

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO PAMPA**

**MYLENA BARCELLOS DA SILVA**

**ANÁLISE DO EFEITO DE ESCALA NA RESISTÊNCIA À TRAÇÃO DE  
MATERIAIS QUASE FRÁGEIS UTILIZANDO A PERIDINÂMICA**

**Alegrete  
2023**

**MYLENA BARCELLOS DA SILVA**

**ANÁLISE DO EFEITO DE ESCALA NA RESISTÊNCIA À TRAÇÃO DE  
MATERIAIS QUASE FRÁGEIS UTILIZANDO A PERIDINÂMICA**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Engenharia Mecânica da Universidade Federal do Pampa, como requisito parcial para obtenção do Título de Bacharel em Engenharia Mecânica.

Orientador: Prof. Leandro Ferreira Friedrich

**Alegrete  
2023**

Ficha catalográfica elaborada automaticamente com os dados fornecidos  
pelo(a) autor(a) através do Módulo de Biblioteca do  
Sistema GURI (Gestão Unificada de Recursos Institucionais) .

S282a Silva, Mylena

ANÁLISE DO EFEITO DE ESCALA NA RESISTÊNCIA À TRAÇÃO DE  
MATERIAIS QUASE FRÁGEIS UTILIZANDO A PERIDINÂMICA / Mylena  
Silva.

39 p.

Trabalho de Conclusão de Curso(Graduação)-- Universidade  
Federal do Pampa, ENGENHARIA MECÂNICA, 2023.

"Orientação: Leandro Friedrich".

1. peridinâmica. 2. efeito de escala. 3. materiais quase  
frageis. I. Título.

**MYLENA BARCELLOS DA SILVA**

**ANÁLISE DO EFEITO DE ESCALA NA RESISTÊNCIA À TRAÇÃO DE MATERIAIS QUASE FRÁGEIS UTILIZANDO A PERIDINÂMICA**

Trabalho de Conclusão de curso apresentado ao curso de Engenharia Mecânica da Universidade Federal do Pampa, como requisito parcial para obtenção do Título de Bacharel em Engenharia Mecânica.

Dissertação defendida e aprovada em: 31, janeiro de 2023.

Banca examinadora:

---

Prof. Msc. Leandro Ferreira Friedrich

Orientador

Unipampa

---

Prof. Dr. Thiago da Silveira

Unipampa

---

Prof. Dr. Vicente Puglia

Unipampa



Assinado eletronicamente por **LEANDRO FERREIRA FRIEDRICH, PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR**, em 31/01/2023, às 15:38, conforme horário oficial de Brasília, de acordo com as normativas legais aplicáveis.



Assinado eletronicamente por **VICENTE BERGAMINI PUGLIA, PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR**, em 31/01/2023, às 15:48, conforme horário oficial de Brasília, de acordo com as normativas legais aplicáveis.



Assinado eletronicamente por **THIAGO DA SILVEIRA, PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR**, em 06/02/2023, às 13:46, conforme horário oficial de Brasília, de acordo com as normativas legais aplicáveis.



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site [https://sei.unipampa.edu.br/sei/controlador\\_externo.php?acao=documento\\_conferir&id\\_orgao\\_acesso\\_externo=0](https://sei.unipampa.edu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0), informando o código verificador **1034309** e o código CRC **28195E4A**.

## RESUMO

O problema do efeito de escala nas propriedades do material torna-se um ponto particularmente importante quando é feita uma transição entre o tamanho da estrutura testada em laboratório e seu tamanho real. Assim, a questão da validade dos testes de laboratório e a previsão do seu comportamento em estruturas de engenharia continuam ser um tema em constante pesquisa. Sabe-se que à medida que o tamanho da amostra testada aumenta, há uma mudança no comportamento global de dúctil para frágil. Capturar essa mudança é a chave para conhecer o comportamento real do material e oferecer melhores previsões para o projeto desse tipo de estrutura. Neste trabalho, a aplicação da teoria Peridinâmica (PD) é avaliada para prever o comportamento de corpos de prova de materiais quase frágeis de diferentes tamanhos submetidos à carga de tração uniaxial e flexão em quatro pontos utilizando uma lei de dano bilinear. Os resultados mostram que a PD, nas duas aplicações, é capaz de prever o efeito de escala, com valores coerentes com os observados na literatura.

Palavras-Chave: Efeito de Escala, Peridinâmica, materiais quase frágeis.

## **ABSTRACT**

The problem of the Size effect on the material's properties like becomes a particularly important point when a transition is made between the size of the structure tested in the laboratory and its actual size. Thus, the question of the validity of laboratory tests and the prediction of their behavior in engineering structures continue to be a topic in constant research. It is known that as the size of the tested sample increases, there is a change in the global behavior from ductile to brittle. Capturing this change is the key to knowing the real behavior of the sample and offering better predictions for the design of this type of structure. In this work, the application of the Peridynamic (PD) theory is evaluated to predict the behavior of quasi brittle material specimens of different sizes submitted the uniaxial traction load and four-point bending loading using a bilinear damage law. The results show that the PD, in both applications, is able to predict the scale effect, with values consistent with those observed in the literature.

**Keywords:** Size Effect, Peridynamics, Quasi Brittle Materials.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Representação do Efeito de Escala em função da Tensão <i>vs</i> Deflexão relativa. ....	1
Figura 2– Representação esquemática de um corpo sólido e horizonte $\delta$ em modelo PD. ....	3
Figura 3– Influência da zona de processo de fratura. ....	5
Figura 4– Resistência a tração <i>vs</i> tamanho da estrutura em escala bi logarítmica. ....	6
Figura 5– Corpos sem entalhes analisados em Carpinteri e Chaia, 2002: dados de (a) Sabnis & Mirza, 1979, e (b) Hasegawa et al., 1985. ....	7
Figura 6– Corpos com entalhes analisados em Carpinteri e Chaia, 2002: dados de (a) Bazant & Pfeiffer, 1987, e (b) Nooru–Mohamed & Van Mier, 1991. ....	8
Figura 7- Efeito de escala para a tensão última, $\sigma_u$ . ....	8
Figura 8- Ilustração do efeito de escala em vigas de diferentes tamanhos e seus respectivos comportamentos globais. ....	9
Figura 9 – Principais parâmetros da Peridinâmica. ....	12
Figura 10 - Lei constitutiva uniaxial para determinação do dano. ....	13
Figura 11 - Energias envolvidas durante o processo do dano de acordo com a lei bi linear. ....	15
Figura 12 - Campo aleatório da Peridinâmica. ....	15
Figura 13 - Tamanho das amostras e condições de contorno. ....	17
Figura 14 - Tamanho das amostras e condições de contorno. ....	19
Figura 15 - a) Deslocamento <i>versus</i> tensão última para cada tamanho de placa, b) Valores médios de tensão última e coeficiente de variação (CV) e número de fragilidades ( $N_p$ ). ....	20
Figura 16 - Configuração de ruptura representativa de cada uma das placas de diferentes tamanhos. ....	21
Figura 17 - Evolução das energias envolvidas durante o processo de fratura para os diferentes comportamentos classificados. ....	22
Figura 18 – Avaliação do efeito de escala em placas sob tração considerando diferentes comprimentos de correlação. ....	23
Figura 19 – Curvas tensão de flexão <i>versus</i> deflexão representativas para a resposta de cada tamanho de viga. ....	24
Figura 20 – Configuração de ruptura representativa de cada uma das vigas de diferentes tamanhos. ....	25
Figura 21 – Avaliação do efeito de escala em viga sob flexão. ....	26



## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Propriedades mecânicas e parâmetros do modelo PD. ....	18
Tabela 2 – Dimensões dos modelos analisados para as placas sob tração. ....	18
Tabela 3 – Dimensões dos modelos analisados na PD para o caso das vigas sob flexão.....	19
Tabela 4 – Valores médios de tensão de flexão última, coeficiente de variação (CV) e número de fragilidades ( $N_p$ ). ....	24

## **LISTA DE ABREVIATURAS**

EA - Efeito de Escala

PD – Peridinâmica

LDEM – Lattice Discrete Element Method

MEF – Método dos Elementos Finitos

MED – Método dos Elementos Discretos

SEL – Size Effect Law

MFLE – Mecânica da Fratura Linear Elástica

MFSL – Multifractal Scale Law

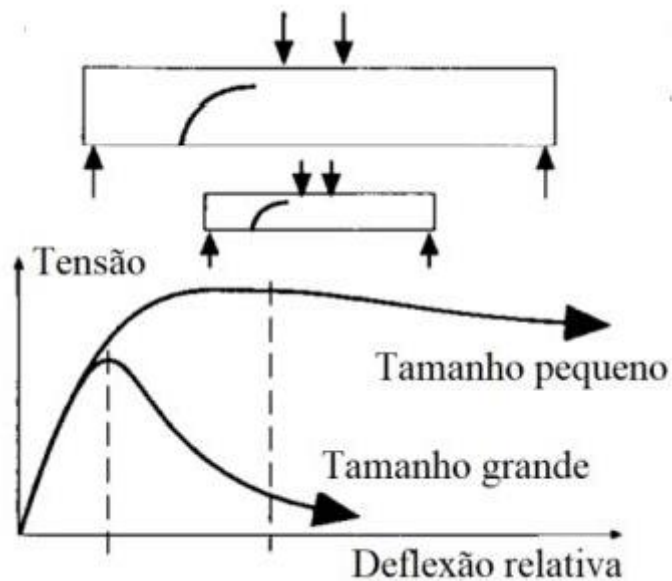
## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO .....</b>	<b>1</b>
1.1	Objetivos .....	3
1.2	Estrutura do trabalho .....	3
<b>2</b>	<b>FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA .....</b>	<b>5</b>
2.1	Materiais quase frágeis.....	5
2.2	Efeito de Escala.....	6
2.3	Comportamento de transição dúctil-frágil.....	8
2.4	Peridinâmica.....	10
2.4.1	Formulação da peridinâmica baseada em ligações ( <i>bond-based</i> ).....	11
2.4.2	Lei constitutiva bi linear .....	14
2.4.3	Aleatoriedade no modelo PD .....	15
<b>3</b>	<b>METODOLOGIA .....</b>	<b>17</b>
3.1	Aplicação 1: Placas sob tração .....	17
3.2	Aplicação 2: Vigas sob flexão em quatro pontos .....	18
<b>4</b>	<b>RESULTADOS E DISCUSSÕES.....</b>	<b>20</b>
4.1	Aplicação 1: placas em tração .....	20
4.1.1	Avaliação do comportamento global .....	20
4.1.2	Avaliação do efeito de escala e influência do comprimento de correlação .....	22
4.2	Aplicação 2: viga sob flexão em 4 pontos.....	23
4.2.1	Avaliação do comportamento global .....	23
4.2.2	Avaliação do efeito de escala e influência do comprimento de correlação .....	25
<b>5</b>	<b>CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS .....</b>	<b>26</b>
<b>6</b>	<b>REFERÊNCIAS .....</b>	<b>27</b>

## 1 INTRODUÇÃO

O efeito de escala estrutural é um fenômeno que está presente em muitos materiais da engenharia, principalmente aqueles com características quase frágeis, como concreto, rochas, espumas entre outros. Quando há uma alteração nas dimensões características desses materiais, ou seja, no tamanho da estrutura, ocorre uma variação das propriedades mecânicas, como a resistência a tração, deformação crítica e resistência a fadiga, por exemplo, essa alteração é conhecida como efeito de escala. O EA é rigorosamente definido por meio de uma comparação de estruturas geometricamente semelhantes de diferentes tamanhos. A Figura 1, mostra um exemplo típico da ocorrência do efeito de escala em vigas em um ensaio de quatro pontos. Nota-se que a viga de tamanho pequeno, comporta-se de maneira dúctil, caracterizado pela alta resistência a tração e rompimento suave. Analisando a viga de tamanho grande, podemos observar seu comportamento frágil, caracterizado pela baixa resistência a tração e rompimento inesperado.

