

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO PAMPA
CURSO DE MATEMÁTICA - LICENCIATURA**

RONALDO SILVA DE OLIVEIRA

**RELAÇÕES ENTRE GRANDEZAS GEOMÉTRICAS NA
ELIPSE: UM ESTUDO A PARTIR DE UMA EQUAÇÃO
PARTICULAR**

**Itaqui
2024**

RONALDO SILVA DE OLIVEIRA

**RELAÇÕES ENTRE GRANDEZAS GEOMÉTRICAS NA
ELIPSE: UM ESTUDO A PARTIR DE UMA EQUAÇÃO
PARTICULAR**

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Curso de Matemática-Licenciatura da Universidade Federal do Pampa, como requisito parcial para a obtenção do Título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Radael de Souza Parolin

**Itaqui
2024**

Ficha catalográfica elaborada automaticamente com os dados fornecidos
pelo(a) autor(a) através do Módulo de Biblioteca do
Sistema GURI (Gestão Unificada de Recursos Institucionais) .

O48r Oliveira, Ronaldo Silva de
Relações entre grandezas geométricas na elipse: um estudo a
partir de uma equação particular / Ronaldo Silva de Oliveira.
59 p.

Trabalho de Conclusão de Curso(Graduação)-- Universidade
Federal do Pampa, MATEMÁTICA, 2024.
"Orientação: Radael de Souza Parolin".

1. Cônicas. 2. Elipse. 3. Relações. 4. Funções. 5. Latus
rectum. I. Título.

RONALDO SILVA DE OLIVEIRA

**RELAÇÕES ENTRE GRANDEZAS GEOMÉTRICAS NA
ELIPSE: UM ESTUDO A PARTIR DE UMA EQUAÇÃO
PARTICULAR**

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Curso de Matemática-Licenciatura da Universidade Federal do Pampa, como requisito parcial para a obtenção do Título de Licenciado em Matemática.

Trabalho de Conclusão de Curso defendido e aprovado em: 12 de julho de 2024.

Banca examinadora:

Documento assinado digitalmente



RADAEI DE SOUZA PAROLIN

Data: 15/08/2024 16:31:43-0300

Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Radael de Souza Parolin
Orientador
Universidade Federal do Pampa

Documento assinado digitalmente



ALISSON DAROS SANTOS

Data: 16/08/2024 14:40:29-0300

Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Alisson Darós Santos
Universidade Federal do Pampa

Documento assinado digitalmente



NEWTON LOEBENS

Data: 15/08/2024 16:59:37-0300

Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Newton Loebens
Universidade Federal do Pampa

RESUMO

As cônicas são curvas estudadas desde a antiguidade, por vários matemáticos, dentre os quais o mais proeminente foi Apolônio de Perga. Na obra Tratado das Seções Cônicas, sua definição de elipse, quando traduzida à linguagem matemática atual, resulta na equação $y^2 = px - \left(\frac{p}{a}\right)x^2$. A partir dessa equação específica, nos questionamos sobre de que maneira se relacionam algebricamente as diferentes grandezas na elipse. Para responder a essa pergunta, traçamos como objetivos: investigar maneiras de representar essas curvas, buscar relações entre parâmetros e grandezas, expressar algebricamente as relações encontradas, analisar as propriedades e comportamentos dessas relações e utilizar o *software* de geometria dinâmica GeoGebra para representá-las graficamente. Listamos 14 elementos da elipse, descritos a partir de três diferentes representações: equação canônica, paramétrica e polar. Foi construído e disponibilizado no repositório on-line do GeoGebra um *applet* contendo a elipse na forma canônica, seus elementos e uma das relações encontradas, como exemplificação. Ao todo, 11 relações da corda focal mínima foram encontradas e analisadas.

Palavras-chave: Cônicas. Elipse. Relações. Funções. Latus rectum.

ABSTRACT

Conics are curves studied since ancient times by several mathematicians, the most prominent of whom was Apollonius of Perga. In the work *Treatise on Conic Sections*, his definition of an ellipse, when translated into current mathematical language, results in the equation $y^2 = px - \left(\frac{p}{a}\right)x^2$. From this specific equation, we asked ourselves how the different quantities in the ellipse are algebraically related. To answer this question, we set out the following objectives: investigate ways of representing these curves, look for relationships between parameters and quantities, algebraically express the relationships found, analyze the properties and behavior of these relationships and use the dynamic geometry software GeoGebra to represent them graphically. We list 14 elements of the ellipse, described using three different representations: canonical, parametric and polar forms. An applet containing the ellipse in canonical form, its elements and, as an example, one of the relationships found, was built and made available in the GeoGebra online repository. In total, 11 relations of the latus rectum were found and analyzed.

Keywords: Conics. Ellipse. Relations. Functions. Latus rectum.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 Lugar geométrico das cônicas	10
Figura 2 Seções cônicas	11
Figura 3 Seções cônicas e as Esferas de Dandelin.....	12
Figura 4 Elipse e as Esferas de Dandelin.....	12
Figura 5 Elementos da elipse	13
Figura 6 Parâmetro θ	15
Figura 7 Elipses com variação de distância foco-diretriz e excentricidade	17
Figura 8 Ilustração de R , α e os pontos originários da elipse (P e P').....	20
Figura 9 Elipse com centro em $C(6,4)$, $a = 5$, $b = 3,25$ e $\alpha = 10^\circ$	22
Figura 10 Segmentos r , s , t e w	24
Figura 11 Translação do eixo polar.....	30
Figura 12 Triângulo referencial da translação polar	31
Figura 13 $c_f(a)$ e suas derivadas para diferentes valores de b	38
Figura 14 $c_f(b)$ e suas derivadas para diferentes valores de a	39
Figura 15 $c_f(c)$, suas derivadas e o ponto I para diferentes valores de b	41
Figura 16 $c_f(c)$ e suas derivadas para diferentes valores de a	42
Figura 17 $c_f(d)$ e suas derivadas para diferentes valores de a	44
Figura 18 $c_f(d)$ e suas derivadas para diferentes valores de b	47
Figura 19 $c_f(A)$ e suas derivadas para diferentes valores de b	48
Figura 20 $c_f(A)$ e suas derivadas para diferentes valores de a	49
Figura 21 $c_f(L)$ e suas derivadas para diferentes valores de b	51
Figura 22 $c_f(L)$ e suas derivadas para diferentes valores de a	53

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	8
2 REVISÃO DE LITERATURA	10
2.1 Cônicas	10
2.2 Elipse	13
2.3 Análise da Bibliografia	17
3 REPRESENTAÇÕES DA ELIPSE ROTACIONADA E COM CENTRO DESLOCADO	22
3.1 Equação Canônica	22
3.2 Equação Paramétrica	26
3.3 Equação Polar	30
4 RELAÇÕES ALGÉBRICAS DA CORDA FOCAL MÍNIMA NA ELIPSE	37
5 CONSIDERAÇÕES FINAIS	54
REFERÊNCIAS	55
APÊNDICE A — RELAÇÕES DA CORDA FOCAL MÍNIMA	58

1 INTRODUÇÃO

As curvas cônicas começaram a ser estudadas ainda na antiguidade. Uma das versões sobre o seu surgimento diz que, por volta de 340 a.C. Menaecmus (pronúncia: Menêcmo) encontrou essas curvas ao tentar resolver o problema da duplicação do cubo.

O problema da duplicação do cubo consistia em, a partir de um cubo de aresta unitária, construir um segmento de reta de comprimento x tal que $x^3 = 2$. Na solução que obteve, Menaecmus fez uso de duas curvas criadas por ele: uma parábola e uma hipérbole. Uma terceira curva dessa família, a elipse, apareceu como subproduto de sua invenção. Se hoje essas curvas são chamadas de seções cônicas, deve-se ao grande matemático grego, pois ele as imaginou seccionando três superfícies cônicas por meio de um plano perpendicular à geratriz da superfície cônica (SILVA, 2018, p. 14-15).

Ao longo da história, grandes matemáticos contribuíram para o estudo e a maturação do conceito de cônicas, como Tales de Mileto, Pitágoras, Euclides de Alexandria, Arquimedes, Pappus de Alexandria. No entanto, o primeiro estudo detalhado e sistemático das cônicas foi desenvolvido por Apolônio de Perga, que enunciou várias propriedades dessas curvas. Suas contribuições influenciaram permanentemente o estudo da geometria e da matemática (SILVA, 2018).

Seu trabalho mais importante, *Tratado das Seções Cônicas* (*Treatise on conic sections*, em inglês), traz definições e demonstrações puramente geométricas de seções planas em um cone de revolução (EUCLIDES, 2009). Em sua obra, o enunciado que define uma elipse, quando traduzido à linguagem matemática atual, descreve uma curva de equação

$$y^2 = px - \left(\frac{p}{a}\right)x^2$$

que tangencia o eixo y no vértice esquerdo, tem eixo focal sobre o eixo x , onde a é o comprimento do segmento focal e p é o comprimento da corda focal mínima. A partir dessa equação, surgiu o questionamento desta pesquisa: de que maneira se relacionam algebricamente as diferentes grandezas na elipse?

Tendo isso em vista, o presente trabalho tem como objetivo buscar relacionar algebricamente as grandezas geométricas da elipse. Para tanto, busca-se investigar diferentes maneiras de representar uma mesma curva; expressar as relações algébricas entre grandezas e parâmetros; estabelecer as características, propriedades e particularidades das relações encontradas; bem como representá-las com auxílio de *software* de geometria dinâmica.

O presente trabalho tem relevância por investigar relações geométricas e algébricas pouco exploradas na literatura. Nesse sentido, foi escolhido o *software* GeoGebra, pois é de acesso livre, dispõe de várias ferramentas e recursos e possibilita explorar, concomitantemente, aspectos geométricos e algébricos das curvas. Através do endereço eletrônico www.geogebra.org pode-se acessar uma plataforma on-line que permite a usuários ao redor do mundo fazer o *upload* de suas construções (*applets*) ou ainda utilizá-la como repositório pessoal. Todos esses recursos oferecidos pelo GeoGebra tem potencial de auxiliar tanto no ensino-aprendizagem como na pesquisa acadêmica em Matemática. Ademais, a escolha também se deu por interesse pessoal e conhecimento empírico do *software*, pois desde o início da graduação, o GeoGebra e a manipulação a partir da geometria dinâmica sempre instigaram minha curiosidade e acredito que essa espiral de aprendizagem (Valente, 2005) me alçou a novos patamares de crescimento profissional e pessoal.

2 REVISÃO DE LITERATURA

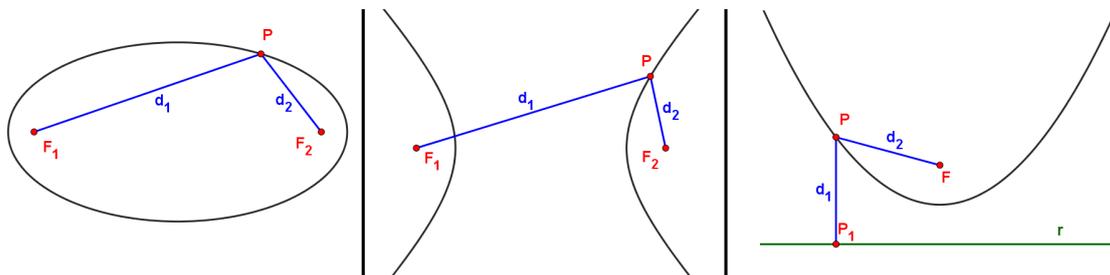
2.1 Cônicas

Segundo Silva (2018), podemos definir as curvas cônicas (elipse, hipérbole e parábola) de três maneiras, listadas abaixo.

Pela geometria plana (Figura 1):

- Elipse: lugar geométrico dos pontos P do plano cuja soma das distâncias até dois pontos F_1 e F_2 , respectivamente d_1 e d_2 , é constante.
- Hipérbole: lugar geométrico dos pontos do plano cuja diferença, em valor absoluto, das distâncias até dois pontos F_1 e F_2 é constante.
- Parábola: lugar geométrico dos pontos do plano cuja distância até um ponto F é igual à distância até uma reta r .

Figura 1 – Lugar geométrico das cônicas

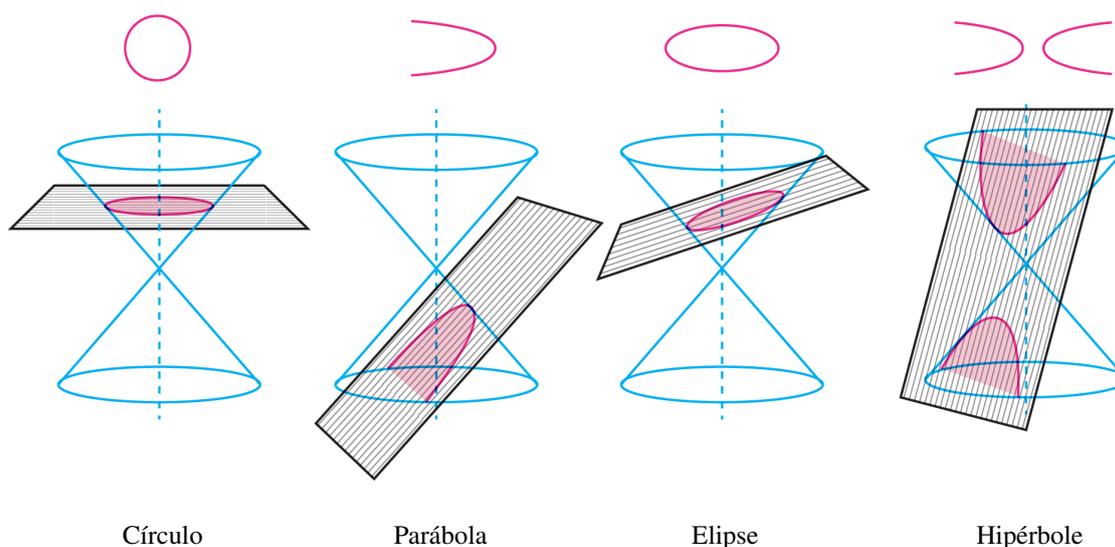


Fonte: do autor (2023).

Pela geometria espacial (Figura 2):

- Elipse: plano corta somente um dos ramos do cone e não é paralelo à geratriz (forma uma figura finita).
- Hipérbole: plano corta os dois ramos do cone; as partes de “baixo” e de “cima” (forma uma figura infinita).
- Parábola: plano corta somente um dos ramos do cone e é paralelo à geratriz (forma uma figura infinita).

Figura 2 – Seções cônicas



Fonte: Pense Vestibular (2019).

Pela geometria analítica, as cônicas são dadas como soluções da seguinte equação polinomial de segundo grau a duas variáveis:

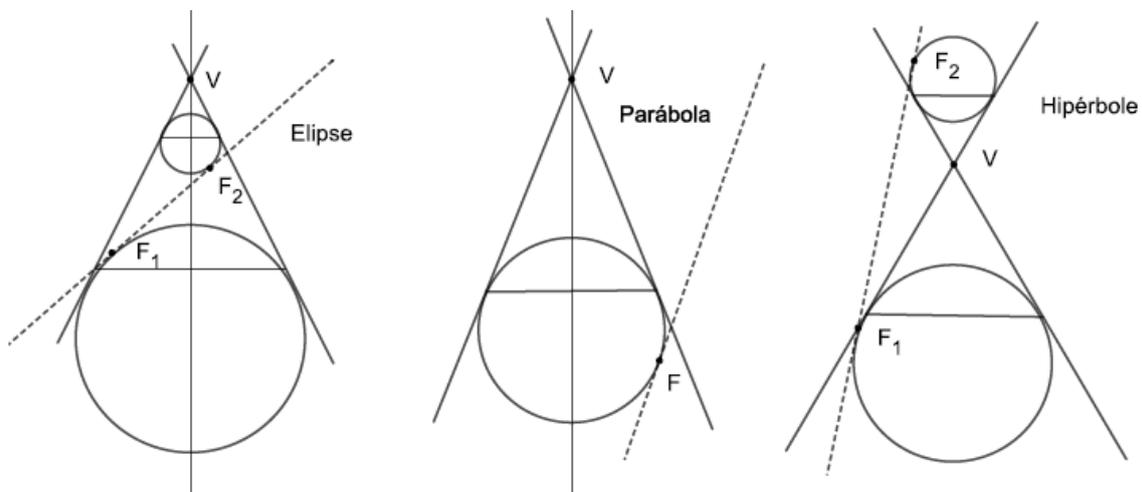
$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0. \quad (1)$$

A equação (1) será completa quando todos os coeficientes A , B , C , D , E e F forem reais e não nulos. Também podemos, a partir da análise das relações entre alguns desses coeficientes, determinar se a equação resulta em uma parábola, em uma hipérbole ou em uma elipse:

- se $B^2 - 4AC = 0$, então a equação (1) descreve uma parábola;
- se $B^2 - 4AC > 0$, então a equação (1) descreve uma hipérbole;
- se $B^2 - 4AC < 0$, então a equação (1) descreve uma elipse.

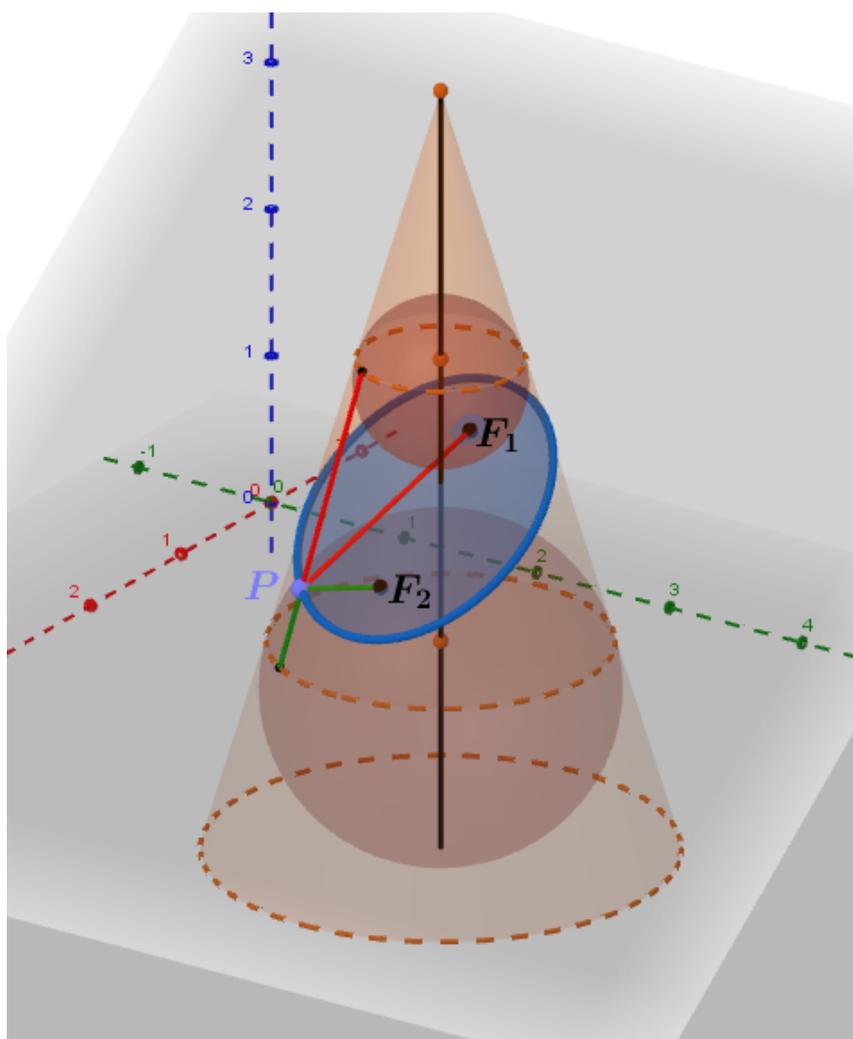
Siqueira e Silva (2017), Barros (2018) e Monteiro (2014) ressaltam o trabalho dos matemáticos belgas Germinal Pierre Dandelin (1794-1847) e Adolphe Quetelet (1796-1874), e do matemático irlandês Pierce Morton (1803-1859), que demonstraram ser possível, a partir de um cone e um plano que o secciona, inserir uma ou duas esferas de tal forma que estas tangenciam ambos. As interseções do plano com o cone formam as seções cônicas, conforme pode ser observado na Figura 3, com destaque da elipse na Figura 4.

