



UNIPAMPA – Universidade Federal do Pampa
Programa de Pós-Graduação em Engenharia (PPEng)
Curso de Mestrado Acadêmico em Engenharia

BRUNO CONTI FRANCO

ANÁLISE POR MÉTODO DE DIFERENÇAS FINITAS DA PROPAGAÇÃO
DINÂMICA DE TRINCA EM UMA HASTE EM QUEDA LIVRE CHOCANDO-SE
TRANSVERSALMENTE CONTRA UM APOIO RÍGIDO

Alegrete
Junho de 2015

BRUNO CONTI FRANCO

ANÁLISE POR MÉTODO DE DIFERENÇAS FINITAS DA PROPAGAÇÃO
DINÂMICA DE TRINCA EM UMA HASTE EM QUEDA LIVRE CHOCANDO-SE
TRANSVERSALMENTE CONTRA UM APOIO RÍGIDO

Dissertação de mestrado apresentada à banca avaliadora do curso de Pós-graduação Stricto Sensu da Universidade Federal do Pampa – UNIPAMPA, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Orientador: Prof. Dr. Wang Chong

Alegrete

Junho de 2015

BRUNO CONTI FRANCO

ANÁLISE POR MÉTODO DE DIFERENÇAS FINITAS DA PROPAGAÇÃO
DINÂMICA DE TRINCA EM UMA HASTE EM QUEDA LIVRE CHOCANDO-SE
TRANSVERSALMENTE CONTRA UM APOIO RÍGIDO

Dissertação de mestrado, apresentada
ao Programa de Pós-graduação Stricto Senso
em Engenharia Mecânica, da Universidade
Federal do Pampa, como requisito para a
obtenção do Título de Mestre em Engenharia.

Área de concentração: Tecnologia de
materiais.

Dissertação defendida e aprovada em: 19 de junho de 2015.

Banca examinadora:

Prof. Dr. Wang Chong

Orientador

PPEng/UNIPAMPA

Prof. Dr. Ignacio Iturrioz

PROMECC/UFGRS

Prof. Dr. Cesar Flaubiano da Cruz Cristaldo

PPEng/UNIPAMPA

Prof. Dr. Luis Eduardo Kostaschi

PPEng/UNIPAMPA

RESUMO

Atualmente o Brasil é um dos maiores produtores de minério de ferro do mundo. Após a extração ocorre a trituração através de equipamentos de grande porte. O Moinho de Barras é um dos equipamentos mais utilizados, essas máquinas apresentam elevado custo de manutenção devido a constante quebra das barras internas de moagem. Para reduzir esses custos é necessário realizar análise matemática e de mecânica da fratura na barra. O objetivo desse trabalho é analisar a propagação de trinca em uma barra no interior do tambor do moinho de barras, para isso, é considerado que a barra cai em queda livre sobre uma pedra (apoio rígido) posicionada exatamente no centro. A análise foi realizada a partir da solução dinâmica da barra em queda livre chocando-se transversalmente em um apoio rígido pelo método de diferenças finitas (MDF). O algoritmo do MDF foi aferido inicialmente por comparação entre os resultados de simulação realizada no ANSYS LS-DYNA e os resultados analíticos para caso de sem trinca, onde ficou comprovada a eficiência do MDF. A resolução da propagação da trinca consiste na determinação de quando ocorre o início da trinca, ou seja, quando a tensão superficial supera a tensão de ruptura do material a trinca inicia, e na verificação das condições para a propagação, isto é, após a iniciação da trinca utiliza-se o balanço de energia de Griffith em cada instante de tempo para verificar se a trinca continua propagando. Ao analisar os resultados do trabalho conclui-se que: a barra pode quebrar em mais de um pedaço; em materiais com dureza elevada não ocorre o início da trinca; a tenacidade à fratura influência diretamente na velocidade e no comprimento propagado da trinca; o coeficiente de encruamento do material é eficiente para interromper a propagação da trinca e reduzir a velocidade de propagação. O presente trabalho poderá ser considerado como base para analisar propagação de trinca em uma barra com múltiplas trincas e perfil de dureza variável.

ABSTRACT

Brazil is one of major producers of iron ore in the world. After the ore is explored, the first process of the production is to triturate iron ore. A rods mill is most common grinding equipment. These machines are of high maintenance costs due to constant failure in the milling bars caused by the chock when the bar drops down and impacts on the ores. To reduce such costs, mathematical and mechanical analysis for the bar failure is necessary. The aim of this study is to analyze the crack propagation in a bar, subjected to the shock inside the rod mill barrel. It is considered that the bar falls down freely on a rock (hard support) positioned exactly at the center. The dynamic analysis was performed by the finite difference method (FDM). At first the algorithm based on the FDM was compared with the results performed in ANSYS LS-DYNA and with analytical solution without crack propagation. It was verified FDM efficiency. The numerical analysis is to check when crack onset occurs and if there are conditions for the crack propagation, in other words, when the stress exceeds the ultimate strength of the material initiating crack, thereafter, using the energy balance Griffith at each instant of time to check the conditions of crack continue propagation. By analyzing the results we conclude that: the bar can break into several pieces; in materials with elevated hardness may not onset crack; the fracture toughness influences the speed and length of the crack propagation; the work hardening coefficient of the material is efficient to arrest crack propagation and decrease the speed of crack propagation. This work has laid the foundation for analyzing multi-cracks propagation in a bar with a profile of variable hardness.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

FIGURA 1 - Moinho de Barras	13
FIGURA 2 - Processo de moagem do minério de ferro no moinho de barras.	14
FIGURA 3 - Barras do moinho de barras.....	14
FIGURA 4 – Infinitos graus de liberdade.	19
FIGURA 5 - Viga sofrendo deflexão	20
FIGURA 6 - Diagrama de corpo livre de um elemento da viga sofrendo deflexão.....	21
FIGURA 7 – Representação do caso crítico.....	24
FIGURA 8 - A viga deformada depois do choque com o minério.....	25
FIGURA 9 – Modelo de análise: viga de comprimento L, engastada em uma extremidade e livre na outra.....	25
FIGURA 10- Passo (h) indicado na Malha viga	26
FIGURA 11 – Trinca em uma chapa com largura $\gg 2a$ submetida a uma tensão remota.....	41
FIGURA 12 – Modo I: Modo de abertura ou de tração	44
FIGURA 13- Deslocamento do centroide C com a propagação da trinca.....	45
FIGURA 14 - Densidade do trabalho de deformação absorvido w_d	47
FIGURA 15 – Momento de Inércia Variável	49
FIGURA 16 – Mola rotacional.....	51
FIGURA 17 – Cálculo da Rigidez.....	51
FIGURA 18 – Fluxograma do algoritmo para análise da propagação de trinca	58
FIGURA 19 – Comparação da deflexão entre os resultados dos métodos: Analítico, Diferenças Finitas e Ansys LS-DYNA. $\Delta t = 1\mu s$	60
FIGURA 20 – Analítico x Diferenças finitas x Ansys LS-DYNA, ($\Delta t = 1\mu s$).	60
FIGURA 21 - Comparação entre aplicação de incremento de tempo: (a) $\Delta t = 10\mu s$; (b) $\Delta t = 1\mu s$	61
FIGURA 22 – Posição longitudinal onde ocorre o momento máximo (eixo esquerdo) e o valor do Momento Fletor Máximo (eixo direito), ambos em relação ao tempo.....	62
FIGURA 23 – Comparação entre comprimento de trinca e velocidade de propagação para o Aço Liga 4340 submetido a diferentes temperas (a) 456HV e $K_{IC} = 75MPa\sqrt{m}$ (b) 401HV e $K_{IC} = 110MPa\sqrt{m}$	65
FIGURA 24 – Influência da tenacidade a fratura (KIC) na propagação da trinca.	66