Figura 1 – Representação do Efeito de Escala em função da Tensão vs Deflexão relativa.



Fonte: Adaptado ACI Committee 446 (2019).

O Efeito de Escala nos materiais faz-se na história da humanidade desde os primórdios, embora na ausência das teorias, as adaptações restringiam-se ao método da tentativa e erro. Através de estudos pioneiros, realizados experimentalmente à cerca da resistência dos materiais, Leonardo da Vinci afirmou que “quantas vezes o comprimento for diminuído, mais peso será possível aplicar do que na viga mais longa” (Colpo, 2016). A distinção entre os comportamentos frágil e quase frágil deve levar em conta a forma como o dano é distribuído

no volume da estrutura (Friedrich, 2021). O comportamento de um material quase frágil é não linear devido a distribuição do dano, ou seja, a nucleação e propagação de microfissuras, acarretando o decréscimo na rigidez da estrutura na direção do carregamento (Colpo, 2016). Materiais quase frágeis, apesar de não apresentarem plastificação, sofrem danos e perda da linearidade no final do regime elástico (Carvalho e Silva, 2017).

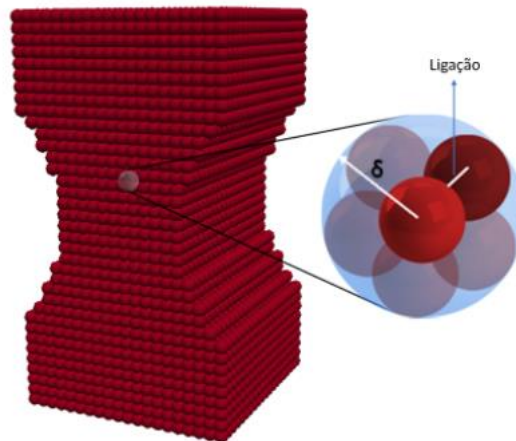
O problema do efeito de escala em materiais quase frágeis tem se tornado um tema de pesquisa constante devido à necessidade de uma projeção adequada do comportamento mecânico desses materiais em grandes estruturas, como pontes, edifícios, componentes e partes de aviões entre outros, em que a escala é muito maior do que aquela geralmente analisada em laboratório (Carpinteri, 1986).

Com o avanço computacional e a grande necessidade de simular estruturas maiores e cada vez mais complexas, os métodos numéricos apresentam-se como uma alternativa aos ensaios experimentais. Entre os métodos numéricos mais utilizados na análise de estruturas está o método dos elementos finitos (MEF), baseado na mecânica do contínuo. Porém, esse método é limitado quando necessário representar a transição do contínuo para o descontínuo, ou seja, quando há o surgimento de trincas, por exemplo. Uma alternativa ao MEF é o método dos elementos discretos (MED) onde o surgimento e propagação de trincas com grandes zonas de dano ocorre de maneira natural (Friedrich, 2021). Um desses métodos é a Peridinâmica (PD), método proposto por Silling (2000) é uma teoria capaz de simular satisfatoriamente a iniciação e propagação de trincas.

Basicamente a teoria PD é uma reformulação das equações de movimento da mecânica dos sólidos (Soares *et al.*, 2018). A peridinâmica é um método numérico que representa um corpo sólido através de pontos materiais que interagem entre si por meio de uma ligação dentro de uma região delimitada chamada de horizonte  $\delta$ , mesmo que não estejam em contato direto como demonstrado na Figura 2.

Na teoria peridinâmica, as forças internas são expressas através de interações não-locais entre pares de pontos materiais dentro de um corpo contínuo e o dano faz parte do modelo constitutivo. Enquanto os outros métodos que utilizam a teoria clássica do contínuo recorrem a critérios de dano externos, na PD o dano é considerado como resposta natural do material, sem a utilização de critérios extras (Friedrich, 2021).

Figura 2– Representação esquemática de um corpo sólido e horizonte  $\delta$  em modelo PD.



Fonte: Adaptado Marchezan (2020).

Estudos iniciais sobre o efeito de escala na PD faz-se presente nos trabalhos realizados por Friedrich (2021), Marchesan (2020) e Barcellos *et al.* (2020). No entanto, há necessidade de estudos a serem realizados à cerca da influência de alguns parâmetros como a forma de distribuição das propriedades mecânicas do material e da lei constitutiva que governa a relação entre os pontos materiais na simulação do efeito de escala pela PD.

## 1.1 Objetivos

O objetivo geral deste trabalho é analisar o efeito de escala em materiais com características quase frágeis usando como ferramenta de simulação a peridinâmica.

Os objetivos específicos são:

- a) Avaliar o uso da PD na captura do efeito da escala da resistência a tração de placas utilizando a lei bi linear;
- b) Avaliar o uso da PD na captura do efeito da escala da resistência a flexão de vigas utilizando a lei bi linear;
- c) Investigar a influência da aleatoriedade no modelo PD, mais precisamente do comprimento de correlação.

## 1.2 Estrutura do trabalho

O presente trabalho é composto por quatro capítulos e referências bibliográficas. No primeiro capítulo apresenta-se a introdução do trabalho, contextualizando brevemente o tema abordado para uma melhor compreensão sobre o assunto. O segundo capítulo fundamentação

teórica exhibe os conceitos teóricos à cerca do tema proposto. Nesse capítulo são tratados os conceitos básicos sobre materiais quase frágeis, efeito de escala, peridinâmica e mecânica da fratura. No capítulo três é apresentada a metodologia proposta para o estudo do efeito de escala, com a descrição do modelo PD e as diferentes abordagens para o tema. Por fim, o quarto capítulo são apresentados os resultados e discussões, e no capítulo cinco as conclusões e sugestões para trabalhos futuros.

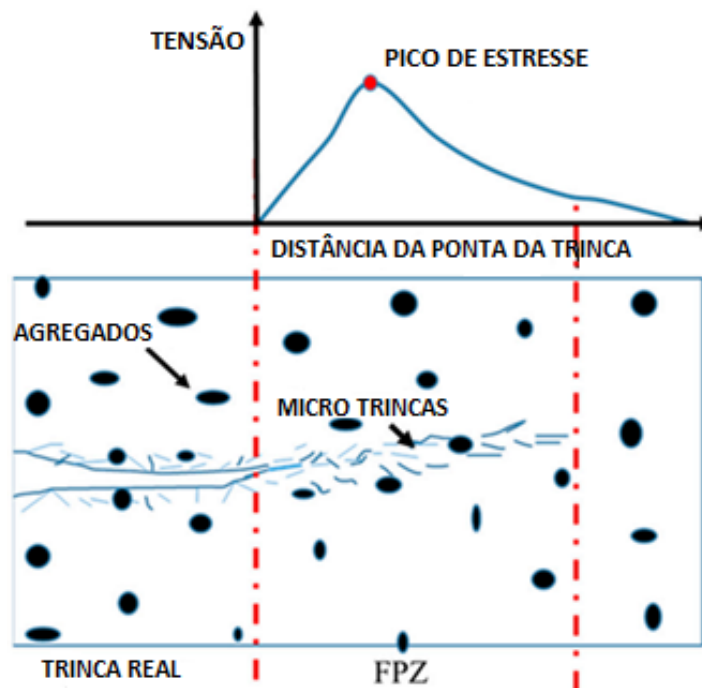
## 2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

### 2.1 Materiais quase frágeis

Segundo Bazant e Planas (1998) materiais quase frágeis como o concreto, rochas, cerâmicos, compósitos, gelo e alguns polímeros têm seus processos de falha afetados diretamente pela zona de processo de fratura (do inglês *Fracture Process Zone* - FPZ). A FPZ é uma zona não linear caracterizada por amolecimento (*softening*) progressivo, onde a tensão decresce com a deformação crescente.

A Figura 3 mostra a influência da FPZ em materiais quase frágeis. À medida que a fratura avança, na frente da ponta da trinca observa-se a formação e crescimento de um padrão de microfissuras densamente distribuído que induz uma resposta não linear do material. Com um aumento de carga adicional, o efeito de interação entre diferentes microfissuras à medida que crescem, dá lugar a um processo instável: algumas microfissuras coalescem para formar uma microfissura dominante que governa essa fase do processo de fratura ao mesmo tempo outras microfissuras param de se desenvolver. Nessa fase, há a uma alta concentração, ou localização, de deformações em uma faixa de pequena espessura (Huespe e Oliver, 2011).

Figura 3– Influência da zona de processo de fratura.



Fonte: Adaptado Kim *et al.* (2020).



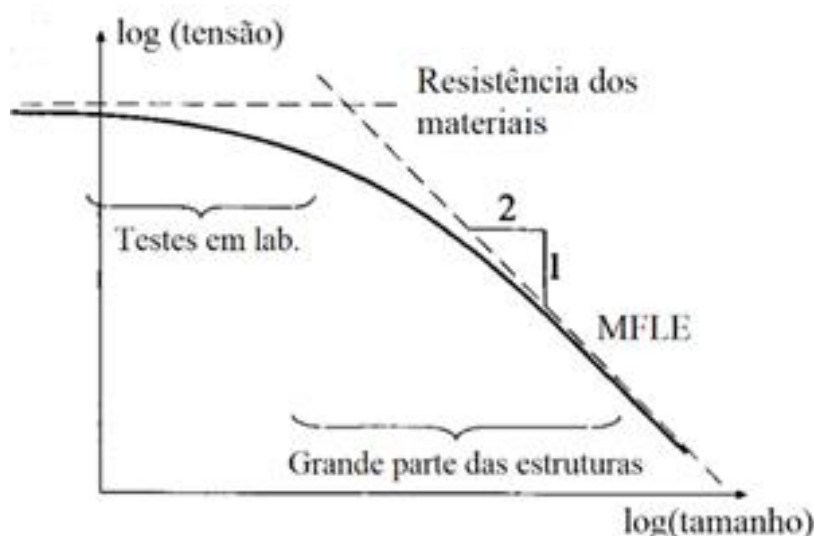
## 2.2 Efeito de Escala

O efeito de escala é conhecido desde os primórdios, porém com a restrição de conhecimento e teorias sobre o assunto, as adequações restringiam-se a tentativa e erro. O esclarecimento sobre o efeito de escala em materiais quase frágeis é de suma importância para o projeto adequado do seu comportamento quando solicitado. Testes laboratoriais são realizados antes da aplicação de materiais quase frágeis, porém algumas propriedades como a resistência a tração, são afetados com a mudança do tamanho, além das estruturas registrarem uma transição do seu comportamento global de dúctil para frágil (Friedrich, 2021).

No efeito de escala estrutural, observa-se uma transição do comportamento dúctil ao frágil quando o tamanho da estrutura é aumentado. Esse tipo de efeito de escala é visível nos diferentes materiais utilizados em engenharia, citando por exemplo grandes estruturas de aço que apresentam comportamento frágil ao passo que pequenos filamentos de vidro apresentam ductilidade (Kosteski, 2012).