Figura 3 – Seções cônicas e as Esferas de Dandelin



Fonte: Barros (2018).

Figura 4 – Elipse e as Esferas de Dandelin



Fonte: do autor (2023).

2.2 Elipse

Sejam F_1 e F_2 pontos distintos, a e c números reais positivos, com $a > c$, tais que $2c = d(F_1, F_2)$ seja a distância entre F_1 e F_2 . O lugar geométrico E dos pontos P tais que

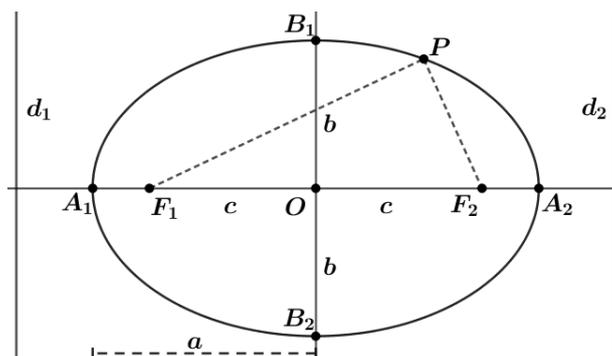
$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$$

chama-se *elipse*.

Ainda, podemos destacar alguns elementos da elipse (Figura 5), como segue:

- os pontos F_1 e F_2 são os *focos*;
- o segmento F_1F_2 é o *segmento focal*;
- o ponto O é o *centro da elipse* e também ponto médio do segmento focal;
- a medida $2c$ é a distância focal;
- a reta F_1F_2 chama-se *reta focal*;
- os pontos A_1 e A_2 são os *vértices principais*, interseções da elipse com a reta focal;
- o segmento cujas extremidades são os vértices principais mede $2a$ e é chamado de *eixo maior* ou *eixo principal*;
- os pontos B_1 e B_2 são os *vértices secundários*, interseções da elipse com a reta que passa por O e é perpendicular à reta focal;
- o segmento cujas extremidades são os vértices secundários mede $2b = 2\sqrt{a^2 - c^2}$ e é chamado de *eixo menor* ou *eixo secundário*;
- a *excentricidade* e , ou razão de alongamento, é a razão entre a distância focal e a soma das distâncias de um ponto da elipse aos focos, ou seja, $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$;
- qualquer segmento cujas extremidades pertencem a E chama-se *corda*;
- as *retas diretrizes* d_1 e d_2 da elipse são duas retas perpendiculares à reta focal cuja distância ao ponto médio do segmento focal é igual à razão $\frac{a^2}{c} = \frac{a}{e}$.

Figura 5 – Elementos da elipse



Fonte: do autor (2023).

A distância focal da elipse pode ser expressa por $d(F_1, F_2) = 2c$. Tomando o ponto O como sendo a origem, temos que as coordenadas dos focos são $F_1(-c, 0)$ e $F_2(c, 0)$. Seja $P(x, y)$ um ponto genérico pertencente à elipse. Então, é correto afirmar que $d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$. Isso pode ser reescrito como

$$\begin{aligned}\sqrt{(x+c)^2 + (y+0)^2} + \sqrt{(x-c)^2 + (y+0)^2} &= 2a \\ \sqrt{(x+c)^2 + y^2} &= 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.\end{aligned}\quad (2)$$

Elevando ao quadrado ambos os lados da igualdade (2), temos

$$\begin{aligned}(x+c)^2 + y^2 &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2 \\ x^2 + 2cx + c^2 + y^2 &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2 \\ 4cx &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \\ cx &= a^2 - a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \\ -a^2 + cx &= -a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \\ a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} &= a^2 - cx.\end{aligned}\quad (3)$$

Elevando ao quadrado ambos os lados da igualdade (3), temos

$$\begin{aligned}a^2[(x-c)^2 + y^2] &= a^4 - 2a^2cx + c^2x^2 \\ a^2(x^2 - 2cx + c^2 + y^2) &= a^4 - 2a^2cx + c^2x^2 \\ a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 &= a^4 - 2a^2cx + c^2x^2 \\ a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2 &= a^4 + c^2x^2 \\ a^2x^2 - c^2x^2 + a^2y^2 &= a^4 - a^2c^2.\end{aligned}\quad (4)$$

Na igualdade (4), colocando x^2 em evidência no lado esquerdo e a^2 em evidência no lado direito, temos

$$x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).\quad (5)$$

Por definição, $a > c > 0$, logo $a^2 > c^2$ e, conseqüentemente, $a^2 - c^2 > 0$. Considerando $b^2 = a^2 - c^2$ e substituindo em (5), obtemos

$$x^2(b^2) + a^2y^2 = a^2(b^2).\quad (6)$$

Dividindo ambos os lados da igualdade (6) por $a^2b^2 > 0$, temos a equação canônica ou reduzida da elipse, dada por

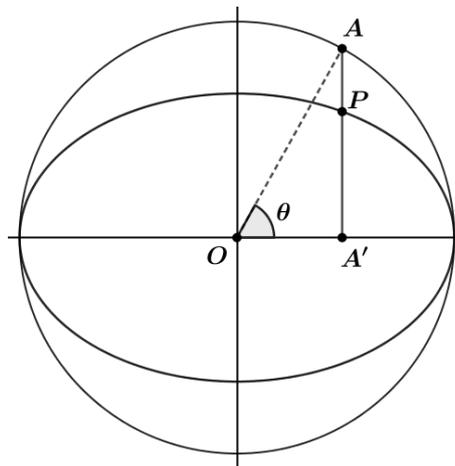
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (7)$$

Se tomarmos o centro da elipse como um ponto genérico $C(x_0, y_0)$ não coincidente com a origem, as coordenadas dos focos serão $F_1(x_0 - c, y_0)$ e $F_2(x_0 + c, y_0)$. Desse modo, a equação acima pode ser reescrita como

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1. \quad (8)$$

Partindo da elipse com centro no ponto $O(0, 0)$ e eixo principal coincidindo com Ox , vamos traçar uma circunferência com centro em O e raio igual à metade do comprimento do eixo principal, ou seja, raio a . Tomando um ponto $P(x, y)$ pertencente à elipse, traçamos uma reta t paralela ao eixo secundário e que passa por P . Chamaremos de A a interseção de t com a circunferência e A' a interseção de t com a reta focal (Figura 6). No triângulo retângulo OAA' formado, podemos determinar a abscissa do ponto P utilizando relações trigonométricas. Seja θ o ângulo $A'\hat{O}A$. Então:

Figura 6 – Parâmetro θ



Fonte: adaptado de Barros (2018).

$$\cos \theta = \frac{OA'}{OA} \Rightarrow OA' = OA \cdot \cos \theta$$

Mas $OA = a$ e, denotando $OA' = x$, obtemos:

$$x = a \cdot \cos \theta.$$

Para encontrar a ordenada de P podemos substituir o valor de x encontrado na equação canônica da elipse (7):

$$\begin{aligned} \frac{(a \cdot \cos \theta)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 &\Rightarrow \frac{a^2 \cdot \cos^2 \theta}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \\ \cos^2 \theta + \frac{y^2}{b^2} = 1 &\Rightarrow \frac{y^2}{b^2} = 1 - \cos^2 \theta \Rightarrow \\ \frac{y^2}{b^2} = \sin^2 \theta &\Rightarrow y^2 = b^2 \cdot \sin^2 \theta \Rightarrow \\ y &= b \cdot \sin \theta. \end{aligned}$$

Desse modo, qualquer ponto $P(x,y)$ pertencente à elipse pode ser representado a partir do parâmetro $\theta (0 \leq \theta \leq 2\pi)$ pelas equações $x = a \cos \theta$ e $y = b \sin \theta$. Temos, portanto, a forma paramétrica da elipse, dada por

$$\begin{cases} x = a \cos \theta \\ y = b \sin \theta \end{cases} \quad \text{com } 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Tomando o centro da elipse como um ponto genérico $C(x_0, y_0)$, a equação paramétrica será da forma

$$\begin{cases} x = x_0 + a \cos \theta \\ y = y_0 + b \sin \theta \end{cases} \quad \text{com } 0 \leq \theta \leq 2\pi. \quad (9)$$

Considerando-se o sistema de coordenadas polares (r, θ) , temos a equação da elipse com centro na origem,

$$r = \frac{ab}{\sqrt{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta}} \quad (10)$$

e, com origem em seus focos,

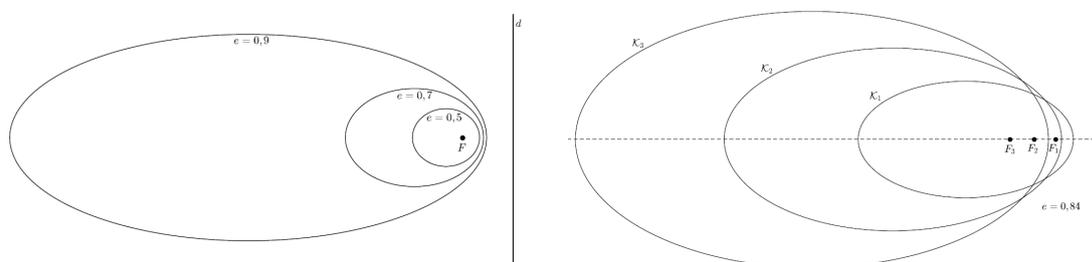
$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \theta} \quad \text{ou} \quad r = \frac{a(1 - e^2)}{1 - e \cos \theta}. \quad (11)$$

2.3 Análise da Bibliografia

Foram realizadas buscas em bibliotecas digitais (Portal de Periódicos CAPES, Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações, Google Acadêmico) utilizando diferentes combinações das palavras “relações”, “grandezas”, “geométricas”, “funções”, “cônicas”, “elipse”. Com o objetivo de relacionar algebricamente grandezas geométricas na elipse, buscou-se por trabalhos que definissem diferentes elementos da curva, tanto relações numéricas como entes geométricos, e que pudessem ser representados com a utilização do GeoGebra. Analisando títulos, resumos e palavras-chave, foram escolhidos 11 trabalhos nessa primeira etapa da pesquisa. Optamos por trabalhos que abordassem, de alguma forma, ou estudos acerca de cônicas, ou relações entre grandezas geométricas, ou como expressar uma grandeza em função de outra.

Garcia (2013) foca seu trabalho na exploração das definições de cônicas: para a parábola, via seção em cone e via foco e diretriz; para a elipse e para a hipérbole, via seção em cone, via foco e diretriz e via distância a focos. Ao longo das definições, o autor destaca várias relações e propriedades secundárias, também abordando a construção geométrica durante esse processo. Constrói e explora as cônicas a partir de três elementos: o foco F , a diretriz d e um número real e , o que nomeia de tripla (F, d, e) . Vale destacar uma manipulação feita a partir da construção geométrica (Figura 7) dos pontos da elipse: com auxílio de recurso digital e objetivando ilustrar o comportamento da curva, o autor construiu uma figura com elipses de distância foco-diretriz fixa e excentricidade variável (lado esquerdo), e outra figura com elipses de excentricidade fixa e distância foco-diretriz variável (lado direito).

Figura 7 – Elipses com variação de distância foco-diretriz e excentricidade



Fonte: Garcia (2013).

Lenz (2014) defende uma abordagem diferente ao ensinar cônicas no Ensino Médio. Ao invés de partir da definição, encontrando uma equação, e, finalmente a curva, sugere que se faça o trajeto na direção oposta. Propõe introduzir o conteúdo com a cons-

trução das curvas a partir de suas propriedades geométricas, utilizando régua não graduada, esquadro e compasso. A autora argumenta que o processo de construir uma figura através do desenho geométrico ensina nos estudantes o desenvolvimento de habilidades de investigação, planejamento e raciocínio, tendo potencial de promover um melhor aprendizado. Após trazer algumas definições prévias (sistema ortogonal, coordenadas, distância entre pontos e de um ponto a uma reta), define cada uma das curvas e apresenta algumas formas de construção geométrica. Em seguida, apresenta a Proposta Didática e um breve relato de experiência de uma aplicação em sala de aula.

Souza (2014) aborda as curvas cônicas retomando o teorema de Apolônio bem como o Teorema de Dandelin. A partir da demonstração do último, são identificadas propriedades geométricas das cônicas. O autor descreve como construir cada uma das cônicas utilizando lápis, cordão, régua e esquadro. Também, demonstra como encontrar a equação da reta tangente à cônica em coordenadas cartesianas. Não menos importante, o autor menciona e explora algumas aplicações de cada uma das cônicas. Por exemplo, a parábola na fabricação de faróis automotivos, a elipse utilizada nas lanternas dos consultórios de dentistas e também o uso de sua propriedade de reflexão acústica em auditórios e galerias, e a hipérbole, utilizada em telescópios de reflexão (dois espelhos: um parabólico e um hiperbólico).

Arenhardt (2016) justifica seu trabalho afirmando que o estudo de cônicas é um assunto muito pouco abordado no Ensino Médio. Traz as definições, contexto histórico, classificações das cônicas, translação e rotação, e como identificar o ângulo de rotação a partir da equação. Com o intuito de que tanto professores quanto alunos interessados possam utilizar o estudo como fonte de referência, também apresenta formas de classificar as cônicas utilizando a Álgebra Linear, com auxílio do *software* GeoGebra.

Lago (2017) resgata a história das cônicas e as diferentes maneiras como elas foram definidas: de Euclides passando por Apolônio até a etimologia moderna. Após generalizar a equação de cada cônica, utiliza o *software* GeoGebra para visualizar o comportamento da curva quando um ou mais parâmetros são fixados e outros estão variando. Finaliza trazendo algumas aplicações de cônicas na engenharia, física e astronomia.

Severiano (2017) aborda o contexto histórico do surgimento das cônicas, dedução da equação geral e suas caracterizações. Propõe um Plano de Aula para cada cônica, consistindo da dedução da fórmula: a partir da seção do cone por um plano; a partir do lugar geométrico; e finalizando a sequência de ensino com os alunos utilizando o *software* GeoGebra para construir as curvas.

Siqueira e Silva (2017) articulam diferentes pontos de vista utilizados para o estudo das cônicas: como lugar geométrico e como corte entre plano e cone. Além de analisarem alguns documentos oficiais sobre o ensino de cônicas, também utilizam os Registros de Representação Semiótica como aporte teórico. Argumentam que o ponto de vista das cônicas como corte entre plano e cone surge a partir das definições dadas por Apolônio. Já o ponto de vista de lugar geométrico, segundo os autores, emprega a propriedade focal (distância entre os pontos) e teria origem nas definições de Platão. Posteriormente, apresentam o ponto de vista da excentricidade (e). Afirmam que a partir desta abordagem é possível um estudo unificado das cônicas, pois agora as três curvas são definidas conforme o valor da excentricidade. Para promover tal estudo, tomam como principal eixo articulador o Teorema de Dandelin, que parte do corte de um cone e encontra uma representação geométrica para a excentricidade (propriedade focal).

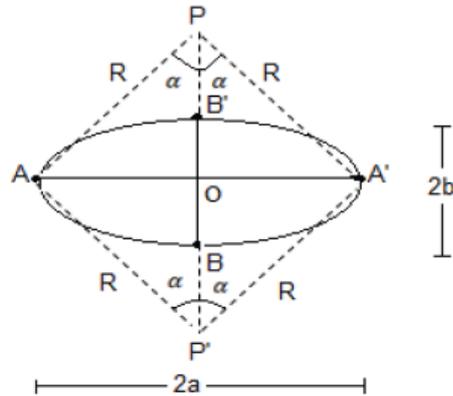
Muniz Junior (2018) traz o Teorema de Dandelin, as definições das cônicas, seus tratamentos analítico e geométrico e também traça suas retas tangentes. Explora as propriedades refletoras de cada uma das curvas, e dedica um capítulo do trabalho para falar sobre aplicações e fenômenos naturais que envolvem as cônicas. Faz uma análise de algumas obras utilizadas para o ensino de cônicas na Educação Básica, argumentando que ao analisar o livro didático é possível ter uma ideia de como se dá a abordagem do conteúdo nas escolas, pois esses materiais ainda são a principal referência dos professores na hora de planejar suas aulas.

Barros (2018) traz o Teorema de Dandelin ao introduzir o estudo das cônicas e, então, a partir da equação geral diferencia as curvas. Elenca todos os seus possíveis conjuntos solução, incluindo a circunferência como uma das cônicas a serem estudadas. Aborda cada uma das quatro curvas de maneira mais minuciosa, definindo-as, listando seus elementos, retas tangentes, construções geométricas, posições relativas entre curva e reta, bem como suas equações cartesianas e polares. Também emprega uma abordagem matricial para rotação do sistema cartesiano e utiliza de autovalores e autovetores para identificar uma cônica.

Silva *et al.* (2020) descrevem duas grandezas na elipse: raio (R) e ângulo característico (α). Para isso, plotam dois pontos P e P' (denominados *pontos originários*) de tal modo que a distância de cada um destes até os vértices principais (A e A') e até o vértice secundário oposto sejam constantes (Figura 8). A essa distância é dado o nome de raio R da elipse, e o ângulo característico α será o ângulo formado entre um vértice principal, um ponto originário e um vértice secundário. Desse modo, temos

$$\overline{P'A} = \overline{P'B'} = \overline{P'A'} = \overline{PA} = \overline{PB} = \overline{PA'}.$$

Figura 8 – Ilustração de R , α e os pontos originários da elipse (P e P')



Fonte: Silva *et al.* (2020).