FIGURA 25 - Comprimento da trinca e velocidade de propagação para.....	67
FIGURA 26- Variação no comprimento da trinca (normalizado) para diferentes hipóteses de coeficientes de encruamento (n), considerando como base $n=0.14$ do aço 1040.....	68
FIGURA 27 – Variação na propagação da trinca na barra para diferentes alturas de quedas (H), considerando que a barra é fabricada em aço 1040.	69
FIGURA 28 – Interpretação geométrica	74
FIGURA 29 – Centróide de uma área	81
FIGURA 30- Deslocamento do centróide C com a propagação da trinca.....	82

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Dados de entrada da simulação.....	59
Tabela 2 – Propriedades e resultados da propagação de trinca para diferentes tipos de aços e temperas.....	64

LISTA DE SIMBOLOS

L = Comprimento da metade da barra (caso de simetria);

LT = Comprimento total da barra;

w = Deslocamento transversal da barra;

x = Posição horizontal;

t = Tempo;

f = Força externa por unidade de comprimento;

ρ = Densidade de massa;

A = Área da seção transversal;

V = Força cortante;

M = Momento fletor;

E = Módulo de elasticidade ou módulo de Young;

I = Momento de inércia;

y = Posição vertical

γ_s = Trabalho necessário pra criação de superfície unitária

γ_p = Trabalho plástico para criação de superfície unitária

a = Profundidade da trinca

w_f = Energia de fratura

G = Taxa de liberação de energia de deformação durante a propagação de uma trinca

Π = Energia potencial de um corpo deformável

F = Trabalho realizado por força externa

U = Energia de deformação;

μ = Módulo de elasticidade transversal;

k_{IC} = Tenacidade a fratura do material

i = Índice correspondente ao nó da malha;

j = Índice correspondente ao tempo;

h = Passo adimensional da malha da viga;

v = Velocidade;

I_0^j = Momento de inércia da área da seção intacta transversal da haste durante a propagação da trinca no tempo j ;

T_g = Trabalho realizado pela força da gravidade;

E_k = Energia cinética;

T_m = Trabalho realizado pela mola rotacional;

G_c = Taxa de liberação de energia de deformação;

C_f = Coeficiente de flexibilidade da mola rotacional;

K_I = Fator de intensidade de tensão modo I;

w_d = Trabalho de deformação plástica absorvida por volume unitário de material em torno da fronteira de uma trinca;

r_y = Raio da zona plástica na fronteira da trinca;

b = Metade da largura da fronteira da trinca na seção transversal;

n = Coeficiente de encruamento do material;

σ_e = Tensão de escoamento do material;

σ_u = Tensão última ou tensão de ruptura do material;

r = Raio da barra;

ζ = Parâmetro adimensional referente à metade do comprimento da barra;

U = Energia de deformação do material;

H_V = Dureza Vickers;

ν = Coeficiente de Poisson

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	13
2	OBJETIVO E JUSTIFICATIVA.....	15
2.1	OBJETIVO GERAL	15
2.2	OBJETIVOS ESPECÍFICOS	15
2.3	JUSTIFICATIVAS	15
3	REVISÃO BIBLIOGRAFIA	17
3.1	TEORIA DAS VIBRAÇÕES	18
3.1.1	Teoria das vibrações em vigas de Euler-Bernoulli	19
3.1.2	Equação diferencial da viga submetida à vibração lateral.....	20
4	SOLUÇÃO DA VIBRAÇÃO DA VIGA SUBMETIDA A IMPACTO PELO MÉTODO DE DIFERENÇAS FINITAS	24
4.1	FORMULAÇÃO.....	26
4.1.1	Aceleração	27
4.1.2	Equação Geral.....	28
4.1.3	Caso não há o surgimento de trinca.....	29
4.1.4	Caso há o surgimento de uma trinca no ponto fixo $x=0$	30
4.1.5	Condições iniciais	30
4.1.6	Condições de contorno	31
4.2	CONSTRUÇÃO DE EQUAÇÕES DO SISTEMA LINEAR	32
4.3	MOMENTO FLETOR	36
4.4	FORÇA CORTANTE	37
5	MECÂNICA DA FRATURA	39
5.1	TEORIA DO BALANÇO DE ENERGIA DE GRIFFITH	39
5.2	A TAXA DE LIBERAÇÃO DE ENERGIA	42
5.3	FATORES DE INTENSIDADE DE TENSÕES	43
5.4	PROPAGAÇÃO DE TRINCA.....	45
5.4.1	Resistência à propagação da trinca.....	46
5.4.1.1	Energia necessária para formar novas superfícies de trinca	46

5.4.1.2	Área e momento de inércia da seção não trincada.....	48
5.4.1.3	Energia Cinética.....	49
5.4.1.4	Trabalho realizado pela mola rotacional.....	50
5.4.1.5	Energia de deformação	52
5.4.2	Força motriz.....	53
5.4.2.1	Trabalho realizado pela força da gravidade	53
5.4.3	Condição para a propagação da trinca.....	54
5.4.4	Critério para Iniciação da Trinca e a propagação de trinca	54
5.4.4.1	Relação entre tensão de escoamento, tensão última e coeficiente de encruamento com a dureza	55
5.4.5	Programa para análise da propagação de trinca.....	57
6	RESULTADOS E DISCUSSÕES	59
6.1	VIBRAÇÃO APÓS O CHOQUE E ANTES DA INICIAÇÃO DE TRINCA	59
6.2	PROPAGAÇÃO DA TRINCA	62
6.2.1	Materiais analisados	63
6.2.2	Influência de dureza e tenacidade à fratura de material	64
6.2.3	Influência do coeficiente de encruamento na propagação da trinca	66
6.2.4	Influência da altura da queda no início e propagação da trinca.....	69
7	CONCLUSÃO	70
8	SUGESTÃO PARA TRABALHOS FUTUROS.....	71
	ANEXO A – MÉTODO DE DIFERENÇAS FINITAS.....	74
	ANEXO B – MOMENTO DE INÉRCIA DO CIRCULO CORTADO EM RELAÇÃO AO EIXO X.....	78
	ANEXO C – ÁREA DO CIRCULO CORTADO.....	80
	ANEXO D – CENTROIDE DO CIRCULO CORTADO	81

1 Introdução

O minério de ferro é a principal matéria prima para a fabricação do aço, é encontrado na natureza na forma de rocha, misturado a outros elementos. Após ser extraído, o minério passa por diversos processos de beneficiamento e redução, para posteriormente ser vendido para as indústrias siderúrgicas onde é transformado em aço.

Um desses processos é a trituração, que pode ser realizada através de diversos tipos de moinhos, como: moinho de barras, moinho vibratório, moinho vertical (Vertimill), moinho trapezoidal, moinho de martelo, moinho de rolos de superpressão, moinho Raymond, moinho de bola e outros. Devido à elevada dureza do minério, os componentes mecânicos desses equipamentos estão submetidos a condições severas de trabalho.

Uma falha comum e frequente nesse processo é a quebra ou desgaste das barras cilíndricas do Moinho de Barras (FIGURA 1). No moinho as barras de aço são elevadas através do giro do tambor (FIGURA 2) e logo que atingem o ponto mais alto, caem sobre o minério produzindo um forte impacto que o fragmenta.

