

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PAMPA

WILLIAM JOAQUIM SANTOS DE SANTANA

RE(PENSAR) AS SIMETRIAS DE FIGURAS PLANAS COM UTILIZAÇÃO DO GEOGEBRA

**Bagé/RS
2023**

WILLIAM JOAQUIM SANTOS DE SANTANA

RE(PENSAR) AS SIMETRIAS DE FIGURAS PLANAS COM UTILIZAÇÃO DO GEOGEBRA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Especialização em Ensino de Matemática no Ensino Médio: Matemática na Prática da Universidade Federal do Pampa, na modalidade EaD – Pólo Hulha Negra como requisito parcial para obtenção do certificado de Especialista em Ensino de Matemática para o Ensino Médio.

Orientador: Prof. Dr. Leandro Blass

Coorientador: Prof. Dr. Anderson Luís Jeske Bihain

**Bagé/RS
2023**

Ficha catalográfica elaborada automaticamente com os dados fornecidos
pelo(a) autor(a) através do Módulo de Biblioteca do
Sistema GURI (Gestão Unificada de Recursos Institucionais) .

S232r Santana, William Joaquim Santos de
Re(pensar) as simetrias de figuras planas com utilização do
geogebra / William Joaquim Santos de Santana.
50 p.

Trabalho de Conclusão de Curso(Especialização)--
Universidade Federal do Pampa, ESPECIALIZAÇÃO EM MATEMÁTICA NO
ENSINO MÉDIO (MATEMÁTICA NA PRÁTICA), 2023.

"Orientação: Leandro Blass".

1. Investigação Matemática. 2. GeoGebra. 3. Simetrias. I.
Título.

WILLIAM JOAQUIM SANTOS DE SANTANA

RE(PENSAR) AS SIMETRIAS DE FIGURAS PLANAS COM UTILIZAÇÃO DO GEOGEBRA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Especialização em Ensino de Matemática no Ensino Médio: Matemática na Prática da Universidade Federal do Pampa, na modalidade EaD - Pólo Hulha Negra como requisito parcial para obtenção do certificado de Especialista em Ensino de Matemática para o Ensino Médio.

Trabalho de Conclusão de Curso defendido e aprovado em: 16/01/2023.

Banca examinadora:

Prof. Dr. Leandro Blass
Orientador
UNIPAMPA

Prof. Dr. Cristiano Peres Oliveira
UNIPAMPA

Prof. Dra. Francieli Aparecida Vaz

UNIPAMPA



Assinado eletronicamente por **LEANDRO BLASS, PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR**, em 06/02/2023, às 20:14, conforme horário oficial de Brasília, de acordo com as normativas legais aplicáveis.



Assinado eletronicamente por **FRANCIELI APARECIDA VAZ, PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR**, em 07/02/2023, às 08:23, conforme horário oficial de Brasília, de acordo com as normativas legais aplicáveis.



Assinado eletronicamente por **CRISTIANO PERES OLIVEIRA, PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR**, em 07/02/2023, às 11:43, conforme horário oficial de Brasília, de acordo com as normativas legais aplicáveis.



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.unipampa.edu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **1047932** e o código CRC **05B8505A**.

RESUMO

Esta pesquisa é o produto da elaboração e aplicação de uma aula inédita utilizando como metodologia de ensino a Investigação Matemática, com o auxílio do GeoGebra no ensino de simetrias, aplicada na 3ª série do Ensino Médio. O objetivo foi compreender o pensamento geométrico em relação às simetrias com a utilização do GeoGebra numa atividade baseada na Investigação Matemática. Trata-se de uma pesquisa qualitativa do tipo exploratória com o propósito de analisar padrões, ideias ou hipóteses dos alunos envolvidos. O processo de elaboração foi dividido na construção do plano de aula e nas etapas que o compõem, com intencionalidades na exploração e formulação de conjecturas. Na aplicação ocorreram três momentos, o primeiro buscou analisar a turma com um formulário inicial individualizado; no segundo, foram propostas etapas em duplas para os alunos construir seu próprio conhecimento com a mediação do docente de acordo com os momentos da Investigação Matemática; no terceiro, foi aplicado um formulário final individualizado com o intuito de comparar (formulário inicial e formulário final) e avaliar os procedimentos realizados. O trabalho mostrou como as atividades investigativas enriquecem o ensino-aprendizagem de simetrias, com aporte teórico na Investigação Matemática proposta por Ponte (1998, 2003 e 2006). Conclui-se que a atividade investigativa possibilita maior envolvimento dos alunos e que, o uso do *software* GeoGebra auxiliou no ensino-aprendizagem.

Palavras-Chave: Investigação Matemática. GeoGebra. Simetrias.

ABSTRACT

This research is the product of the elaboration and application of an unprecedented class using Mathematical Investigation as a teaching methodology, with the help of GeoGebra in the teaching of symmetries, applied in the 3rd year of High School. The aim is to understand geometric thinking in relation to symmetries using GeoGebra in an activity based on Mathematical Research. This is an exploratory qualitative research with the purpose of analyzing patterns, ideas or hypotheses of the students involved. The elaboration process was divided in the construction of the lesson plan and in the stages that compose it, with intentionalities in the exploration and formulation of conjectures. There were three moments in the application, the first sought to analyze the class with an individualized initial form; in the second, stages were proposed in pairs for students to build their own knowledge with the teacher's mediation according to the moments of Mathematical Investigation; in the third, an individualized final form was applied in order to compare (initial form and final form) and evaluate the procedures performed. The work showed how investigative activities enrich the teaching-learning of symmetries, with theoretical support in the Mathematical Investigation proposed by Ponte (1998, 2003 and 2006). It is concluded that the investigative activity enables greater involvement of the students and that the use of the GeoGebra software helped in the teaching-learning process.

Keywords: Mathematical Research. GeoGebra. Symmetries.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Construção de um quadrilátero no software GeoGebra	22
Figura 2: Fotografia dos alunos.....	24
Figura 3: Uso da matemática no cotidiano do aluno A ₁	25
Figura 4: Uso da matemática no cotidiano do aluno A ₂	25
Figura 5: Síntese referente as simetrias do aluno A ₂	27
Figura 6: Síntese referente as simetrias do aluno A ₃	27
Figura 7: Relato da capacidade de resolver questões de simetrias do aluno A ₂	28
Figura 8: Relato da capacidade de resolver questões de simetrias do aluno A ₄	28
Figura 9: Experiência da atividade investigativa do aluno A ₅	29
Figura 10: Experiência da atividade investigativa do aluno A ₃	29
Figura 11: Criação de um polígono qualquer da dupla D ₂	30
Figura 12: Criação de um polígono qualquer da dupla D ₃	31
Figura 13: Considerações da proposta de simetria por reflexão da dupla D ₂	32
Figura 14: Considerações da proposta de simetria por reflexão da dupla D ₃	32
Figura 15: Considerações da proposta de simetria por rotação da dupla D ₁	33
Figura 16: Simetria por rotação da dupla D ₁	34
Figura 17: Considerações da proposta de simetria por translação da dupla D ₂	34
Figura 18: Simetria por translação da dupla D ₂	35
Figura 19: Mapa Mental da dupla D ₂	36
Figura 20: Conhecimentos matemáticos utilizados na aula do aluno A ₄	37
Figura 21: Conhecimentos matemáticos utilizados na aula do aluno A ₃	37
Figura 22: Compreensão ao tema de simetrias do aluno A ₄	37
Figura 23: Compreensão ao tema de simetrias do aluno A ₄ (continuação).....	38
Figura 24: Contribuições da atividade de investigação para o aluno A ₁	38
Figura 25: Contribuições da atividade de investigação para o aluno A ₄	38
Figura 26: Opinião referente atividade investigativa do aluno A ₂	39
Figura 27: Opinião referente atividade investigativa do aluno A ₁	39
Figura 28: Opinião referente a aula do aluno A ₁	39
Figura 29: Opinião referente a aula do aluno A ₆	40
Figura 30: Considerações do estímulo ao raciocínio e senso crítico do aluno A ₄ ...	40
Figura 31: Considerações do estímulo ao raciocínio e senso crítico do aluno A ₃	40
Figura 32: Relato da maior dificuldade na atividade do aluno A ₇	41
Figura 33: Relato da maior dificuldade na atividade do aluno A ₄	41
Figura 34: Relato da maior dificuldade na atividade do aluno A ₁	42

LISTA DE QUADROS

Quadro 1: Sinopse da revisão de literatura.....	25
Quadro 2: Momentos na realização de uma investigação.....	27

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1: Respostas dos alunos referente ao conhecimento de simetrias.....	26
Gráfico 2: Respostas da questão relacionada ao ter realizado atividade investigativa	29
Gráfico 3: Respostas sobre o interesse pelas atividades.....	41
Gráfico 4: Respostas da avaliação do material didático disponibilizado	42
Gráfico 5: Respostas sobre o interesse pelo assunto após atividade	43
Gráfico 6: Respostas referente aos conhecimentos adquiridos através da atividade	43
Gráfico 7: Respostas referente ao esforço durante a atividade	44

LISTA DE SIGLAS

BNCC - Base Nacional Comum Curricular

PNLD - Programa Nacional do Livro Didático

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO.....	14
2 CONCEITOS GERAIS E REVISÃO DE LITERATURA.....	16
2.1 Investigação Matemática na Educação.....	18
3 ANÁLISE A PRIORI.....	21
3.1 O Plano de Aula.....	21
3.2 Etapas do Plano de Aula.....	22
4 ANÁLISE A POSTERIORI.....	24
4.1 Análise do Formulário Inicial.....	24
4.2 Análise das Etapas Propostas aos Alunos.....	30
4.3 Análise do Formulário Final.....	36
5 CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	46
REFERÊNCIAS.....	48
APÊNDICES.....	50

1 INTRODUÇÃO

É importante repensar o ensino de Matemática, principalmente na unidade de conhecimento geometria. Em particular, no ensino de simetrias, com perspectivas de aprendizagens que direcionam o aluno como protagonista do seu próprio conhecimento. A partir disso, a utilização de *softwares* de geometria dinâmica pode ser uma ferramenta que auxilie no processo de ensino-aprendizagem.

O documento de caráter normativo denominado como Base Nacional Comum Curricular (BNCC) prevê o ensino atrelado a atividades investigativas, para isso, faz-se necessário o conhecimento de metodologias como, por exemplo, a Investigação Matemática (BRASIL, 2018).

Dessa forma, o objetivo geral deste trabalho consiste em compreender o pensamento geométrico em relação às simetrias com a utilização do GeoGebra numa atividade baseada na Investigação Matemática. Em relação aos objetivos específicos, o primeiro é comparar as simetrias de reflexão, translação e rotação com auxílio do GeoGebra, o segundo é verificar o que a BNCC orienta sobre o uso de *software* de geometria dinâmica para o ensino de simetrias e o terceiro é analisar como a Investigação Matemática auxilia no processo de ensino-aprendizagem no conteúdo de simetrias.