Existem duas principais teorias que tratam sobre o efeito de escala estrutural em materiais quase frágeis. A primeira teoria a versar sobre o efeito de escala, após Weibull (1939) foi proposta por Bažant em 1984 e foi chamada de Lei do Efeito de Escala (do inglês *Size Effect Law* – SEL). A SEL diz que o efeito de escala é limitado por duas abordagens distintas para os diferentes tamanhos das estruturas, ver Figura 4.

Figura 4– Resistência a tração vs tamanho da estrutura em escala bi logarítmica.



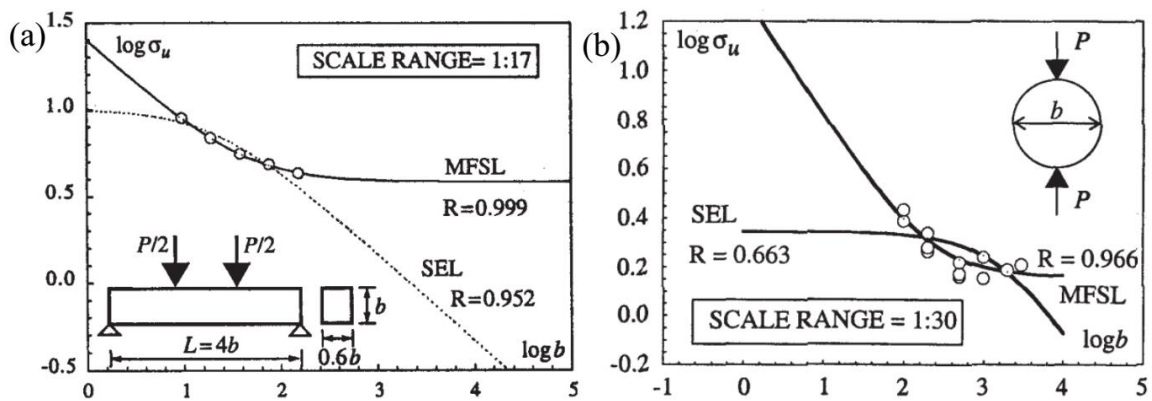
Fonte: Adaptado de ACI Committee 446 (1992).

Assim, a SEL tem como pontos de partida que a resistência do material para tamanhos pequenos é restrita pelo limite de plasticidade, enquanto que para tamanhos grandes o comportamento segue a mecânica da fratura linear elástica (MFLE) (Vliet, 2000). Logo, o efeito de escala pode ser demonstrado por uma curva não linear, resultando em uma transição gradual entre os dois limites mencionados, como visto na Figura 4.

Carpinteri e seus colaboradores propuseram a segunda teoria à cerca do estudo do efeito de escala em 1994 para materiais quase frágeis. Explica-se a segunda teoria pela desordem da meso estrutura e a existência de micro defeitos como microfissuras, micro vazios e poros. O modelo proposto por Carpinteri ficou conhecido como a Lei de Escala Multifractal (do inglês *Multi Fractal Scale Law - MFSL*).

Pode-se observar na Figura 5 e 6 um comparativo de resultados para ensaios realizados em corpos entalhados e sem entalhes, respectivamente. Foram utilizadas as duas teorias, MFSL e a SEL, para analisar os resultados obtidos sobre a tensão última vs tamanho característico da amostra em log-log. Nota-se que para os casos analisados a MFSL apresenta resultados melhores para amostras sem e com entalhes. Assim, o presente trabalho abordará a teoria multifractal, pois a MFSL não tem restrições com base na geometria, ao que contradiz a SEL.

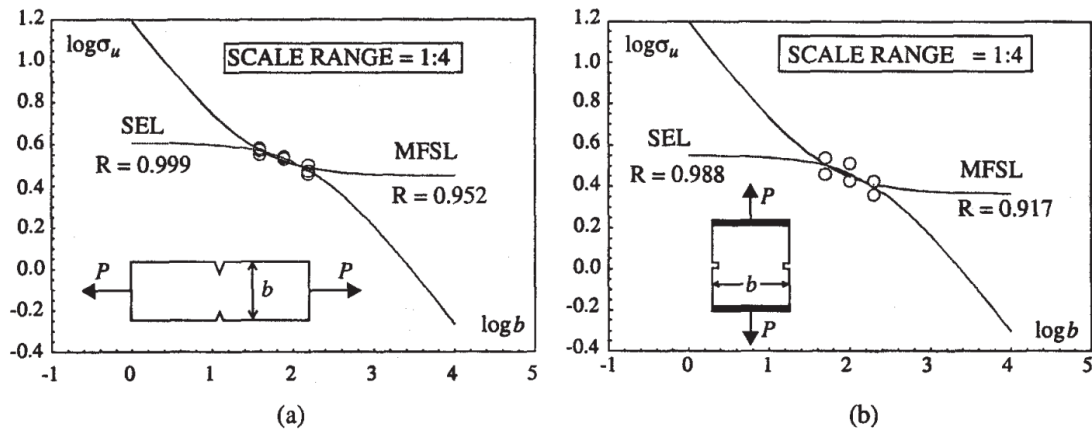
Figura 5– Corpos sem entalhes analisados em Carpinteri e Chaia, 2002: dados de (a) Sabnis & Mirza, 1979, e (b) Hasegawa et al., 1985.



Fonte: Carpinteri e Chaia, 2002.

De acordo com Carpinteri *et al.* (2018), três quantidades mecânicas podem sofrer o efeito de escala: a tensão última, energia de fratura e a deformação crítica. No entanto, apenas a primeira quantidade será analisada nesse trabalho.

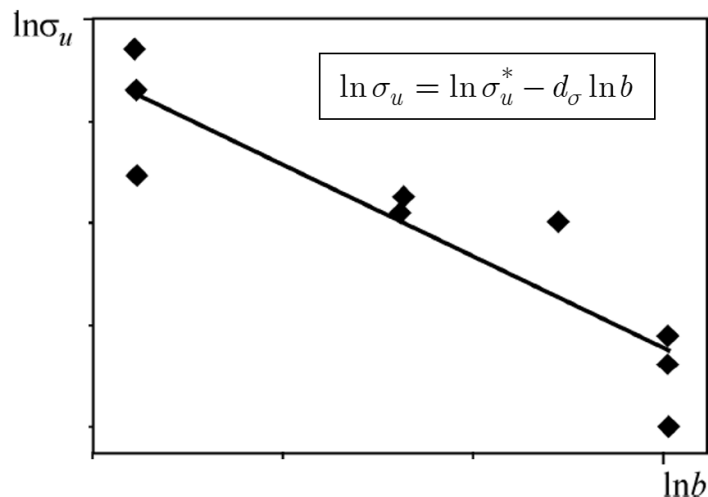
Figura 6– Corpos com entalhes analisados em Carpinteri e Chaia, 2002: dados de (a) Bazant & Pfeiffer, 1987, e (b) Nooru-Mohamed & Van Mier, 1991.



Fonte: Carpinteri e Chaia, 2002.

De acordo com Carpinteri *et al.* (2018), os valores da tensão última obtidos de corpos de diferentes tamanhos, podem ser representados em um diagrama bi logarítmico para visualizar o efeito de escala, como apresentado na Figura 7 abaixo, onde  $\sigma_u$  representa o expoente de escala da tensão última.

Figura 7- Efeito de escala para a tensão última,  $\sigma_u$ .



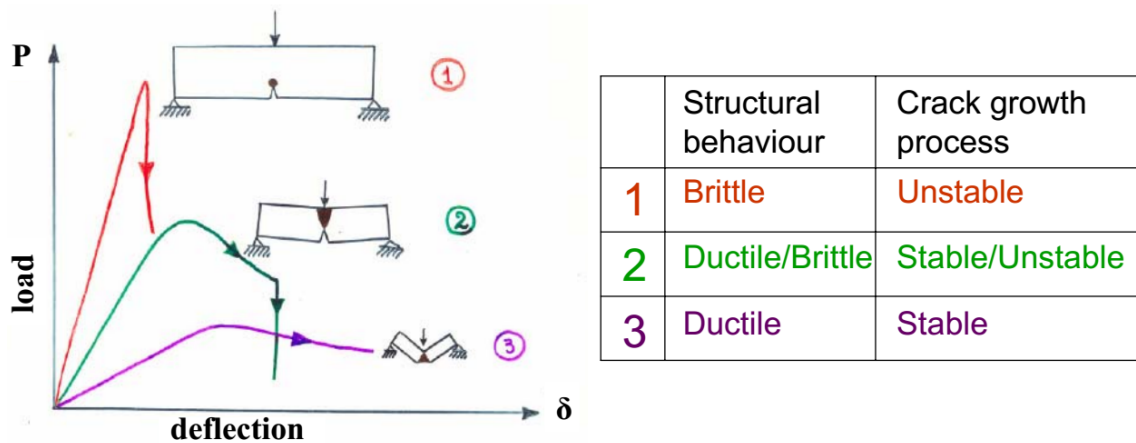
Fonte: Adaptado de Carpinteri et al. (2018).

### 2.3 Comportamento de transição dúctil-frágil

Com base em estudos experimentais, sabe-se que o efeito de escala em materiais quase frágeis é responsável por alterar as grandezas mecânicas do material, como resistência à tração,

energia de fratura e deformação crítica (Carpinteri, 2003). No entanto, outro fenômeno registrado é a transição do comportamento global do componente ou estrutura de dúctil, em amostras pequenas, para frágil em amostras grandes, conforme mostrado na Figura 8, onde três tamanhos de vigas de material quase frágil são apresentados em um teste de flexão de três pontos e respectiva classificação dos seus comportamentos. Durante o processo de transição de dúctil-frágil, o mecanismo de falha governante muda. Enquanto no comportamento dúctil, a plasticidade faz com que a propagação de trincas ocorra de forma controlada após o pico de carga, no comportamento frágil a falha ocorre devido à propagação instável de trincas governada pela mecânica da fratura.

Figura 8- Ilustração do efeito de escala em vigas de diferentes tamanhos e seus respectivos comportamentos globais.



Fonte: Adaptado de Carpinteri et al. (1989).

A transição dúctil-frágil pode ser descrita por um parâmetro adimensional denominado número de fragilidade. O número de fragilidade é definido como:

$$N_p = \frac{K_c}{\sigma_p \sqrt{Z}} \quad (1)$$

onde  $K_c$  é a tenacidade do material em termos do fator de intensidade de tensões,  $\sigma_p$  representa a tensão última vinculada a um colapso dúctil e  $Z$  é uma dimensão característica da estrutura. Isso significa que um mesmo material, porém em escalas diferentes, apresentará

comportamentos globais diferentes dependendo do seu tamanho característico, ou seja, apresentam o efeito de escala estrutural.

O valor de  $N_p$  foi utilizado em várias publicações nas últimas décadas (Birck et al., 2019; Kostaski et al., 2020; Carpinteri et al., 2003; Corrado et al., 2011). De forma geral, para  $N_p \rightarrow 0$ , um comportamento frágil é esperado e dúctil quando  $N_p \rightarrow \infty$ . Resultados experimentais de van Vliet e van Mier (2000) e Carpinteri e Ferro (1994), analisados por Kostaski et al. (2020), mostram que para valores de  $N_p < 1$ , tem-se um comportamento frágil e para  $N_p > 1,5$  um comportamento dúctil, com uma zona de transição entre esses valores.