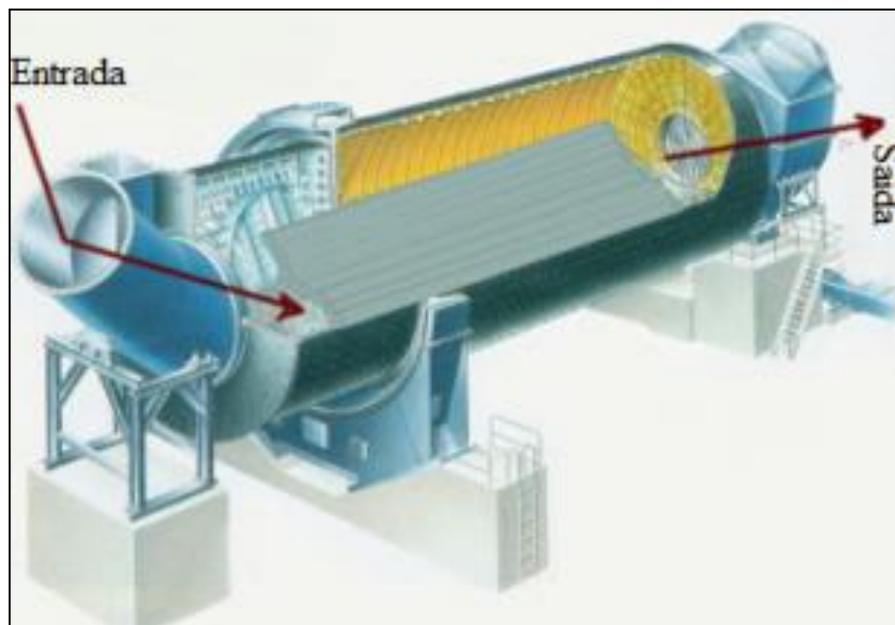


FIGURA 1 - Moinho de Barras

Fonte: <http://www.mine-engineer.com/mining/rodmill.htm>

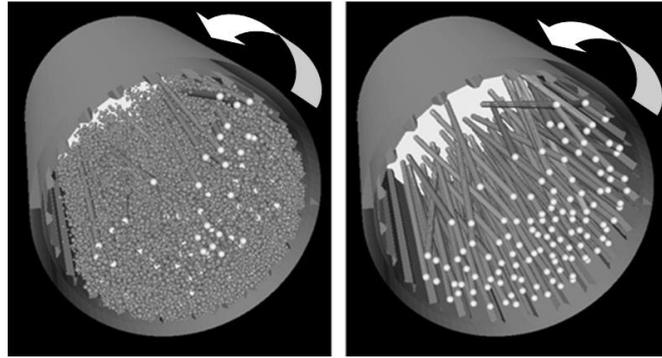


FIGURA 2 - Processo de moagem do minério de ferro no moinho de barras.

Fonte: <http://www.magotteaux.com/wiki-mag/rod-mill>

Quando uma barra cai, ela se choca com outras em pontos de contato variáveis. Um caso crítico ocorre quando o ponto de impacto está próximo ao centro da barra, este caso poderá resultar na quebra da barra, causando danos ao material e aumentando o custo de fabricação e manutenção.



FIGURA 3 - Barras do moinho de barras

Fonte: <http://www.flickrriver.com/places/United+States/Nevada/Belmont+Mill>

2 Objetivo e justificativa

2.1 Objetivo geral

O objetivo geral deste trabalho é analisar, através do método de diferenças finitas, a propagação de uma trinca em uma barra com o propósito de estabelecer a influência da altura da queda, resistência do material, tenacidade à fratura e coeficiente de encruamento no comprimento e na velocidade de propagação da trinca.

2.2 Objetivos específicos

Para analisar numericamente a propagação dinâmica de uma trinca na barra, objetiva-se:

- I. Desenvolver o algoritmo baseado no método de diferenças finitas e na teoria de vibração de viga de Euler Bernoulli para analisar o problema de impacto transversal em uma barra intacta¹;
- II. Aplicar o algoritmo desenvolvido e o balanço de energia de Griffith para analisar a propagação dinâmica de uma trinca localizada no centro da barra.

2.3 Justificativas

O Brasil é um país que possui grandes reservas de minério de ferro de alta qualidade e produz grande quantidade de aço. A diminuição no custo de fabricação do aço poderá aumentar a competitividade brasileira no mercado mundial, em consequência, melhorando a economia do país. A investigação proposta poderá estabelecer a relação entre a quebra de barra de certo diâmetro com a altura da queda, resistência do material e o diâmetro da barra,

¹ Viga Intacta indica que não há presença de trinca.

assim, contribuindo para o projeto de máquinas de moinho e diminuindo o custo da fabricação de aço.

A propagação dinâmica de trinca é complexa sendo quase impossível obter a resolução analítica, dessa forma, para resolução são utilizados softwares comerciais como ANSYS LS-DYNA e ABAQUES que além de caros requerem experiência e treinamento especializado dos usuários, e ainda não são capazes de modelar a propagação dinâmica da trinca provocada por impacto. Esses softwares discretizam a equação do movimento no domínio do espaço por meio do método de elementos finitos, e no domínio do tempo através do método de diferenças finitas.

O método de diferenças finitas é um método numérico estável e de formulação simples amplamente utilizado em pesquisas científicas. Porém ainda não foram encontrados trabalhos que utilizem exclusivamente este método para análise da propagação dinâmica de trinca provocada por impacto, sendo assim, o êxito deste trabalho resultará em significativa contribuição acadêmica.

3 Revisão bibliografia

O fenômeno de vibração começou a ser estudado quando foram desenvolvidos os primeiros instrumentos musicais. Um dos primeiros estudos foi atribuído ao filósofo e matemático grego: Pitágoras (582-502 A.C), que realizou experimentos com uma corda vibratória, utilizando um instrumento simples chamado de monocórdio (MILLER, 1935).

Galileu Galilei (1564-1642) também realizou estudo em uma corda vibratória e foi o primeiro a mostrar que o tom, está relacionado com a frequência de vibração. Galileu também estabeleceu os fundamentos para os estudos de sistemas vibratórios por meio de suas observações feitas em 1583 referentes aos movimentos de uma lâmpada suspensa de uma catedral em Pisa, na Itália. Ele descobriu que o período do movimento era independente da amplitude do balanço da lâmpada. Essa propriedade é válida para todos os sistemas vibratórios que podem ser descritos por modelos lineares.

A solução analítica da corda vibratória foi apresentada por Joseph Lagrange (1736-1813). Em seu estudo, Lagrange admitiu que a corda vibratória, era composta por um número finito de partículas de massas idênticas, espaçadas igualmente e estabeleceu a existência de um número de frequências independentes igual ao número de partículas de massa. Considerando-se o número de partículas infinito, constatou-se que as frequências resultantes eram as mesmas frequências harmônicas da corda estirada.

A possibilidade de uma corda vibrar com várias de suas harmônicas presentes ao mesmo tempo, sendo o deslocamento de qualquer ponto em qualquer instante, igual à soma algébrica dos deslocamentos para cada harmônica, foi provada por meio das equações dinâmicas de Daniel Bernoulli (1700-1782) (CANNON e DOSTROVSKY, 1981).

Já as vibrações de vigas delgadas apoiadas e engastadas de diferentes maneiras foram estudadas pela primeira vez por Euler em 1744 e Daniel Bernoulli em 1751. Essa abordagem ficou conhecida como Euler-Bernoulli.

Stephen Timoshenko (1878-1972), apresentou uma teoria mais aperfeiçoada de vibração que ficou conhecida como teoria de Timoshenko ou de vigas grossa, que considera os efeitos da inércia de rotação e da deformação por cisalhamento, efeitos esses, não considerados pelo modelo de Euler-Bernoulli.

Kim e Kim (2000) analisaram o efeito de uma trinca, na estabilidade dinâmica de uma viga de Timoshenko com extremidades livre submetida a uma força constante ou intermitente.

Para obter as frequências naturais e os modais vibratórios transversais utilizaram-se dos métodos de elementos finitos e das escalas múltiplas. Na mesma linha Kisa e Gurel (2007) desenvolveram uma nova técnica numérica para análise de vibrações de vigas de seção transversal circular contendo trincas. Através dos métodos de elementos finitos e de síntese modal de componentes obtiveram os modos de vibração de uma viga de seção circular contendo uma trinca. Porém nesses trabalhos não é considerada a propagação dinâmica da trinca.

Mais recentemente Dona e Palmeri *et al.* (2012) desenvolveram um modelo para análise de vibração de viga, baseado no método de elementos finitos, de estruturas reticuladas com múltiplos defeitos concentrados. O modelo proposto considera várias trincas em diferentes locais da viga e os efeitos macroscópicos desses defeitos são simulados atribuindo molas longitudinais, rotacionais e transversais na posição de cada trinca.