O interesse pelo tema abordado tem por motivação o uso do GeoGebra no ensino de simetrias, por compreender que a construção permite ao aluno se aproximar do tema estudado. Além disso, a metodologia por Investigação Matemática despertou-me interesse em sua forma de aplicação.

Apesar de ser a primeira experiência do autor na construção de uma sequência didática por meio da investigação, foi perceptível que algumas etapas já desenvolviam em sala, mas não possuía o conhecimento claro e definido de Investigação Matemática. Sendo assim, seria uma forma de estudar essa metodologia para planejar aulas futuras.

Em uma pesquisa realizada no estado da arte verificou-se semelhanças entre trabalhos escritos com o tema abordado neste trabalho. A partir disso, Silva (2019) teve como objetivo principal analisar possíveis contribuições do *software* GeoGebra para aprendizagem de alunos do 1º ano do Ensino Médio sobre conceitos que envolvem a simetria. No entanto, segundo Britis *et al.* (2016), propõe refletir a partir

de uma sequência didática a ser trabalhada com o *software* GeoGebra com alunos do 6º e 7º do Ensino Fundamental envolvendo conhecimentos sobre simetria axial.

A metodologia utilizada nesta pesquisa foi qualitativa do tipo exploratória, com enfoque na aplicação de etapas investigativas com o uso do *software* GeoGebra, diferindo dos trabalhos acima citados. No tocante a Investigação Matemática, serão discutidas e articuladas as principais ideias de Ponte, Brocado e Oliveira (2006). Sendo assim, a presente pesquisa busca responder a seguinte questão: como a utilização do *software* GeoGebra aliado a atividade investigativa pode contribuir para o ensino e aprendizagem de simetria?

O trabalho está dividido em introdução, revisão de literatura, investigação matemática na educação, análise a priori, o plano de aula, etapas do plano de aula, análise a posteriori, análise do formulário inicial, análise das etapas propostas aos alunos, análise do formulário final e considerações finais.

2 CONCEITOS GERAIS E REVISÃO DE LITERATURA

Este trabalho está fundamentado de acordo com Ponte, Brocado e Oliveira (1998, 2003, 2006). Situam-se que na Investigação Matemática ocorrem quatro momentos em sua realização: a primeira, a exploração e formulação de questões. A segunda, formular conjecturas. A terceira, testes e reformulação. A última, justificação e avaliação.

Ademais, faz-se necessário analisar os trabalhos relacionados com o tema desta pesquisa. Essa ação torna-se relevante no processo da construção nesse projeto. De acordo com Laville e Dionne (1999, p. 112):

[...] revisar todos os trabalhos disponíveis, objetivando selecionar tudo o que possa servir em sua pesquisa. Nela tenta encontrar essencialmente os saberes e as pesquisas relacionadas com sua questão; deles se serve para alimentar seus conhecimentos, afinar suas perspectivas teóricas, precisar e objetivar seu aparelho conceitual. Aproveita para tornar ainda mais conscientes e articuladas suas intenções e, desse modo, vendo como outros procederam em suas pesquisas, vislumbrar sua própria maneira de fazê-lo.

Feita a análise, foi escolhido no google acadêmico cinco trabalhos que possuem similaridade com a temática da minha pesquisa. A seleção dessas pesquisas teve como requisito uma aplicação de atividade investigativa. Com intuito de situar e definir os objetivos desses trabalhos, foram inseridos no Quadro 1 para que o leitor tenha acesso direto a esses trabalhos que são bases desta pesquisa.

Quadro 1: Sinopse da revisão de literatura

Item	Trabalho	Descrição do trabalho
01	BRITIS, K. G.; SANTOS, C. A. B. dos; OLIVEIRA, M. N. de; NASCIMENTO, P. C. do. Uma sequência didática mediada pelo software GeoGebra para o ensino de Simetria Axial. Revista de Ensino de Ciências e Matemática , [S. l.], v. 7, n. 4, p. 112–127, 2016. DOI: 10.26843/rencima.v7i4.1209. Disponível em: https://revistapos.cruzeirosul.edu.br/index.php/rencima/article/view/1209 . Acesso em: 07 nov. 2022.	Este trabalho consiste em analisar uma sequência didática elaborada para alunos do 6º e 7º do Ensino Fundamental. Especificamente, utiliza-se do <i>software</i> GeoGebra para o ensino de simetria axial. A partir disso, possui uma proposta de mostrar aos professores a eficiência e a efetividade de trabalhar com a utilização de diferentes representações semióticas.

02	<p>SILVA, Ubiratan Barbosa da. Contribuições do Software GeoGebra para a aprendizagem sobre simetria no 1º ano do Ensino Médio. Orientadora: Regina Coelly Mendes da Silva. 2019. 65. TCC (Graduação) - Curso de Licenciatura em Matemática, Departamento de Ciências Exatas, Universidade Federal da Paraíba, Rio Tinto, 2019. Disponível em: https://repositorio.ufpb.br/jspui/handle/123456789/17115. Acesso em: 09 nov. 2022.</p>	<p>A abordagem dessa pesquisa foi exploratória do tipo bibliográfica, conforme seus objetivos. Realizou a comparação entre duas turmas do 1º ano no Ensino Médio. Utilizou-se do <i>software</i> GeoGebra para o ensino de simetrias, enfatizando as contribuições que essa ferramenta possui no ensino-aprendizagem. Além disso, utilizou-se da história da Matemática para aporte teórico.</p>
03	<p>ARAÚJO, M. G.; CRUVINEL, P. C. de J.; RIBEIRO, P. S.; VAZ, D. A. de F.; Avaliação da aprendizagem na proposta de investigação Matemática com o GeoGebra. <i>In: __. Educação e Ensino de Ciências e Matemática: pesquisa, aplicação e novas tendências.</i> Ed. 1. Guarujá: Científica Digital, 2022. p.17-22. (vol.2).</p>	<p>Propôs como metodologia a Investigação Matemática com o uso do GeoGebra. Sendo assim, foi explorado os momentos que consiste na investigação. É importante destacar que o processo avaliativo consiste durante toda realização da atividade, com o intuito de propiciar uma aprendizagem em abrangência.</p>
04	<p>SILVA, Adriano Costa da. Atividades Investigativas de Matemática com Celular: uso do GeoGebra para o ensino de Geometria Espacial. Orientadora: Rejane Waiandt Schuwartz de Carvalho Faria. 2022. Monografia (Graduação) - Curso de Licenciatura em Matemática, Departamento de Matemática, Universidade Federal de Viçosa, Viçosa, 2022. Disponível em: https://www.locus.ufv.br/bitstream/123456789/28798/1/texto%20completo.pdf. Acesso em: 09 nov. 2022.</p>	<p>Tem o objetivo de elaborar atividades com metodologia que dê significado ao aprendizado. Dessa forma, foi proposta a elaboração de atividades investigativas de Geometria Espacial que se utiliza do <i>software</i> GeoGebra no celular. Sendo assim, foi constatado que para esta elaboração a atividade investigativa referente ao conteúdo devem ser intencionais e com foco no desenvolvimento do pensamento matemático.</p>
05	<p>RAFAEL, J. A. M. .; MIRANDA, P. R. de . Onde está a Simetria? Uma investigação nos documentos oficiais e livros didáticos de Matemática. Revista de Investigação e Divulgação em Educação Matemática , [S. l.], v. 2, n.</p>	<p>Teve como objetivo analisar e investigar as propostas para o ensino de simetrias nos anos finais do Ensino Fundamental contidas nas diretrizes curriculares nacionais, PCN, e do estado de Minas Gerais, CBC.</p>

	1, 2019. DOI: 10.34019/2594-4673.2018.v2.27362. Disponível em: https://periodicos.ufjf.br/index.php/ri-dema/article/view/27362 . Acesso em: 27 nov. 2022.	
--	---	--

Fonte: Autor, 2022.

Em síntese, esses trabalhos auxiliarão na elaboração e nas análises das etapas da atividade investigativa proposta para o ensino e aprendizagem de simetrias, podendo ser aplicável no Ensino Fundamental – Anos Finais (a partir do 8º ano) e Ensino Médio.

2.1 Investigação Matemática na Educação

O ensino de Matemática está amplamente ligado ao método, com isso, interfere diretamente na aprendizagem do aluno. Dessa forma, a Investigação Matemática poderá ser usada como tal metodologia para um ensino mais dinâmico (ERNEST, 1996). A participação dos alunos no processo de descoberta, faz com que se torne ativo na construção do seu próprio conhecimento, conforme Ponte, Oliveira, Cunha e Segurado (1998):

As atividades de investigação contrastam-se claramente com as tarefas que são habitualmente usadas no processo de ensino-aprendizagem, uma vez que são muito abertas, permitindo que o aluno coloque as suas próprias questões e estabeleça o caminho a seguir. Numa investigação parte-se de uma situação que é preciso compreender ou de um conjunto de dados que é preciso organizar e interpretar. A partir daí formula-se questões, para as quais se procura fazer conjecturas. O teste destas conjecturas e recolha de mais dados pode levar a formulação de novas conjecturas ou à confirmação das conjecturas iniciais. Neste processo podem surgir também novas questões a investigar (PONTE; OLIVEIRA; CUNHA; SEGURADO, 1998, p.10).

Nessa proposta, o aluno é estimulado para propor resoluções de acordo com o seu desenvolvimento, ainda que seja necessário reformular e testar as conjecturas. Além disso, o docente é responsável na mediação para que as etapas sejam direcionadas e tenha efetividade na realização. É importante destacar que “investigar não é mais do que procurar conhecer, compreender, encontrar soluções para os problemas com os quais nos deparamos” (PONTE, 2003, p. 26).

Nesse sentido, os momentos da Investigação Matemática devem se incorporar na prática docente como metodologia de ensino, para isso, a compreensão é indispensável, como está representado no Quadro 2.

Quadro 2: Momentos na realização de uma investigação

Momentos de uma investigação	Atividades
Exploração e formulação de questões	- Reconhecer uma situação problemática; - Explorar a situação problemática; - Formular questões.
Formulação de conjecturas	- Organizar dados; - Formular conjecturas.
Teste e reformulação de conjecturas	- Realizar testes; - Refinar uma conjectura.
Justificação e avaliação	- Justificar uma conjectura; - Avaliar o raciocínio ou resultado do raciocínio.

Fonte: Ponte, (2002, p.7).

No primeiro momento, ocorre a exploração e formulação com o objetivo de reconhecer uma situação problemática e com base nesta explorar e formular questões. Dessa forma, os alunos irão analisar e construir novas questões. No segundo momento, possui um papel fundamental na formulação de conjecturas, ou seja, criar hipóteses para tais questões formuladas. O objetivo da atividade consiste em organizar os dados e formular essas conjecturas.

No terceiro momento, ocorre o teste dessas conjecturas, até mesmo a sua reformulação, quando necessário. Sendo assim, o objetivo da atividade neste momento é realizar testes e refinar as conjecturas. No quarto momento, é o instante que ocorre a justificação e avaliação. Nesta fase, é importante a discussão entre os alunos e professores para avaliar o raciocínio utilizado na justificação das respectivas conjecturas.