## 2.4 Peridinâmica

Uma alternativa para o estudo do comportamento mecânico em componentes e estruturas é a modelagem computacional através de simulações utilizando o método dos elementos finitos (MEF), por exemplo. A utilização deste método apresenta algumas limitações, uma delas explicada por Soares *et al.* (2018), é a dificuldade da representação da transição do contínuo para o descontínuo, que acontece quando surge uma nova superfície de fratura ou micro trinca no material (Haruka, 2021).

A peridinâmica é uma teoria desenvolvida recentemente para a solução de problemas da mecânica dos sólidos. A principal diferença entre a teoria PD e a mecânica clássica de contínuo é que a primeira é formulada usando equações integrais em oposição a derivadas dos componentes de deslocamento (Silling, 2020). Esse recurso permite que a simulação do dano seja representada como uma resposta do material, sendo assim, o surgimento e propagação de trincas surgem em caminhos arbitrários de maneira natural.

A previsão numérica de crescimento e propagação de trincas são problemas antigos na mecânica computacional. As dificuldades inerentes a esses problemas surgem da incompatibilidade básica de trincas com as equações diferenciais parciais usadas na teoria clássica da mecânica dos sólidos. As derivações parciais necessárias para que essas equações diferenciais parciais façam sentido não existem na ponta ou superfície da fissura. Portanto qualquer método numérico derivado dessas equações herda a dificuldade na modelagem de descontinuidades. Como uma tentativa de melhorar essa situação, foi proposta uma teoria da mecânica dos sólidos que não exige que derivadas espaciais sejam avaliadas dentro de um

corpo. Essa teoria, conhecida como teoria Peridinâmica usa equações integrais. O objetivo é reformular a descrição matemática básica da mecânica dos sólidos de maneira que as equações idênticas se mantenham dentro ou fora da uma descontinuidade, como uma trinca por exemplo. (Macek e Silling, 2007).

#### 2.4.1 Formulação da peridinâmica baseada em ligações (*bond-based*)

A PD parte do princípio que dois pontos materiais em um corpo sólido interagem entre si quando a distância entre eles for menor que o intervalo  $\delta_0$  (chamado de horizonte) e pode ser visto como um círculo em modelos 2D e uma esfera em modelos 3D. (Cotica, 2021).

A formulação clássica da PD é chamada de peridinâmica baseada em ligações (*bond-based peridynamics*), modelo que estuda a ligação entre dois pontos materiais ( $x - x'$ ) e essa interação é representada por uma força constitutiva  $f$  (Soares *et al.*, 2018), conforme descrito na Figura 9. Desta forma, a equação do movimento para um ponto material  $x_{(k)}$  num dado instante  $t$  é fornecido pela Equação:

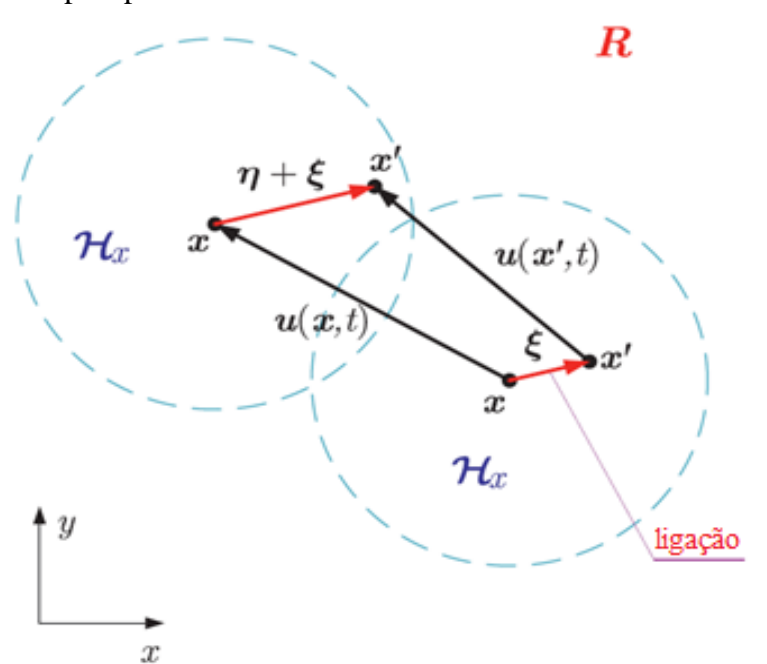
$$\rho \ddot{u}(x_{(k)}, t) = \int_{H_x} f(\eta, \xi) dV_{x'} + b(x, t) \quad (2)$$

onde,  $\rho$  é a densidade do material,  $\ddot{u}(x_{(k)}, t)$  o vetor aceleração,  $b(x, t)$  a densidade da força externa aplicada e  $H_x$  é o domínio de integração, chamado de horizonte peridinâmico,  $\delta_0$ , ou família. Dentro deste domínio os deslocamentos de um ponto material para outro são representados pelos vetores  $u(x, t)$  e  $u(x', t)$ .

A posição relativa entre os dois pontos de interação dentro do horizonte é dada por  $\xi$ , Equação 3. O par de pontos materiais apenas pode ser formado se a distância entre eles for menor que a distância  $\delta_0$ .

$$\xi = ||x' - x|| < \delta_0, \quad \forall x' \in H_x \quad (3)$$

Figura 9 – Principais parâmetros da Peridinâmica.



Fonte: Adaptado de Ni *et al.* (2018)

Cada ligação PD é governada por uma lei constitutiva, Figura 10, que relaciona a força de ligação  $f$  e o alongamento  $s$ , obtido através da Equação 4.

$$s = \frac{||\eta + \xi|| - ||\xi||}{||\xi||} \quad (4)$$

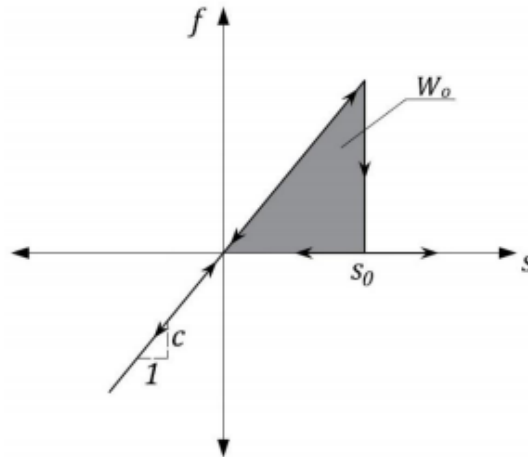
onde  $\xi$  é o vetor de posição relativa e  $\eta$  o vetor de deslocamento relativo. Já a força de ligação pode ser escrita por,

$$f(\eta, \xi, t) = c s(\eta, \xi, t) \quad (5)$$

O parâmetro  $c$  representa o módulo de elasticidade da ligação, fundamental para definição da lei constitutiva. **Erro! Fonte de referência não encontrada.** O valor de  $c$  é independente de  $\xi$ , como mostrado na Equação 6 para os casos 2D e 3D, sendo assim, é considerado um valor uniforme para todas as ligações existentes.

$$c = \begin{cases} \frac{12E}{\pi\delta_0^4} & 3D \\ \frac{48E}{5\pi\delta_0^3} & 2D \end{cases} \quad (6)$$

Figura 10 - Lei constitutiva uniaxial para determinação do dano.



Fonte: Cabral *et al.*, 2019.

O alongamento crítico de uma ligação, necessário para a definição da lei constitutiva, está associado a uma propriedade do material, a tenacidade a fratura específica,  $G_f$ . Quando o alongamento da ligação atingir um valor crítico de deformação,  $s_0$ , então a ligação será rompida e a energia dissipada no rompimento será igual a  $G_f$ , Equação 7.

$$s_0 = \begin{cases} \sqrt{\frac{5G_f}{6E\delta_0}} & 3D \\ \sqrt{\frac{5\pi G_f}{12E\delta_0}} & 2D \end{cases} \quad (7)$$

Cada ligação possui um status indicado por  $\varphi$  que representa o dano local, Equação 8, se  $\varphi = 0$  então não há ligação rompida no ponto, do contrário  $\varphi = 1$  a ligação foi rompida. O dano local é dependente da função escalar descrita pela Equação 9.

$$\varphi = 1 - \frac{\int_{Hx} \rho \, dV_\xi}{\int_{Hx} dV_\xi} \quad (8)$$



$$\varrho = \begin{cases} 1, & s \leq s_0 \\ 0, & s > s_0 \end{cases} \quad (9)$$

Para materiais heterogêneos e quase frágeis, como o concreto e cerâmicas, a lei constitutiva uniaxial ( $f - s$ ), usada para simulação do dano na PD foi reformulada por Cabral *et al.* (2019), na forma de uma lei constitutiva bi linear.

#### 2.4.2 Lei constitutiva bi linear

A lei bi linear possui algumas mudanças na sua formulação, explicadas por Cabral *et al.*, (2019). Começando pela definição de horizonte,  $\delta_0$ , antes definido como um parâmetro do modelo e agora determinado pelas características do próprio material tornando-se um parâmetro material.

Além da mudança na formulação do horizonte, surge um novo conceito chamado de horizonte computacional,  $\delta'$ , ele é utilizado para contornar os casos em que o valor  $\delta_0$  do material é muito alto tornando sua simulação computacional inviável. Este horizonte computacional pode ser determinado conforme cada simulação, geralmente respeitando a relação apresentada na Equação 10 em função da distância entre os pontos materiais,  $dx$ .

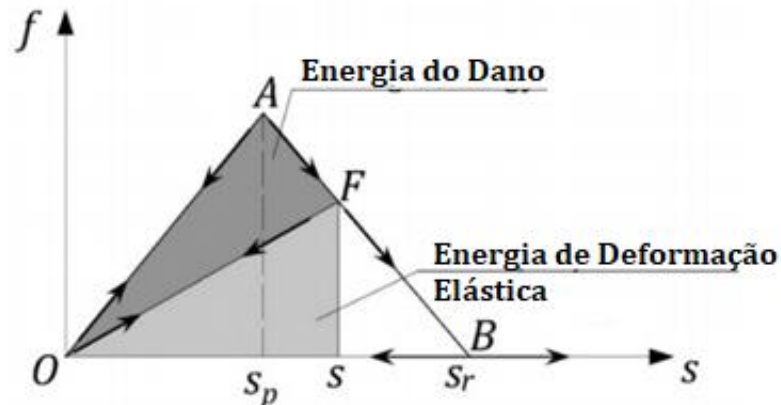
$$\delta' = 3,015 dx \quad (10)$$

A Figura 11 mostra a definição dos parâmetros da lei bi linear, bem como as energias resultantes durante o processo de dano da ligação. Na nova formulação a condição é crítica quando  $s$  é igual ou maior que o estiramento de ruptura,  $s_r$ , que é dado pela Equação 11.

$$s_r = K_r s_p ; \quad K_r = \frac{s_0 \delta_0}{s_p \delta'} \quad (11)$$

A variável  $s_p$  será correspondente a 70% - 80% da deformação atingida no momento da ruptura ou a deformação na qual o material perde a sua linearidade, sendo assim possível a definição da lei bi linear a partir do parâmetro  $K_r$ , porém se  $K_r = 1$  a lei volta a se comportar como proposta originalmente. Mais detalhes sobre a calibração dos parâmetros da lei bi linear estão disponíveis em Cabral *et al.*, 2019.