Hoffmann (2013) do grupo de pesquisa Mecânica Aplicada da UNIPAMPA realizou a modelagem matemática do perfil de dureza da barra através do método analítico pela aplicação da teoria de Euler Bernolli e mecânica da fratura. Porém devido a limitações do método analítico, não foi possível tratar adequadamente a propagação de uma trinca.

A propagação dinâmica de trinca é objeto de estudo de muitos pesquisadores, Brickstad (1983) investigou a propagação rápida de trinca através do desenvolvimento de um programa de elementos finitos para considerar o material como Elástico-Viscoplástico. Nesse modelo os efeitos da deformação plástica são considerados. Needleman (1994) analisou a propagação dinâmica de uma trinca em sólidos rígidos através do método de elementos finitos, como resultado obteve a velocidade de propagação da trinca. Na mesma linha Marur (1994) desenvolveu um método para análise dinâmica de pré-trinca em um corpo de prova de três pontos bi-apoiado utilizando elementos finitos. Kostaski (2012) usou o método de elementos discretos (DEM) para analisar a propagação de trinca em materiais quase-frágeis.

3.1 Teoria das vibrações

As teorias de vibração estudam o movimento oscilatório de corpos e as forças envolvidas nesses deslocamentos. Ao analisar as energias mecânicas envolvidas na vibração de um sistema, pode-se afirmar que o movimento de vibração envolve a transformação da energia potencial armazenada no corpo em energia cinética e ou vice versa.

Para determinar a posição dos componentes de um sistema durante o movimento oscilatório envolve-se o número de graus de liberdade do sistema. Esse número é igual ao número mínimo de coordenadas necessárias para determinar completamente a posição de todos os componentes do sistema em um determinado instante de tempo.

Ao considerar uma viga engastada (FIGURA 4) contendo infinitos pontos materiais são necessários infinitos graus de liberdade para determinar os respectivos deslocamentos (w_1, w_2, w_3, \dots).

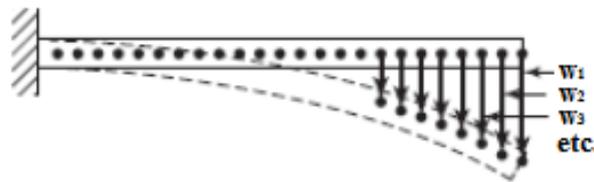


FIGURA 4 – Infinitos graus de liberdade.

Fonte: RAO, 2011

Na maioria dos casos de vibrações envolvendo problemas de engenharia são necessários infinitos graus de liberdade para descrever o movimento, esses sistemas são chamados de contínuos e são determinados por uma equação diferencial parcial.

Para a formulação de uma viga pode-se considerar dois modelos: a viga de Euler-Bernoulli e a de Timoshenko. A principal diferença entre estes modelos é que na formulação de Euler-Bernoulli não é considerada a deformação de cisalhamento presente nas seções transversais. Para a resolução do problema proposto nesse trabalho utiliza-se o modelo da viga de Euler-Bernoulli.

3.1.1 Teoria das vibrações em vigas de Euler-Bernoulli

Na teoria clássica de Euler-Bernoulli, consideram-se vigas prismáticas uniformes (de seção transversal constante) com comprimento longitudinal como dimensão predominante. No caso de vigas, o interesse reside em ações de movimento chamadas ações de flexão (FIGURA 5).

Para aplicarmos a teoria das vigas de Euler-Bernoulli ou teoria elementar das vigas, devemos fazer as seguintes premissas (BEER, JR., *et al.*, 2012):

- I. Existe um eixo na viga que não sofre tração ou compressão, e o eixo x será posicionado ao longo deste eixo neutro.
- II. As seções transversais perpendiculares ao eixo neutro no estado não torcido da viga permaneceram planas e perpendiculares ao eixo neutro durante o deslocamento, o que significa que o cisalhamento pode ser desconsiderado.
- III. O material é linearmente elástico e as propriedades da viga são homogêneas em todas as direções.
- IV. As tensões laterais desenvolvidas nos eixos² σ_y e σ_w são desprezíveis quando comparadas com as tensões desenvolvidas no eixo x (σ_x).

O plano xw , é o plano principal, conforme mostra FIGURA 5.

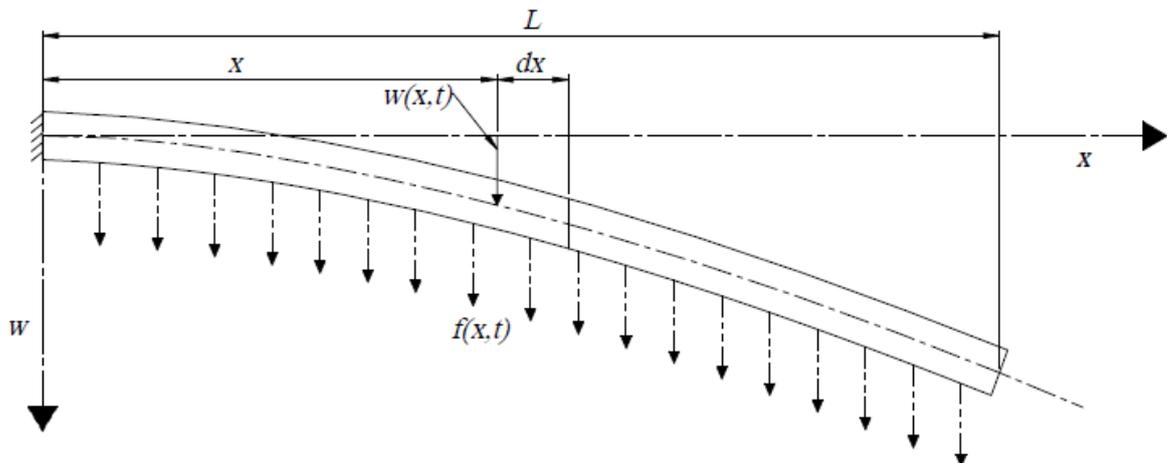


FIGURA 5 - Viga sofrendo deflexão

3.1.2 Equação diferencial da viga submetida à vibração lateral

Segundo RAO (2011), para analisar a vibração lateral é necessário pensar em um elemento da viga³ (FIGURA 6) onde $M(x,t)$ é o momento fletor, $V(x,t)$ é a força de

² O eixo y passa na origem e é perpendicular aos eixos w e x .

³ Viga é um elemento unidimensional onde o comprimento é bem maior que as dimensões da seção transversal.

cisalhamento, e $f(x,t)$ é a força externa por unidade de comprimento da viga. Visto que a força de inércia que age sobre o elemento da viga é:

$$\rho A(x) dx \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, t)$$

A equação de movimento da força na direção w é:

$$-(V + dV) + f(x, t)dx + V = \rho A(x) dx \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, t) \quad \dots(3.1)$$

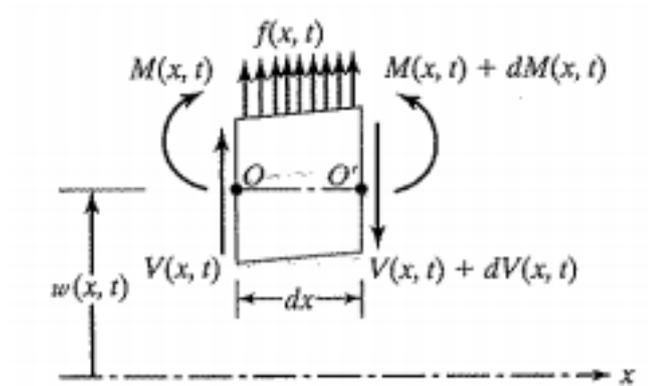


FIGURA 6 - Diagrama de corpo livre de um elemento da viga sofrendo deflexão.