Em relação ao estudo da Geometria, os autores como Fischbein (1993), Duval (1995) e Pais (1996) se destacam no campo do Pensamento Geométrico. O primeiro autor defende o processo de formação do pensamento geométrico, em virtude da noção de conceito figural. Ou seja, entende-se que a geometria pode ser compreendida através de entidades mentais (figuras geométricas) e seus respectivos conceitos.

O segundo autor elaborou a Teoria de Registros de Representação Semiótica

(TRRS) na qual possui como elemento principal a mobilização de representações semióticas e diferentes registros. Desse modo, entende-se que quando o aluno é capaz de mobilizar essas representações a aprendizagem torna-se mais efetiva.

Segundo Pais (1996), são necessários quatro elementos (objeto, conceito, desenho e imagem mental) para constituir os conceitos geométricos, para assim, formar o pensamento geométrico. De forma complementar, na BNCC (2018):

A Geometria envolve o estudo de um amplo conjunto de conceitos e procedimentos necessários para resolver problemas do mundo físico e de diferentes áreas do conhecimento. Assim, nessa unidade temática, estudar posição e deslocamentos no espaço, formas e relações entre elementos de figuras planas e espaciais pode desenvolver o pensamento geométrico dos alunos. Esse pensamento é necessário para investigar propriedades, fazer conjecturas e produzir argumentos geométricos convincentes. É importante, também, considerar o aspecto funcional que deve estar presente no estudo da Geometria: as transformações geométricas, sobretudo as simetrias. (BRASIL, 2018, p.271)

Por meio disso, o objetivo proposto neste trabalho está de acordo com a BNCC. No qual, considera o pensamento geométrico como essencial para a Investigação Matemática. Além disso, propõe uma atividade investigativa que proporciona ao desenvolvimento e compreensão deste pensamento.

3 ANÁLISE A PRIORI

Neste capítulo será apresentado o plano de aula elaborado para a aplicação da aula inédita que possui como metodologia de ensino a Investigação Matemática. Dessa forma, o professor tem um papel fundamental na elaboração da investigação, de acordo com Ponte, Oliveira, Cunha e Segurado (1998):

O professor terá como papel fundamental iniciar e dirigir o discurso, envolver cada um dos alunos, manter o interesse pelo assunto, colocar questões esclarecedoras ou provocantes e não aceitar apenas a contribuição dos alunos que têm habitualmente respostas corretas ou ideias válidas. Terá de respeitar a diversidade dos alunos. (PONTE; OLIVEIRA; CUNHA; SEGURADO, 1998, p. 6)

Diante disso, o docente necessita articular da melhor forma os objetivos a serem alcançados em sua aula, observando as especificidades da turma na qual deseja aplicar a investigação. Sendo assim, será abordado os caminhos metodológicos da atividade proposta neste trabalho.

A abordagem utilizada na presente pesquisa foi qualitativa do tipo exploratória, pois tem “como objetivo proporcionar maior familiaridade com o problema, com vistas a torná-lo mais explícito ou a construir hipóteses” (GIL, 2002, p. 41). Dessa forma, nos permite analisar a proposta de forma mais detalhada e verificar quais as conjecturas presentes na construção das simetrias.

3.1 O Plano de Aula

A realização da atividade proposta será em dupla com o intuito dos alunos interagirem para resolver as indagações, e desempenharem um papel ativo na construção de seus conhecimentos. O plano de aula consiste em alguns objetivos específicos a seguir:

- Construir polígonos no *software* GeoGebra;
- Interpretar e representar a localização e o deslocamento de uma figura no plano cartesiano;
- Compreender as simetrias: reflexão, translação e rotação;
- Correlacionar os tipos de simetrias com os respectivos polígonos construídos.

A justificação e avaliação serão feitas por meio das observações de todas as etapas que, quando necessário, haverá indagações com a intencionalidade de testar e reformular o raciocínio pensado.

Além disso, constará um formulário inicial e outro formulário final para que serão analisados os conhecimentos prévios dos alunos com o conhecimento construído e formulado através da Investigação Matemática. A partir disso, serão discutidas as etapas contidas no plano de aula.

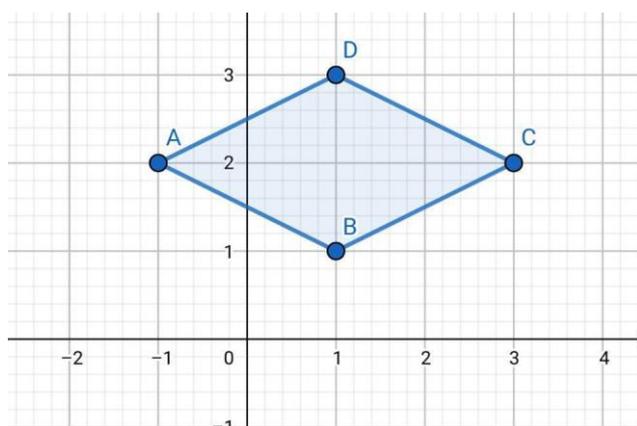
3.2 Etapas do Plano de Aula

O primeiro momento da aula é a aplicação do formulário inicial para cada estudante, em seguida, é solicitado que abram o *software* GeoGebra no *smartphone/notebook* para o professor realizar uma breve amostra das principais ferramentas que serão utilizadas na aula, assim os alunos conseguiram realizar de forma independente as etapas solicitadas.

Feito isso, é importante lembrar aos alunos que a cada procedimento façam um *print* da tela, para melhor observação e análise. Cada dupla receberá uma folha para realizar suas anotações necessárias em cada etapa destacada abaixo.

- **1° Etapa:** Por meio do *software* GeoGebra temos diversas maneiras de criar polígonos. A Figura 1, mostra uma construção:

Figura 1: Construção de um quadrilátero no *software* GeoGebra



Fonte: O autor, 2022.

Dessa forma, criem um polígono qualquer e descrevam de qual maneira vocês utilizaram para criar.

- **2° Etapa:** Após a criação, trace uma reta externa a esse polígono. Feito isso, utilize a ferramenta "*Reflexão em relação a uma reta*" e clique na região interna do polígono e na reta. A partir disso, o que vocês observam que aconteceu?

Quais conclusões podem ser feitas em relação aos polígonos e a reta? Explore outras ferramentas disponibilizadas no GeoGebra.

- **3° Etapa:** Construa outro polígono qualquer, como foi solicitado na primeira etapa. Após a criação, determine um ponto externo ao polígono. Feito isso, utilize a ferramenta “*Rotação em torno de um ponto*” e clique na região interna do polígono e no ponto, e escolha um ângulo $0^\circ < \alpha < 360^\circ$. A partir disso, o que vocês observam que aconteceu? Quais conclusões podem ser feitas em relação aos polígonos e o ponto? O que ocorre se escolher o ângulo de 0° e 360° ? Explore outras ferramentas disponibilizadas no GeoGebra.
- **4° Etapa:** Construa outro polígono qualquer, como foi solicitado na primeira etapa. Após a criação, determine um vetor externo ao polígono. Feito isso, utilize a ferramenta “*Translação por um vetor*” e clique na região interna do polígono e no vetor. A partir disso, o que vocês observam que aconteceu? Quais conclusões podem ser feitas em relação aos polígonos e o vetor? Explore outras ferramentas disponibilizadas no GeoGebra.
- **5° Etapa:** Realizadas as etapas acima e discutidas as soluções com os demais grupos e professor, criem um mapa mental com as informações mais importantes, referente às simetrias (reflexão, rotação e translação).

Após a conclusão das etapas destacadas acima, os alunos irão responder o questionário final com base em sua experiência vivenciada nesta aula. A partir disso, será possível o professor analisar o antes e depois, influenciando nas futuras ações pedagógicas que se utilizarem desta Investigação Matemática.

4 ANÁLISE A POSTERIORI

Nesta seção, discutiremos as observações e análises realizadas por meio do formulário inicial, as etapas propostas aos alunos e o formulário final com uma perspectiva na Investigação Matemática. Iniciaremos relacionando e comparando algumas respostas do formulário inicial. Em seguida, analisaremos as etapas propostas aos alunos, com o intuito de verificar o processo de aprendizagem da dupla. Por fim, o formulário final indicará a influência que a investigação teve na construção do conhecimento de cada aluno. A atividade foi desenvolvida numa turma da 3ª Série do Ensino Médio que possui um total de dez alunos.

Figura 2: Fotografia dos alunos



Fonte: O autor, 2022.

Para manter o sigilo dos alunos envolvidos na pesquisa, utilizaremos para cada aluno, uma sigla A_1, A_2, \dots, A_8 , considerando que apenas oito alunos participaram. Vale ressaltar que, os formulários foram individuais e as etapas propostas foram realizadas em duplas, totalizando quatro grupos.

4.1 Análise do Formulário Inicial

O formulário inicial foi composto de quatro perguntas que tinham a finalidade de reconhecer a familiaridade dos alunos com a Matemática, Simetrias e a Investigação Matemática.

A Matemática está presente em nosso cotidiano, seja de forma explícita ou implícita. Dessa forma, faz-se necessário prover meios que os alunos identifiquem e relacionem os conhecimentos adquiridos em sala para sua vida. Além disso, o intuito do referido formulário possui maior ênfase em verificar a forma que os alunos estão relacionando o conteúdo de simetrias no seu cotidiano e de qual forma esse conhecimento interfere em sua aprendizagem, conforme a Figura 3.

Figura 3: Uso da matemática no cotidiano do aluno A_1

1. Você usa Matemática no seu dia a dia? Dê um exemplo.

Sim! muito. Principalmente para cronometrar o tempo de prova no enem. constantemente tiro as questões marcando o tempo. Além disso, sempre estou calculando algum boleto/recibo.

Fonte: O autor, 2022.

Na Figura 3, podemos perceber que o aluno A_1 traz em sua resposta o uso da matemática para cronometrar o tempo. Associando de forma objetiva sua estratégia para responder às questões do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) em relação ao tempo de prova. Outra justificativa foi a utilização de cálculos em boletos/contas, podemos inferir o uso de operações matemáticas e até mesmo da matemática financeira.

De forma análoga, na Figura 4, analisamos que o aluno A_2 também faz o uso da matemática para o tempo, mas acrescenta o uso em desenhos como a razão áurea, simetrias e distâncias.

Figura 4: Uso da matemática no cotidiano do aluno A_2

1. Você usa Matemática no seu dia a dia? Dê um exemplo.

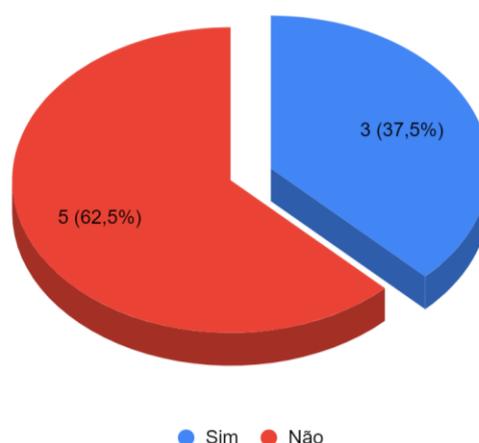
Sim, quando eu desenho eu uso razão áurea, simetria, contas básicas, proporção e escala. Além de contas relacionadas a horas e distância.