Figura 11 - Energias envolvidas durante o processo do dano de acordo com a lei bi linear.



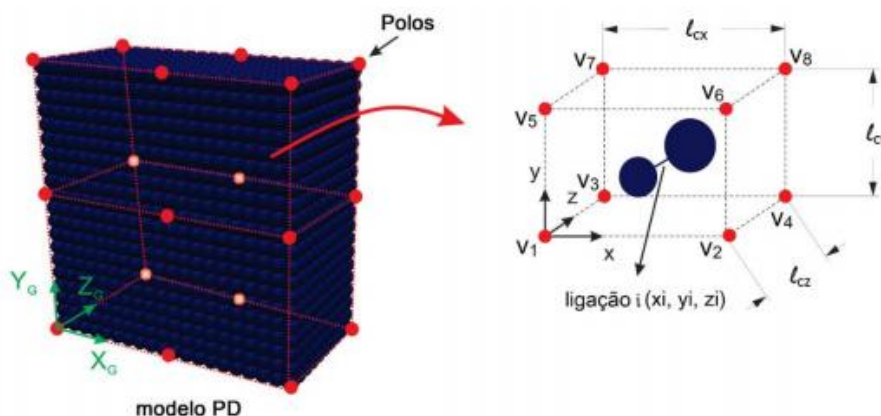
Fonte: Adaptado Cabral *et al.*, 2019.

### 2.4.3 Aleatoriedade no modelo PD

Existem diferentes maneiras para a determinação da aleatoriedade presente nas propriedades dos materiais, e neste trabalho a metodologia utilizada é mesma apresentada por Friedrich *et al.* (2019) e Puglia *et al.* (2010). A metodologia é baseada na geração de um campo aleatório a partir da distribuição de probabilidades de Weibull (função de probabilidade acumulada), isto considerando que a propriedade do material,  $G_f$ , seja uma variável aleatória (SOARES, 2019).

A proposta utilizada para um modelo peridinâmico é apresentado na Figura 12. O modelo é caracterizado pela inserção de prismas ao longo de toda geometria da estrutura. Estes prismas são formados por 8 vértices, chamados de polos, onde valores aleatórios de  $G_f$  são conectados pelos comprimentos de correlação ( $l_{cx}$ ,  $l_{cy}$ ,  $l_{cz}$ ).

Figura 12 - Campo aleatório da Peridinâmica.



Fonte: Adaptado de Friedrich *et al.* (2019).

Os eixos  $X_G, Y_G$  e  $Z_G$  representam o sistema de coordenadas globais e cada ligação  $i$  por um sistema de coordenadas interno denominado  $x_i, y_i$  e  $z_i$ . Realizando uma interpolação, Equação 12, para determinação do valor do campo aleatório,  $\varphi_v$ , de cada ponto no interior do prisma.

$$\begin{aligned} \varphi_v(x_i, y_i, z_i) = & V_1 + \frac{V_2 + V_1}{l_{cx}} x_i + \frac{V_3 - V_1}{l_{cy}} y_i + \frac{V_5 - V_1}{l_{cz}} z_i + \frac{V_4 - V_3 - V_2 + V_1}{l_{cx} l_{cy}} x_i y_i + \\ & \frac{V_6 - V_5 - V_3 + V_1}{l_{cx} l_{cz}} x_i z_i + \frac{V_7 - V_5 - V_3 + V_1}{l_{cy} l_{cz}} y_i z_i + \frac{V_8 - V_7 - V_6 + V_5 - V_4 + V_3 + V_2 - V_1}{l_{cx} l_{cy} l_{cz}} x_i y_i z_i \end{aligned} \quad (12)$$

A partir da distribuição de Weibull para a aleatoriedade pode-se determinar  $G_f$ , Equação 13, conhecendo os parâmetros de escala,  $\beta$ , e forma,  $\gamma$ .

$$F(G) = 1 - e^{-(G/\beta)^\gamma} \quad (13)$$

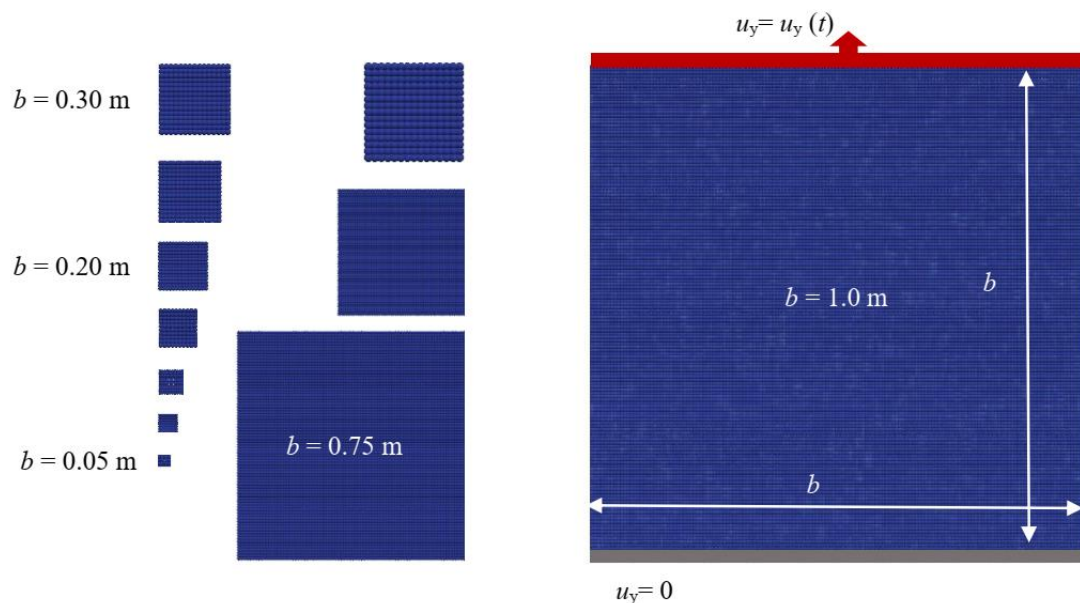
### 3 METODOLOGIA

Para avaliar o efeito de escala da tensão última de materiais quase frágeis, duas aplicações serão exploradas nesse trabalho. Mais precisamente, placas quadradas sob tração e vigas sob flexão. Na primeira é utilizada a lei bi linear descrita na seção 2.4.2, enquanto que na segunda é empregada a nova lei constitutiva descrita na seção 2.4.3. Em ambos os casos um material de característica quase frágil é analisado.

#### 3.1 Aplicação 1: Placas sob tração

As placas quadradas de diferentes tamanhos são simuladas em um ensaio de tração uniaxial, Figura 13. Os pontos em cinza indicam os pontos de restrição de deslocamentos na direção vertical, enquanto os pontos em vermelho os pontos de aplicação de deslocamento prescrito também na direção vertical. A Figura 13 apresenta também o tamanho relativo das placas analisadas.

Figura 13 - Tamanho das amostras e condições de contorno.



Fonte: Friedrich (2021).

As propriedades do material são as mesmas usadas em Friedrich, 2021 e Kostascki, 2012. As propriedades mecânicas, parâmetros da lei bi linear e do campo aleatório são mostrados na Tabela 1.

Tabela 1 – Propriedades mecânicas e parâmetros do modelo PD.

$E$ [GPa]	$\nu$	$\rho$ [kg / m <sup>3</sup> ]	$G_f$ [N / m]	$CV_{Gf}$ [%]	$l_{cor}$ [m]	$dx$ [m]	$s_p$	$K_r$	$\delta'$ [m]	$\delta_0$ [m]
75	0,25	2400	1300	120	0,0025	0,005	$1,29(10)^{-4}$	57	$3,015dx$	0,45

Fonte: autor (2022)

O comprimento e largura  $b$  das placas variam de 0,05 a 1 m. Todos os casos são simulados com um espaçamento entre pontos materiais ( $d_x$ ) igual 0,005 m. Nas simulações todas as placas possuem 3 pontos materiais na direção da espessura, ou seja, trata-se de um modelo 3D.

A Tabela 2, mostra as dimensões da placa e o número de pontos materiais para cada caso.

Tabela 2 – Dimensões dos modelos analisados para as placas sob tração.

Placa	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$b$ (m)	0,05	0,075	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,40	0,50	0,75	1,00
Pontos	10	15	20	30	40	50	60	80	100	150	200

Fonte: autor (2022)

Afim obter resultados estáticos válidos, 4 simulações são realizadas para cada tamanho de placa alterando o campo aleatório das simulações PD.

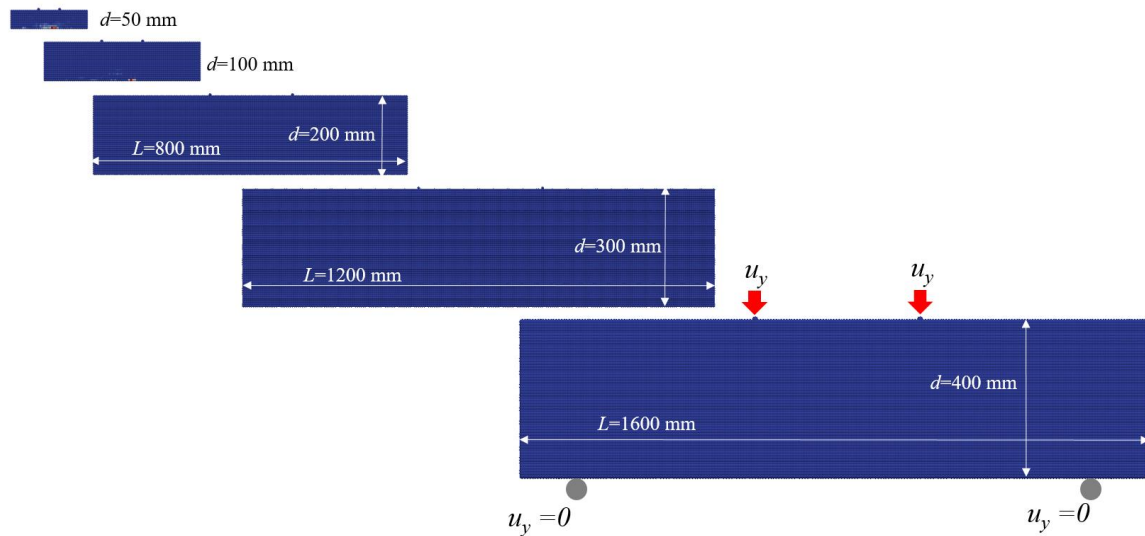
A partir do modelo detalhado acima, a influência do comprimento de correlação,  $l_{cor}$ , frente a resposta do efeito de escala, é analisado. A influência de valores 20 e 40 vezes maior em relação ao definido na Tabela 1 são analisados.

### 3.2 Aplicação 2: Vigas sob flexão em quatro pontos

As vigas de diferentes tamanhos são simuladas um ensaio de flexão de quatro pontos usando um modelo 2D, Figura 14. Os pontos em cinza indicam os pontos de restrição de deslocamentos na direção vertical, enquanto os pontos em vermelho os pontos de aplicação de deslocamento prescrito, também na direção vertical. O espaçamento entre os pontos de aplicação e os apoios é igual a 1/3 do vão livre.