Fonte: RAO (2011).

onde ρ é a densidade da massa, e $A(x)$ é a área da seção transversal da viga. A equação do movimento rotacional em relação ao eixo y que passa pelo ponto O , desconsiderando a aceleração angular, é dada por:

$$(M + dM) - (V + dV)dx + f(x, t)dx \frac{dx}{2} - M = 0 \quad \dots(3.2)$$

Anotando que:

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx \quad \dots(3.3)$$

$$dM = \frac{\partial M}{\partial x} dx \quad \dots(3.4)$$

Desconsiderando os termos envolvendo a segunda potência de dx , as Equações (3.1) e (3.2) podem ser escritas respectivamente:

$$-\frac{\partial V}{\partial x}(x, t) + f(x, t) = \rho A(x) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, t) \quad \dots(3.5)$$

$$\frac{\partial M}{\partial x}(x, t) - V(x, t) = 0 \quad \dots(3.6)$$

Utilizando a relação $V = \partial M / \partial x$ da Equação (3.6), a Equação (3.5) torna-se:

$$-\frac{\partial^2 M}{\partial x^2}(x, t) + f(x, t) = \rho A(x) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, t) \quad \dots(3.7)$$

Sabe-se pela teoria elementar da flexão de vigas (também conhecida como teoria de Euler-Bernoulli ou teoria da viga delgada ou fina) que a relação entre o momento fletor e deflexão pode ser expressa como:

$$M(x, t) = EI(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x, t) \quad \dots(3.8)$$

Onde E é o módulo de Young do material e $I(x)$ é o momento de inércia de área da seção transversal da viga em relação ao eixo y . Esta equação é válida somente para regime elástico.

Inserindo a Equação (3.8), na Equação (3.7), obtemos a equação de movimento para a vibração lateral forçada de uma viga não uniforme:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x, t) \right] + \rho A(x) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, t) = f(x, t) \quad \dots(3.9)$$

A equação acima é válida para um mesmo módulo de elasticidade. Para nosso caso, o módulo de elasticidade é constante.

Para uma viga uniforme, a Equação (3.9) reduz-se a:

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4}(x, t) + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, t) = f(x, t) \dots \quad \dots(3.10)$$

Para vibração livre, $f(x, t) = 0$; e portanto, a equação de movimento torna-se:

$$c^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4}(x, t) + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, t) = 0 \quad \dots(3.11)$$

onde:

$$c = \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$$

4 Solução da vibração da viga submetida a impacto pelo método de diferenças finitas

Para o caso em estudo realizou-se análise dos fenômenos físicos que são originados durante o processo de trituração do minério de ferro. Após estudos definiu-se que o caso mais crítico ocorre quando a barra cai de uma altura H sobre uma pedra de minério posicionada exatamente no meio, representado na FIGURA 7.

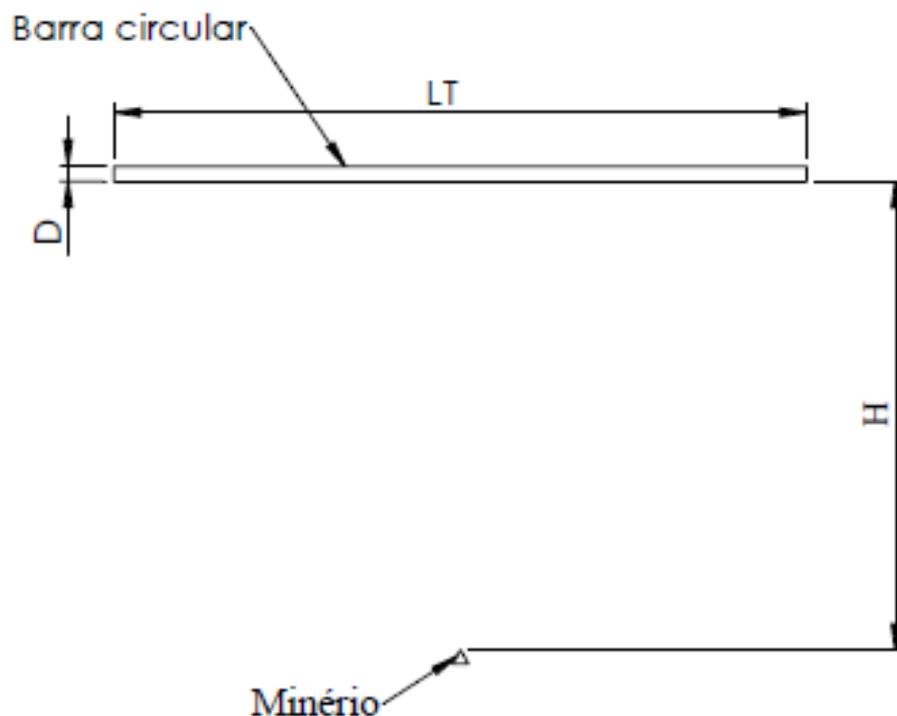


FIGURA 7 – Representação do caso crítico

Desse modo considera-se o caso extremo de solicitação de resistência da barra, no momento em que a haste se choca com uma única rocha exatamente na metade de seu comprimento, a barra deformada é representada na FIGURA 8. Assume-se que a rocha de minério de ferro é um vínculo rígido indeformável, sendo assim no momento em que a barra toca o minério não ocorrem perdas de energia causadas por uma possível deformação do vínculo e emissão de som.

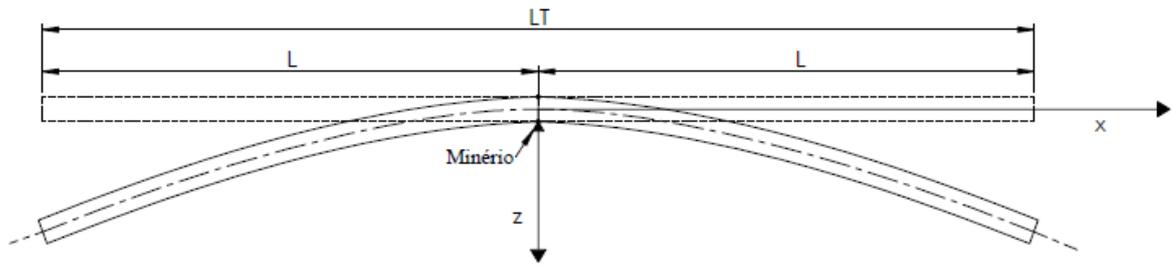


FIGURA 8 - A viga deformada depois do choque com o minério.

Observa-se na FIGURA 8, que a deflexão da haste é simétrica. Com o objetivo de otimizar recursos computacionais é possível considerar somente a metade da viga considerando-a como engastada, devido à simetria (FIGURA 9).

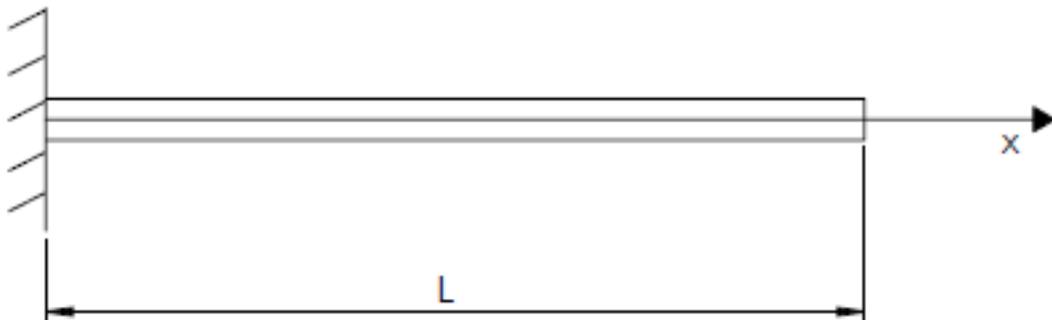


FIGURA 9 – Modelo de análise: viga de comprimento L, engastada em uma extremidade e livre na outra.