Fonte: O autor, 2022.

Os conhecimentos prévios do aluno A_2 está bem mais expresso e relacionado com o tema de estudo do presente trabalho ao citar o uso da matemática em seu cotidiano. Ao comparar os alunos A_1 e A_2 , observamos o quanto é subjetivo a relação que os alunos fazem do uso da Matemática no seu dia a dia.

O conceito de simetrias é iniciado no Ensino Fundamental - Anos Finais, especificamente no 7º ano, conforme as obras aprovadas no Programa Nacional Livros Didáticos (PNLD) de 2020. Em seguida, esse conceito não aparece com frequência nos anos posteriores, tendo como consequência o esquecimento e tornado inacessível a aprendizagem desse conteúdo. Para ressaltar essa afirmação, a Gráfico 1 representa as respostas da pergunta “você conhece as simetrias (reflexão, translação e rotação)?”, a partir disso, mostra que a maioria dos alunos não conhecem o assunto em questão.

Gráfico 1: Respostas dos alunos referentes ao conhecimento de simetrias



Fonte: O autor, 2022.

De acordo com o Gráfico 1 percebe-se que aproximadamente sessenta e dois por cento dos alunos respondem não ter conhecimento de simetrias e cerca de trinta e sete apontam terem conhecimento. Apesar desses alunos serem da 3ª série do Ensino Médio, percebemos que mais da metade afirmam que não conhecem simetrias. Entretanto, suponhamos que todos já tenham estudado em algum ano do Ensino Fundamental. Nesse sentido, percebe-se a necessidade desse conteúdo ser mais explorado no Ensino Médio.

Dentre os alunos que afirmaram ter conhecimento de simetrias, podemos perceber que o aluno A_2 conhece apenas a simetria de reflexão, conforme a Figura 5.

Figura 5: Síntese referente as simetrias do aluno A_2

2.1 Caso a resposta for sim, relate uma síntese sobre as simetrias:

Eu só conheço a simetria de reflexão (ou só lembro dessa), que é aquela que divide uma figura em dois lados iguais. exemplos: coração, estrela.

Fonte: O autor, 2022.

Ao analisar a resposta do aluno A_2 o conceito de simetria de reflexão está internalizado como a divisão de uma figura em dois lados iguais, logo a resposta não está errada. Entretanto, o aluno A_3 a seguir trouxe outra forma de conhecimento prévio referente às simetrias, representando na Figura 6.

Figura 6: Síntese referente as simetrias do aluno A_3

2.1 Caso a resposta for sim, relate uma síntese sobre as simetrias:

Conheço através do software de modelagem 3D "Cinema 4D" que entende os conceitos simétricos para a modelagem e rotação e por alguns assuntos de matemática e geografia e

Fonte: O autor, 2022.

Na Figura 6, o aluno A_3 traz como exemplo simetrias relacionadas ao *software* de modelagem, assim como, relaciona a simetria de rotação relacionado a outros assuntos de Matemática e Geografia. Porém, não finalizou totalmente sua resposta e não sintetizou nenhum conceito de simetrias.

É importante saber a teoria para resolver as questões de forma correta. À medida que o aluno sabe mais da teoria, conseqüentemente tem mais habilidade para resolver questões. O aluno, A_2 que afirmou conhecimento de simetrias, afirmou também que consegue resolver questões que envolvem esse conteúdo, representado na Figura 7.

Figura 7: Relato da capacidade de resolver questões de simetrias do aluno A_2

3. Você acredita que com seus conhecimentos prévios e sua experiência de vida, você consegue resolver questões que envolvem simetrias de figuras planas? Explique.

Sim, se eu utilizar os meus conhecimentos, eu consigo resolver algumas questões, considerando a dificuldade.

Fonte: O autor, 2022.

O aluno A_2 classifica sua capacidade de responder de acordo com a dificuldade da questão que for proposta. Entretanto, o aluno A_4 , que afirmou não ter conhecimento de simetrias, respondeu que conseguiria responder questões que envolvem simetrias de figura plana, conforme a Figura 8.

Figura 8: Relato da capacidade de resolver questões de simetrias do aluno A_4

3. Você acredita que com seus conhecimentos prévios e sua experiência de vida, você consegue resolver questões que envolvem simetrias de figuras planas? Explique.

Sim, dependendo da forma de como a figura seja apresentada e de como a questão está formulada

Fonte: O autor, 2022.

A resposta do aluno A_4 foi similar ao do aluno A_2 , tendo como parâmetro a dificuldade, ou seja, a forma pela qual a questão foi formulada. Dessa forma, podemos inferir que os conhecimentos prévios desses alunos talvez não sejam suficientes para responder uma questão com maior nível de dificuldade, conforme dito por estes.

É importante que os professores apliquem outras metodologias de ensino para verificar a efetividade dos objetivos traçados na aula e perceber qual a melhor forma de possibilitar a aprendizagem de seus alunos. Conforme o Gráfico 2, que corresponde a pergunta “você já realizou uma atividade por meio da investigação”, temos o percentual de alunos que responderam à questão de acordo com as afirmações sim ou não.

Gráfico 2: Respostas da questão relacionada ao ter realizado atividade investigativa

Fonte: O autor, 2022.

Com base no Gráfico 2, setenta e cinco por cento da turma afirma não ter realizado nenhuma atividade matemática por meio da investigação. Entretanto, alguns alunos já podem ter realizado, mas não têm o conhecimento dessa forma metodológica. Na Figura 9, temos a representação de um aluno que afirmou ter experienciado uma Investigação Matemática.

Figura 9: Experiência da atividade investigativa do aluno A_5

4.1 Caso a resposta for sim, nos conte como foi sua experiência.

eu tive que medir a sombra de um poste a fim de descobrir sua altura.

Fonte: O autor, 2022.

O aluno A_5 apenas expressou o que foi pedido na experiência de sua atividade investigativa, não detalhando o que foi elaborado. Em contrapartida, o aluno A_3 relatou o procedimento feito na sua experiência, conforme a Figura 10.

Figura 10: Experiência da atividade investigativa do aluno A_3

4.1 Caso a resposta for sim, nos conte como foi sua experiência.

No minha investigação era necessário encontrar formas de calcular que altitudes e o valor desejado, podendo usar conhecimento de multiplicação, adição e

Fonte: O autor, 2022.

Apesar do aluno A_3 descrever a sua experiência, não podemos afirmar se realmente foi uma Investigação Matemática, por se tratar de uma metodologia com características próprias. Mas sua intenção foi expor uma atividade que utilizava conhecimento das operações básicas da matemática para obter o valor desejado.

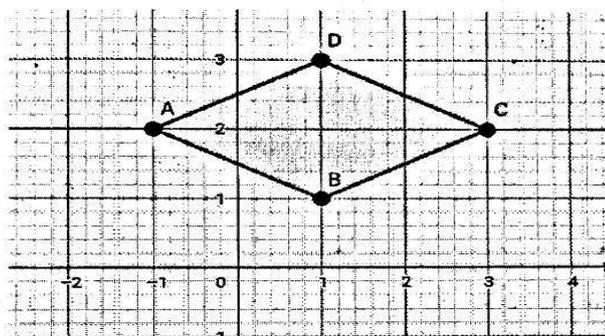
4.2 Análise das Etapas Propostas aos Alunos

Nesta seção, serão analisadas as propostas atribuídas para as duplas que iremos denominar de D_1 , D_2 , D_3 e D_4 . Além disso, mostraremos algumas simetrias que os alunos criaram através do GeoGebra, com o intuito de validar sua resposta na proposta correspondente. É importante ressaltar que o professor/pesquisador não interferiu nas respostas dos alunos, mas criou mecanismos para que eles chegassem a uma conclusão coerente.

A primeira proposta solicitava que o aluno criasse um polígono qualquer, podendo utilizar qualquer ferramenta disponibilizada no GeoGebra. De forma implícita, ocorre o primeiro momento da Investigação Matemática, na qual os alunos irão identificar a problemática “criar um polígono qualquer” e explorar essa situação com auxílio do GeoGebra. Diante disso, iremos identificar duas duplas que fizeram de formas distintas, mas que conseguiram realizar o objetivo da tarefa proposta, de acordo com a Figura 11.

Figura 11: Criação de um polígono qualquer da dupla D_2

1) Através do *software* GeoGebra temos diversas maneiras de criar polígonos. A imagem abaixo mostra uma construção:



Dessa forma, criem um polígono qualquer e descrevam de qual maneira vocês utilizaram para criar.

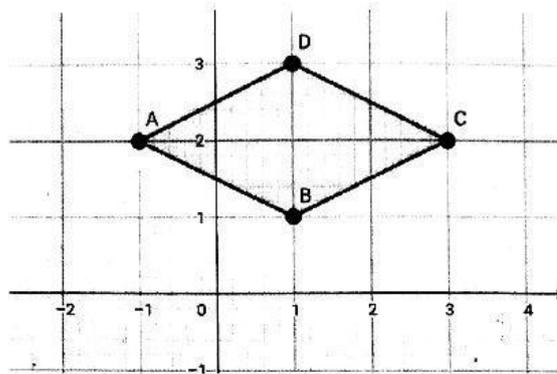
criamos um hexágono regular, por meio do uso da ferramenta "polígonos"

Fonte: O autor, 2022.

Conforme representado na Figura 11 a dupla D_2 utilizou da ferramenta "polígonos" e construiu um eneágono regular, podemos inferir que possuem o conhecimento de polígonos regulares, quanto a sua nomenclatura. Dessa forma, podem desenvolver melhor o raciocínio para as simetrias de figuras planas. Diferentemente, a Figura 12 mostra outra abordagem na construção de um polígono regular.

Figura 12: Criação de um polígono qualquer da dupla D_3

1) Através do *software* GeoGebra temos diversas maneiras de criar polígonos. A imagem abaixo mostra uma construção:



Dessa forma, criem um polígono qualquer e descrevam de qual maneira vocês utilizaram para criar.

Primeiramente utilizamos o ponto que representa o vértice do nosso polígono regular. Segundo lugar, trocamos segmentos de reta, haja vista que possui início e fim. Portanto, as ferramentas utilizadas foram ponto e segmento.

Fonte: O autor, 2022.

A dupla D_3 utilizou dos elementos vértice e lado, para construir seu polígono. Sendo assim, utilizaram no GeoGebra a ferramenta de "ponto" e "segmento de reta". Identificamos que também foi criado um polígono regular, ou seja, os vértices distribuídos possuíram a mesma distância, conseqüentemente o segmento também. Nesta etapa, verificamos como a exploração e formulação propicia n modos de realizar a problemática.

Após a criação desses polígonos quaisquer, a segunda proposta era os alunos utilizarem a ferramenta "Reflexão em relação a uma reta" e depois responder às indagações, vejamos na Figura 13.