Baseando-se nessas grandezas, os autores conseguem expressar outras relações na elipse, como:

- a razão entre os eixos da elipse em função do ângulo característico:

$$\frac{a}{b} = \frac{\text{sen } \alpha}{1 - \text{cos } \alpha}; \quad (12)$$

- seno do ângulo característico em função de a e b :

$$\text{sen } \alpha = \frac{2ab}{a^2 + b^2}; \quad (13)$$

- cosseno do ângulo característico em função de a e b :

$$\text{cos } \alpha = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}; \quad (14)$$

- a em função de R e α :

$$a = R \cdot \text{sen } \alpha; \quad (15)$$

- b em função de R e α :

$$b = R \cdot (1 - \text{cos } \alpha); \quad (16)$$

- c em função de R e α :

$$c = R \cdot \sqrt{2 \cdot \text{cos } \alpha (1 - \text{cos } \alpha)} = \sqrt{2bR \cdot \text{cos } \alpha}; \quad (17)$$

- a excentricidade em função de α :

$$e = \sqrt{\frac{2 \cdot \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} \quad \text{ou} \quad e = \sqrt{1 - \left(\tan \left(\frac{\alpha}{2} \right) \right)^2}. \quad (18)$$

Os autores também descrevem dois modos de averiguar se os pontos originários são internos, externos ou pertencentes à elipse:

- se $\alpha > 60^\circ \Rightarrow a < b\sqrt{3}$ e os pontos são *internos*;
- se $\alpha < 60^\circ \Rightarrow a > b\sqrt{3}$ e os pontos são *externos*;
- se $\alpha = 60^\circ \Rightarrow a = b\sqrt{3}$ e os pontos *pertencem à elipse*.

ou

- se $e < \frac{\sqrt{6}}{3}$, os pontos são *internos*;
- se $e > \frac{\sqrt{6}}{3}$, os pontos são *externos*;
- se $e = \frac{\sqrt{6}}{3}$, os pontos *pertencem à elipse*.

Sousa (2020) deduz a equação geral das cônicas partindo da excentricidade e , em função desta, diferenciando as três curvas: elipse, hipérbole e parábola. Daí, segue para a dedução da equação polar, tanto pela excentricidade como pela substituição direta das coordenadas cartesianas pelas polares. Interessante destacar que a autora encontra uma equação da elipse para o caso específico em que um dos focos é a origem e cujos parâmetros são a excentricidade e a diretriz $x = -d$, a saber,

$$\frac{\left(x - \frac{de^2}{(1-e^2)} \right)^2}{\frac{e^2 d^2}{(1-e^2)^2}} + \frac{y^2}{\frac{e^2 d^2}{(1-e^2)}} = 1.$$

A partir de manipulações algébricas dessa equação, podemos reescrevê-la como

$$\frac{[x(1-e^2) - de^2]^2 + y^2(1-e^2)}{(de^2)} = 1$$

ou ainda,

$$\frac{(x+d)^2 e^4 - [2x(x+d) + y^2] e^2 + x^2 + y^2}{(de)^2} = 1.$$

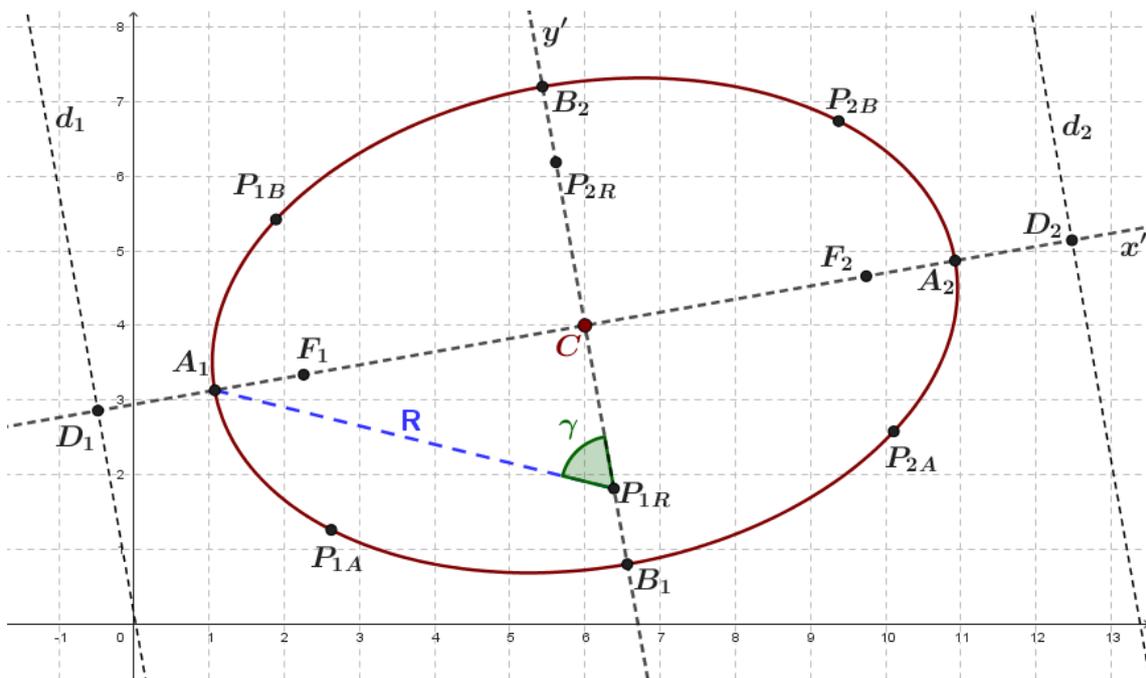
3 REPRESENTAÇÕES DA ELIPSE ROTACIONADA E COM CENTRO DESLOCADO

3.1 Equação Canônica

Sejam $a, b \in \mathbb{R}_+^*$, $C(x_0, y_0)$ um ponto no plano cartesiano xOy e α um ângulo tal que $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$. A equação canônica da elipse com centro em C e rotação α no sentido anti-horário é dada por

$$\frac{[(x - x_0) \cos(\alpha) + (y - y_0) \sin(\alpha)]^2}{a^2} + \frac{[(x - x_0) \sin(\alpha) - (y - y_0) \cos(\alpha)]^2}{b^2} = 1. \quad (19)$$

Figura 9 – Elipse com centro em $C(6,4)$, $a = 5$, $b = 3,25$ e $\alpha = 10^\circ$



Fonte: do autor (2023).

A partir da equação (19), podem ser descritos os seguintes elementos (Figura 9):

- $2c$ é a distância focal, com $c > 0$ tal que

$$c = \begin{cases} \sqrt{a^2 - b^2} & \text{se } a > b \\ \sqrt{b^2 - a^2} & \text{se } a < b; \end{cases}$$

- os eixos ortogonais $x'Cy'$, rotações de xOy por α e com translação para C , tais que

$$\text{reta } x' : (x - x_0) \operatorname{sen} \alpha = (y - y_0) \operatorname{cos} \alpha;$$

$$\text{reta } y' : (x - x_0) \operatorname{cos} \alpha = -(y - y_0) \operatorname{sen} \alpha;$$

- os pontos F_1 e F_2 , focos da elipse, de coordenadas

$$F_1 = \begin{cases} (x_0 - c \cdot \operatorname{cos} \alpha, y_0 - c \cdot \operatorname{sen} \alpha) & \text{se } a > b \\ (x_0 + c \cdot \operatorname{sen} \alpha, y_0 - c \cdot \operatorname{cos} \alpha) & \text{se } a < b; \end{cases}$$

$$F_2 = \begin{cases} (x_0 + c \cdot \operatorname{cos} \alpha, y_0 + c \cdot \operatorname{sen} \alpha) & \text{se } a > b \\ (x_0 - c \cdot \operatorname{sen} \alpha, y_0 + c \cdot \operatorname{cos} \alpha) & \text{se } a < b; \end{cases}$$

- os vértices $A_1, A_2 \in x'$,

$$A_1 = (x_0 - a \cdot \operatorname{cos} \alpha, y_0 - a \cdot \operatorname{sen} \alpha);$$

$$A_2 = (x_0 + a \cdot \operatorname{cos} \alpha, y_0 + a \cdot \operatorname{sen} \alpha);$$

- os vértices $B_1, B_2 \in y'$,

$$B_1 = (x_0 + b \cdot \operatorname{sen} \alpha, y_0 - b \cdot \operatorname{cos} \alpha);$$

$$B_2 = (x_0 - b \cdot \operatorname{sen} \alpha, y_0 + b \cdot \operatorname{cos} \alpha);$$

- as cordas focais mínimas $\overline{P_{1A}P_{1B}}$ e $\overline{P_{2A}P_{2B}}$, perpendiculares ao eixo focal e com pontos médios em F_1 e F_2 , respectivamente, tais que

$$P_{1A} = \begin{cases} (x_0 - c \cdot \operatorname{cos} \alpha + r \cdot \operatorname{sen} \alpha, y_0 - c \cdot \operatorname{sen} \alpha - r \cdot \operatorname{cos} \alpha) & \text{se } a > b \\ (x_0 + c \cdot \operatorname{sen} \alpha - t \cdot \operatorname{cos} \alpha, y_0 - c \cdot \operatorname{cos} \alpha - t \cdot \operatorname{sen} \alpha) & \text{se } a < b; \end{cases}$$

$$P_{1B} = \begin{cases} (x_0 - c \cdot \operatorname{cos} \alpha - r \cdot \operatorname{sen} \alpha, y_0 - c \cdot \operatorname{sen} \alpha + r \cdot \operatorname{cos} \alpha) & \text{se } a > b \\ (x_0 + c \cdot \operatorname{sen} \alpha + t \cdot \operatorname{cos} \alpha, y_0 - c \cdot \operatorname{cos} \alpha + t \cdot \operatorname{sen} \alpha) & \text{se } a < b; \end{cases}$$

$$P_{2A} = \begin{cases} (x_0 + c \cdot \operatorname{cos} \alpha + r \cdot \operatorname{sen} \alpha, y_0 + c \cdot \operatorname{sen} \alpha - r \cdot \operatorname{cos} \alpha) & \text{se } a > b \\ (x_0 - c \cdot \operatorname{sen} \alpha - t \cdot \operatorname{cos} \alpha, y_0 + c \cdot \operatorname{cos} \alpha - t \cdot \operatorname{sen} \alpha) & \text{se } a < b; \end{cases}$$

$$P_{2B} = \begin{cases} (x_0 + c \cdot \cos \alpha - r \cdot \sin \alpha, y_0 + c \cdot \sin \alpha + r \cdot \cos \alpha) & \text{se } a > b \\ (x_0 - c \cdot \sin \alpha + t \cdot \cos \alpha, y_0 + c \cdot \cos \alpha + t \cdot \sin \alpha) & \text{se } a < b; \end{cases}$$

onde:

- se $a > b$, então $r = \overline{F_1 P_{1B}}$, $s = \overline{F_2 P_{1B}}$ e pelo triângulo $F_1 P_{1B} F_2$ (Figura 10, lado esquerdo) valem as igualdades

$$\begin{cases} 2a = r + s \\ s^2 = r^2 + (2c)^2, \end{cases} \quad (20)$$

com solução

$$r = a - \frac{c^2}{a} \quad \text{e} \quad s = a + \frac{c^2}{a};$$

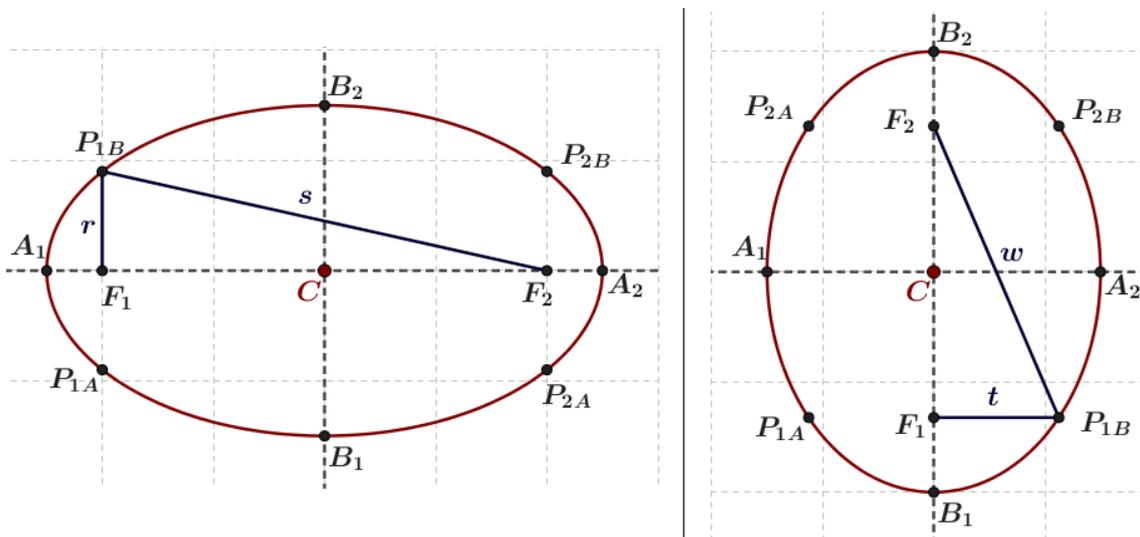
- se $a < b$, então $t = \overline{F_1 P_{1B}}$, $w = \overline{F_2 P_{1B}}$ e pelo triângulo $F_1 P_{1B} F_2$ (Figura 10, lado direito) valem as igualdades

$$\begin{cases} 2b = t + w \\ w^2 = (2c)^2 + t^2, \end{cases} \quad (21)$$

com solução

$$t = b - \frac{c^2}{b} \quad \text{e} \quad w = b + \frac{c^2}{b};$$

Figura 10 – Segmentos r , s , t e w



Fonte: do autor (2023).

- a distância d do ponto C à reta diretriz, com $d > 0$ tal que

$$d = \begin{cases} \frac{a^2}{c} & \text{se } a > b \\ \frac{b^2}{c} & \text{se } a < b; \end{cases} \quad (22)$$

- os pontos D_1 e D_2 , interseções das retas diretrizes com o eixo focal, tais que

$$D_1 = \begin{cases} (x_0 - d \cdot \cos \alpha, y_0 - d \cdot \sin \alpha) & \text{se } a > b \\ (x_0 + d \cdot \sin \alpha, y_0 - d \cdot \cos \alpha) & \text{se } a < b \end{cases}$$

$$D_2 = \begin{cases} (x_0 + d \cdot \cos \alpha, y_0 + d \cdot \sin \alpha) & \text{se } a > b \\ (x_0 - d \cdot \sin \alpha, y_0 + d \cdot \cos \alpha) & \text{se } a < b \end{cases}$$

- as retas diretrizes d_1 e d_2 , perpendiculares ao eixo focal e passando por D_1 e D_2 , respectivamente, tais que

$$\text{reta } d_1 : \begin{cases} (x - x_0) \cos \alpha + d = -(y - y_0) \sin \alpha & \text{se } a > b \\ (x - x_0) \sin \alpha = (y - y_0) \cos \alpha + d & \text{se } a < b; \end{cases}$$

$$\text{reta } d_2 : \begin{cases} (x - x_0) \cos \alpha - d = -(y - y_0) \sin \alpha & \text{se } a > b \\ (x - x_0) \sin \alpha = (y - y_0) \cos \alpha - d & \text{se } a < b; \end{cases}$$

- a área da elipse é $A = \pi ab$;
- o comprimento (perímetro) da elipse é $L = \pi [3(a+b) - \sqrt{(3a+b)(a+3b)}]$;
- o ângulo característico γ tal que

$$\gamma = \arcsen \left(\frac{2ab}{a^2 + b^2} \right);$$

- o raio R tal que

$$R = \begin{cases} \frac{a}{\sin \gamma} & \text{se } a > b \\ \frac{b}{\sin \gamma} & \text{se } a < b; \end{cases}$$

- os pontos originários P_{1R} e P_{2R} tais que

$$P_{1R} = \begin{cases} (x_0 + (R - b) \operatorname{sen} \alpha, y_0 - (R - b) \cos \alpha) & \text{se } a > b \\ (x_0 + (R - a) \cos \alpha, y_0 + (R - a) \operatorname{sen} \alpha) & \text{se } a < b; \end{cases}$$

$$P_{2R} = \begin{cases} (x_0 - (R - b) \operatorname{sen} \alpha, y_0 + (R - b) \cos \alpha) & \text{se } a > b \\ (x_0 - (R - a) \cos \alpha, y_0 - (R - a) \operatorname{sen} \alpha) & \text{se } a < b \end{cases}$$

ou ainda

$$P_{1R} = \begin{cases} (x_0 + \sqrt{R^2 - a^2} \cdot \operatorname{sen} \alpha, y_0 - \sqrt{R^2 - a^2} \cdot \cos \alpha) & \text{se } a > b \\ (x_0 + \sqrt{R^2 - b^2} \cdot \cos \alpha, y_0 + \sqrt{R^2 - b^2} \cdot \operatorname{sen} \alpha) & \text{se } a < b; \end{cases}$$

$$P_{2R} = \begin{cases} (x_0 - \sqrt{R^2 - a^2} \cdot \operatorname{sen} \alpha, y_0 + \sqrt{R^2 - a^2} \cdot \cos \alpha) & \text{se } a > b \\ (x_0 - \sqrt{R^2 - b^2} \cdot \cos \alpha, y_0 - \sqrt{R^2 - b^2} \cdot \operatorname{sen} \alpha) & \text{se } a < b. \end{cases}$$

3.2 Equação Paramétrica

Sejam $a, b \in \mathbb{R}_+^*$, $C(x_0, y_0)$ um ponto no plano cartesiano xOy e α um ângulo tal que $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$. A equação paramétrica da elipse com centro em C e rotação α no sentido anti-horário é dada por

$$\begin{cases} x = x_0 + a \cos \theta \cos \alpha - b \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \alpha \\ y = y_0 + a \cos \theta \operatorname{sen} \alpha + b \operatorname{sen} \theta \cos \alpha \end{cases} \quad \text{com } 0 \leq \theta \leq 2\pi. \quad (23)$$

A partir da equação (23) podem ser descritos os seguintes elementos (Figura 9):

- $2c$ é a distância focal, com $c > 0$ tal que

$$c = \begin{cases} a \cdot \cos \theta_F & \text{se } a > b \\ b \cdot \cos \theta_F & \text{se } a < b \end{cases}$$

onde

- θ_F é um ângulo tal que

$$\theta_F = \begin{cases} \arcsen\left(\frac{b}{a}\right) & \text{se } a > b \\ \arcsen\left(\frac{a}{b}\right) & \text{se } a < b; \end{cases}$$

- os eixos ortogonais $x'Cy'$, rotações de xOy por α e com translação para C , tais que

$$\text{reta } x' : \begin{cases} x = x_0 + \theta \cos \alpha \\ y = y_0 + \theta \sen \alpha \end{cases} \quad \text{com } \theta \in \mathbb{R}$$

e

$$\text{reta } y' : \begin{cases} x = x_0 + \theta \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) \\ y = y_0 + \theta \sen\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) \end{cases} \quad \text{com } \theta \in \mathbb{R};$$

- os pontos F_1 e F_2 , focos da elipse, de coordenadas

$$F_1 = \begin{cases} (x_0 - a \cdot \cos \theta_F \cos \alpha, y_0 - a \cdot \cos \theta_F \sen \alpha) & \text{se } a > b \\ (x_0 + b \cdot \cos \theta_F \sen \alpha, y_0 - b \cdot \cos \theta_F \cos \alpha) & \text{se } a < b; \end{cases}$$

$$F_2 = \begin{cases} (x_0 + a \cdot \cos \theta_F \cos \alpha, y_0 + a \cdot \cos \theta_F \sen \alpha) & \text{se } a > b \\ (x_0 - b \cdot \cos \theta_F \sen \alpha, y_0 + b \cdot \cos \theta_F \cos \alpha) & \text{se } a < b; \end{cases}$$