As diferenças finitas⁴ é um método simples e muito utilizado em trabalhos científicos, é aplicado na resolução de equações diferenciais complexas onde a resolução analítica é difícil e na maioria das vezes impossível de se obter. Segundo Ruggiero e Lopes (1996), esse método consiste em transformar o problema de resolver uma equação diferencial em um problema de resolver um sistema de equações algébricas, usando para isto aproximações por diferenças finitas das derivadas que aparecem na equação. O método empregado é o de diferenças finitas centrada o qual apresenta menor erro, comparado com a diferença finita regressiva e progressiva. Outra característica importante é sua estabilidade no domínio do tempo e para esse tipo de problema também apresentou-se estável no domínio do espaço.

⁴ O conceito do método de diferenças finitas encontra-se no ANEXO A.

Inicialmente é discretizado o domínio em n passos, o que se denomina malha. Neste trabalho é empregada uma malha uniforme, ou seja, a distância entre os pontos possuem o mesmo comprimento $h = \frac{1}{n}$. No total a viga foi discretizada em 221 pontos (FIGURA 10).



FIGURA 10- Passo (h) indicado na Malha viga

4.1 Formulação

Na seção anterior vimos que a equação do movimento para uma viga de uma seção transversal não uniforme submetida à vibração lateral forçada, é a seguinte:

$$\frac{\partial^2 M(x,t)}{\partial x^2} + \rho A \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = f(x,t) \quad \dots(4.1)$$

Para simplificar a solução das integrais de modo a considerar os limites de integração de 0 a 1, introduzimos o seguinte parâmetro adimensional:

$$\zeta = \frac{x}{L} \quad 0 \leq \zeta \leq 1 \quad \dots(4.2)$$

onde L é a metade do comprimento da total da barra.

Aplicando (4.2) na Equação (4.1), temos:

$$\frac{\partial^2 M(\zeta,t)}{L^2 \partial \zeta^2} + \rho A \frac{\partial^2 w(\zeta,t)}{\partial t^2} = f(\zeta,t) \quad \dots(4.3)$$

onde $f(\zeta, t) = \rho Ag$, constante.

Discretizando o Momento Fletor na Equação (4.3) pelo método de Diferença Finita Centrada de primeira ordem, temos no ponto i e no tempo j :

$$\frac{\partial^2 M_i^j}{L^2 \partial \zeta^2} = \frac{1}{L^2 h^2} (M_{i+1}^j - 2M_i^j + M_{i-1}^j) \quad \dots(4.4)$$

Onde:

$$M_{i+1}^j = EI_{i+1}^j \frac{\partial^2 w_{i+1}^j}{\partial x^2} = EI_{i+1}^j \frac{1}{L^2 h^2} [w_{i+2}^j - 2w_{i+1}^j + w_i^j] \quad \dots(4.5)$$

$$M_i^j = EI_i^j \frac{\partial^2 w_i^j}{\partial x^2} = EI_i^j \frac{1}{L^2 h^2} [w_{i+1}^j - 2w_i^j + w_{i-1}^j] \quad \dots(4.6)$$

$$M_{i-1}^j = EI_{i-1}^j \frac{\partial^2 w_{i-1}^j}{\partial x^2} = EI_{i-1}^j \frac{1}{L^2 h^2} [w_i^j - 2w_{i-1}^j + w_{i-2}^j] \quad \dots(4.7)$$

Substituindo as Equações (4.5), (4.6) e (4.7) na Equação (4.4), temos:

$$\frac{\partial^2 M_i^j}{L^2 \partial \zeta^2} = EI \frac{\partial^4 w_i^j}{L^4 \partial \zeta^4} = \frac{E}{L^4 h^4} (I_{i+1}^j [w_{i+2}^j - 2w_{i+1}^j + w_i^j] - 2I_i^j [w_{i+1}^j - 2w_i^j + w_{i-1}^j] + I_{i-1}^j [w_i^j - 2w_{i-1}^j + w_{i-2}^j]) \quad \dots(4.8)$$

4.1.1 Aceleração

Sabemos que $\frac{\partial^2 w(\zeta L, t)}{\partial t^2}$ na Equação (4.3) corresponde à aceleração. Para calculá-la utilizamos a equação de movimento linear de um ponto material com a consideração em que a aceleração é uniforme porque o incremento de tempo será muito curto: $\Delta t = t^j - t^{j-1}$, $j = 1, 2, \dots, m$:

$$\Delta s_i = v_i^{j-1} \Delta t + \frac{1}{2} a_i^j \Delta t^2 \quad \dots(4.9)$$

Sabemos que $\Delta s_i = w_i^j - w_i^{j-1}$ e $a_i^j = \frac{\partial^2 w(\zeta_i, t^j)}{\partial t^2}$, então temos:

$$\frac{\partial^2 w(\zeta_i, t^j)}{\partial t^2} = \frac{2}{\Delta t^2} (w_i^j - w_i^{j-1} - v_i^{j-1} \Delta t) \quad \dots(4.10)$$

$$\rho A \frac{\partial^2 w(\zeta_i, t^j)}{\partial t^2} = \frac{2\rho A}{\Delta t^2} (w_i^j - w_i^{j-1} - v_i^{j-1} \Delta t) \quad \dots(4.11)$$

Após de obtenção w_i^j , pode-se calcular a_i^j pela Equação (4.12) e em seguida a velocidade:

$$v_i^j = v_i^{j-1} + a_i^j \Delta t$$

A qual é imprescindível para obter a energia cinética.

4.1.2 Equação Geral

Substituindo as Equações (4.8) e (4.11) na Equação (4.3), temos:

$$\begin{aligned} & \frac{E}{L^4 h^4} \left(I_{i+1}^j [w_{i+2}^j - 2w_{i+1}^j + w_i^j] - 2I_i^j [w_{i+1}^j - 2w_i^j + w_{i-1}^j] + I_{i-1}^j [w_i^j - 2w_{i-1}^j + w_{i-2}^j] \right) + \\ & \beta (w_i^j - w_i^{j-1} - v_i^{j-1} \Delta t) = \rho A g \end{aligned} \quad \dots(4.12)$$

$$\text{Com } m = \frac{tf}{\Delta t}, 1 \leq j \leq m \text{ e } n = \frac{1}{h}, 1 \leq i \leq n$$

Onde:

w é o deslocamento em cada ponto ;

Δt é o incremento ou passo de tempo;

tf é o tempo total da análise;

m é o número total de intervalos de tempo da análise;

n é o número total de passos.

Caso ocorra o surgimento de uma trinca em um local, o momento de inércia da barra neste local varia com o tempo, então a equação (4.12) assume formas distintas, ou seja, o momento de inércia é constante no local da propagação quando a viga está intacta e variável a partir do início e da propagação da trinca.

Para tornar a resolução mais compacta nomeamos as seguintes notações:

$$\alpha = \frac{EI}{L^4 h^4} \quad \dots(4.13)$$

$$\beta = \frac{2\rho A}{\Delta t^2} \quad \dots(4.14)$$

$$\gamma_i^j = \rho A \left(g + \frac{2v_i^{j-1}}{\Delta t} \right) \quad \dots(4.15)$$

4.1.3 Caso não há o surgimento de trinca

Caso não houver o surgimento de uma trinca, o momento de inércia (I) é constante para todos os tempos e posições $I_{i+1}^j = I_i^j = I_{i-1}^j = I$, então a equação (4.12) assume a seguinte forma:

$$\alpha(w_{i+2}^j - 4w_{i+1}^j + 6w_i^j - 4w_{i-1}^j + w_{i-2}^j) + \beta(w_i^j - w_i^{j-1} - v_i^{j-1}\Delta t) = \rho Ag \quad \dots(4.16)$$

4.1.4 Caso há o surgimento de uma trinca no ponto fixo $x=0$

Supor-se neste trabalho que a trinca ocorra apenas no ponto fixo: $x=0$, ou seja $i=0$. O momento de inércia (I_0^j) varia na medida em que a trinca se propaga. Então a Equação (4.12) assume a seguinte forma para $i=1$:

$$\frac{E}{L^4 h^4} \left(I \left[w_{1+2}^j - 4w_{1+1}^j + 5w_1^j - 2w_{1-1}^j \right] + I_{1-1}^j \left[w_1^j - 2w_{1-1}^j + w_{1-2}^j \right] \right) + \beta \left(w_1^j - w_1^{j-1} - v_1^{j-1} \Delta t \right) = \rho A g \quad \dots(4.17)$$

Para as demais posições o momento permanece constante em todo o tempo $I_{i+1}^j = I_i^j = I$ e a equação (2.15) se mantém mesma.