As propriedades do material e os parâmetros do modelo PD são as mesmas apresentadas na Tabela 1.

Figura 14 - Tamanho das amostras e condições de contorno.



Fonte: autor (2023).

O comprimento  $L$  e altura  $d$  das vigas variam de 200 a 1600 mm e de 50 a 400 mm, respectivamente. Todos os casos são simulados com um espaçamento entre pontos materiais ( $d_x$ ) igual 0,005 m. A Figura 14 apresenta o tamanho relativo das vigas analisadas.

A Tabela 3, mostra as dimensões das vigas e o número de pontos materiais para cada caso.

Tabela 3 – Dimensões dos modelos analisados na PD para o caso das vigas sob flexão.

<b>Viga</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>
<b><math>d</math> (mm)</b>	50	100	200	300	400
<b><math>L</math> (mm)</b>	200	400	800	1200	1600
<b>Total de pontos</b>	400	1600	6400	14400	25600

Fonte: autor (2022)

Afim obter resultados estáticos válidos, 4 simulações são realizadas para cada tamanho de viga alterando o campo aleatório das simulações PD.

## 4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

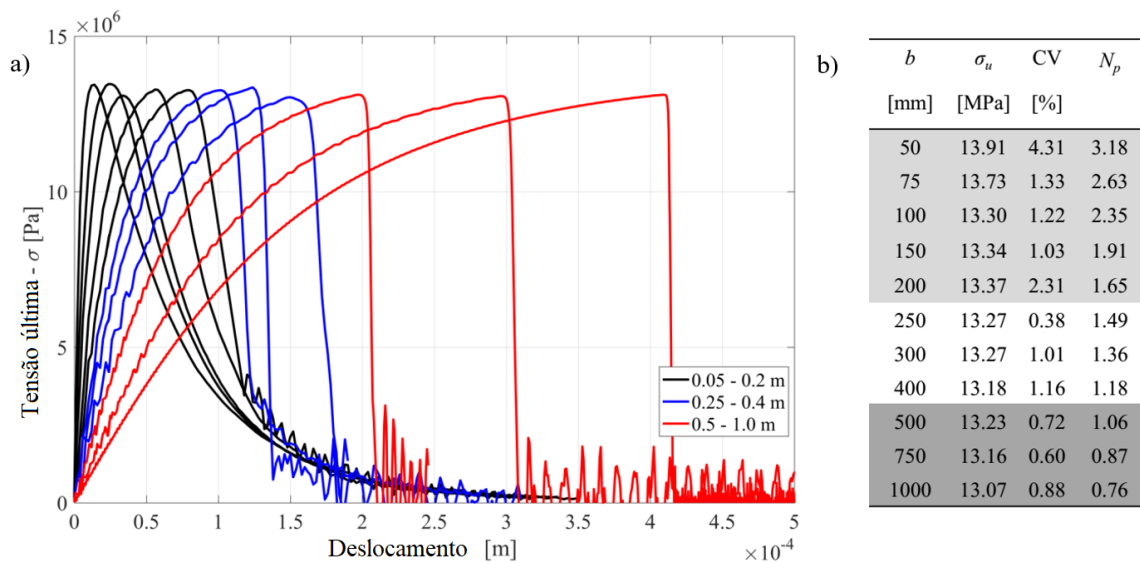
### 4.1 Aplicação 1: placas em tração

Alguns dos resultados apresentados nessa seção foram publicados no XLI *Ibero-Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering (CILAMCE) 2020* e XXXVII *Congreso Argentino de Mécanica Computacional (MECOM) 2021*.

#### 4.1.1 Avaliação do comportamento global

A Figura 15a mostra uma curva representativa para cada tamanho de amostra simulado em termos de tensão última versus deslocamento global. A tensão última é calculada como sendo a razão entre força e área da seção transversal das placas. Todas as amostras foram ensaiadas até a ruptura completa, ou até atingir 2% da tensão última.

Figura 15 - a) Deslocamento *versus* tensão última para cada tamanho de placa, b) Valores médios de tensão última e coeficiente de variação (CV) e número de fragilidades ( $N_p$ ).



Fonte: autor (2023).

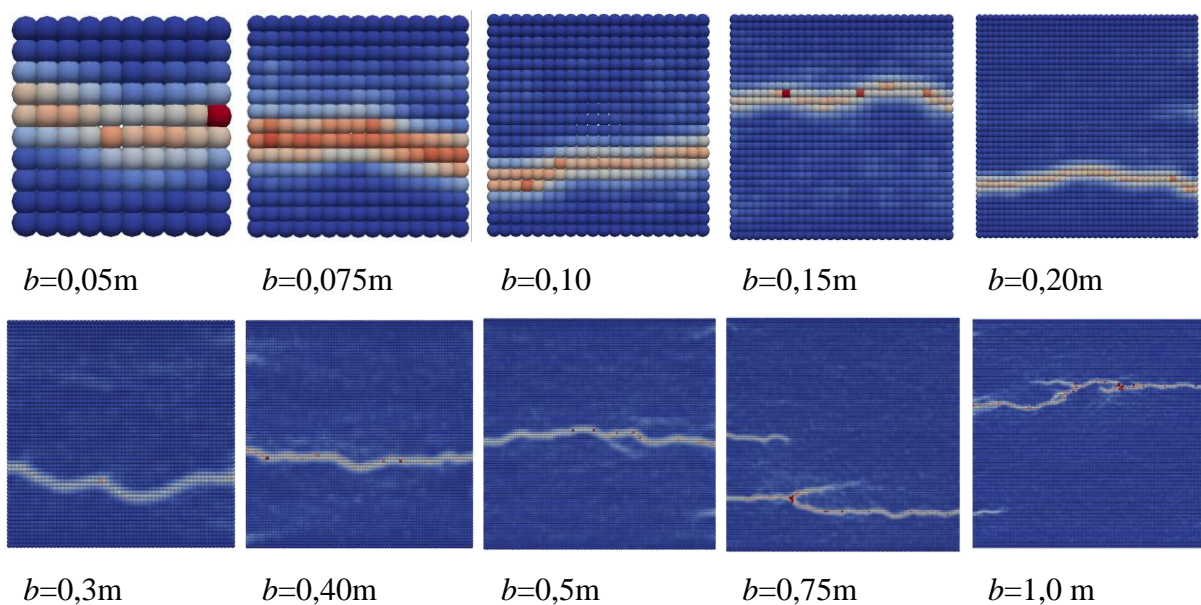
Na Figura 15a fica claro o comportamento dúctil, frágil e a região de transição entre eles, que caracteriza o efeito de escala estrutural. As placas são classificadas em três zonas de acordo com seu comportamento global: dúctil para  $b \leq 200$  mm (linhas pretas), frágil para  $b \geq 500$  m (linhas vermelhas) e amostras entre esses tamanhos representam a zona de transição

entre o comportamento dúctil e frágil (linhas azuis). Segundo van Vliet e van Mier (2000), a mudança de comportamento está relacionada à propagação estável da trinca nas placas classificadas como dúcteis e à instabilidade registrada em amostras maiores, o que resulta em uma fratura frágil.

A Figura 15b mostra o valor médio da tensão última máxima e o coeficiente de variação para cada tamanho de amostra. Além disso, é apresentado o número de fragilidade proposto por Carpinteri ( $N_p$ ), considerando  $Z=b$  na Equação (1) e as propriedades mecânicas utilizadas nas simulações, Tabela 1. Também na Figura 15b, diferentes escalas de cinza indicam as amostras nas zonas anteriormente classificadas na Figura 15a. Comparando os resultados, é possível identificar uma boa correlação entre o comportamento apresentado pelas amostras e os valores preditos pelo número de fragilidade de Carpinteri. Quando  $N_p \leq 1$ , o comportamento frágil é evidenciado por uma queda abrupta na curva de tensão. Por outro lado, quando  $N_p > 1,5$  um comportamento controlado da curva de tensão mostra uma ruptura dúctil.

A Figura 16 mostra um exemplo da configuração de ruptura final para cada amostra. Claramente, à medida que o tamanho  $b$  aumenta e a placa apresenta um comportamento frágil, a maior parte do dano concentra-se ao redor da trinca principal, caracterizando o dano concentrado. Por outro lado, em amostras de comportamento mais dúctil, o dano é distribuído primeiro, e só depois ocorre a localização, sendo o dano distribuído por todo o corpo.

Figura 16 - Configuração de ruptura representativa de cada uma das placas de diferentes tamanhos.

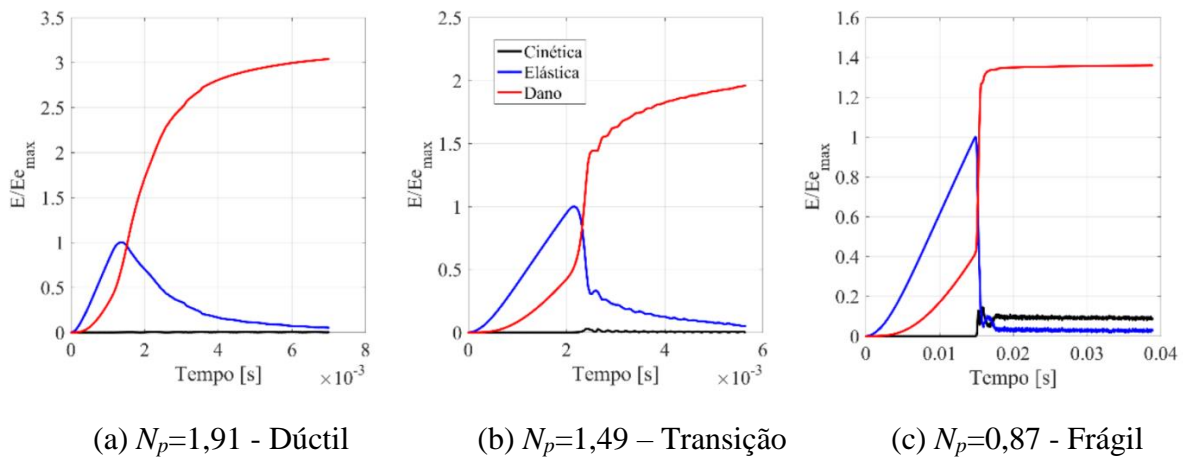


Fonte: autor (2023).



A Figura 17 mostra o balanço de energia observado durante o processo de dano para três comportamentos diferentes. As energias são normalizadas em relação à energia elástica máxima de cada caso. Observa-se que no comportamento frágil, Figura 17c, a energia cinética aumenta rapidamente no momento da ruptura e ocorre o processo de dano instável. Nesse caso, seu pico máximo coincide com o pico de energia elástica. Nos demais casos, a energia cinética permanece próxima de zero, pois o dano ocorre de forma estável. Ainda é possível identificar que à medida que o comportamento dúctil-frágil muda, a razão entre a energia máxima dissipada pelo dano e a energia elástica máxima diminui à medida que  $N_p$  diminui. Na transição, Figura 17b, há uma mistura de comportamentos dúctil e frágil, com um valor de energia de dano significativamente maior do que a energia elástica, no entanto, esta energia de dano aumenta mais abruptamente, como visto no caso frágil.

Figura 17 - Evolução das energias envolvidas durante o processo de fratura para os diferentes comportamentos classificados.