- os vértices $A_1, A_2 \in x'$,

$$A_1 = (x_0 - a \cdot \cos \alpha, y_0 - a \cdot \sen \alpha);$$

$$A_2 = (x_0 + a \cdot \cos \alpha, y_0 + a \cdot \sen \alpha);$$

- os vértices $B_1, B_2 \in y'$,

$$B_1 = (x_0 + b \cdot \sen \alpha, y_0 - b \cdot \cos \alpha);$$

$$B_2 = (x_0 - b \cdot \sen \alpha, y_0 + b \cdot \cos \alpha);$$

- as cordas focais mínimas $\overline{P_{1A}P_{1B}}$ e $\overline{P_{2A}P_{2B}}$, perpendiculares ao eixo focal e com pontos médios em F_1 e F_2 , respectivamente, tais que

$$P_{1A} = \begin{cases} (x_0 - c \cdot \cos \alpha + \frac{b^2}{a} \cdot \operatorname{sen} \alpha, y_0 - c \cdot \operatorname{sen} \alpha - \frac{b^2}{a} \cdot \cos \alpha) & \text{se } a > b \\ (x_0 + c \cdot \operatorname{sen} \alpha - \frac{a^2}{b} \cdot \cos \alpha, y_0 - c \cdot \cos \alpha - \frac{a^2}{b} \cdot \operatorname{sen} \alpha) & \text{se } a < b; \end{cases}$$

$$P_{1B} = \begin{cases} (x_0 - c \cdot \cos \alpha - \frac{b^2}{a} \cdot \operatorname{sen} \alpha, y_0 - c \cdot \operatorname{sen} \alpha + \frac{b^2}{a} \cdot \cos \alpha) & \text{se } a > b \\ (x_0 + c \cdot \operatorname{sen} \alpha + \frac{a^2}{b} \cdot \cos \alpha, y_0 - c \cdot \cos \alpha + \frac{a^2}{b} \cdot \operatorname{sen} \alpha) & \text{se } a < b; \end{cases}$$

$$P_{2A} = \begin{cases} (x_0 + c \cdot \cos \alpha + \frac{b^2}{a} \cdot \operatorname{sen} \alpha, y_0 + c \cdot \operatorname{sen} \alpha - \frac{b^2}{a} \cdot \cos \alpha) & \text{se } a > b \\ (x_0 - c \cdot \operatorname{sen} \alpha - \frac{a^2}{b} \cdot \cos \alpha, y_0 + c \cdot \cos \alpha - \frac{a^2}{b} \cdot \operatorname{sen} \alpha) & \text{se } a < b; \end{cases}$$

$$P_{2B} = \begin{cases} (x_0 + c \cdot \cos \alpha - \frac{b^2}{a} \cdot \operatorname{sen} \alpha, y_0 + c \cdot \operatorname{sen} \alpha + \frac{b^2}{a} \cdot \cos \alpha) & \text{se } a > b \\ (x_0 - c \cdot \operatorname{sen} \alpha + \frac{a^2}{b} \cdot \cos \alpha, y_0 + c \cdot \cos \alpha + \frac{a^2}{b} \cdot \operatorname{sen} \alpha) & \text{se } a < b; \end{cases}$$

- a distância d do ponto C à reta diretriz, com $d > 0$ tal que

$$d = \begin{cases} \frac{a^2}{c} & \text{se } a > b \\ \frac{b^2}{c} & \text{se } a < b; \end{cases}$$

- os pontos D_1 e D_2 , interseções das retas diretrizes com o eixo focal, tais que

$$D_1 = \begin{cases} (x_0 - d \cdot \cos \alpha, y_0 - d \cdot \operatorname{sen} \alpha) & \text{se } a > b \\ (x_0 + d \cdot \operatorname{sen} \alpha, y_0 - d \cdot \cos \alpha) & \text{se } a < b \end{cases}$$

$$D_2 = \begin{cases} (x_0 + d \cdot \cos \alpha, y_0 + d \cdot \operatorname{sen} \alpha) & \text{se } a > b \\ (x_0 - d \cdot \operatorname{sen} \alpha, y_0 + d \cdot \cos \alpha) & \text{se } a < b \end{cases}$$

- as retas diretrizes d_1 e d_2 , perpendiculares ao eixo focal e passando por D_1 e D_2 , respectivamente, tais que

- se $a > b$:

$$\text{reta } d_1 : \begin{cases} x = x_0 - d \cdot \cos \alpha + \theta \cdot \cos(\alpha + \frac{\pi}{2}) \\ y = y_0 - d \cdot \operatorname{sen} \alpha + \theta \cdot \operatorname{sen}(\alpha + \frac{\pi}{2}) \end{cases} \quad \text{com } \theta \in \mathbb{R};$$

$$\text{reta } d_2 : \begin{cases} x = x_0 + d \cdot \cos \alpha + \theta \cdot \cos(\alpha + \frac{\pi}{2}) \\ y = y_0 + d \cdot \operatorname{sen} \alpha + \theta \cdot \operatorname{sen}(\alpha + \frac{\pi}{2}) \end{cases} \quad \text{com } \theta \in \mathbb{R};$$

- se $a < b$:

$$\text{reta } d_1 : \begin{cases} x = x_0 + d \cdot \text{sen } \alpha + \theta \cdot \text{cos } \alpha \\ y = y_0 - d \cdot \text{cos } \alpha + \theta \cdot \text{sen } \alpha \end{cases} \quad \text{com } \theta \in \mathbb{R};$$

$$\text{reta } d_2 : \begin{cases} x = x_0 - d \cdot \text{sen } \alpha + \theta \cdot \text{cos } \alpha \\ y = y_0 + d \cdot \text{cos } \alpha + \theta \cdot \text{sen } \alpha \end{cases} \quad \text{com } \theta \in \mathbb{R};$$

- a área da elipse é $A = \pi ab$;
- o comprimento (perímetro) da elipse é $L = \pi [3(a+b) - \sqrt{(3a+b)(a+3b)}]$;
- o ângulo característico γ tal que

$$\gamma = \arcsen \left(\frac{2ab}{a^2 + b^2} \right);$$

- o raio R tal que

$$R = \begin{cases} \frac{a}{\text{sen } \gamma} & \text{se } a > b \\ \frac{b}{\text{sen } \gamma} & \text{se } a < b; \end{cases}$$

- os pontos originários P_{1R} e P_{2R} tais que

$$P_{1R} = \begin{cases} (x_0 + (R-b) \text{sen } \alpha, y_0 - (R-b) \text{cos } \alpha) & \text{se } a > b \\ (x_0 + (R-a) \text{cos } \alpha, y_0 + (R-a) \text{sen } \alpha) & \text{se } a < b; \end{cases}$$

$$P_{2R} = \begin{cases} (x_0 - (R-b) \text{sen } \alpha, y_0 + (R-b) \text{cos } \alpha) & \text{se } a > b \\ (x_0 - (R-a) \text{cos } \alpha, y_0 - (R-a) \text{sen } \alpha) & \text{se } a < b \end{cases}$$

ou ainda

$$P_{1R} = \begin{cases} (x_0 + \sqrt{R^2 - a^2} \cdot \text{sen } \alpha, y_0 - \sqrt{R^2 - a^2} \cdot \text{cos } \alpha) & \text{se } a > b \\ (x_0 + \sqrt{R^2 - b^2} \cdot \text{cos } \alpha, y_0 + \sqrt{R^2 - b^2} \cdot \text{sen } \alpha) & \text{se } a < b; \end{cases}$$

$$P_{2R} = \begin{cases} (x_0 - \sqrt{R^2 - a^2} \cdot \text{sen } \alpha, y_0 + \sqrt{R^2 - a^2} \cdot \text{cos } \alpha) & \text{se } a > b \\ (x_0 - \sqrt{R^2 - b^2} \cdot \text{cos } \alpha, y_0 - \sqrt{R^2 - b^2} \cdot \text{sen } \alpha) & \text{se } a < b. \end{cases}$$

3.3 Equação Polar

Sejam $a, b \in \mathbb{R}_+^*$, $C(r_0, \theta_0)$ um ponto no plano polar $Or\theta$ e α um ângulo tal que $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$. A equação polar da elipse de pontos $P(r_n, \theta_n)$, com centro em C e rotação α no sentido anti-horário é dada por

$$\begin{cases} r_n = \sqrt{r_0^2 + r_a^2 - 2r_0r_a \cos(\pi + \theta_0 - \theta_a)} \\ \theta_n = \arctan \left[\frac{r_0 \cdot \text{sen } \theta_0 + r_0 \cdot \text{sen } \theta_a}{r_0 \cdot \text{cos } \theta_0 + r_0 \cdot \text{cos } \theta_a} \right] \end{cases} \quad (24)$$

onde (r_a, θ_a) representa a elipse com centro na origem O e rotação α dada pela equação

$$r_a = \frac{ab}{\sqrt{a^2 \text{sen}^2(\theta_a - \alpha) + b^2 \text{cos}^2(\theta_a - \alpha)}} \quad (25)$$

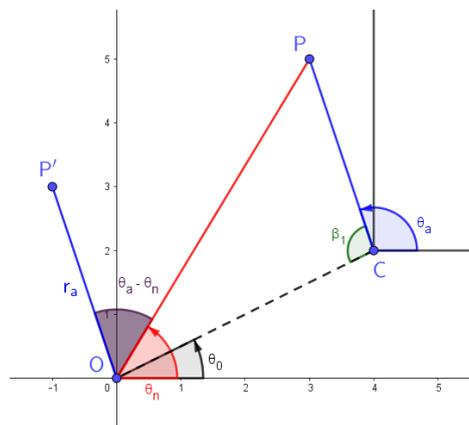
As deduções foram obtidas utilizando-se principalmente a lei dos senos (Eq. 26) e a lei dos cossenos (Eq. 27). Dado um triângulo de lados a , b e c e ângulos \hat{A} , \hat{B} e \hat{C} , temos as seguintes relações:

$$\frac{a}{\text{sen } \hat{A}} = \frac{b}{\text{sen } \hat{B}} = \frac{c}{\text{sen } \hat{C}} \quad (26)$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \text{cos } \hat{C}. \quad (27)$$

Com o objetivo de encontrar uma elipse E_n de pontos P centrada em C e com rotação α , tomamos como referência a elipse E_a de pontos P' centrada na origem (Eq. 25). Assim, temos o raio r_n e o ângulo θ_n da elipse E_n , o raio r_a e o ângulo θ_a da elipse E_a , além do raio r_0 e o ângulo θ_0 do ponto C , conforme Figura 11.

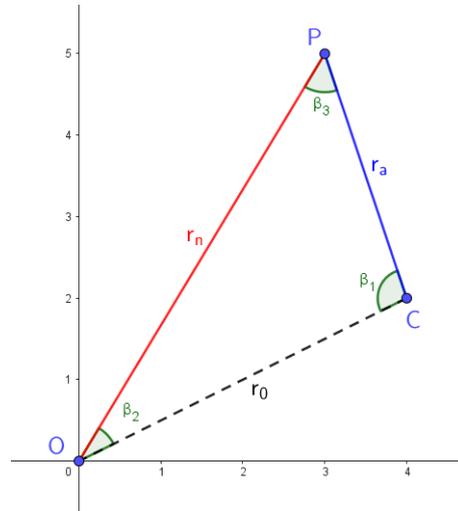
Figura 11 – Translação do eixo polar



Fonte: do autor (2024).

Tomando o triângulo OCP com os lados r_0 , r_a e r_n temos os ângulos $\beta_1 = \pi + \theta_0 - \theta_a$, $\beta_2 = \theta_n - \theta_0$ e $\beta_3 = \theta_a - \theta_n$ (Figuras 11 e 12). Com o uso da lei dos cossenos é obtido r_n e a partir de $\tan(\theta_n)$ é obtido θ_n da Eq. (24) (Silva, 2016).

Figura 12 – Triângulo referencial da translação polar



Fonte: do autor (2024).

Considerando a lei dos senos, temos ainda as relações

$$\frac{r_n}{\text{sen } \beta_1} = \frac{r_a}{\text{sen } \beta_2} = \frac{r_0}{\text{sen } \beta_3}$$

das quais é possível obter outras duas expressões para θ_n ,

$$\theta_n = \theta_0 + \arcsen \left[\frac{r_a \cdot \text{sen}(\pi + \theta_0 - \theta_a)}{r_n} \right]$$

ou

$$\theta_n = \theta_a - \arcsen \left[\frac{r_0 \cdot \text{sen}(\pi + \theta_0 - \theta_a)}{r_n} \right].$$

A partir da equação (24) podem ser descritos os seguintes elementos (Figura 9):

- $2c$ é a distância focal, com $c > 0$ tal que

$$c = \begin{cases} \sqrt{a^2 - b^2} & \text{se } a > b \\ \sqrt{b^2 - a^2} & \text{se } a < b; \end{cases}$$

- os eixos ortogonais θ'_1 e θ'_2 , rotações de $\theta = 0$ e $\theta = \frac{\pi}{2}$ por α e com translação para

C , tais que

$$\text{reta } \theta'_1 : r = r_0 \cdot \frac{\text{sen}(\theta_0 - \alpha)}{\text{sen}(\alpha + \pi - \theta)}$$

$$\text{reta } \theta'_2 : r = r_0 \cdot \frac{\text{sen}(\theta_0 + \frac{\pi}{2} - \alpha)}{\text{sen}(\alpha + \frac{\pi}{2} - \theta)}$$

As retas foram obtidas a partir da Eq. (26) no triângulo de vértices O (origem), C (centro) e P (um ponto genérico da reta) considerando os lados r e r_0 , ângulos $\hat{C} = \theta_0 - \alpha$ e $\hat{P} = \alpha + \pi - \theta$ para θ'_1 ou $\hat{C} = \theta_0 + \frac{\pi}{2} - \alpha$ e $\hat{P} = \alpha + \frac{\pi}{2} - \theta$ para θ'_2 ;

- os pontos $F_1 = (r_{F1}, \theta_{F1})$ e $F_2 = (r_{F2}, \theta_{F2})$, focos da elipse, de coordenadas

$$F_1 = \begin{cases} \left(\sqrt{r_0^2 + c^2 - 2r_0c \cdot \cos(\theta_0 - \alpha)}, \arcsen \left[\frac{c \cdot \text{sen}(\theta_0 - \alpha)}{r_{F1}} \right] + \theta_0 \right) \\ \text{se } a > b \\ \left(\sqrt{r_0^2 + c^2 - 2r_0c \cdot \cos(\frac{\pi}{2} + \alpha - \theta_0)}, \theta_0 - \arcsen \left[\frac{c \cdot \text{sen}(\frac{\pi}{2} + \alpha - \theta_0)}{r_{F1}} \right] \right) \\ \text{se } a < b; \end{cases}$$

$$F_2 = \begin{cases} \left(\sqrt{r_0^2 + c^2 - 2r_0c \cdot \cos(\pi + \alpha - \theta_0)}, \theta_0 - \arcsen \left[\frac{c \cdot \text{sen}(\pi + \alpha - \theta_0)}{r_{F2}} \right] \right) \\ \text{se } a > b \\ \left(\sqrt{r_0^2 + c^2 - 2r_0c \cdot \cos(\frac{\pi}{2} + \theta_0 - \alpha)}, \arcsen \left[\frac{c \cdot \text{sen}(\frac{\pi}{2} + \theta_0 - \alpha)}{r_{F2}} \right] + \theta_0 \right) \\ \text{se } a < b, \end{cases}$$

considerando o triângulo OCF_1 de lados c , r_{F1} e r_0 , ângulos $\hat{O} = \theta_{F1} - \theta_0$ e $\hat{C} = \theta_0 - \alpha$ se $a > b$ ou ângulos $\hat{O} = \theta_0 - \theta_{F1}$ e $\hat{C} = \frac{\pi}{2} + \alpha - \theta_0$ se $a < b$; o triângulo OCF_2 de lados c , r_{F2} e r_0 , ângulos $\hat{O} = \theta_0 - \theta_{F2}$ e $\hat{C} = \pi + \alpha - \theta_0$ se $a > b$ ou ângulos $\hat{O} = \theta_{F2} - \theta_0$ e $\hat{C} = \frac{\pi}{2} + \theta_0 - \alpha$ se $a < b$;

- os vértices $A_1 = (r_{A1}, \theta_{A1})$, $A_2 = (r_{A2}, \theta_{A2}) \in \theta'_1$,

$$A_1 = \left(\sqrt{r_0^2 + a^2 - 2r_0a \cdot \cos(\theta_0 - \alpha)}, \arcsen \left[\frac{a \cdot \text{sen}(\theta_0 - \alpha)}{r_{A1}} \right] + \theta_0 \right);$$

$$A_2 = \left(\sqrt{r_0^2 + a^2 - 2r_0a \cdot \cos(\pi + \alpha - \theta_0)}, \theta_0 - \arcsen \left[\frac{a \cdot \text{sen}(\pi + \alpha - \theta_0)}{r_{A2}} \right] \right),$$

considerando o triângulo OCA_1 de lados a , r_{A1} e r_0 , ângulos $\hat{O} = \theta_{A1} - \theta_0$ e $\hat{C} = \theta_0 - \alpha$; o triângulo OCA_2 de lados a , r_{A2} e r_0 , ângulos $\hat{O} = \theta_0 - \theta_{A2}$ e $\hat{C} = \pi + \alpha - \theta_0$;

- os vértices $B_1 = (r_{B1}, \theta_{B1}), B_2 = (r_{B2}, \theta_{B2}) \in \theta'_2$,

$$B_1 = \left(\sqrt{r_0^2 + b^2 - 2r_0b \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha - \theta_0\right)}, \theta_0 - \arcsen\left[\frac{b \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha - \theta_0\right)}{r_{B1}}\right] \right);$$

$$B_2 = \left(\sqrt{r_0^2 + b^2 - 2r_0b \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta_0 - \alpha\right)}, \arcsen\left[\frac{b \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta_0 - \alpha\right)}{r_{B2}}\right] + \theta_0 \right),$$

considerando o triângulo OCB_1 de lados b, r_{B1} e r_0 , ângulos $\hat{O} = \theta_0 - \theta_{B1}$ e $\hat{C} = \frac{\pi}{2} + \alpha - \theta_0$; o triângulo OCB_2 de lados b, r_{B2} e r_0 , ângulos $\hat{O} = \theta_{B2} - \theta_0$ e $\hat{C} = \frac{\pi}{2} + \theta_0 - \alpha$;