Figura 13: Considerações da proposta de simetria por reflexão da dupla D_2

2) Após a criação, trace uma reta externa a esse polígono. Feito isso, utilize a ferramenta "Reflexão em relação a uma reta" e clique na região interna do polígono e na reta. A partir disso, o que vocês observam que aconteceu? Quais conclusões podem ser feitas em relação aos polígonos e a reta? Explore outras ferramentas disponibilizadas no GeoGebra.

Primeiramente, surgiu um eneágono idêntico do outro lado da reta. Ademais, analisando as outras ferramentas, percebemos que os pontos correspondentes possuem distâncias iguais em relação a reta.

Fonte: O autor, 2022.

A dupla D_2 utilizou de outras ferramentas e escreveu justamente o conceito da simetria envolvida na proposta, além de afirmar que surgiu um eneágono idêntico. A partir disso, identificamos o processo do segundo momento que é a organização dos dados e a formulação de hipóteses ao que foi criado. Nessa mesma perspectiva, mas considerando outros aspectos para a construção das observações, temos a resposta da dupla D_3 , representado pela Figura 14.

Figura 14: Considerações da proposta de simetria por reflexão da dupla D_3

2) Após a criação, trace uma reta externa a esse polígono. Feito isso, utilize a ferramenta "Reflexão em relação a uma reta" e clique na região interna do polígono e na reta. A partir disso, o que vocês observam que aconteceu? Quais conclusões podem ser feitas em relação aos polígonos e a reta? Explore outras ferramentas disponibilizadas no GeoGebra.

A partir, formamos um triângulo equilátero. Ao clicar na ferramenta apareceu um triângulo idêntico (simétrico), porém de lado oposto. O que há em comum entre eles é a reta externa. Explorando outras ferramentas, encontramos a distância entre os pontos dos triângulos que foi 4. Eles são equidistantes (os pontos).

Fonte: O autor, 2022.

A dupla D_3 citou que apareceu um "triângulo idêntico simétrico" em relação ao triângulo equilátero construído da primeira proposta. Também afirmou que os pontos (vértices) são equidistantes, ou seja, possuem a mesma distância. Nesse sentido, percebe-se um conhecimento sobre Geometria Analítica, pois todo o

desenvolvimento utilizou-se basicamente de ponto. Identificamos que nesta dupla também ocorreu a organização e a formulação de conjecturas de acordo com sua resposta.

A próxima proposta é a simetria por rotação em torno de um ponto, analisaremos a resposta ao item e a criação no GeoGebra da dupla D_1 , conforme as Figuras 15 e 16.

Figura 15: Considerações da proposta de simetria por rotação da dupla D_1

3) Construa outro polígono qualquer, como foi solicitado na primeira etapa. Após a criação, determine um ponto externo ao polígono. Feito isso, utilize a ferramenta “Rotação em torno de um ponto” e clique na região interna do polígono e no ponto, e escolha um ângulo $0^\circ < \alpha < 360^\circ$. A partir disso, o que vocês observam que aconteceu? Quais conclusões podem ser feitas em relação aos polígonos e o ponto? O que ocorre se escolher o ângulo de 0° e 360° ? Explore outras ferramentas disponibilizadas no GeoGebra.

O polígono girou 90° no sentido horário em relação ao ponto externo, criando uma simetria de rotação. Os polígonos também a girar em torno do ponto. Se escolher o ângulo 0° a forma não sai do lugar, já no 360° , a forma sai e volta para a posição inicial.

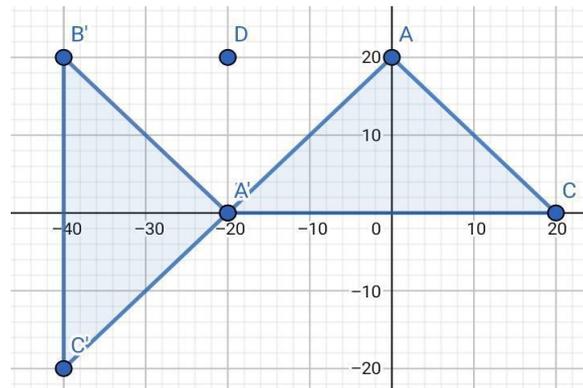
Fonte: O autor, 2022.

Apesar da dupla não deixar explícito qual a escolha do ângulo, deduzimos que escolheram 90° , pois afirmaram que o polígono girou nessa medida. Além disso, responderam às indagações em relação aos ângulos de 0° e 360° corretamente. Nessa proposta visualizamos que os momentos da investigação foram concretizados.

No que tange ao primeiro momento, “criar um polígono qualquer” executando a exploração e formulação da problemática. Em seguida, ocorreu a organização dos dados e formulação de hipóteses com a utilização da ferramenta e a escolha do ângulo indicado. Adiante, foi realizado o teste para verificar as indagações da proposta.

Por fim, ocorreu a justificação e a avaliação com a escrita do desenvolvimento da etapa e a simetria criada no GeoGebra. Para visualizar a criação da dupla, temos a própria imagem que obtiveram na proposta, na Figura 16.

Figura 16: Simetria por rotação da dupla D_1



Fonte: O autor, 2022.

O polígono escolhido foi um triângulo isósceles, especificamente. Nota-se que o ângulo formado entre os vértices correspondentes e o ponto D compreendido entre eles é exatamente 90° . Dessa forma, a elaboração da proposta foi concluída e os momentos da Investigação Matemática foram identificados

Em seguida, a quarta proposta tinha o objetivo de mostrar a simetria por translação através de um vetor. Para ilustrarmos esse caso, abordaremos a resolução e a criação da simetria referente a dupla D_2 .

Figura 17: Considerações da proposta de simetria por translação da dupla D_2

4) Construa outro polígono qualquer, como foi solicitado na primeira etapa. Após a criação, determine um vetor externo ao polígono. Feito isso, utilize a ferramenta "Translação por um vetor" e clique na região interna do polígono e no vetor. A partir disso, o que vocês observam que aconteceu? Quais conclusões podem ser feitas em relação aos polígonos e o vetor? Explore outras ferramentas disponibilizadas no GeoGebra.

Construímos um triângulo, e após explorarmos as ferramentas, notamos que a distância dos vértices correspondentes é a mesma distância do tamanho do vetor.

Fonte: O autor, 2022.

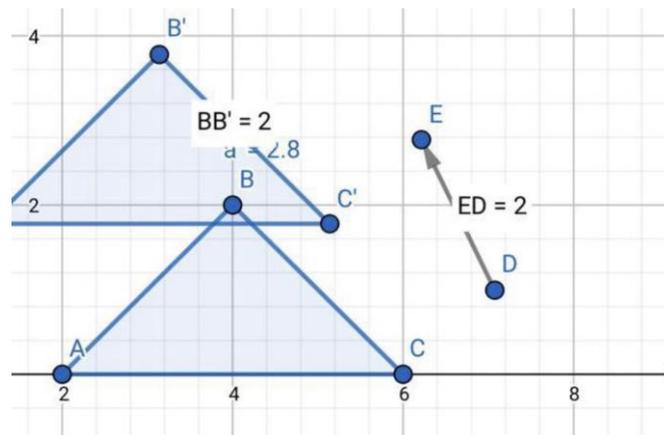
A dupla D_2 escolheu o triângulo como seu polígono para essa proposta, a partir disso, utilizou a ferramenta indicada e através de suas explorações chegaram à conclusão de que a distância entre os vértices correspondentes é a mesma do vetor.

De forma análoga, podemos comparar os momentos da investigação da proposta anterior. A criação do polígono e do vetor (primeiro momento), análise do

que ocorreu seguido da organização dos dados (segundo momento), a efetividade do teste da criação da simetria por translação (terceiro momento) e a finalização com a justificativa das hipóteses e avaliação do raciocínio adquirido (quarto momento).

Entretanto, não escreveram a outra conclusão que também encontraram em sala, referente ao sentido e direção, conforme a Figura 18.

Figura 18: Simetria por translação da dupla D_2

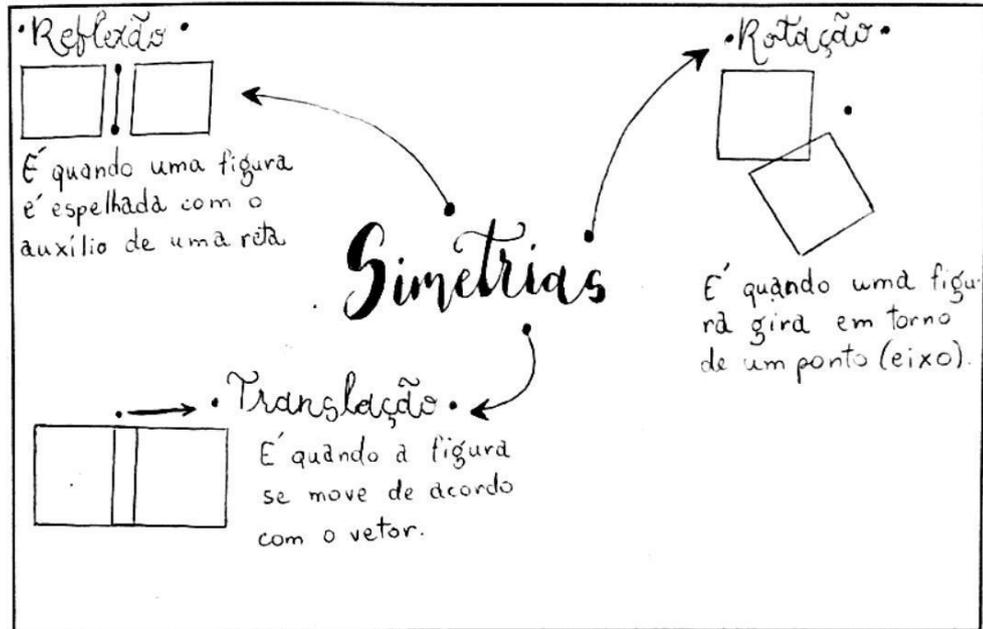


Fonte: O autor, 2022.

Podemos observar que a Figura 8 que representa a construção da quarta proposta contempla exatamente a simetria por translação através de um vetor. Além disso, as propriedades do vetor como módulo, direção e sentido, estão presentes na simetria. Por fim, foi solicitado através das propostas e discussões entre as demais duplas a construção de um mapa mental, vejamos um exemplo na Figura 19.

Figura 19: Mapa Mental da dupla D_2

5) Realizadas as etapas acima e discutidas as soluções com os demais grupos e professor, criem um mapa mental com as informações mais importantes referente as simetrias (reflexão, rotação e translação).



Fonte: O autor, 2022.

A dupla D_2 fez um breve resumo e desenho de cada simetria investigada durante a aula. É importante salientar que, não utilizaram de forma conceitual a definição de cada simetria, entretanto, soube diferenciar e assimilar de acordo com seu entendimento.

4.3 Análise do Formulário Final

Nesta seção voltaremos a discutir de forma individual os alunos conforme as siglas A_1, A_2, \dots, A_8 e suas respectivas respostas ao formulário final. A partir dessa análise será possível identificar diversos aspectos relacionados à Investigação Matemática, de modo a verificar sua validade.