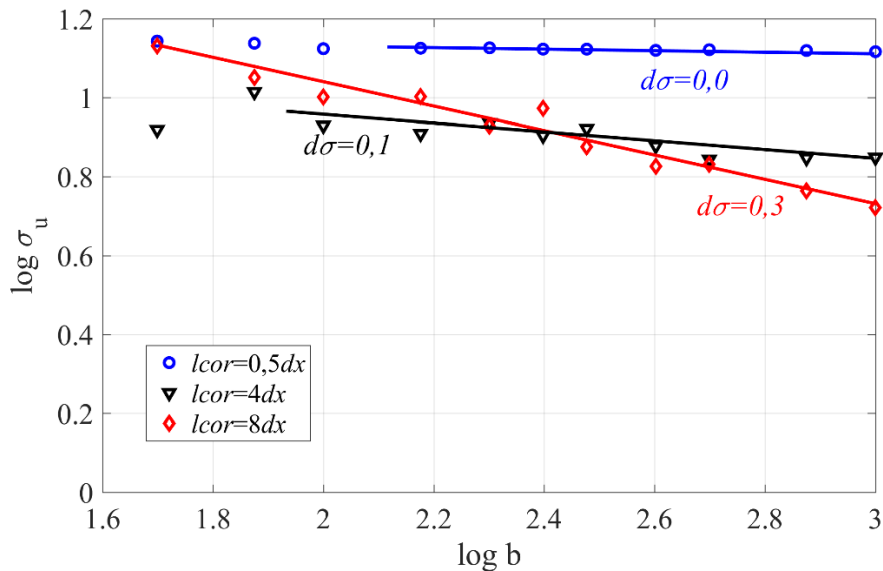
Fonte: autor (2023).

#### 4.1.2 Avaliação do efeito de escala e influência do comprimento de correlação

A Figura 18 mostra a relação entre a tensão última e o tamanho das placas em escala bi logarítmica considerando diferentes comprimentos de correlação. A inclinação das retas apresentadas na Figura é o expoente de escala da tensão. Nota-se que quando o comprimento de correlação aumenta o expoente de tensão também aumenta. Isso pode ser explicado, pois ao aumentar o  $l_{cor}$  está simulando um material com uma rugosidade superficial maior. De acordo com Kostas et al. (2022), o valor experimental encontrado para o expoente de tensão varia entre 0,091 e 0,41, sendo os valores dos resultados numéricos obtidos quando  $l_{cor}=4dx$  e  $8dx$

coerentes com a literatura.

Figura 18 – Avaliação do efeito de escala em placas sob tração considerando diferentes comprimentos de correlação.



Fonte: autor (2023).

## 4.2 Aplicação 2: viga sob flexão em 4 pontos

### 4.2.1 Comportamento global

A Figura 19 mostra uma curva representativa para cada tamanho de amostra simulado em termos de tensão última de flexão versus deflexão. A tensão última de flexão é calculada pela Equação 17 como:

$$\sigma_f = \frac{FL}{td^2} \quad (14)$$

onde  $F$  é força,  $L$  é o comprimento da viga,  $t$  a espessura e  $d$  a altura.

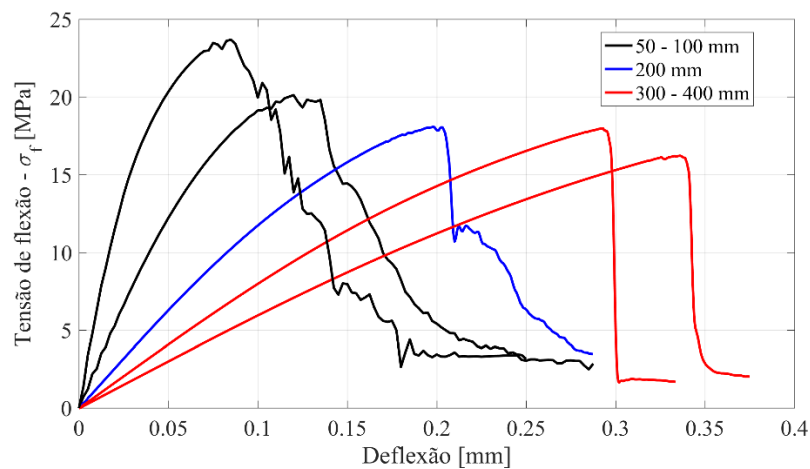
Na Figura 19 fica claro o comportamento dúctil, frágil e a região de transição entre eles, que caracteriza o efeito de escala estrutural. As vigas são classificadas em três zonas de acordo com seu comportamento global: dúctil para  $d \leq 100$  mm (linhas pretas), frágil para  $d \geq 300$  m (linhas vermelhas) e amostras entre esses tamanhos representam a zona de transição entre o comportamento dúctil e frágil (linha azul).

É possível ver claramente também o decréscimo da tensão última de flexão com o

tamanho da viga. Importante ressaltar que a condição analisada aqui do comprimento de correlação (igual a  $0,5dx$ ) capturou a variação da tensão de forma visual, enquanto que na mesma condição, as placas não capturaram essa mudança.

A Tabela 4 mostra o valor médio da tensão última de flexão e o coeficiente de variação para cada tamanho de amostra. Além disso, é apresentado o número de fragilidade proposto por Carpinteri ( $N_p$ ), considerando  $Z=d$  na Equação (1) e as propriedades mecânicas utilizadas nas simulações, Tabela 1. Também na Tabela 4, diferentes escalas de cinza indicam as amostras nas zonas anteriormente classificadas na Figura 19. Comparando os resultados, é possível identificar uma boa correlação entre o comportamento apresentado pelas amostras e os valores preditos pelo número de fragilidade de Carpinteri. Quando  $N_p \leq 1$ , o comportamento frágil é evidenciado por uma queda abrupta na curva de tensão. Por outro lado, quando  $N_p > 1,5$  um comportamento controlado da curva de tensão mostra uma ruptura dúctil.

Figura 19 – Curvas tensão de flexão versus deflexão representativas para a resposta de cada tamanho de viga.



Fonte: autor (2023).

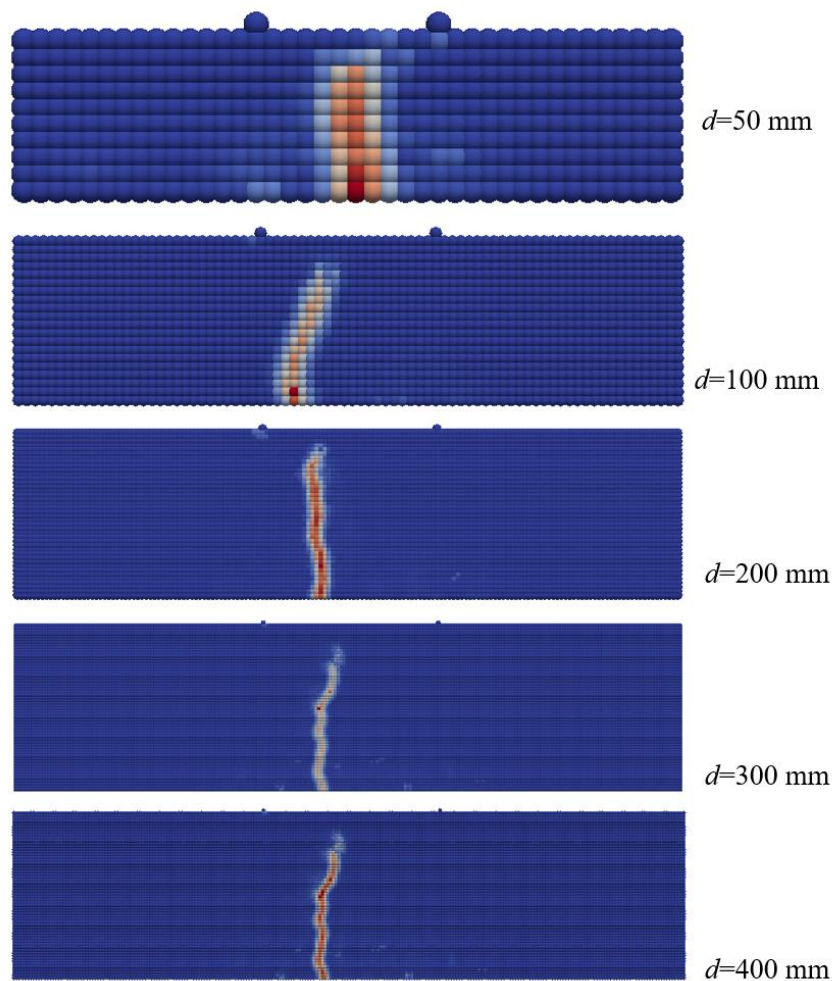
Tabela 4 – Valores médios de tensão de flexão última, coeficiente de variação (CV) e número de fragilidades ( $N_p$ ).

$d$ [mm]	$\sigma_f$ [MPa]	CV [%]	$N_p$ [-]
50	23,62	10,49	1,87
100	19,60	3,13	1,59
200	18,68	5,11	1,18
300	18,15	1,64	0,99
400	16,58	2,88	0,94

Fonte: autor (2023).

A Figura 20 mostra um exemplo da configuração de ruptura final para cada tamanho de viga. Como esperado, a trinca começa na região do vão livre da viga e propaga-se para a superfície superior. Nota-se que quando  $d=50\text{mm}$  o dano é distribuído e consequentemente a ruptura é mais estável, enquanto que em  $d=400\text{mm}$  há apenas a região da trinca com dano, ou seja, um dano localizado é registrado.

Figura 20 – Configuração de ruptura representativa de cada uma das vigas de diferentes tamanhos.



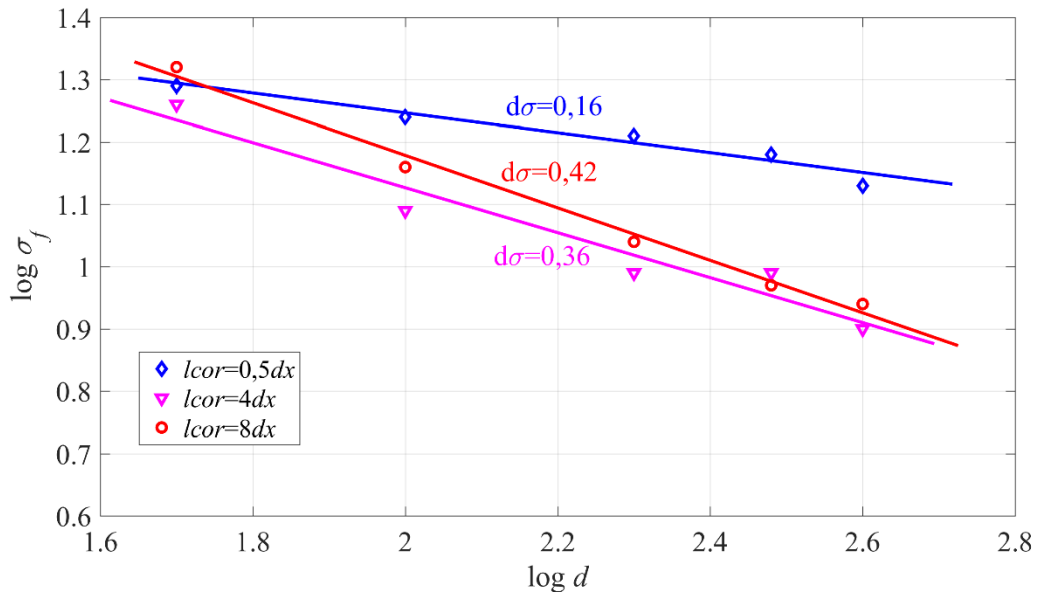
Fonte: autor (2023).

