD, D. J.; MITCHELL, J. A.; SILLING, S. A. A peridynamic formulation of isotropic linear elasticity. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, v. 61, n. 4, p. 1286-1303, 2013.

SCABBIA, F., ENEA, M. An improved coupling of 3D state-based peridynamics with high-order 1D finite elements to reduce spurious effects at interfaces. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 124, n. 17, p. 3687-3708, 2023.

SILLING, S. A.; ASKARI, E. A mesh free method based on the peridynamic model of solid mechanics. **Computers & structures**, [s. l], v. 83, n. 17-18, p. 1526–1535, Jun. 2005.

SILLING, S. A. Reformulation of elasticity theory for discontinuities and long-range forces. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, Elsevier, v. 48, n. 1, p. 175–209, 2000.

SILVA, P. A. **Uma Implementação do Método Estendido dos Elementos Finitos para Análise de Propagação de Fraturas Bidimensionais**. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil)—Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC-Rio), Rio de Janeiro, 2015.

SONG, J.; BELYTSCHKO, T. Cracking node method for dynamic fracture with finite elements. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 77, n. 3, p. 360-385, 2009.

SONG, J.; WANG, H.; BELYTSCHKO, T. A comparative study on finite element methods for dynamic fracture. **Computational Mechanics**, v. 42, n. 2, p. 239-250, 2008.

TABIEI, A.; WU, J. Development of the DYNA3D simulation code with automated fracture procedure for brick elements. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 57, n. 14, p. 1979-2006, 2003.

ZHANG, N., WU, Y., GU, Q., HUANG, S., SUN, B., DU, R., CHANG, R. Refined three-dimensional simulation of ribbed bar pull-out tests based on an enhanced peridynamic model. **Engineering Structures**, Elsevier, v. 278, p. 115519, 2023.

ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L.; ZHU, J. Z. **The finite element method: its basis and fundamentals**. [S.l.]: Elsevier, 2005.