- as cordas focais mínimas $\overline{P_{1A}P_{1B}}$ e $\overline{P_{2A}P_{2B}}$, perpendiculares ao eixo focal e com pontos médios em F_1 e F_2 , respectivamente, tais que

$$P_{1A} = \begin{cases} \left(\sqrt{r_{F1}^2 + \left(a - \frac{c^2}{a}\right)^2 - 2r_{F1}\left(a - \frac{c^2}{a}\right)\cos\left(\theta_{F1} - \frac{\pi}{2} - \alpha\right)}, \right. \\ \left. \arcsen\left[\frac{(a^2 - c^2)\sin\left(\theta_{F1} - \frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{ar_{P1A}}\right] + \theta_{F1} \right) & \text{se } a > b \\ \left(\sqrt{r_{F1}^2 + \left(b - \frac{c^2}{b}\right)^2 - 2r_{F1}\left(b - \frac{c^2}{b}\right)\cos\left(\theta_{F1} - \alpha\right)}, \right. \\ \left. \arcsen\left[\frac{(b^2 - c^2)\sin\left(\theta_{F1} - \alpha\right)}{br_{P1A}}\right] + \theta_{F1} \right) & \text{se } a < b, \end{cases}$$

considerando o triângulo OF_1P_{1A} de lados $a - \frac{c^2}{a}, r_{F1}$ e r_{P1A} , ângulos $\hat{O} = \theta_{P1A} - \theta_{F1}$ e $\hat{F}_1 = \theta_{F1} - \frac{\pi}{2} - \alpha$ se $a > b$ ou lados $b - \frac{c^2}{b}, r_{F1}$ e r_{P1A} , ângulos $\hat{O} = \theta_{P1A} - \theta_{F1}$ e $\hat{F}_1 = \theta_{F1} - \alpha$ se $a < b$;

$$P_{1B} = \begin{cases} \left(\sqrt{r_{F1}^2 + \left(a - \frac{c^2}{a}\right)^2 - 2r_{F1}\left(a - \frac{c^2}{a}\right)\cos\left(\alpha - \theta_{F1} - \frac{\pi}{2}\right)}, \right. \\ \left. \theta_{F1} - \arcsen\left[\frac{(a^2 - c^2)\sin\left(\alpha - \theta_{F1} - \frac{\pi}{2}\right)}{ar_{P1B}}\right] \right) & \text{se } a > b \\ \left(\sqrt{r_{F1}^2 + \left(b - \frac{c^2}{b}\right)^2 - 2r_{F1}\left(b - \frac{c^2}{b}\right)\cos\left(\pi + \alpha - \theta_{F1}\right)}, \right. \\ \left. \theta_{F1} - \arcsen\left[\frac{(b^2 - c^2)\sin\left(\pi + \alpha - \theta_{F1}\right)}{br_{P1B}}\right] \right) & \text{se } a < b, \end{cases}$$

considerando o triângulo OF_1P_{1B} de lados $a - \frac{c^2}{a}, r_{F1}$ e r_{P1B} , ângulos $\hat{O} = \theta_{F1} - \theta_{P1B}$ e $\hat{F}_1 = \alpha - \theta_{F1} - \frac{\pi}{2}$ se $a > b$ ou lados $b - \frac{c^2}{b}, r_{F1}$ e r_{P1B} , ângulos $\hat{O} = \theta_{F1} - \theta_{P1B}$

e $\hat{F}_1 = \pi + \alpha - \theta_{F1}$ se $a < b$;

$$P_{2A} = \begin{cases} \left(\sqrt{r_{F2}^2 + \left(a - \frac{c^2}{a}\right)^2 - 2r_{F2}\left(a - \frac{c^2}{a}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha - \theta_{F2}\right)}, \right. \\ \left. \theta_{F2} - \arcsen\left[\frac{(a^2 - c^2)\sen\left(\frac{\pi}{2} + \alpha - \theta_{F2}\right)}{ar_{P2A}}\right] \right) & \text{se } a > b \\ \left(\sqrt{r_{F2}^2 + \left(b - \frac{c^2}{b}\right)^2 - 2r_{F2}\left(b - \frac{c^2}{b}\right)\cos(\theta_{F2} - \alpha)}, \right. \\ \left. \arcsen\left[\frac{(b^2 - c^2)\sen(\theta_{F2} - \alpha)}{br_{P2A}}\right] + \theta_{F2} \right) & \text{se } a < b, \end{cases}$$

considerando o triângulo OF_2P_{2A} de lados $a - \frac{c^2}{a}$, r_{F2} e r_{P2A} , ângulos $\hat{O} = \theta_{F2} - \theta_{P2A}$ e $\hat{F}_2 = \frac{\pi}{2} + \alpha - \theta_{F2}$ se $a > b$ ou lados $b - \frac{c^2}{b}$, r_{F2} e r_{P2A} , ângulos $\hat{O} = \theta_{P2A} - \theta_{F2}$ e $\hat{F}_2 = \theta_{F2} - \alpha$ se $a < b$;

$$P_{2B} = \begin{cases} \left(\sqrt{r_{F2}^2 + \left(a - \frac{c^2}{a}\right)^2 - 2r_{F2}\left(a - \frac{c^2}{a}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta_{F2} - \alpha\right)}, \right. \\ \left. \arcsen\left[\frac{(a^2 - c^2)\sen\left(\frac{\pi}{2} + \theta_{F2} - \alpha\right)}{ar_{P2B}}\right] + \theta_{F2} \right) & \text{se } a > b \\ \left(\sqrt{r_{F2}^2 + \left(b - \frac{c^2}{b}\right)^2 - 2r_{F2}\left(b - \frac{c^2}{b}\right)\cos(\pi + \alpha - \theta_{F2})}, \right. \\ \left. \theta_{F2} - \arcsen\left[\frac{(b^2 - c^2)\sen(\pi + \alpha - \theta_{F2})}{br_{P2B}}\right] \right) & \text{se } a < b, \end{cases}$$

considerando o triângulo OF_2P_{2B} de lados $a - \frac{c^2}{a}$, r_{F2} e r_{P2B} , ângulos $\hat{O} = \theta_{P2B} - \theta_{F2}$ e $\hat{F}_2 = \theta_{F2} + \frac{\pi}{2} - \alpha$ se $a > b$ ou lados $b - \frac{c^2}{b}$, r_{F2} e r_{P2B} , ângulos $\hat{O} = \theta_{F2} - \theta_{P2B}$ e $\hat{F}_2 = \pi + \alpha - \theta_{F2}$ se $a < b$;

- a distância d do ponto C à reta diretriz, com $d > 0$ tal que

$$d = \begin{cases} \frac{a^2}{c} & \text{se } a > b \\ \frac{b^2}{c} & \text{se } a < b; \end{cases}$$

- os pontos $D_1 = (r_{D1}, \theta_{D1})$ e $D_2 = (r_{D2}, \theta_{D2})$, interseções das retas diretrizes com o eixo focal, tais que

$$D_1 = \begin{cases} \left(\sqrt{r_0^2 + \frac{a^4}{c^2} - 2r_0 \frac{a^2}{c} \cdot \cos(\theta_0 - \alpha)}, \arcsen \left[\frac{a^2 \cdot \text{sen}(\theta_0 - \alpha)}{cr_{D1}} \right] + \theta_0 \right) \\ \text{se } a > b \\ \left(\sqrt{r_0^2 + \frac{b^4}{c^2} - 2r_0 \frac{b^2}{c} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha - \theta_0\right)}, \theta_0 - \arcsen \left[\frac{b^2 \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha - \theta_0\right)}{cr_{D1}} \right] \right) \\ \text{se } a < b, \end{cases}$$

considerando o triângulo OCD_1 de lados r_0 , $\frac{a^2}{c}$ e r_{D1} , ângulos $\hat{O} = \theta_{D1} - \theta_0$ e $\hat{C} = \theta_0 - \alpha$ se $a > b$ ou lados r_0 , $\frac{b^2}{c}$ e r_{D1} , ângulos $\hat{O} = \theta_0 - \theta_{D1}$ e $\hat{C} = \frac{\pi}{2} + \alpha - \theta_0$ se $a < b$.

$$D_2 = \begin{cases} \left(\sqrt{r_0^2 + \frac{a^4}{c^2} - 2r_0 \frac{a^2}{c} \cdot \cos(\pi + \alpha - \theta_0)}, \theta_0 - \arcsen \left[\frac{a^2 \cdot \text{sen}(\pi + \alpha - \theta_0)}{cr_{D2}} \right] \right) \\ \text{se } a > b \\ \left(\sqrt{r_0^2 + \frac{b^4}{c^2} - 2r_0 \frac{b^2}{c} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta_0 - \alpha\right)}, \arcsen \left[\frac{b^2 \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \theta_0 - \alpha\right)}{cr_{D2}} \right] + \theta_0 \right) \\ \text{se } a < b, \end{cases}$$

considerando o triângulo OCD_2 de lados r_0 , $\frac{a^2}{c}$ e r_{D2} , ângulos $\hat{O} = \theta_0 - \theta_{D2}$ e $\hat{C} = \pi + \alpha - \theta_0$ se $a > b$ ou lados r_0 , $\frac{b^2}{c}$ e r_{D2} , ângulos $\hat{O} = \theta_{D2} - \theta_0$ e $\hat{C} = \frac{\pi}{2} + \theta_0 - \alpha$ se $a < b$;

- as retas diretrizes d_1 e d_2 , perpendiculares ao eixo focal e passando por D_1 e D_2 , respectivamente, tais que

$$\text{reta } d_1 : \begin{cases} r = r_{D1} \cdot \frac{\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha - \theta_{D1}\right)}{\text{sen}\left(\theta + \frac{\pi}{2} - \alpha\right)} & \text{se } a > b \\ r = r_{D1} \cdot \frac{\text{sen}(\pi + \alpha - \theta_{D1})}{\text{sen}(\theta - \alpha)} & \text{se } a < b, \end{cases}$$

considerando o triângulo OD_1P (sendo P um ponto genérico da reta) de lados r e r_{D1} , ângulos $\hat{D}_1 = \frac{\pi}{2} + \alpha - \theta_{D1}$ e $\hat{P} = \theta + \frac{\pi}{2} - \alpha$ se $a > b$ ou $\hat{D}_1 = \pi + \alpha - \theta_{D1}$ e $\hat{P} = \theta - \alpha$ se $a < b$;

$$\text{reta } d_2 : \begin{cases} r = r_{D2} \cdot \frac{\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + \alpha - \theta_{D2}\right)}{\text{sen}\left(\theta + \frac{\pi}{2} - \alpha\right)} & \text{se } a > b \\ r = r_{D2} \cdot \frac{\text{sen}(\pi + \alpha - \theta_{D2})}{\text{sen}(\theta - \alpha)} & \text{se } a < b, \end{cases}$$

considerando o triângulo OD_2P (sendo P um ponto genérico da reta) de lados r e r_{D2} , ângulos $\hat{D}_2 = \frac{\pi}{2} + \alpha - \theta_{D2}$ e $\hat{P} = \theta + \frac{\pi}{2} - \alpha$ se $a > b$ ou $\hat{D}_2 = \pi + \alpha - \theta_{D2}$ e

$$\hat{P} = \theta - \alpha \text{ se } a < b;$$

- a área da elipse é $A = \pi ab$;
- o comprimento (perímetro) da elipse é $L = \pi [3(a+b) - \sqrt{(3a+b)(a+3b)}]$;
- o ângulo característico γ tal que

$$\gamma = \arcsen\left(\frac{2ab}{a^2 + b^2}\right);$$

- o raio R tal que

$$R = \begin{cases} \frac{a}{\sen \gamma} & \text{se } a > b \\ \frac{b}{\sen \gamma} & \text{se } a < b; \end{cases}$$

- os pontos originários P_{1R} e P_{2R} tais que

$$P_{1R} = \begin{cases} \left(\left(\sqrt{R^2 + r_{B2}^2 - 2Rr_{B2} \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha - \theta_{B2}\right)}, \right. \right. & \text{se } a > b \\ \left. \left. \theta_{B2} - \arcsen\left[\frac{R \sen\left(\frac{\pi}{2} + \alpha - \theta_{B2}\right)}{r_{P1R}}\right] \right) \right) \\ \left(\left(\sqrt{R^2 + r_{A1}^2 - 2Rr_{A1} \cos(\pi + \alpha - \theta_{A1})}, \right. \right. & \text{se } a < b, \\ \left. \left. \theta_{A1} - \arcsen\left[\frac{R \sen(\pi + \alpha - \theta_{A1})}{r_{P1R}}\right] \right) \right) \end{cases}$$

considerando o triângulo OB_2P_{1R} de lados r_{B2} , R e r_{P1R} , ângulos $\hat{O} = \theta_{B2} - \theta_{P1R}$ e $\hat{B}_2 = \frac{\pi}{2} + \alpha - \theta_{B2}$ se $a > b$; o triângulo OA_1P_{1R} de lados r_{A1} , R e r_{P1R} , ângulos $\hat{O} = \theta_{A1} - \theta_{P1R}$ e $\hat{A}_1 = \pi + \alpha - \theta_{A1}$ se $a < b$;

$$P_{2R} = \begin{cases} \left(\left(\sqrt{R^2 + r_{B1}^2 - 2Rr_{B1} \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta_{B1} - \alpha\right)}, \right. \right. & \text{se } a > b \\ \left. \left. \arcsen\left[\frac{R \sen\left(\frac{\pi}{2} + \theta_{B1} - \alpha\right)}{r_{P2R}}\right] + \theta_{B1} \right) \right) \\ \left(\left(\sqrt{R^2 + r_{A2}^2 - 2Rr_{A2} \cos(\theta_{A2} - \alpha)}, \right. \right. & \text{se } a < b, \\ \left. \left. \arcsen\left[\frac{R \sen(\theta_{A2} - \alpha)}{r_{P2R}}\right] + \theta_{A2} \right) \right) \end{cases}$$

considerando o triângulo OB_1P_{2R} de lados r_{B1} , R e r_{P2R} , ângulos $\hat{O} = \theta_{P2R} - \theta_{B1}$ e $\hat{B}_1 = \frac{\pi}{2} + \theta_{B1} - \alpha$ se $a > b$; o triângulo OA_2P_{2R} de lados r_{A2} , R e r_{P2R} , ângulos $\hat{O} = \theta_{P2R} - \theta_{A2}$ e $\hat{A}_2 = \theta_{A2} - \alpha$ se $a < b$.

4 RELAÇÕES ALGÉBRICAS DA CORDA FOCAL MÍNIMA NA ELIPSE

Ao estabelecer relações entre os elementos da elipse, encontraremos funções tais que um desses elementos será a variável dependente e o outro, a independente. Foi escolhida a corda focal mínima c_f como variável dependente para esta primeira parte da análise. O motivo para tal escolha remete à definição de elipse dada por Apolônio e mencionada na introdução do presente trabalho. A equação resultante, que continha um parâmetro p representando exatamente o comprimento da corda focal mínima, ensejou os questionamentos que culminaram na realização desta pesquisa.

A partir das soluções dos sistemas (20) e (21), temos a relação de c_f com os parâmetros a e b , tal que

$$c_f = \begin{cases} \frac{2b^2}{a} & \text{se } a > b \\ \frac{2a^2}{b} & \text{se } a < b. \end{cases}$$

Tendo em vista que a e b representam o comprimento dos dois eixos da elipse, a alternância de seus valores entre os dois casos listados acima pode ser interpretada como uma rotação da curva, de modo que não são alteradas as relações entre seus elementos. Portanto, é suficiente analisar apenas um dos casos, já que nesse contexto são análogos.

Fixando b e definindo a como variável independente, iniciemos com a análise da função $c_f(a): \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ tal que

$$c_f(a) = \frac{2b^2}{a} \quad (28)$$

onde $a, b \in \mathbb{R}_+^*$.

A condição de existência para essa função é $a \neq 0$, o que já está garantido pelo contexto geométrico do qual a surge. Além disso, devemos considerar a desigualdade $a > b$. Logo,

$$Dom(c_f(a)) = \{a \in \mathbb{R}_+^* \mid a > b\}.$$

Analisando os possíveis valores que $c_f(a)$ assume, temos

$$Im(c_f(a)) = \{c_f(a) \in \mathbb{R}_+^* \mid 0 < c_f(a) < 2b\},$$

pois $a = b \Rightarrow c_f(a) = 2b$. Ainda observa-se uma assíntota horizontal, visto que

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{2b^2}{a} = 0.$$

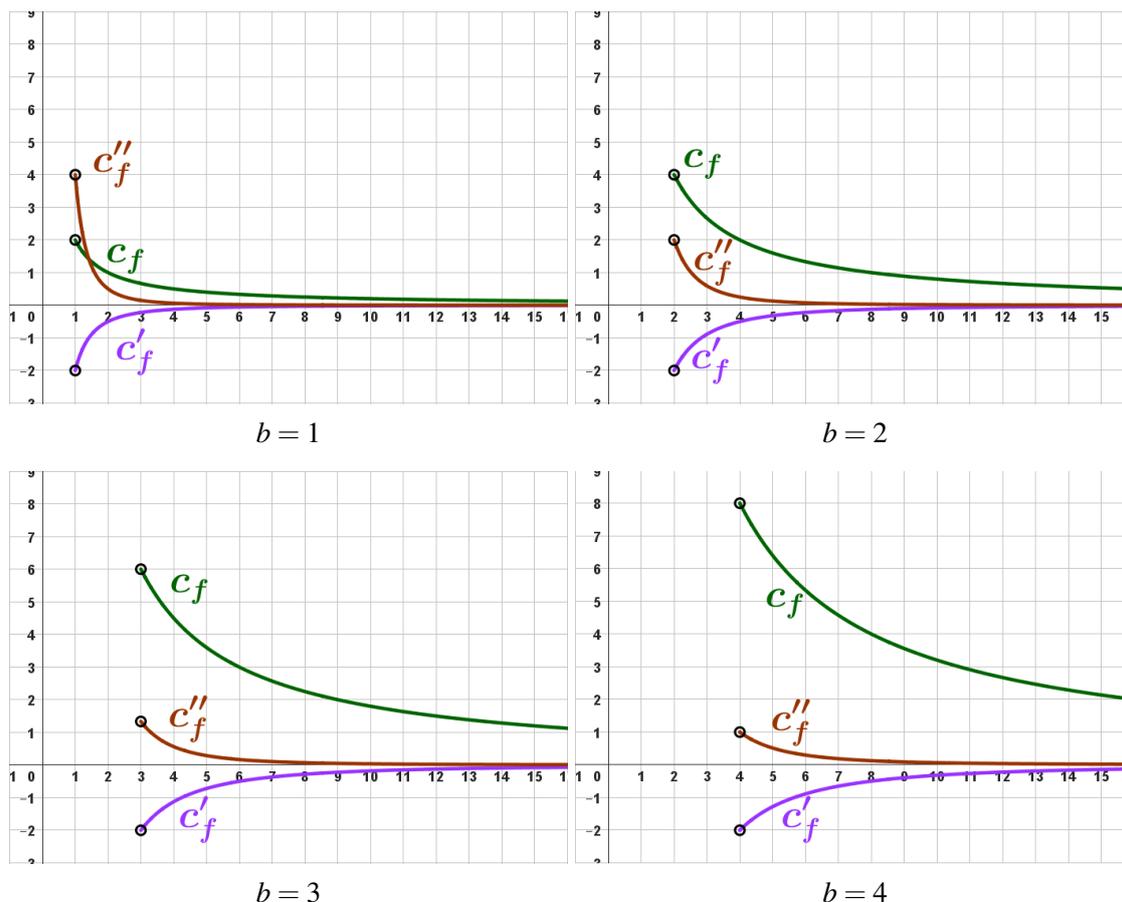
Calculando as derivadas primeira e segunda:

$$c'_f(a) = \frac{d}{da}(c_f(a)) = \frac{d}{da} \left(\frac{2b^2}{a} \right) = \frac{-2b^2}{a^2};$$

$$c''_f(a) = \frac{d^2}{da^2}(c_f(a)) = \frac{d}{da} \left(\frac{-2b^2}{a^2} \right) = \frac{4b^2}{a^3}.$$

Pelo fato de a primeira derivada ser sempre negativa, conclui-se que $c_f(a)$ é uma função decrescente. Já a segunda derivada assume sempre valores positivos, o que indica que $c_f(a)$ tem sua concavidade voltada para cima (Figura 13).

Figura 13 – $c_f(a)$ e suas derivadas para diferentes valores de b



Fonte: do autor (2024).