#### 4.2.2 Avaliação do efeito de escala e influência do comprimento de correlação

A Figura 21 mostra a relação entre a tensão última de flexão e o tamanho das vigas em escala bi logarítmica considerando diferentes comprimentos de correlação. A inclinação da reta apresentada na Figura é o expoente de escala da tensão. Nota-se que nesta aplicação, mesmo

sem alterar o comprimento de correlação, o valor do expoente de escala de tensão é coerente com aqueles encontrados na literatura para casos experimentais. Esse fato mostra que a geometria influencia a resposta do modelo PD na captura do efeito de escala estrutural.

Figura 21 – Avaliação do efeito de escala em viga sob flexão considerando diferentes comprimentos de correlação.



Fonte: autor (2023).

## 5 CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Neste trabalho a teoria peridinâmica foi utilizada como ferramenta de simulação no estudo do efeito de escala estrutural. A partir das análises realizadas pode-se concluir que:

- A PD apresenta-se como uma boa ferramenta para o estudo da transição dúctil-frágil em materiais quase-frágeis;
- A lei bi linear é capaz de capturar o comportamento de transição, mas não o efeito de escala da tensão última para o caso das placas sob tração.
- Com a lei bi linear deve-se alterar os valores do comprimento de correlação das propriedades mecânicas para que o modelo capture o efeito de escala da tensão;
- No entanto, quando a geometria do problema muda, a lei bi linear é capaz de capturar o efeito de escala sem a necessidade de mudar o comprimento de correção,

Para trabalhos futuros têm-se como sugestões:

- Investigar outras formas geométricas;

- Avaliar os demais expoentes de escala (deformação e energia de fratura) em ambas as Aplicações.

## 6 REFERÊNCIAS

ASKARI, E., BOBARU, F., LEHOUCQ, R. B., PARKS, M. L., SILLING, S. A., WECKNER, O. “**Peridynamics for multiscale materials modeling**”. *Journal of Physics: Conference Series* (Vol. 125, No. 1, p. 012078)., 2008.

BAŽANT, P.; CHEN, P. “**Scaling of structural failure**”. *Appl. Mech, rev.* 50, p. 593-627, 1997.

BAŽANT, Z.P. “**Scaling of quasibrittle fracture: Asymptotic analysis**”. *International Journal of Fracture*, 83(1), 1997, pp. 19-40.

BAŽANT, Z.P. “**Size effect in blunt fracture: Concrete, rock, metal**”. *Journal of Engineering Mechanics (ASCE)*, 110(4), 1984, pp. 518-535.

BAŽANT, Z.P., PLANAS, J. “**Fracture and size effect in concrete and other quasibrittle materials**”. CRC Press LLC, 1998.

BIRCK, Gabriel. **ANÁLISE DO PROCESSO DE DANO EM MATERIAL QUASE-FRÁGIL ATRAVÉS DA SIMULAÇÃO DE UM MODELO DE BARRAS**. 2016. 94 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mecânica dos Sólidos, Promec, Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2019.

CABRAL, N. R. et al. An alternative bilinear peridynamic model to simulate the damage process in quasi-brittle materials. *Engineering Fracture Mechanics*, Elsevier, v. 216, p. 106494, 2019.

CABRAL, N. R.; ITURRIOZ, I.; INVALIDI, M. A.; D’AMBRA, R. B. “**An alternative bilinear peridynamic model to simulate the damage process in quasi-fragile materials**”. *Engineering Fracture Mechanics* (2019).

CARPINTERI A. “**Mechanical damage and crack growth in concrete: Plastic collapse to brittle fracture**”. 1986.

CARPINTERI, A., AND CHIAIA, B. “**Multifractal nature of concrete fracture surfaces and size effects on nominal fracture energy**”. *Materials and Structures (RJLEM)*, 28, 1995, pp. 435-4-43.

CARPINTERI A, CORRADO M, LACIDOGNA G. **Three different approaches for damage domain characterization in disordered materials: fractal energy density, b-value statistics, renormalization group theory**. *Mech Mater* 2012;53:15–28.

CARPINTERI, A., CHIAIA, B., AND FERRO, G. “**Multifractal scaling law for the nominal strength variation of concrete structures**”. In *Size effect in concrete structures* (1994).

CARPINTERI, A.; FERRO, G. “**Scaling behavior and dual renormalization of experimental tensile softening responses**”. *Materials and Structures*, vol. 31(5), p. 303-309, 1998.

CARPINTERI A., “**Cusp catastrophe interpretation of fracture instability**”, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 37:567-582, 1989.

CARPINTERI, A.; FERRO, G.; INVERNIZZI, S. “**The nominal tensile strenght of disordered materials: a statistical fracture mechanics approach**”. *Engineering Fracture Mechanics*, v. 58, p. 421-435, 1997.

Carpinteri, A. e Chiaia, B. **Embrittlement and decrease of apparent strength in largesized concrete structures**, *Sadhana*, vol. 27, 425, 2002.

Carpinteri, A., Cornetti, P., Barpi, F.e Valente, S. **Cohesive crack model description of ductile to brittle size-scale transition: dimensional analysis vs. renormalization group theory**, *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 70, vol. 14, p. 1809-1839 2003

Carpinteri, A. G. Lacidogna e F. Accornero, **Fluctuations of 1/f Noise in Damaging Structures Analyzed by Acoustic Emission**. *Applied Sciences*, 2018.

CARVALHO E SILVA, **COMBINAÇÃO DE TRÊS MÉTODOS DA MECÂNICA DA FRATURA PARA ESTIMAR A TENACIDADE EM MATERIAIS SEMI FRÁGEIS**, UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE – DARCY, 2017.

COLPO A.B., 2014. “**Análise do Efeito de Escala em Materiais Quase Frágeis**”. Monografia (Trabalho de Conclusão do Curso em Engenharia Mecânica) - Universidade Federal do Pampa, Alegrete, 2014.

COLPO A.B., KOSTESKI, L.E., and IGNACIO I., 2016. “**The size effect in quasi-brittle materials: Experimental and numerical analysis**”. *International Journal of Damage Mechanics*. Vol. 26, pp. 395-416.

COLPO, A. B., KOSTESKI, L. E., & ITURRIOZ, I. (2017). “**The size effect in quasi-brittle materials: Experimental and numerical analysis**”. *International Journal of Damage Mechanics*, 26(3), 395-416.

COLPO, A. B.; ALMEIDA, W. R.; KOSTESKI L. E.; FRIEDRICH, L. F.; ITURRIOZ, I.; SOARES, L.; GEHLEN, B. “**Método dos elementos discretos: uma comparação crítica entre duas versões do método**”. XXXVIII Jornadas Sudamericans de Ingenieria Estructural (2018).

COLPO, A. B.; KOSTESKI, L. E.; ITURRIOZ, I. “**The size effect in quasi-brittle materials: Experimental and numerical analysis**”. *International Journal of Damage* (2016).

Kamila Haruka, **APLICAÇÃO DA TÉCNICA DA EMISSÃO ACÚSTICA NO MONITORAMENTO DO DANO EM MATERIAIS HETEROGÊNEOS**, Trabalho de Conclusão de Curso, Curso de Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Pampa.

Hasegawa, T., Shioya, T. e Okada, T. **Size effect on splitting tensile strength of concrete.** In Proc. 7th Conf. of the Japan Concrete Institute (Tokyo: JCI Publ), p. 309–312, 1985.

Huespe, AE., Oliver, J., Sanchez, P.J., Blanco, S. e Sonzogni, V. **Strong discontinuity approach in dynamic fracture simulations.** *Mecánica Computacional XXV*: 1997–2018, 2006.

FRIEDRICH, L. F.; BARCELLOS, M.; ITURRIOZ, I.; COLPO, A. B.; CESAR, E. S.; PUGLIA, V. B.; KOSTESKI, L. E. Experimental analysis of the size effect in quasi-fragile materials. 25th ABCM International Congress of Mechanical Engineering – resumo aprovado, 2019.

FRIEDRICH, L. F.; BARCELLOS, M.; ITURRIOZ, I. Random field generation of the material properties in a peridynamic model. 25th ABCM International Congress of Mechanical Engineering – resumo aprovado, 2019.

FRIEDRICH, Leandro; COLPO, Angélica; MAGGI, Anna; BECKER, Tiago; LACIDOGNA, Giuseppe; ITURRIOZ, Ignacio. *Damage process in glass fiber reinforced polymer specimens using acoustic emission technique with low frequency acquisition.* *Composite Structures*, 256, 113105, 15 jan. 2021.

KOSTESKI, L. “**Aplicação do método dos elementos discretos formado por barras no estudo do colapso de estruturas**”. 2012. 6-59 f. Tese (Doutorado em engenharia) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2012.

Kosteski, L.E., Iturrioz, I., Friedrich, L.F. et al. **A study by the lattice discrete element method for exploring the fractal nature of scale effects.** *Sci Rep* 12, 16744 (2022).  
<https://doi.org/10.1038/s41598-022-20137-3>

Maurício Bisognin Marchesan, **Análise Do Efeito De Escala Em Materiais Quase-Frágeis Utilizando A Teoria Peridinâmica**, Trabalho de Conclusão de Curso, Curso de Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Pampa.

Nooru-Mohamed, M. B., Van Mier, J. G. M. **Size effect in mixed mode fracture of concrete.** In *Fracture Processes in Concrete, Rock and Ceramics* (eds) J G M Van Mier, J G Rots, A Bakker (Amsterdam: EFN Spon) p. 461–471, 1991.

Pricila Cotica, **Aplicação Da Técnica De Emissão Acústica No Ambiente Da Peridinâmica Para O Monitoramento Do Dano Em Materiais Quase Frágeis**, Trabalho de Conclusão de Curso, Curso de Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Pampa.

SOARES, Lucas *et al.* REPRESENTAÇÃO DO DANO EM MATERIAIS QASIFRAGEIS NUM MODELO DE PERIDINAMICA:IMPLEMENTAÇÃO DA PSEUDOALEATORIEDADE NO MODELO. *Mecánica Computacional*. San Miguel de Tucumán, p. 1585-1594. nov. 2018.



Sabrina Vantadori, Angélica B. Colpo, Leandro F. Friedrich, Ignacio Iturrioz, **Numerical simulation of the shear strength of the shot-earth 772-granite interface**, Construction and Building Materials, Volume 363, 2023, 129450.

Sabnis, G. M. e Mirza, S. M. Size effect in model concretes, **American Society of Civil Engineers American Society of Civil Engineers**, vol. 105, p. 1007–1020, 1979.

Silling, S. A., Epton, M., Weckner, O., Xu, J. e Askari, E. **Peridynamic states and constitutive modeling**. In: Journal of Elasticity, p. 88, 2007.

SILLING SA. “**Reformulation of elasticity theory for discontinuities and long-range forces**”. J Mech Phys Solids 2000;

VAN VLIET, M. R. A. (2000). “**Size effect in tensile fracture of concrete and rock**” (Vol.192). Delft: Delft University Press.

WEIBULL, W. “**Phenomenon of rupture in solids**”. Proc Royal Swedish Inst of Eng Res, p. 153, 1939.