Para resolver a Equação (4.12) são necessárias duas condições iniciais e quatro condições de contorno. Essas condições devem ser discretizadas pelo método de diferenças finitas para substituir na equação geral.

4.1.5 Condições iniciais

Uma condição inicial é dada por $w(x, t=0) = w_i^0$, considerando $w(x, 0) = w(\zeta, 0) = 0$, temos:

$$w_i^0 = 0, \text{ com } 1 \leq i \leq n \quad \dots(4.18)$$

A outra condição inicial é dada pela velocidade inicial da viga $\frac{\partial w}{\partial t}(x, t=0) = v_i^0$ no momento em que a barra choca-se com o minério de ferro (FIGURA 8), assim temos:

$$v_i^0 = \sqrt{2gH}, \text{ } 1 \leq i \leq n \quad \dots(4.19)$$

onde g é a aceleração da gravidade e H é a altura da queda.

4.1.6 Condições de contorno

A haste está engastada na extremidade esquerda conforme mostra a FIGURA 9, onde as condições de contorno apresentam-se da seguinte forma:

- I. Na extremidade engastada ($\zeta L = 0$ ou $i = 0$), a deflexão e a inclinação são nulas, sendo assim:

- a) Deflexão $w(0, t) = 0$ aplicado para todos os instantes de tempo, temos:

$$w_0^j = 0, \text{ para } 1 \leq j \leq m \quad \dots(4.20)$$

- b) A inclinação $\frac{\partial w(0, t)}{\partial x} = \frac{w_{0+1}^j - w_{0-1}^j}{2h} = 0$, resulta em:

$$w_{-1}^j = w_1^j, \text{ } 1 \leq j \leq m \quad \dots(4.21)$$

- II. Na extremidade livre $\zeta = 1$ ou $i = n$, o momento fletor e a força cortante são nulos, isto é:

- a) Momento fletor $EI(\zeta_n) \frac{\partial^2 w(\zeta_n, t^j)}{L^2 \partial \zeta^2} = \frac{E}{L^2 h^2} I_n^j (w_{n+1}^j - 2w_n^j + w_{n-1}^j) = 0$, resulta

em:

$$w_{n+1}^j = -w_{n-1}^j + 2w_n^j, \text{ } 1 \leq j \leq m \quad \dots(4.22)$$

- b) Através da força cortante, têm-se:

$$\frac{\partial}{L\partial\zeta} \left(EI(\zeta_n) \frac{\partial^2 w(\zeta_n, t^j)}{L^2 \partial \zeta^2} \right) = \frac{E}{2L^3 h^3} I_n^j (-w_{n-2}^j + 2w_{n-1}^j - 2w_{n+1}^j + w_{n+2}^j) = 0 \quad \dots(4.23)$$

Substituindo (4.22) em (4.23), temos:

$$w_{n+2}^j = w_{n-2}^j - 4w_{n-1}^j + 4w_n^j \quad \dots(4.24)$$

4.2 Construção de equações do sistema linear

A solução do sistema linear é obtida através da matriz dos coeficientes de deslocamentos, utilizando a Equação (4.17) para a primeira linha e a Equação (4.16) para as demais.

Iniciamos com o tempo $j=1$, o qual corresponde ao primeiro instante $t^1 = \Delta t$, os demais instantes se utilizam das informações dos instantes anteriores. A velocidade no tempo j é obtida por:

$$v_i^j = v_i^{j-1} + a_i^j \Delta t \quad \dots(4.25)$$

onde a aceleração:

$$a_i^j = \frac{2\rho A}{\Delta t^2} (w_i^j - w_i^{j-1} - v_i^{j-1} \Delta t) \quad \dots(4.26)$$

Substituindo as condições iniciais (4.19) e (4.20) na Equação (4.12), temos:

$$\frac{E}{L^4 h^4} \left(I_i^1 [w_{i+2}^1 - 4w_{i+1}^1 + 5w_i^1 - 2w_{i-1}^1] + I_{i-1}^1 [w_i^1 - 2w_{i-1}^1 + w_{i-2}^1] \right) + \frac{2\rho A}{\Delta t^2} (w_i^1 - w_i^0 - v_i^0 \Delta t) = \rho Ag \quad \dots(4.27)$$

ou seja

$$\alpha \left[w_{i+2}^1 - 4w_{i+1}^1 + 5w_i^1 - 2w_{i-1}^1 \right] + \frac{E}{L^4 h^4} I_{i-1}^1 \left[w_i^1 - 2w_{i-1}^1 + w_{i-2}^1 \right] + \beta w_i^1 = \gamma_i^1 \quad \dots(4.28)$$

Substituindo as condições iniciais (4.19) e (4.20) na Equação (4.16), temos:

$$\frac{EI}{L^4 h^4} \left(w_{i+2}^1 - 4w_{i+1}^1 + 6w_i^1 - 4w_{i-1}^1 + w_{i-2}^1 \right) + \frac{2\rho A}{\Delta t^2} \left(w_i^1 - w_i^0 - v_i^0 \Delta t \right) = \rho A g \quad \dots(4.29)$$

$$\alpha \left[w_{i+2}^1 - 4w_{i+1}^1 + 6w_i^1 - 4w_{i-1}^1 + w_{i-2}^1 \right] + \beta w_i^1 = \gamma_i^1 \quad \dots(4.30)$$

Para construir a matriz dos coeficientes dos deslocamentos aplicamos a Equação (4.28) para a primeira linha e a Equação (4.30) para as demais, assim temos:

I. Primeira linha da matriz, $i = 1$.

$$\alpha \left[w_{i+2}^1 - 4w_{i+1}^1 + 5w_i^1 - 2w_{i-1}^1 \right] + \frac{E}{L^4 h^4} I_{i-1}^1 \left[w_i^1 - 2w_{i-1}^1 + w_{i-2}^1 \right] + \beta w_i^1 = \gamma_i^1 \quad (4.31)$$

Substituindo as condições de contorno (4.20) e (4.21) em (4.31), temos;

$$\left(5\alpha + 2\alpha \frac{I_0^1}{I} + \beta \right) w_1^1 - 4\alpha w_2^1 + \alpha w_3^1 = \gamma_1^1 \quad \dots(4.32)$$

II. Segunda linha da matriz, $i = 2$.

$$\alpha \left[w_0^1 - 4w_1^1 + 6w_2^1 - 4w_3^1 + w_4^1 \right] + \beta w_2^1 = \gamma_2^1 \quad (4.33)$$

Substituindo a condição de contorno (4.20) na Equação (4.33), temos:

$$-4\alpha w_1^1 + (6\alpha + \beta) w_2^1 - 4\alpha w_3^1 + \alpha w_4^1 = \gamma_2^1 \quad \dots(4.34)$$

III. Terceira linha da matriz, $i = 3$.

$$\alpha \left[w_1^1 - 4w_2^1 + 6w_3^1 - 4w_4^1 + w_5^1 \right] + \beta w_3^1 = \gamma_3^1 \quad (4.35)$$

Substituindo a condição de contorno (4.20) em (4.35), temos:

$$+\alpha w_1^1 - 4\alpha w_2^1 + (6\alpha + \beta) w_3^1 - 4\alpha w_4^1 + \alpha w_5^1 = \gamma_3^1 \quad (4.36)$$