Fixando a e definindo b como variável independente, faremos a análise da função

$c_f(b): \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ tal que

$$c_f(b) = \frac{2b^2}{a} \quad (29)$$

onde $a, b \in \mathbb{R}_+^*$.

A constante $\frac{2}{a}$ não limita o domínio da função. Porém, considerando a desigualdade $a > b$, segue que

$$\text{Dom}(c_f(b)) = \{b \in \mathbb{R}_+^* \mid 0 < b < a\}.$$

Analisando os possíveis valores que $c_f(b)$ assume, temos

$$\text{Im}(c_f(b)) = \{c_f(b) \in \mathbb{R}_+^* \mid 0 < c_f(b) < 2a\},$$

pois $b = a \Rightarrow c_f(b) = 2a$.

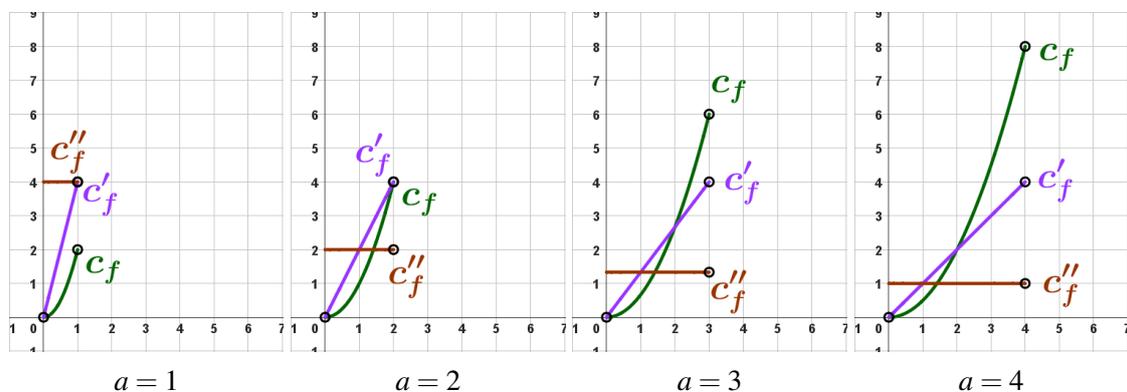
Calculando as derivadas primeira e segunda:

$$c'_f(b) = \frac{4b}{a};$$

$$c''_f(b) = \frac{4}{a}.$$

Tanto a primeira como a segunda derivada de $c_f(b)$ assumem apenas valores positivos. Isso indica que a função é crescente e tem sua concavidade voltada para cima (Figura 14).

Figura 14 – $c_f(b)$ e suas derivadas para diferentes valores de a



Fonte: do autor (2024).

Da equação (28), substituindo $a = \sqrt{b^2 + c^2}$ temos a relação de c_f com o compri-

mento c , dada por

$$c_f = \begin{cases} \frac{2b^2}{\sqrt{b^2 + c^2}} & \text{se } a > b \\ \frac{2a^2}{\sqrt{a^2 + c^2}} & \text{se } a < b. \end{cases}$$

Tomando $c_f(c)$ como o primeiro caso, onde b é fixado e a é variável, temos

$$c_f(c) = \frac{2b^2}{\sqrt{b^2 + c^2}} \quad (30)$$

com $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$.

Visto que $b^2 + c^2 > 0$ e $c > 0$, segue que

$$\text{Dom}(c_f(c)) = \{c \in \mathbb{R}_+^* \mid c > 0\}.$$

Analisando os possíveis valores que $c_f(c)$ assume, temos

$$\text{Im}(c_f(c)) = \{c_f(c) \in \mathbb{R}_+^* \mid 0 < c_f(c) < 2b\}.$$

Ainda observa-se uma assíntota horizontal em $c_f(c) = 0$, visto que

$$\lim_{c \rightarrow +\infty} \frac{2b^2}{\sqrt{b^2 + c^2}} = 0.$$

Calculando as derivadas primeira e segunda:

$$c'_f(c) = \frac{-2b^2c}{\sqrt{(b^2 + c^2)^3}};$$

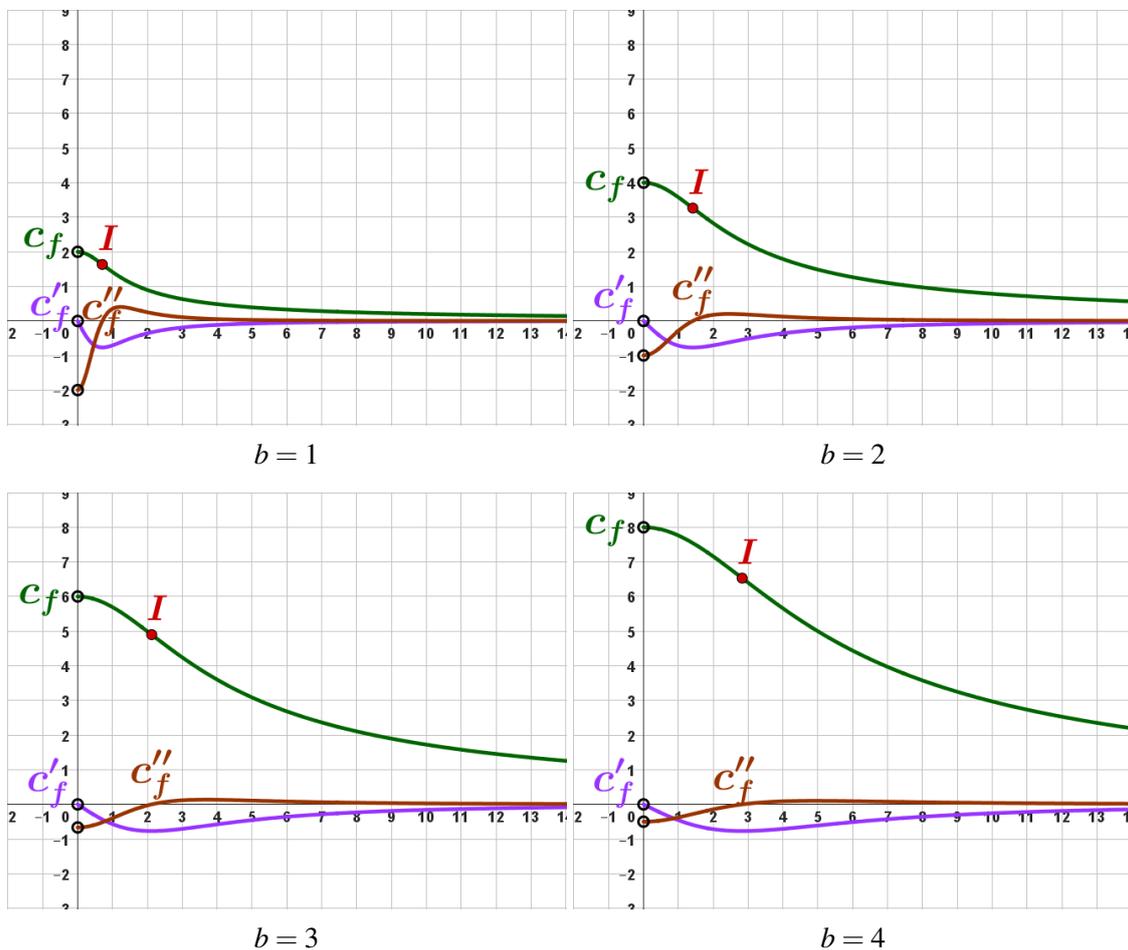
$$c''_f(c) = \frac{-2b^2(b^2 - 2c^2)}{\sqrt{(b^2 + c^2)^5}}.$$

A primeira derivada apresenta sempre valores negativos, indicando que $c_f(c)$ é sempre decrescente. Analisando a segunda derivada, a partir do produto do numerador, é possível identificar que ela assume valores negativos até o ponto

$$I = \left(\frac{b\sqrt{2}}{2}, \frac{2b\sqrt{6}}{3} \right)$$

e então se torna positiva. Conclui-se que $c_f(c)$ tem concavidade voltada para baixo até o ponto de inflexão I , a partir do qual sua concavidade é voltada para cima (Figura 15).

Figura 15 – $c_f(c)$, suas derivadas e o ponto I para diferentes valores de b



Fonte: do autor (2024).

Foi construído um objeto de geometria dinâmica onde é possível manipular a elipse, seus elementos e as três curvas da figura (15). Esse *applet* está disponível no repositório online do GeoGebra através do link <<https://www.geogebra.org/m/wnxne7z2>>.

Das soluções dos sistemas (20) e (21) temos outra relação de c_f com o comprimento c , dada por

$$c_f = \begin{cases} 2a - 2\left(\frac{c^2}{a}\right) & \text{se } a > b \\ 2b - 2\left(\frac{c^2}{b}\right) & \text{se } a < b. \end{cases}$$

Tomando $c_f(c)$ como o primeiro caso, onde a é fixado e b é variável, temos

$$c_f(c) = 2a - 2\left(\frac{c^2}{a}\right) \quad (31)$$

com $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$.

Segue que

$$\text{Dom}(c_f(c)) = \{c \in \mathbb{R}_+^* \mid 0 < c < a\},$$

pois $c = a \Rightarrow c_f(c) = 0$.

Analisando os possíveis valores que $c_f(c)$ assume, temos

$$\text{Im}(c_f(c)) = \{c_f(c) \in \mathbb{R}_+^* \mid 0 < c_f(c) < 2a\}.$$

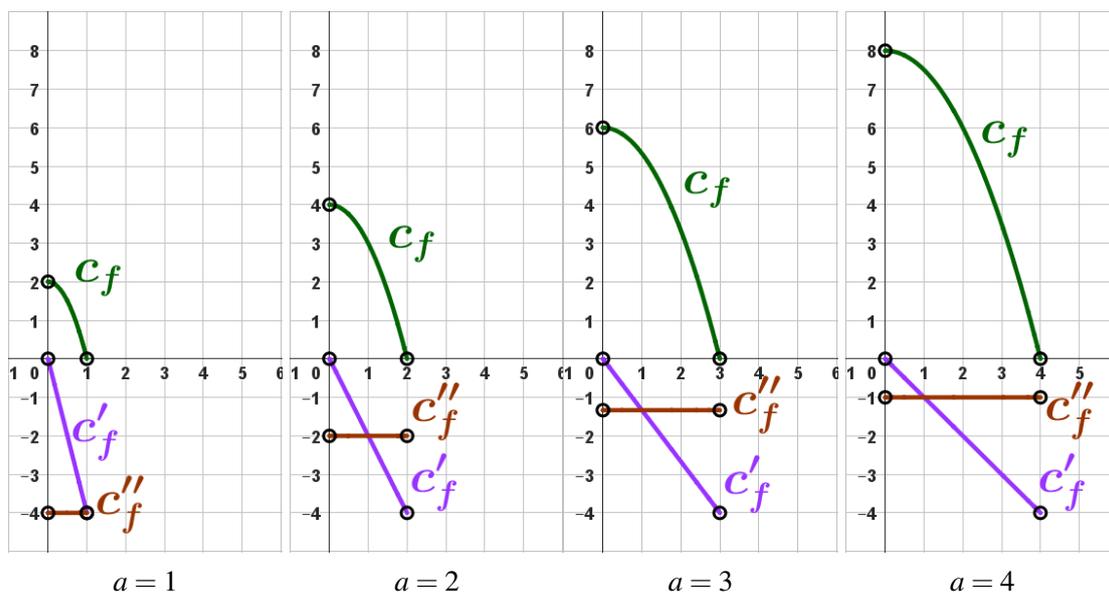
Calculando as derivadas primeira e segunda:

$$c'_f(c) = \frac{-4c}{a};$$

$$c''_f(c) = \frac{-4}{a}.$$

Como a primeira derivada assume sempre valores negativos, conclui-se que $c_f(c)$ é decrescente em todo o intervalo. A segunda derivada também é sempre negativa, o que indica que $c_f(c)$ tem sua concavidade voltada para baixo (Figura 16).

Figura 16 – $c_f(c)$ e suas derivadas para diferentes valores de a



Fonte: do autor (2024).

A partir da equação (31) e com uma manipulação algébrica em (22), temos a relação de c_f com o comprimento d , dada por

$$c_f = \begin{cases} 2a - 2 \left(\frac{a^3}{d^2} \right) & \text{se } a > b \\ 2b - 2 \left(\frac{b^3}{d^2} \right) & \text{se } a < b. \end{cases}$$

Tomando $c_f(d)$ como o primeiro caso, onde a é fixado e b é variável, temos

$$c_f(d) = 2a - 2 \left(\frac{a^3}{d^2} \right) \quad (32)$$

com $a, b, d \in \mathbb{R}_+^*$.

O domínio de $c_f(d)$ é da forma

$$Dom(c_f(d)) = \{d \in \mathbb{R}_+^* \mid d > a\},$$

pois $d = a \Rightarrow c_f(d) = 0$.

Analisando os possíveis valores que a função pode assumir, temos que

$$Im(c_f(d)) = \{c_f(d) \in \mathbb{R}_+^* \mid 0 < c_f(d) < 2a\}.$$

Ainda observa-se uma assíntota horizontal em $c_f(d) = 2a$, visto que

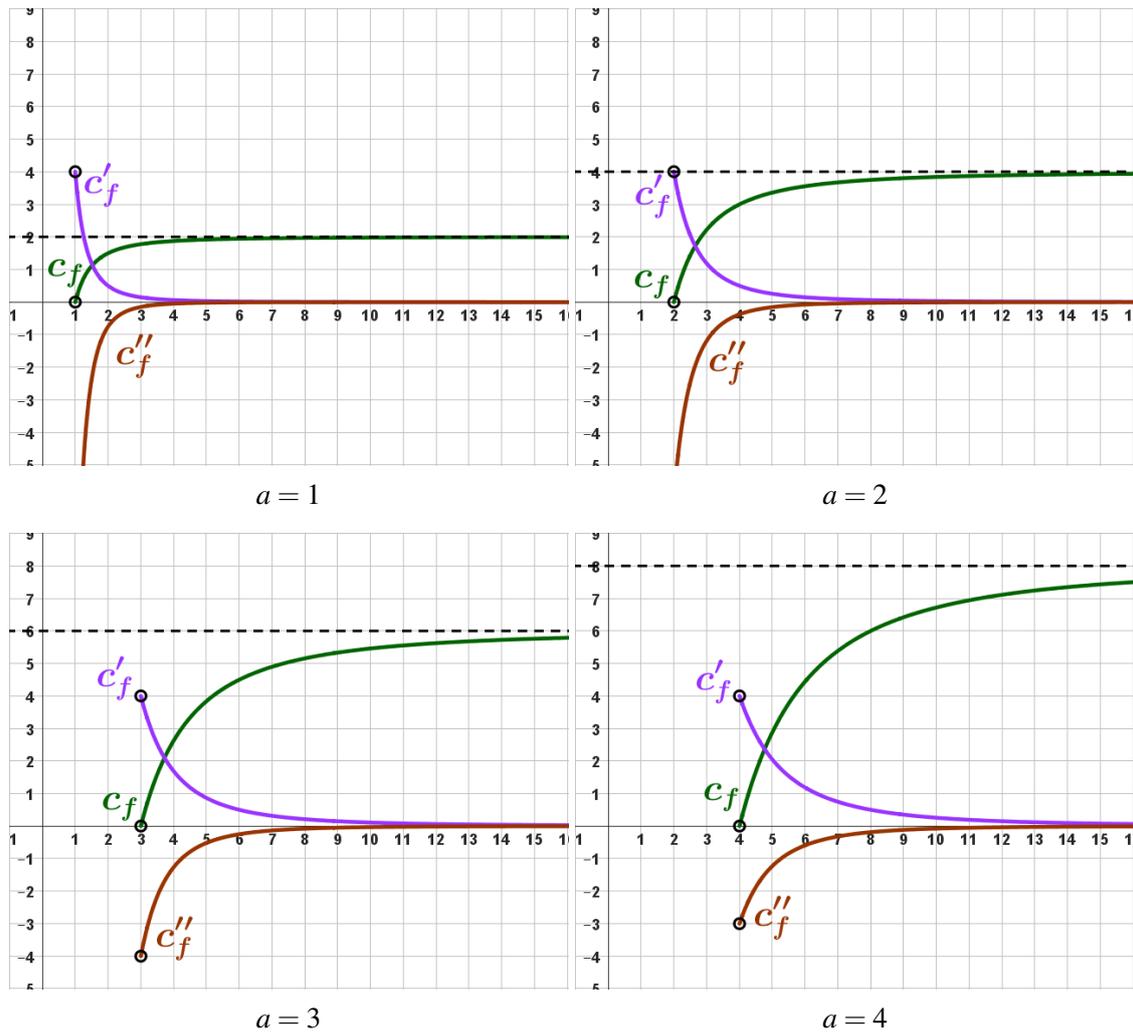
$$\lim_{d \rightarrow +\infty} 2a - 2 \left(\frac{a^3}{d^2} \right) = 2a.$$

Calculando as derivadas primeira e segunda:

$$c'_f(d) = \frac{4a^3}{d^3};$$

$$c''_f(d) = \frac{-12a^3}{d^4}.$$

A primeira derivada é sempre positiva, ou seja, $c_f(d)$ é uma função crescente. Já a segunda derivada é sempre negativa, indicando que $c_f(d)$ tem concavidade voltada para baixo (Figura 17).

Figura 17 – $c_f(d)$ e suas derivadas para diferentes valores de a 

Fonte: do autor (2024).

A partir da equação (28), se isolarmos a e substituirmos em (32) encontramos a equação de 4º grau, com $a > b$,

$$c_f^4 - 4b^2 c_f^2 + \frac{16b^6}{d^2} = 0. \quad (33)$$

Substituindo c_f por $\pm\sqrt{x}$ em (33), a equação é reduzida ao 2º grau. Aplicando a fórmula de Bhaskara e retornando a $c_f = +\sqrt{x}$, já que o contexto geométrico implica $c_f > 0$, é possível encontrar outras duas relações de c_f com o comprimento d , onde b é fixado e a é variável, da forma

$$c_{f1}(d) = b \sqrt{2 \left(1 + \sqrt{1 - \frac{4b^2}{d^2}} \right)} \quad (34)$$

e

$$c_{f_2}(d) = b \sqrt{2 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4b^2}{d^2}} \right)} \quad \text{se } a > b, \quad (35)$$

com $a, b, d \in \mathbb{R}_+^*$.