A pergunta inicial trata-se de averiguar os conhecimentos que os alunos perceberam que usaram na aula, com o intuito de identificar como eles relacionaram a teoria com a prática.

Figura 20: Conhecimentos matemáticos utilizados na aula do aluno A_4

1. Quais conhecimentos matemáticos foram usados na aula de hoje?
 Conceitos básicos de geometria como ângulos, pontos, retas, polígonos, distância.

Fonte: O autor, 2022.

Na Figura 20, percebe-se que o aluno A_4 reconheceu vários assuntos da matemática que foram abordados de forma direta e indireta na investigação. De forma similar, mas com temas definidos, temos a Figura 21.

Figura 21: Conhecimentos matemáticos utilizados na aula do aluno A_3

1. Quais conhecimentos matemáticos foram usados na aula de hoje?
 Simetria, polígonos, pontos, retas, semi-retas, plano cartesiano, ângulos, geometria plana e analítica.

Fonte: O autor, 2022.

O aluno A_3 ressaltou dois temas importantes, Geometria Plana e Geometria Analítica. Entretanto, entende-se que citou assuntos que pertencem aos temas como se fossem distintos. Ou seja, soube identificar os assuntos, porém não os organizou de forma correspondente ao tema.

Figura 22: Compreensão ao tema de simetrias do aluno A_4

2. Descreva o que você compreendeu sobre as simetrias (reflexão, translação e rotação):
 Na reflexão, pontos correspondentes possuem distâncias iguais em relação a reta. Na translação, a distância das retas correspondentes é a mesma do comprimento do vetor.

Fonte: O autor, 2022.

Para compreender o entendimento dos alunos posteriormente da investigação, a Figura 22 trata-se da pergunta relacionada à compreensão referente às simetrias. O aluno A_4 destacou cada simetria de forma bem articulada ao conceito, mas que em nenhum momento foi exposto para a turma este conceito.

Figura 23: Compreensão ao tema de simetrias do aluno A_4 (continuação)

Continuação do 2
 Na relação, o ângulo traçado
 entre o ponto externo e os pontos
 correspondentes do polígono é igual
 ao ângulo escolhido.

Fonte: O autor, 2022.

Fez-se necessário complementar sua resposta em outro local além daquele indicado na folha, conforme a Figura 23. Vale ressaltar que, o professor não interferiu em nenhum momento sua escrita, mas observou atentamente sua descrição. A partir dessa compreensão referente ao conteúdo de simetrias, a próxima pergunta foi destinada ao método de ensino por investigação.

Figura 24: Contribuições da atividade de investigação para o aluno A_1

3. Você acredita que a atividade de investigação ampliou os seus conhecimentos matemáticos? Explique.

Sim. sou uma aluna que consegue aprender melhor visualizando, espe-
cialmente a parte da geometria, com o método de investigação isso foi
melhor.

Fonte: O autor, 2022.

Na Figura 24, temos o relato do aluno A_1 que afirmou aprender melhor a Geometria quando é possível visualizar, e que o método de investigação estimulou. Em paralelo, apesar do aluno A_4 afirmar que a atividade de investigação ampliou seus conhecimentos matemáticos, explicou de forma distinta.

Figura 25: Contribuições da atividade de investigação para o aluno A_4

3. Você acredita que a atividade de investigação ampliou os seus conhecimentos matemáticos? Explique.

Sim, pois não apenas fui exposta ao assunto
como me envolvi diretamente, o que despertou meu
interesse.

Fonte: O autor, 2022.

Na Figura 25, percebemos que o aluno A_4 afirmou que se “envolveu diretamente” ao assunto e que despertou seu interesse, ou seja, inferimos que passou pelos momentos da investigação de forma articulada.

Figura 26: Opinião referente atividade investigativa do aluno A₂

4. O que você achou da atividade por meio de investigação? Explique.

Mais eficiente para mim porque desperta interesse e ajuda que eu evite a desconcentração que eu normalmente tenho. (-)

Fonte: O autor, 2022.

O aluno A₂, de acordo com a Figura 26, afirma que a atividade de investigação despertou seu interesse e atenção. Isso nos mostra o quanto o uso de atividades investigativas enriquece a aula e torna-se um método mais aceito pelos alunos. De forma mais incisiva, temos a resposta do aluno A₁ da mesma pergunta.

Figura 27: Opinião referente atividade investigativa do aluno A₁

4. O que você achou da atividade por meio de investigação? Explique.

Muito excelente. Principalmente porque tira-se o aluno da zona de conforto, subverte a lógica de uma aula passiva.

Fonte: O autor, 2022.

Afirmou que a atividade foi excelente e que “tirou” da zona de conforto, ou seja, expõe o aluno como o principal sujeito do processo de ensino-aprendizagem. Em sua afirmação, infere-se que a atividade por meio da investigação tornou-se a aula ativa. Em seguida, esse mesmo aluno A₁ na quinta pergunta, atribuiu uma nota 10 referente a aula aplicada.

Figura 28: Opinião referente a aula do aluno A₁

5. Qual sua opinião sobre a aula de hoje? Atribua uma nota de 1 a 10.

10. Foi uma aula muito proveitosa, na qual foi possível participar na construção e entender o assunto de forma melhor.

Fonte: O autor, 2022.

Na Figura 28, observamos novamente na resposta do aluno A₁ sua opinião sobre a aula, em que o próprio participou da construção e isso fez com que entendesse melhor o assunto abordado. Na mesma perspectiva, temos outra resposta na Figura 29, do aluno A₆.

Figura 29: Opinião referente a aula do aluno A_6

5. Qual sua opinião sobre a aula de hoje? Atribua uma nota de 1 a 10.

10, foi instigante e interessante, me desafiou e aprendi como utilizar a ferramenta e noções básicas.

Fonte: O autor, 2022.

O aluno acima atribuiu a nota 10 e definiu a aula como instigante e interessante, isso nos mostra o quanto a aula foi produtiva. Além disso, destaca a utilização da ferramenta e noções básicas, na qual podemos inferir que se trata do GeoGebra.

Figura 30: Considerações do estímulo ao raciocínio e senso crítico do aluno A_4

6. Durante a aula foi estimulado o raciocínio e o senso crítico de pesquisa? Explique.

Definitivamente sim. Ao aplicar o método em que o aluno é protagonista de seu aprendizado, o senso crítico é incentivado.

Fonte: O autor, 2022.

O aluno A_4 evidenciou diante a sexta pergunta que foi protagonista e isso incentivou o senso crítico de pesquisa. Sendo assim, é possível perceber que o objetivo do método aplicado foi válido. A seguir, na Figura 31, temos a resposta do aluno A_3 que também afirmou ter estimulado seu senso crítico na aula.

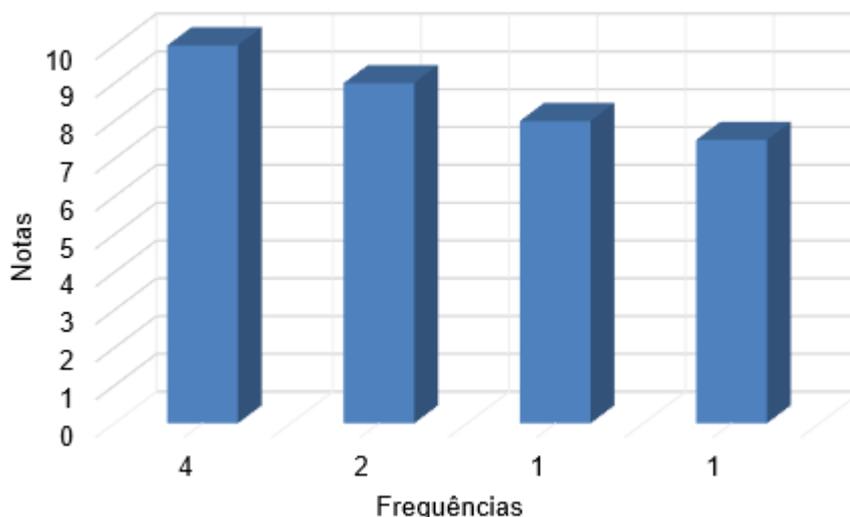
Figura 31: Considerações do estímulo ao raciocínio e senso crítico do aluno A_3

6. Durante a aula foi estimulado o raciocínio e o senso crítico de pesquisa? Explique.

Sim. Pois estimulou meu raciocínio, participei do processo, não foi um processo passivo, e sim ativo.

Fonte: O autor, 2022.

O aluno A_3 também descreveu igualmente aos alunos já destacados acima, afirmando que não foi um processo passivo, conseqüentemente, sendo ativo e estimulando seu raciocínio. Em seguida, na sétima pergunta era atribuída uma nota pelo seu próprio interesse na atividade.

Gráfico 3: Respostas sobre o interesse pelas atividades

Fonte: O autor, 2022.

Nota-se que metade dos participantes atribuiu nota 10 ao seu interesse pela aprendizagem. Em contrapartida, os demais variaram a nota entre 7 a 9, mas que é uma nota consideravelmente boa para avaliar. Podemos inferir que, a metodologia aplicada proporcionou maior interesse durante a atividade. A partir disso, a próxima pergunta tinha enfoque para saber as dificuldades na resolução da atividade.

Figura 32: Relato da maior dificuldade na atividade do aluno A_7

8) Qual foi sua maior dificuldade na atividade? Explique.

Meus conhecimentos limitados sobre o aplicativo, entretanto com o passar do tempo entendi como usar

Fonte: O autor, 2022.

O aluno A_7 expressou sua dificuldade em relação ao aplicativo, neste caso, o GeoGebra. Mas no desenvolvimento os impasses foram sanados, pois a ferramenta é autodidata. Nesta análise, possibilitou o entendimento que poderia ser mais orientado o uso das ferramentas do aplicativo. Em contrapartida, os alunos A_4 e A_1 , ambos relataram dificuldade na etapa de rotação.

Figura 33: Relato da maior dificuldade na atividade do aluno A_4

8) Qual foi sua maior dificuldade na atividade? Explique.

A etapa da rotação. Seuei mais tempo para compreender pois a priori deixou-me confuso.

Fonte: O autor, 2022.

O aluno A_4 citou que demorou mais tempo para compreender, pois estava confuso. Da mesma forma, o aluno A_1 relatou a dificuldade de visualizar o que foi mostrado no GeoGebra após os comandos utilizados, tornando-o difícil. A partir disso, verificamos a necessidade de haver alterações nesta etapa para tornar melhor o entendimento da proposta.