A condição de existência para ambas as funções depende apenas de $\left(1 - \frac{4b^2}{d^2}\right) > 0$. Tanto c_{f_1} quanto c_{f_2} possuem o mesmo domínio, dado por

$$\text{Dom}(c_f(d)) = \{d \in \mathbb{R}_+^* \mid d > 2b\}.$$

Analisando os possíveis valores que as funções podem assumir, temos que:

- $c_{f_1}(2b) = b\sqrt{2} = c_{f_2}(2b)$;
- Para $c_{f_1}(d)$,

$$\text{Im}(c_{f_1}(d)) = \{c_{f_1}(d) \in \mathbb{R}_+^* \mid b\sqrt{2} < c_{f_1}(d) < 2b\}.$$

Ainda observa-se uma assíntota horizontal em $c_{f_1}(d) = 2b$, visto que

$$\lim_{d \rightarrow +\infty} b \sqrt{2 \left(1 + \sqrt{1 - \frac{4b^2}{d^2}} \right)} = 2b;$$

- Para $c_{f_2}(d)$,

$$\text{Im}(c_{f_2}(d)) = \{c_{f_2}(d) \in \mathbb{R}_+^* \mid 0 < c_{f_2}(d) < b\sqrt{2}\}.$$

Ainda observa-se uma assíntota horizontal em $c_{f_2}(d) = 0$, visto que

$$\lim_{d \rightarrow +\infty} b \sqrt{2 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4b^2}{d^2}} \right)} = 0.$$

Calculando as derivadas primeira e segunda, obtidas com auxílio dos *softwares* Geogebra (International GeoGebra Institute, 2024) e WolframAlpha (Wolfram Alpha, 2024), e com as devidas simplificações, temos

$$c'_{f1}(d) = \frac{2\sqrt{2}b^3}{d^3 \sqrt{\left(1 - \frac{4b^2}{d^2}\right) \left(1 + \sqrt{1 - \frac{4b^2}{d^2}}\right)}};$$

$$c''_{f1}(d) = \frac{-\sqrt{2}b^3 \left[3 \left(1 - \frac{4b^2}{d^2}\right) + \left(1 + \sqrt{1 - \frac{4b^2}{d^2}}\right) + 1 \right]}{d^4 \sqrt{\left(1 - \frac{4b^2}{d^2}\right)^3 \left(1 + \sqrt{1 - \frac{4b^2}{d^2}}\right)}};$$

$$c'_{f2}(d) = \frac{-2\sqrt{2}b^3}{d^3 \sqrt{\left(1 - \frac{4b^2}{d^2}\right) \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4b^2}{d^2}}\right)}};$$

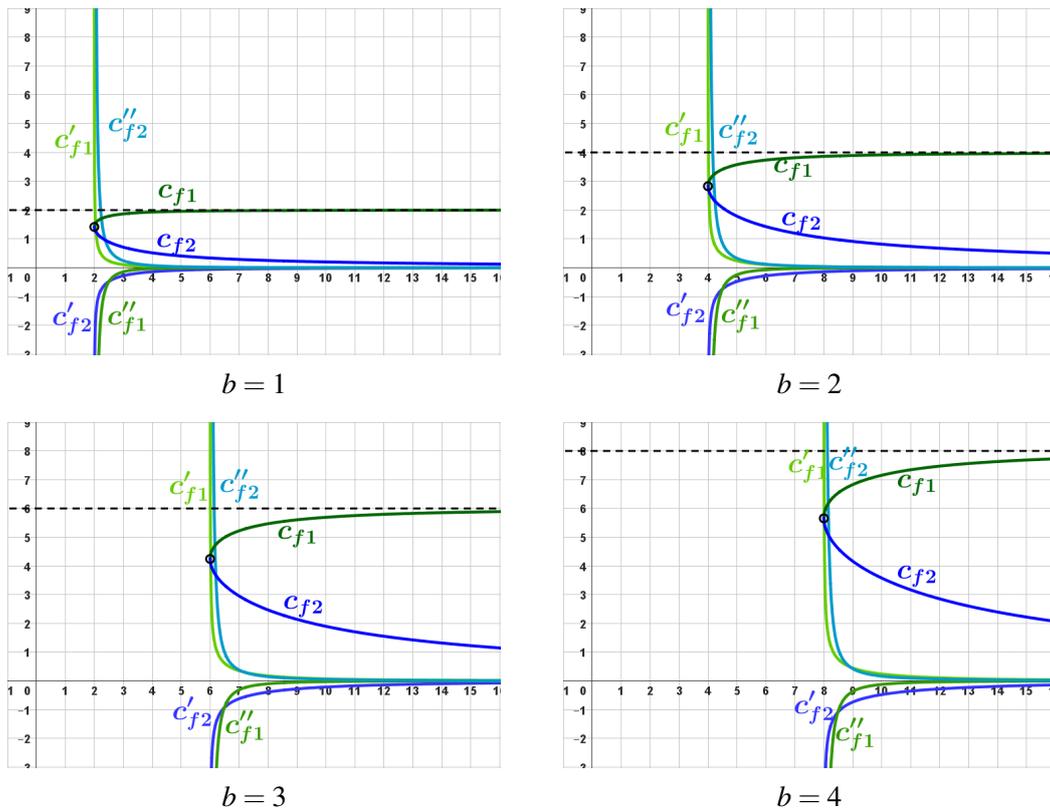
$$c''_{f2}(d) = \frac{\sqrt{2}b^3 \left[3 \left(1 - \frac{4b^2}{d^2}\right) + \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4b^2}{d^2}}\right) + 1 \right]}{d^4 \sqrt{\left(1 - \frac{4b^2}{d^2}\right)^3 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4b^2}{d^2}}\right)}}.$$

Analisando as derivadas de $c_{f1}(d)$, o termo $1 - \frac{4b^2}{d^2}$ nos permite identificar que $c'_{f1}(d)$ será sempre positiva, ou seja, a função original é crescente. Também é possível observar que $c''_{f1}(d)$ será sempre negativa, indicando que a função original tem sua concavidade voltada para baixo. Com relação às derivadas de $c_{f2}(d)$, a constante $-2\sqrt{2}$ garante que $c'_{f2}(d)$ será sempre negativa, indicando uma função decrescente. Já em $c''_{f2}(d)$ podemos analisar que o termo negativo somado a 1 é positivo, conforme c_{f2} , garantindo seu sinal sempre positivo, o que identifica a função com concavidade voltada para cima (Figura 18).

Outra forma de buscar as derivadas é a partir da derivação implícita da equação (33), obtendo

$$c'_f(d) = \frac{8b^6}{d^3 (c_f^3 - 2b^2 c_f)};$$

$$c''_f(d) = \frac{1}{(2b^2 c_f - c_f^3)} \left[(c'_f)^2 (3c_f^2 - 2b^2) + \frac{24b^6}{d^4} \right].$$

Figura 18 – $c_f(d)$ e suas derivadas para diferentes valores de b 

Fonte: do autor (2024).

Para encontrar a relação da corda focal mínima com a área da elipse, a partir da equação (28), vamos reescrever os parâmetros a e b em função de c_f . Desse modo,

$$a = \frac{2b^2}{c_f}; \quad (36)$$

$$b = \sqrt{\frac{ac_f}{2}}. \quad (37)$$

Substituindo (36) na equação da área, dada por $A = \pi ab$, temos a relação de c_f com A , tal que

$$c_f(A) = \frac{2\pi b^3}{A} \quad (38)$$

com b fixado, a variável e $a, b, A \in \mathbb{R}_+^*$.

A restrição algébrica está em $A \neq 0$, permitindo $A > 0$. No entanto, geometricamente temos ainda $a > b$ e $c_f < 2b$, o que limita ao mínimo $A = \pi b^2$ quando $a = b$. O domínio da função será da forma

$$\text{Dom}(c_f(A)) = \{A \in \mathbb{R}_+^* \mid A > \pi b^2\}.$$

Analisando os valores que a função pode assumir, temos

$$Im(c_f(A)) = \{c_f(A) \in \mathbb{R}_+^* \mid 0 < c_f(A) < 2b\}.$$

Ainda observa-se uma assíntota horizontal em $c_f(A) = 0$, pois

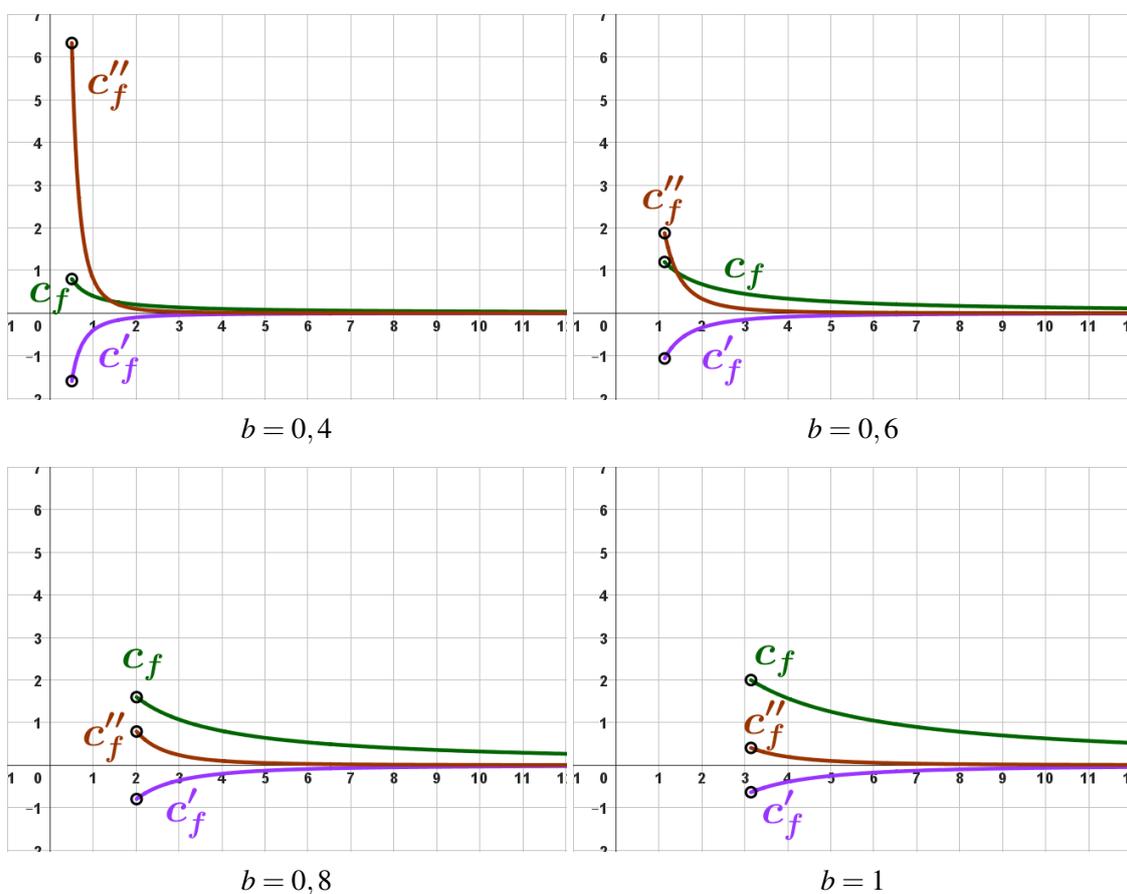
$$\lim_{A \rightarrow +\infty} c_f(A) = \frac{2\pi b^3}{A} = 0.$$

Calculando as derivadas primeira e segunda:

$$c'_f(A) = \frac{-2\pi b^3}{A^2}; \quad c''_f(A) = \frac{4\pi b^3}{A^3}.$$

Pela primeira derivada, que é sempre negativa, se pode concluir que a função é decrescente. A segunda derivada é sempre positiva, o que indica que a função tem sua concavidade voltada para cima (Figura 19).

Figura 19 – $c_f(A)$ e suas derivadas para diferentes valores de b



Fonte: do autor (2024).

Substituindo (37) na equação da área, temos a relação de c_f com A , tal que

$$c_f(A) = \frac{2A^2}{\pi^2 a^3} \quad (39)$$

com a fixado, b variável e $a, b, A \in \mathbb{R}_+^*$.

Não há nenhuma restrição algébrica com relação ao domínio. No entanto, considerando a desigualdade $b < a$,

$$\text{Dom}(c_f(A)) = \{A \in \mathbb{R}_+^* \mid 0 < A < \pi a^2\}.$$

Analisando os possíveis valores que a função pode assumir, segue que

$$\text{Im}(c_f(A)) = \{c_f(A) \in \mathbb{R}_+^* \mid 0 < c_f(A) < 2a\}$$

pois $b = a \Rightarrow c_f(A) = 2a$.

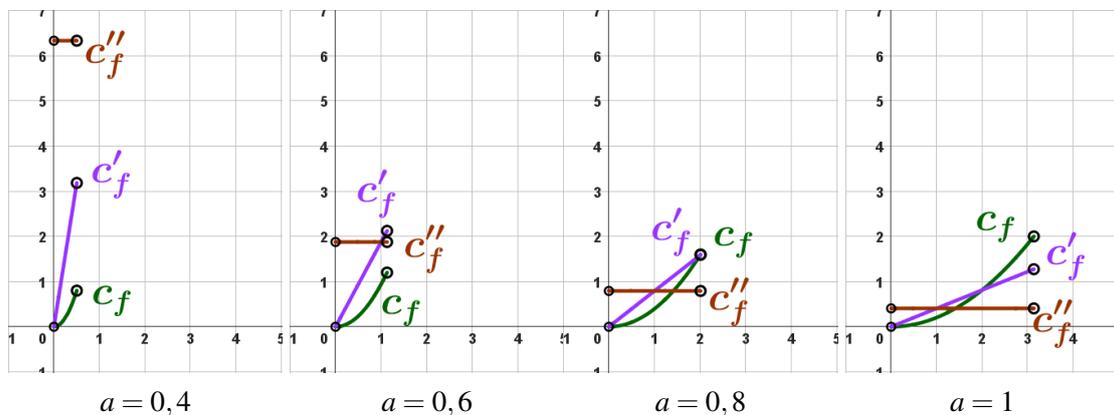
Calculando as derivadas primeira e segunda:

$$c'_f(A) = \frac{4A}{\pi^2 a^3};$$

$$c''_f(A) = \frac{4}{\pi^2 a^3}.$$

Tanto a primeira como a segunda derivada serão sempre positivas. Isso significa que a função é crescente e tem sua concavidade voltada para cima (Figura 20).

Figura 20 – $c_f(A)$ e suas derivadas para diferentes valores de a



Fonte: do autor (2024).

Para relacionar a corda focal mínima com o comprimento da elipse (L), inicialmente se reescreveu a equação $L = \pi[3(a+b) - \sqrt{(3a+b)(a+3b)}]$ na forma polino-

mial, obtendo

$$9(a+b)^2 - \frac{6L(a+b)}{\pi} + \frac{L^2}{\pi^2} = \pm(3a^2 + 10ab + 3b^2). \quad (40)$$

Primeiramente utilizando a equação com o termo positivo à direita da igualdade, e substituindo a equação (36), temos o polinômio quadrático em relação a c_f ,

$$(L^2 - 6\pi bL + 6\pi^2 b^2)c_f^2 + (16\pi^2 b^3 - 12\pi b^2 L)c_f + 24\pi^2 b^4 = 0, \quad (41)$$

com as soluções

$$c_{f_{1,2}}(L) = \frac{2\pi b^2[(3L - 4\pi b) \pm \sqrt{3L^2 + 12\pi bL - 20\pi^2 b^2}]}{L^2 - 6\pi bL + 6\pi^2 b^2}. \quad (42)$$

Posteriormente, utilizando a equação (40) com o termo negativo à direita da igualdade, e substituindo a equação (36), temos o polinômio quadrático em relação a c_f ,

$$(L^2 - 6\pi bL + 12\pi^2 b^2)c_f^2 + (56\pi^2 b^3 - 12\pi b^2 L)c_f + 48\pi^2 b^4 = 0 \quad (43)$$

com as soluções

$$c_{f_{3,4}}(L) = \frac{2\pi b^2[(3L - 14\pi b) \pm \sqrt{-3L^2 - 12\pi bL + 52\pi^2 b^2}]}{L^2 - 6\pi bL + 12\pi^2 b^2}. \quad (44)$$

Analisando (42) e (44), verificamos que temos apenas uma solução positiva e válida ao contexto geométrico da elipse,

$$c_f(L) = \frac{2\pi b^2[(3L - 4\pi b) - \sqrt{3L^2 + 12\pi bL - 20\pi^2 b^2}]}{L^2 - 6\pi bL + 6\pi^2 b^2} \quad (45)$$

com b fixado, a variável e $a, b, L \in \mathbb{R}_+^*$.

Conforme polinômio da raiz quadrada temos que ela será positiva para $L > \left(\frac{4\sqrt{6}}{3} - 2\right)\pi b \simeq 1,2659\pi b$. Considerando ainda a restrição $a > b$, temos $L > 2\pi b$, e portanto o domínio e a imagem são

$$Dom(c_f(L)) = \{L \in \mathbb{R}_+^* \mid L > 2\pi b\};$$

$$Im(c_f(L)) = \{c_f(L) \in \mathbb{R}_+^* \mid 0 < c_f(L) < 2b\}.$$

Ainda observa-se uma assíntota horizontal em $c_f(L) = 0$, pois

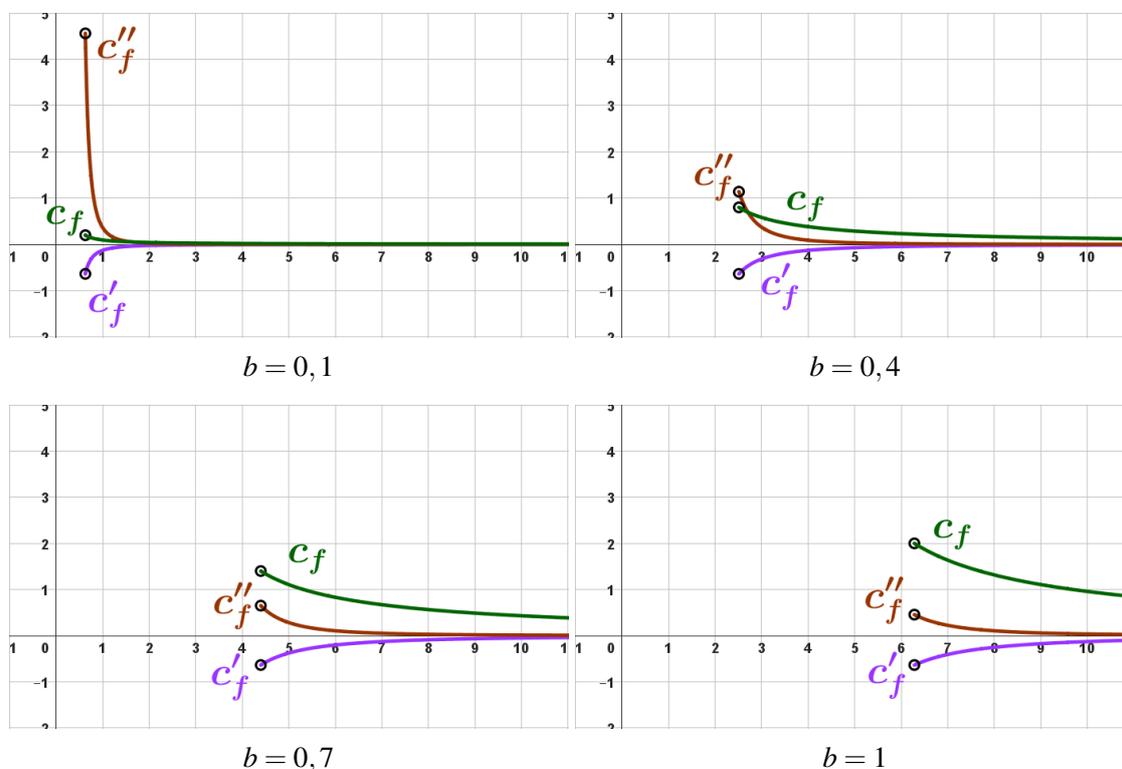
$$\lim_{L \rightarrow +\infty} c_f(L) = 0.$$

Devido à complexidade dos termos envolvidos, abaixo consta apenas a primeira derivada de c_f . Contudo, na figura (21) é possível visualizar ambas as derivadas, calculadas e plotadas pelo *software* GeoGebra. Pelo mesmo motivo, foi feita análise geométrica do comportamento das funções.

$$c'_f(L) = \frac{4\pi b^2(3\pi b - L)(3L - 4\pi b - \sqrt{3L^2 + 12\pi bL - 20\pi^2 b^2})}{(L^2 - 6\pi bL + 6\pi^2 b^2)^2} + \frac{6\pi b^2(-2\pi b - L + \sqrt{3L^2 + 12\pi bL - 20\pi^2 b^2})}{(L^2 - 6\pi bL + 6\pi^2 b^2)\sqrt{3L^2 + 12\pi bL - 20\pi^2 b^2}}$$

Analisando a primeira derivada, podemos ver que ela é sempre negativa, o que nos diz que c_f é decrescente. Já a segunda derivada é sempre positiva, o que indica que c_f tem concavidade voltada para cima (Figura 21).