Figura 34: Relato da maior dificuldade na atividade do aluno A_1

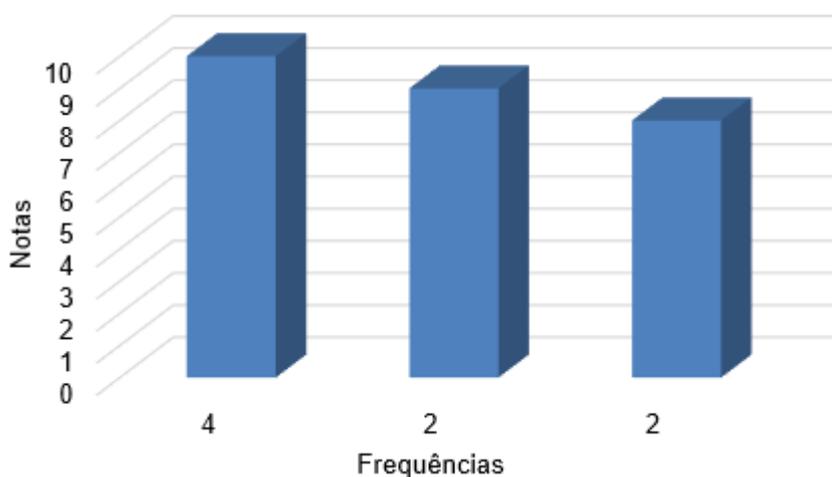
8) Qual foi sua maior dificuldade na atividade? Explique.

Foi a parte de "Rotação", na vista que até na parte de conseguir visualizar o que foi mostrado no GeoGebra para mim foi difícil

Fonte: O autor, 2022.

A partir dessas análises referente às dificuldades, percebemos que na etapa de rotação seria necessário fazer algumas alterações para deixar mais evidente o que está proposto, além do professor mediar conforme as etapas da Investigação Matemática.

Gráfico 4: Respostas da avaliação do material didático disponibilizado

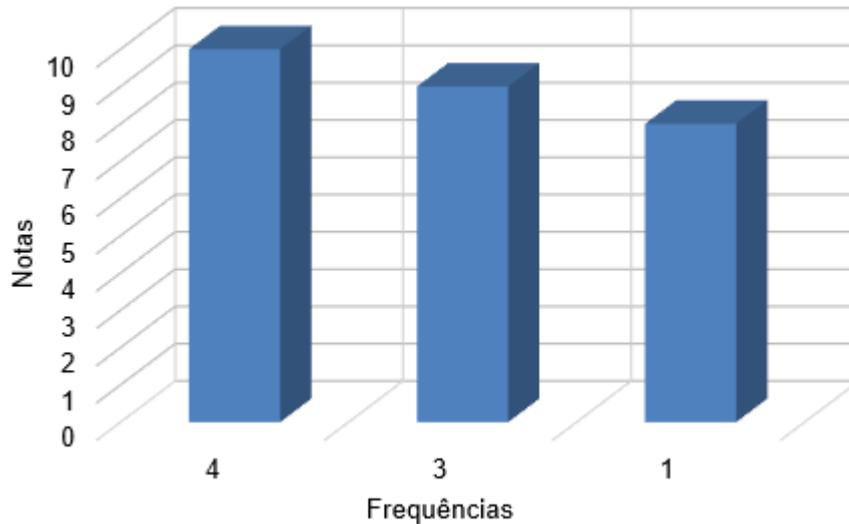


Fonte: O autor, 2022.

No Gráfico 4, foi solicitado para atribuir uma nota avaliativa do material didático disponibilizado. Percebe-se que metade dos alunos avaliaram com a nota máxima e os demais com notas 9 e 8. Sendo assim, foi bem avaliado pelos discentes que realizaram a atividade, mesmo ocorrendo dúvidas no enunciado da proposta de

rotação. Após essa pergunta, a próxima trata-se do interesse do aluno com o assunto depois da atividade.

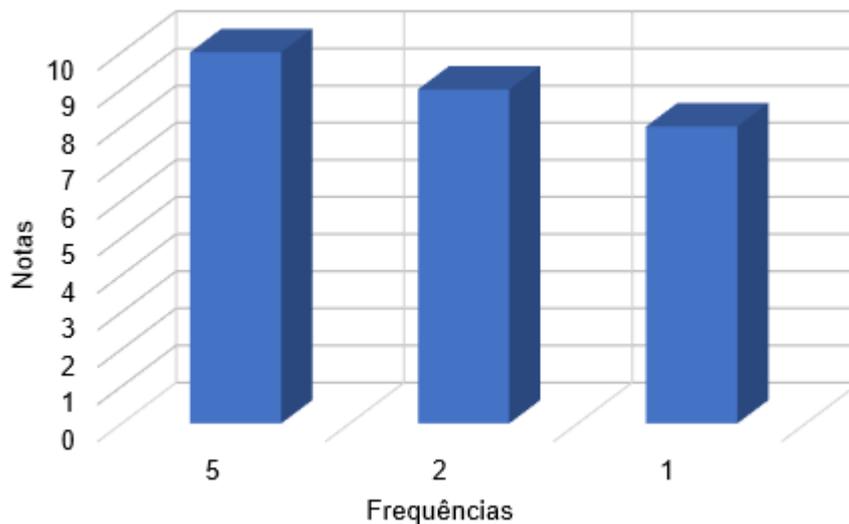
Gráfico 5: Respostas sobre o interesse pelo assunto após atividade



Fonte: O autor, 2022.

Verifica-se que a nota atribuída pelo interesse dos alunos foi alta, sendo 10, 9 e 8, com frequências 4, 3 e 1, respectivamente. Podemos inferir um ótimo aproveitamento por meio dessas classificações dada pelos participantes. Além disso, reforça a importância dessa metodologia no ensino de Matemática, para que os alunos tenham mais interesse e, conseqüentemente, mais aprendizagens.

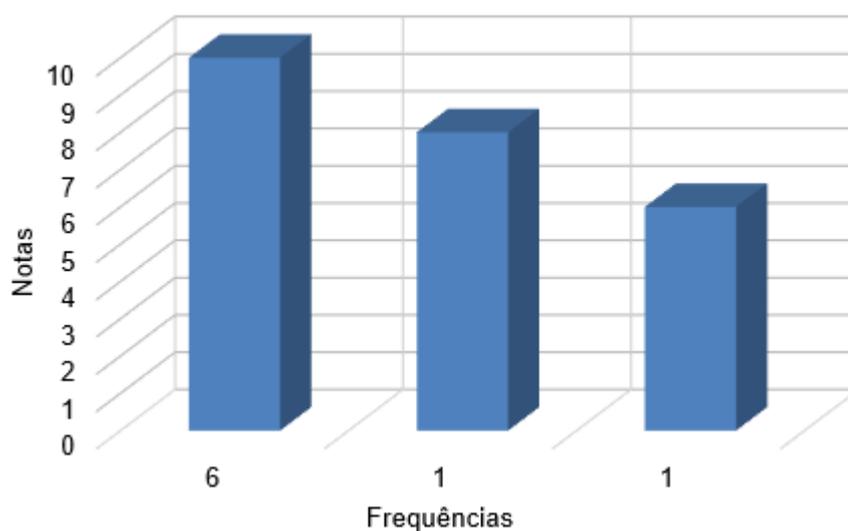
Gráfico 6: Respostas referentes aos conhecimentos adquiridos através da atividade



Fonte: O autor, 2022.

Nesta pergunta acima, temos uma maior frequência na nota 10, refere-se aos novos conhecimentos dos alunos através da atividade. Menos da metade atribui notas 9 e 8, que significativamente é uma boa nota em relação a pergunta. Esse é realmente o intuito da investigação, propiciar aos estudantes o protagonismo e que busquem o conhecimento de forma significativa.

Gráfico 7: Respostas referentes ao esforço durante a atividade



Fonte: O autor, 2022.

A última pergunta se refere ao esforço do discente durante a atividade. Constata-se que mais da metade atribuiu nota 10, e dois alunos com nota 8 e 6. É importante ressaltar, que este aluno com nota 6 em seu esforço, não foram utilizadas suas respostas nas análises acima por não convergir com as discussões propostas para este trabalho.

A partir disso, é possível refletir sobre as etapas da Investigação Matemática presente no decorrer da atividade proposta. Em sala, foi perceptível o momento em que os alunos exploraram e formularam as questões, por exemplo, a construção de um polígono qualquer que estava presente em todas as propostas sugeridas para realizarem.

Em seguida, as interpretações das duplas foram cruciais para a formulação de conjecturas com a organização dos dados. Ou seja, a partir do polígono criado deveriam utilizar-se do *software* e analisar as modificações realizadas na interface. De acordo com as modificações, os alunos estavam no processo de teste e reformulação de suas conjecturas.

O resultado de cada proposta estava atrelado ao conceito envolvido de simetrias, seja por reflexão, rotação ou translação. Desse modo, os alunos justificavam suas conjecturas a partir do resultado encontrado. Ao final, a construção do mapa mental teve como propósito avaliar o raciocínio de cada reflexão proposta e para que os alunos organizassem as ideias e o raciocínio pensado.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O ensino de Matemática com atividades investigativas mostrou-se como uma metodologia que auxilia no processo de ensino e aprendizagem. Conforme a problemática da pesquisa: como a utilização do *software GeoGebra* aliado a atividade investigativa pode contribuir para o ensino-aprendizagem de simetria. A atividade elaborada e executada, obtiveram resultados satisfatórios.

Foi possível identificar os momentos da Investigação Matemática na atividade proposta, a exploração e formulação de questões, a formulação de conjecturas, o teste e reformulação de conjecturas e a justificação e avaliação. Além disso, no momento da construção das etapas propostas aos alunos, tiveram intencionalidades e caminhos para o desenvolvimento do pensamento geométrico.

Dessa forma, por meio da aplicação da atividade percebemos que houve a compreensão do Pensamento Geométrico de acordo com Fischbein (1993), Duval (1995) e Pais (1996). Pois, na medida em que o professor direcionou os momentos de exploração de conceitos, formulação de conjecturas e realização de testes propiciou no desenvolvimento do Pensamento Geométrico.

Ademais, as etapas proporcionaram manipulações e explorações de conceitos por meio do *software GeoGebra*. Em particular, podemos citar a construção do mapa mental, que exigiu a organização e compreensão das simetrias. Comparado aos resultados, tornou-se claro a efetividade do objetivo geral, conforme já visto na BNCC (2018).

Em relação aos objetivos específicos, foi possível comparar as simetrias com a utilização do *GeoGebra*. Ressaltando que, a simetria de rotação foi a que possuiu mais dificuldades de os alunos compreenderem, seja pela proposta ou manuseio do *software*. No segundo, foi possível verificar que a BNCC traz a importância do uso de *software* de geometria dinâmica, mas de forma geral sem especificar o conteúdo de simetrias tratado na pesquisa.

Durante a aplicação e a análises feitas a posteriori, compreendemos o quanto a Investigação Matemática como metodologia interferiu de forma positiva no ensino-aprendizagem de simetrias. Sendo que os resultados mostraram maior interesse dos alunos durante aplicação, além disso, foi perceptível o estímulo da turma após atividade. Em síntese, este trabalho buscou mostrar a eficácia e aproveitamento de

atividades investigativas de simetria com a utilização do GeoGebra, proporcionando para o professor um novo olhar e despertando no aluno o interesse pela Matemática.

REFERÊNCIAS

ARAÚJO, M. G.; CRUVINEL, P. C. de J.; RIBEIRO, P. S.; VAZ, D. A. de F.; Avaliação da aprendizagem na proposta de investigação Matemática com o GeoGebra. *In: ____*. **Educação e Ensino de Ciências e Matemática: pesquisa, aplicação e novas tendências**. Ed. 1. Guarujá: Científica Digital, 2022. p.17-22. (vol.2).