Figura 21 – $c_f(L)$ e suas derivadas para diferentes valores de b



Fonte: do autor (2024).

Retornando à equação (40) e utilizando o termo positivo à direita da igualdade, ao

substituir (37) encontramos dois polinômios,

$$9\pi^4 a^2 c_f^2 + 4\pi^2 a(-3L^2 + 3\pi aL + \pi^2 a^2)c_f + (L^2 - 6\pi aL + 6\pi^2 a^2)^2 = 0 ; \quad (46)$$

$$9\pi^4 a^2 c_f^2 + 4\pi^2 a(6L^2 - 21\pi aL + 17\pi^2 a^2)c_f + (L^2 - 6\pi aL + 6\pi^2 a^2)^2 = 0 . \quad (47)$$

A partir da equação (40), se utilizarmos o termo negativo à direita da igualdade, ao substituir (37) encontramos outros dois polinômios,

$$36\pi^4 a^2 c_f^2 + 2\pi^2 a(-3L^2 + 48\pi aL - 124\pi^2 a^2)c_f + (L^2 - 6\pi aL + 12\pi^2 a^2)^2 = 0 , \quad (48)$$

$$36\pi^4 a^2 c_f^2 + 2\pi^2 a(15L^2 - 120\pi aL + 268\pi^2 a^2)c_f + (L^2 - 6\pi aL + 12\pi^2 a^2)^2 = 0 . \quad (49)$$

Analisando os polinômios (46), (47), (48) e (49), verificamos que entre as soluções positivas, apenas uma das soluções de (46) é válida ao contexto geométrico. Abaixo temos a relação de c_f com o comprimento L , tal que

$$c_f(L) = \frac{6L^2 - 6\pi aL - 2\pi^2 a^2 + (3L - 4\pi a)\sqrt{3L^2 + 12\pi aL - 20\pi^2 a^2}}{9a\pi^2} \quad (50)$$

com a fixado, b variável e $a, b, L \in \mathbb{R}_+^*$.

Considerando $0 < b < a$, segue que $b = 0 \Rightarrow L = \pi a(3 - \sqrt{3})$ e $b = a \Rightarrow L = 2\pi a$.

Logo,

$$Dom(c_f(L)) = \{L \in \mathbb{R}_+^* \mid \pi a(3 - \sqrt{3}) < L < 2\pi a\} .$$

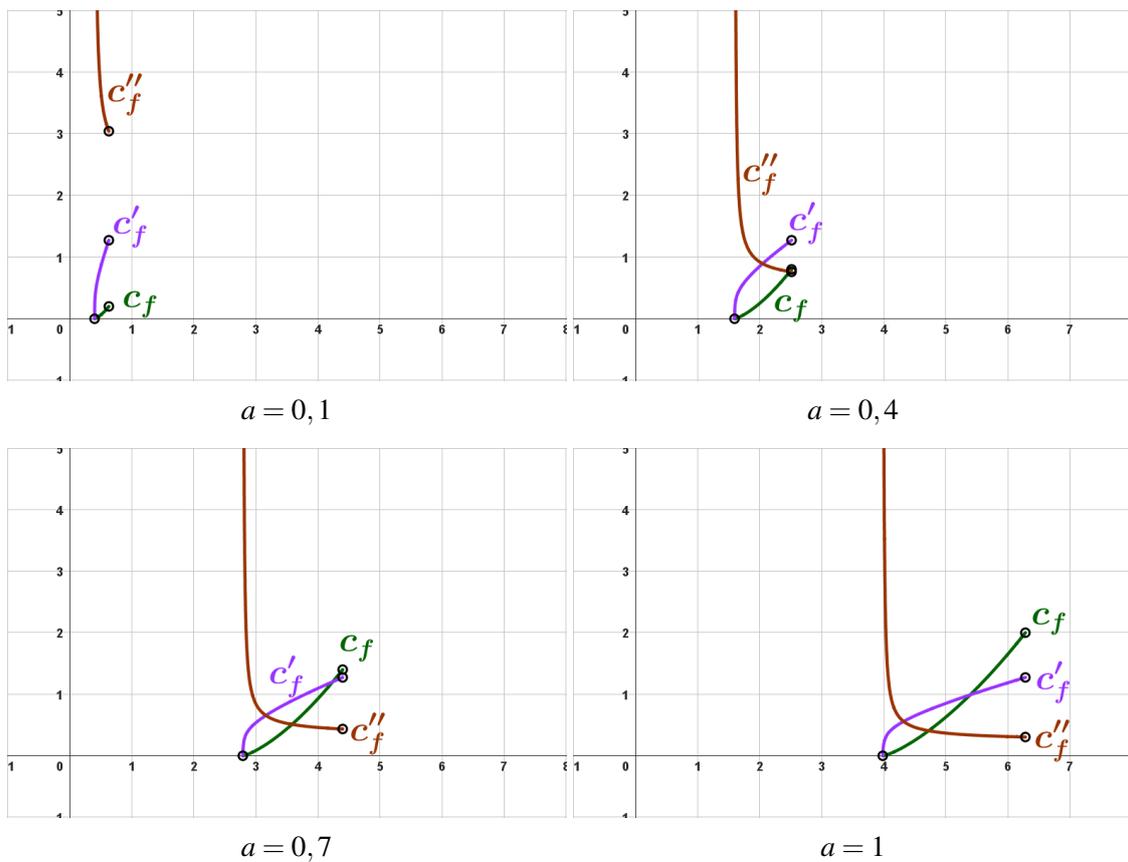
Aplicando o intervalo do domínio, segue que

$$Im(c_f(L)) = \{c_f(L) \in \mathbb{R}_+^* \mid 0 < c_f(L) < 2a\} .$$

Devido à complexidade dos termos envolvidos, as equações das duas derivadas não foram adicionadas ao texto. Contudo, é possível visualizá-las na figura (22), calculadas e plotadas a partir do *software* GeoGebra. Foi feita análise geométrica do comportamento das funções.

Tanto a primeira quanto a segunda derivada de c_f assumem valores sempre positivos. Isso significa que a função é crescente e tem concavidade voltada para cima (Figura 22).

Figura 22 – $c_f(L)$ e suas derivadas para diferentes valores de a



Fonte: do autor (2024).

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Durante a execução do presente trabalho, tive a chance de desafiar a mim mesmo e expandir meus conhecimentos e percepções sobre a matemática como um todo, e mais especificamente sobre a geometria, área com a qual tenho bastante afinidade. Essa pesquisa, mesmo com seus momentos difíceis e cansativos, foi revigorante a cada nova descoberta, cada novo entendimento. A equação particular mencionada na introdução, retirada da obra de Apolônio, deu o norte para nosso trabalho. A partir dessa equação, escolhemos relacionar a corda focal mínima com os demais elementos da elipse. Das relações encontradas, alguns padrões puderam ser observados. As funções $c_f(a)$, $c_f(A)$, $c_{f2}(d)$, $c_f(L)$, quando fixado b , possuem as mesmas propriedades, e até o comportamento gráfico de suas derivadas é similar. O mesmo pode ser dito das funções quadráticas $c_f(b)$, $c_f(A)$, $c_f(L)$, quando fixado a . Algo interessante pode ser visto ao compararmos as funções $c_f(d)$ onde a é fixado e $c_{f1}(d)$ onde b é fixado: seus comportamentos são quase iguais, não fosse pela posição das assíntotas $c_f = 2a$ e $c_{f1} = 2b$, respectivamente. A função $c_f(c)$ com b fixado foi a única que apresentou ponto de inflexão, motivo pelo qual a incluímos como *applet* no repositório on-line do GeoGebra. Uma tabela com todas as relações pode ser acessada no apêndice A.

Ainda há muitas coisas a serem estudadas. Abordamos apenas as relações da corda focal mínima c_f com outras grandezas da elipse, das quais não constam o raio R e o ângulo característico γ . Seria interessante estudá-las mais a fundo, por serem grandezas não usuais propostas por Silva *et al.* (2020). Vislumbramos como futuros passos para a pesquisa: buscar relações envolvendo outras grandezas além de c_f ; relações inversas (algumas já foram obtidas direta ou indiretamente, embora não tenham sido explicitadas nem estudadas); descrever as relações através de coordenadas paramétricas e polares; buscar relações com mais de uma variável.

Penso ser importante destacar o papel das ferramentas digitais que nos possibilitam trabalhar com geometria dinâmica, nomeadamente o GeoGebra, *software* que me foi apresentado na graduação e despertou em mim a vontade de explorar, aprender e relacionar a geometria com outras áreas da matemática. Hoje estou em via de me graduar, com o sentimento de ter encontrado algo que me interessa muito, e não posso deixar de dar o crédito a todos os professores e professoras que fizeram parte da minha formação. Todos os que me incentivaram, me aconselharam, acreditaram em mim (quando nem eu mesmo acreditava), me orientaram, fazem parte dessa conquista.

REFERÊNCIAS

ARENHARDT, J. G. B. **Estudando as cônicas através da Geometria Analítica e da Álgebra Linear**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) – Unidade Acadêmica Especial de Ciências Exatas e Tecnológicas, Universidade Federal de Goiás. Jataí. 2016. Disponível em: <https://bdtd.ibict.br/vufind/Record/UFG_e750fff6617e1ed9ef9db9bf7811cd02>. Acesso em: 18 mai. 2023.

BARROS, R. **Cônicas**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo. São Carlos. 2018. Disponível em: <https://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/55/55136/tde-01022018-141551/publico/ReginaLourencodeBarros_revisada.pdf>. Acesso em: 25 abr. 2023.

EUCLIDES. **Os Elementos**. Tradução e introdução de Irineu Bicudo. São Paulo: Editora UNESP, 2009.

GARCIA, J. C. **Explorando as definições de cônicas**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”. Rio Claro. 2013. Disponível em: <<https://repositorio.unesp.br/server/api/core/bitstreams/81a7f515-b8e4-4d99-9a5c-ac670af82031/content>>. Acesso em: 26 abr. 2023.

GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 5. ed. São Paulo: Atlas, 2010. v. 1. 174p.

International GeoGebra Institute. Programa GeoGebra 6 [homepage na Internet]. Áustria, 2024. Disponível em: <<https://www.geogebra.org/>>. Acesso em: 30 maio 2024.

LAGO, D. M. **Um estudo das cônicas**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás. Goiânia. 2017. Disponível em: <<https://repositorio.bc.ufg.br/teseserver/api/core/bitstreams/dd73f728-abce-47b7-940d-4cfd032738f7/content>>. Acesso em: 18 mai. 2023.

LENZ, M. **O estudo das cônicas a partir da construção geométrica**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”.

Rio Claro. 2014. Disponível em: <<https://www.athena.biblioteca.unesp.br/exlibris/bd/cathedra/29-05-2015/000832159.pdf>>. Acesso em: 13 set. 2023.

MONTEIRO, R. M. **Resgate do Teorema de Dandelin no Estudo de Cônicas com Geogebra**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) – Centro de Ciências Exatas, Universidade Federal do Espírito Santo. Vitória. 2014. Disponível em: <<https://repositorio.ufes.br/server/api/core/bitstreams/25644701-9b29-444c-b711-6c64c4a6d4ab/content>>. Acesso em: 2 nov. 2023.

MUNIZ JUNIOR, F. H. M. **Seções Cônicas**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) – Universidade Federal de Viçosa. Florestal. 2018. Disponível em: <<https://www.locus.ufv.br/bitstream/123456789/20709/1/textocompleto.pdf>>. Acesso em: 18 mai. 2023.

PenseVestibular. Exercícios resolvidos sobre cônicas. Pense Vestibular [homepage na Internet], 2019. Disponível em: <<https://pensevestibular.com.br/topicosdematematica/geometria-analitica/conicas/exercicios-resolvidos-sobre-conicas>>. Acesso em: 13 set. 2023.

SEVERIANO, T. P. **Estudo das cônicas: uma proposta didática com uso de GeoGebra para o Ensino Médio**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) – Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas e da Terra, Universidade Federal Rio Grande do Norte. Natal. 2017. Disponível em: <https://repositorio.ufrn.br/bitstream/123456789/24301/1/ThiagoPardoSeveriano_DISSERT.pdf>. Acesso em: 18 mai. 2023.

SILVA, F. **Um estudo sobre cônicas: aspectos históricos e seu ensino**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) – Centro de Ciências Exatas e Tecnologia, Universidade Federal do Maranhão. São Luiz. 2018. Disponível em: <<https://tede2.ufma.br/jspui/bitstream/tede/2370/2/Fabiano%20da%20Concei%3%a7%3%a3o%20Silva.pdf>>. Acesso em: 13 set. 2023.

SILVA, H. B.; SANTOS, M. A. C.; MENDES, R. L. T.; MATOS, F. C. Novas abordagens no estudo das elipses. *In: SILVA, A. J. N. (Org.) A Educação enquanto Fenômeno Social: Política, Economia, Ciência e Cultura*. Ponta Grossa: Editora Atena, cap. 16, p. 159-169, 2020. Disponível em: <<https://doi.org/10.22533/at.ed.33420051116>>. Acesso em: 13 set. 2023.

SILVA, M. P. G. **Rotação e Translação no Sistema de Coordenadas Polares**. [s.l]: [s.n.], 2016. Livro Eletrônico.

SIQUEIRA, C. A. F; SILVA, M. J. F. Um estudo dos diferentes pontos de vista das cônicas no quadro da geometria. *In: Horizontes - Revista de Educação*. v. 5, p. 131-151, 2017. Disponível em: <<https://ojs.ufgd.edu.br/index.php/horizontes/article/view/8400/4660>>. Acesso em: 30 mai. 2023.

SOUSA, B, K.; CARVALHO, K.; SOARES, L. F. Cônicas não degeneradas: dedução das equações geral e polar. *In: Principia*. João Pessoa, v.1, p. 86-98, 2020. Disponível em: <<https://periodicos.ifpb.edu.br/index.php/principia/article/view/3996>>. Acesso em: 30 mai. 2023.

SOUZA, L, D. **Cônicas e Suas Propriedades Notáveis**. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) – Centro de Ciências Físicas e Matemáticas, Universidade Federal de Santa Catarina. Florianópolis. 2014. Disponível em: <<https://repositorio.ufsc.br/xmlui/bitstream/handle/123456789/128599/328484.pdf>>. Acesso em: 26 abr. 2023.

Wolfram Alpha LLC. Programa WolframAlpha [homepage na Internet]. Champaign, USA, 2024. Disponível em: <<https://www.wolframalpha.com/>>. Acesso em: 30 maio 2024.

APÊNDICE A — RELAÇÕES DA CORDA FOCAL MÍNIMA

Em decorrência do contexto geométrico do qual surgem as relações encontradas nessa pesquisa, foram consideradas apenas funções onde as variáveis assumem valores positivos, sendo descartadas as que não atenderam a essa condição. Ainda, a alternância entre as desigualdades $a > b$ e $a < b$ não modifica as características e propriedades das relações. Portanto, todas as relações abaixo consideram $a > b$.

Tabela 1 – Relações da corda focal mínima

Relação	Constante e Variável	Domínio e Imagem	Propriedades
$c_f(a) = \frac{2b^2}{a}$	b constante a variável	$Dom = (b, +\infty)$ $Im = (0, 2b)$	assínt. horizontal $c_f = 0$; decresc.; conc. p/ cima
$c_f(b) = \frac{2b^2}{a}$	a constante b variável	$Dom = (0, a)$ $Im = (0, 2a)$	cresc.; conc. p/ cima
$c_f(c) = \frac{2b^2}{\sqrt{b^2 + c^2}}$	b constante a variável	$Dom = (0, +\infty)$ $Im = (0, 2b)$	Assínt. horizontal $c_f = 0$; decresc.; P. inflexão $\left(\frac{b\sqrt{2}}{2}, \frac{2b\sqrt{6}}{3}\right)$; conc. p/ baixo $\left(0, \frac{b\sqrt{2}}{2}\right)$; conc. p/ cima $\left(\frac{b\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$
$c_f(c) = 2a - 2\left(\frac{c^2}{a}\right)$	a constante b variável	$Dom = (0, a)$ $Im = (0, 2a)$	decresc.; conc. p/ baixo

Relação	Constante e Variável	Domínio e Imagem	Propriedades
$c_f(d) = 2a - 2\left(\frac{a^3}{d^2}\right)$	a constante b variável	$Dom = (a, +\infty)$ $Im = (0, 2a)$	assínt. horizontal $c_f = 2a$; cresc.; conc. p/ baixo
$c_{f1}(d) = b\sqrt{2\left(1 + \sqrt{1 - \frac{4b^2}{d^2}}\right)}$	b constante a variável	$Dom = (2b, +\infty)$ $Im = (b\sqrt{2}, 2b)$	assínt. horizontal $c_{f1} = 2b$; cresc.; conc. p/ baixo
$c_{f2}(d) = b\sqrt{2\left(1 - \sqrt{1 - \frac{4b^2}{d^2}}\right)}$	b constante a variável	$Dom = (2b, +\infty)$ $Im = (0, b\sqrt{2})$	assínt. horizontal $c_{f2} = 0$; decresc.; conc. p/ cima
$c_f(A) = \frac{2\pi b^3}{A}$	b constante a variável	$Dom = (\pi b^2, +\infty)$ $Im = (0, 2b)$	assínt. horizontal $c_f = 0$; decresc.; conc. p/ cima
$c_f(A) = \frac{2A^2}{\pi^2 a^3}$	a constante b variável	$Dom = (0, \pi a^2)$ $Im = (0, 2a)$	cresc.; conc. p/ cima
$c_f(L) = \frac{2\pi b^2[(3L - 4\pi b) - \sqrt{3L^2 + 12\pi bL - 20\pi^2 b^2}]}{L^2 - 6\pi bL + 6\pi^2 b^2}$	b constante a variável	$Dom = (2\pi b, +\infty)$ $Im = (0, 2b)$	assínt. horizontal $c_f = 0$; decresc.; conc. p/ cima
$c_f(L) = \frac{6L^2 - 6\pi aL - 2\pi^2 a^2 + (3L - 4\pi a)\sqrt{3L^2 + 12\pi aL - 20\pi^2 a^2}}{9a\pi^2}$	a constante b variável	$Dom = (\pi a(3 - \sqrt{3}), 2\pi a)$ $Im = (0, 2a)$	cresc.; conc. p/ cima