BRASIL. **Ministério da Educação**. Base Nacional Comum Curricular. Brasília, 2018.

BRITIS, K. G.; SANTOS, C. A. B. dos; OLIVEIRA, M. N. de; NASCIMENTO, P. C. do. Uma sequência didática mediada pelo software GeoGebra para o ensino de Simetria Axial. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, [S. l.], v. 7, n. 4, p. 112–127, 2016. DOI: 10.26843/rencima.v7i4.1209. Disponível em: <https://revistapos.cruzeirodosul.edu.br/index.php/rencima/article/view/1209>. Acesso em: 07 nov. 2022.

ERNEST, P. (1996). **Investigações, resolução de problemas e pedagogia**. In P. Abrantes, L. Cunha Leal e J. P. Ponte (Orgs.), *Investigar para aprender matemática: Textos selecionados* (pp. 25-47). Lisboa: Projeto Matemática Para Todos e Associação de Professores de Matemática.

FISCHBEIN, E. The Theory of Figural Concepts. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, v. 24, n.2, p. 139-162, 1993.

GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa**. São Paulo: Atlas, 2002.

LAVILLE, C.; DIONNE, J. **A construção do saber: manual de metodologia da pesquisa em ciências humanas**. Porto Alegre: Artes Médicas Sul; Belo Horizonte: UFMG, 1999.

PAIS, L. C. Intuição, experiência e teoria geométrica. **Revista Zetetiké**, Campinas, v.4, n.6, p. 65-74, 1996.

RAFAEL, J. A. M. .; MIRANDA, P. R. de . **Onde está a Simetria? Uma investigação nos documentos oficiais e livros didáticos de Matemática**. *Revista de Investigação e Divulgação em Educação Matemática* , [S. l.], v. 2, n. 1, 2019. DOI: 10.34019/2594-4673.2018.v2.27362. Disponível em: <https://periodicos.ufjf.br/index.php/ridema/article/view/27362>. Acesso em: 27 nov. 2022.

SILVA, Adriano Costa da. **Atividades Investigativas de Matemática com Celular: uso do GeoGebra para o ensino de Geometria Espacial**. Orientadora: Rejane Waiandt Schuwartz de Carvalho Faria. 2022. Monografia (Graduação) - Curso de Licenciatura em Matemática, Departamento de Matemática, Universidade Federal de Viçosa, Viçosa, 2022. Disponível em: <https://www.locus.ufv.br/bitstream/123456789/28798/1/texto%20completo.pdf>. Acesso em: 09 nov. 2022

SILVA, Ubiratan Barbosa da. **Contribuições do Software Geogebra para a aprendizagem sobre simetria no 1º ano do Ensino Médio**. Orientadora: Regina

Coelly Mendes da Silva. 2019. 65. TCC (Graduação) - Curso de Licenciatura em Matemática, Departamento de Ciências Exatas, Universidade Federal da Paraíba, Rio Tinto, 2019. Disponível em: <https://repositorio.ufpb.br/jspui/handle/123456789/17115> . Acesso em: 09 nov. 2022

PONTE, J. P.; BROCARD, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações matemáticas na sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2003.

PONTE, J. P., BROCARD, J. OLIVEIRA, H.; **Investigações Matemáticas na Sala de Aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

PONTE, J. P., OLIVEIRA, H., CUNHA, H., & SEGURADO, I. **Histórias de investigações matemáticas**. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional. 1998 <https://www.researchgate.net/publication/261178171_Historias_de_investigacoes_matematicas> Acesso em: 04 nov. 2022.

APÊNDICES**APÊNDICE A - FORMULÁRIO INICIAL**

FORMULÁRIO INICIAL	
1.	Você usa Matemática no seu dia a dia? Dê um exemplo.
	<hr/> <hr/> <hr/>
2.	Você conhece as simetrias(reflexão, translação e rotação)?
()	SIM
()	NÃO
2.1	Caso a resposta for sim, relate uma síntese sobre as simetrias:
	<hr/> <hr/> <hr/>
3.	Você acredita que com seus conhecimentos prévios e sua experiência de vida, você consegue resolver questões que envolvem simetrias de figuras planas? Explique.
	<hr/> <hr/> <hr/>
4.	Você já realizou uma atividade de matemática por meio da investigação?
()	SIM
()	NÃO
4.1	Caso a resposta for sim, nos conte como foi sua experiência.
	<hr/> <hr/> <hr/>

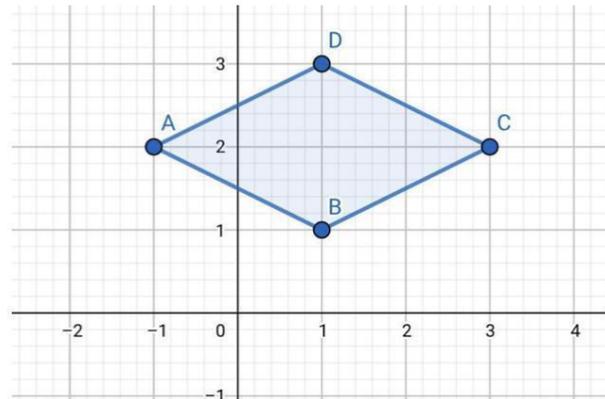
APÊNDICE B - FOLHA DAS ETAPAS PARA AS DUPLAS

(RE)PENSAR AS SIMETRIAS DE FIGURAS PLANAS

GRUPO: (1) (2) (3) (4)

Observação: A cada procedimento façam um *print* da tela.

1) Através do *software* GeoGebra temos diversas maneiras de criar polígonos. A imagem abaixo mostra uma construção:



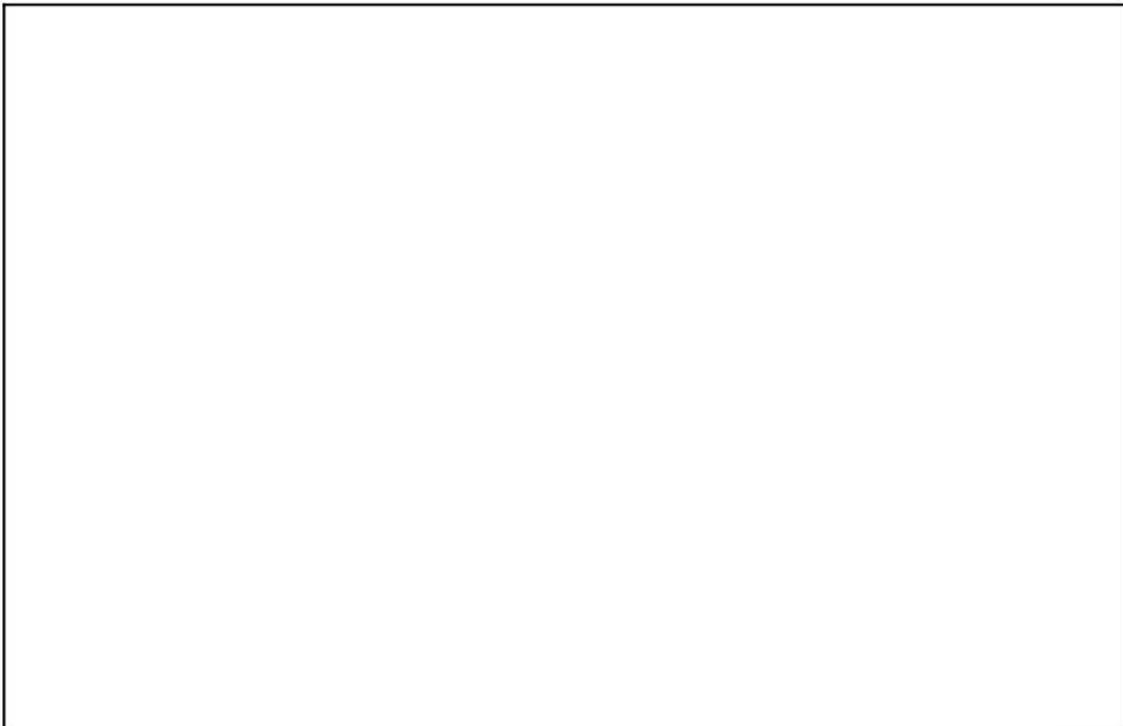
Dessa forma, criem um polígono qualquer e descrevam de qual maneira vocês utilizaram para criar.

2) Após a criação, trace uma reta externa a esse polígono. Feito isso, utilize a ferramenta “*Reflexão em relação a uma reta*” e clique na região interna do polígono e na reta. A partir disso, o que vocês observam que aconteceu? Quais conclusões podem ser feitas em relação aos polígonos e a reta? Explore outras ferramentas disponibilizadas no GeoGebra.

3) Construa outro polígono qualquer, como foi solicitado na primeira etapa. Após a criação, determine um ponto externo ao polígono. Feito isso, utilize a ferramenta “*Rotação em torno de um ponto*” e clique na região interna do polígono e no ponto, e escolha um ângulo $0^\circ < \alpha < 360^\circ$. A partir disso, o que vocês observam que aconteceu? Quais conclusões podem ser feitas em relação aos polígonos e o ponto? O que ocorre se escolher o ângulo de 0° e 360° ? Explore outras ferramentas disponibilizadas no GeoGebra.

4) Construa outro polígono qualquer, como foi solicitado na primeira etapa. Após a criação, determine um vetor externo ao polígono. Feito isso, utilize a ferramenta “*Translação por um vetor*” e clique na região interna do polígono e no vetor. A partir disso, o que vocês observam que aconteceu? Quais conclusões podem ser feitas em relação aos polígonos e o vetor? Explore outras ferramentas disponibilizadas no GeoGebra .

5) Realizadas as etapas acima e discutidas as soluções com os demais grupos e professor, criem um mapa mental com as informações mais importantes referente as simetrias(reflexão, rotação e translação).



APÊNDICE C - FORMULÁRIO FINAL**FORMULÁRIO FINAL**

1. Quais conhecimentos matemáticos foram usados na aula de hoje?

2. Descreva o que você compreendeu sobre as simetrias(reflexão, translação e rotação):

3. Você acredita que a atividade de investigação ampliou os seus conhecimentos matemáticos? Explique.

4. O que você achou da atividade por meio de investigação? Explique.

5. Qual sua opinião sobre a aula de hoje? Atribua uma nota de 1 a 10.

6. Durante a aula foi estimulado o raciocínio e o senso crítico de pesquisa? Explique.

7. Demonstrou interesse pela compreensão, e aprendizado das simetrias? (Atribua uma nota de 1 a 10) _____

8) Qual foi sua maior dificuldade na atividade? Explique.

9. Avalie o material didático fornecido. (Atribua uma nota de 1 a 10) _____

10. Após realizar a atividade, seu interesse pelo assunto aumentou? (Atribua uma nota de 1 a 10) _____

11. Você adquiriu conhecimentos novos com esta disciplina? (Atribua uma nota de 1 a 10)

12. Durante a atividade, o seu esforço foi? (Atribua uma nota de 1 a 10) _____