IV. Antepenúltima linha da matriz, $i = n - 2$.

$$\alpha \left[w_{n-4}^1 - 4w_{n-3}^1 + 6w_{n-2}^1 - 4w_{n-1}^1 + w_n^1 \right] + \beta w_{n-2}^1 = \gamma_{n-2}^1$$

$$+\alpha w_{n-4}^1 - 4\alpha w_{n-3}^1 + (6\alpha + \beta) w_{n-2}^1 - 4\alpha w_{n-1}^1 + \alpha w_n^1 = \gamma_{n-2}^1$$

V. Penúltima linha da matriz, $i = n - 1$.

$$\alpha \left[w_{n-3}^1 - 4w_{n-2}^1 + 6w_{n-1}^1 - 4w_n^1 + w_{n+1}^1 \right] + \beta w_{n-1}^1 = \gamma_{n-1}^1 \quad (4.37)$$

Substituindo a condição de contorno (4.22) em (4.37), temos:

$$+\alpha w_{n-3}^1 - 4\alpha w_{n-2}^1 + (5\alpha + \beta) w_{n-1}^1 - 2\alpha w_n^1 = \gamma_{n-1}^1 \quad (4.38)$$

VI. Última linha da matriz, $i = n$.

$$\alpha \left[w_{n-2}^1 - 4w_{n-1}^1 + 6w_n^1 - 4w_{n+1}^1 + w_{n+2}^1 \right] + \beta w_n^1 = \gamma_n^1 \quad (4.39)$$

Substituindo a condição de contorno (4.22) e (4.24) em (4.39), temos:

é a velocidade de som de propagação de onda unidimensional no material. Considerando os valores: $L=2,21$ m, $R=0,0508$ m, $E=200$ GPa, $\rho=7850$ kg/m³ e tomando $\Delta x=0,01$ m, obtêm-se: $c_0 = 5047$ m/s e $\Delta t \approx 7,8 \times 10^{-7}$ s. Adota-se então $\Delta t \approx 1 \times 10^{-6}$ s = 1 μ s.

4.3 Momento fletor

Para obtermos a tensão superficial na barra, precisamos calcular o momento fletor (M) máximo. Assumimos que o momento fletor máximo ocorre no meio da barra, considerando as condições de simetria. Então substituindo $i=0$ na Equação (4.6), temos:

$$M_0^j = \frac{EI_0^j}{L^2 h^2} (w_1^j - 2w_0^j + w_{-1}^j),$$

Aplicando as condições de contorno (4.20) e (4.21), temos:

$$M_0^j = \frac{2EI_0^j w_1^j}{L^2 h^2} \quad \text{para } i=0 \quad \dots(4.42)$$

onde I_0^j é o momento de inércia na posição onde a trinca se propaga

Também podemos obter a expressão para o momento fletor para as demais posições, substituindo as condições de contorno na equação:

$$M_i^j = \frac{2EI_i^j}{L^2 h^2} (w_{i+1}^j - 2w_i^j + w_{i-1}^j) \quad \text{para } 1 \leq i \leq n \quad \dots(4.43)$$

Por exemplo: Para $i=1$ temos $M_1^j = \frac{EI_1^j}{L^2 h^2} (w_2^j - 2w_1^j + w_0^j)$ aplicando a condição de contorno (4.20), resulta em:

$$M_1^j = \frac{EI}{L^2 h^2} (w_2^j - 2w_1^j) \quad \dots(4.44)$$

4.4 Força cortante

A força cortante pode ser expressa da seguinte forma:

$$V(\zeta) = EI(\zeta, t) \frac{\partial^3 w(\zeta, t)}{\partial x^3} \quad \dots(4.45)$$

Discretizando a Equação (4.45), temos:

$$V_i^j = \frac{E}{2h^3} I_i^j \left(-w_{i-2}^j + 2w_{i-1}^j - 2w_{i+1}^j + w_{i+2}^j \right), \quad 1 \leq j \leq m \quad \dots(4.46)$$

A partir da Equação (4.46), podemos determinar a força cortante para qualquer tempo e posição na barra, conforme segue para $i=1$, temos:

$$V_1^j = \frac{E}{2h^3} I_1^j \left(-w_{-1}^j + 2w_0^j - 2w_2^j + w_3^j \right),$$

Aplicando as condições de contorno (4.20) e (4.21), temos:

$$V_1^j = \frac{EI}{2h^3} \left(-w_1^j - 2w_2^j + w_3^j \right) \quad \dots(4.47)$$

Para $i=2$, temos:

$$V_2^j = \frac{E}{2h^3} I_2^j \left(-w_0^j + 2w_1^j - 2w_3^j + w_4^j \right).$$

Aplicando as condições de contorno (4.20) e (4.21) e a condição de contorno (4.21), temos:

$$V_2^j = \frac{EI}{2h^3} \left(2w_1^j - 2w_3^j + w_4^j \right) \quad \dots(4.48)$$

Para $i=3$, temos:

$$V_3^j = \frac{EI}{2h^3} (-w_1^j + 2w_2^j - 2w_4^j + w_5^j) \quad \dots(4.49)$$

5 Mecânica da Fratura

Observando uma fratura a nível atômico, teoricamente o material fratura quando é submetido a tensão para romper as suas ligações químicas. No entanto experimentalmente a tensão de fratura para materiais frágeis são de três a quatro vezes inferiores a tensão teórica de coesão atômica. Experimentos realizados por Leonardo da Vinci, Griffith, e outros indicam que essa discrepância entre tensão real de fratura e tensão teórica ocorre devido a defeitos internos existentes nos materiais. Esses defeitos internos estão entre as principais causas de fratura dos materiais.

A fratura ocorre quando ha separação de um corpo em duas ou mais partes em resposta a imposição de uma tensão. Para os materiais de engenharia são possíveis duas modalidades de fratura: Dúctil e Frágil. O aço é classificado como um material de engenharia dúctil, portanto esse tipo de fratura será nosso objeto de estudo. Os materiais dúcteis apresentam uma deformação plástica substancial com grande absorção de energia antes da fratura. O processo de fratura começa com a formação de uma trinca e sua propagação em resposta a imposição de uma tensão.

5.1 Teoria do balanço de energia de Griffith

De acordo com a primeira lei da termodinâmica quando um sistema passa de uma condição de não equilíbrio para uma condição de equilíbrio há uma perda de energia líquida. Em 1920, Griffith aplicou esta ideia para a formação de uma trinca.

Uma trinca pode se formar ou se propagar somente se o processo apresenta perda de energia ou a mantém constante. A condição crítica para fratura pode ser definida como o ponto onde a propagação da trinca ocorre em condições de equilíbrio, sem alteração da energia líquida total. A teoria do balanço de energia de Griffith para um incremento de área da trinca dA , sobre condições de equilíbrio, pode ser expresso da seguinte forma:

$$\frac{dE_t}{dA} = \frac{d\Pi}{dA} + \frac{dW_s}{dA} = 0$$

$$-\frac{d\Pi}{dA} = \frac{dW_s}{dA} \quad \dots(5.1)$$

Onde:

E_t = Energia total;

Π = Energia potencial fornecida pela energia de deformação interna e forças externas;

W_s = Trabalho requerido para a criação de novas superfícies.

Pela análise de tensão de Inglis, conforme mostra FIGURA 11, resulta em:

$$\Pi = \Pi_0 - \frac{\pi\sigma^2 a^2 B}{E}$$

$$-\frac{d\Pi}{dA} = \frac{\pi\sigma^2 a}{E} \quad \dots(5.2)$$

$$\frac{dW_s}{dA} = 2\gamma_s \quad \dots(5.3)$$

Substituindo as equações (5.2) e (5.3) na equação (5.1), temos a solução para a tensão de fratura em materiais frágeis, obtida pelo balanço de energia de Griffith:

$$\sigma_f = \left(\frac{2E\gamma_s}{\pi a} \right)^{1/2} \quad \dots(5.4)$$

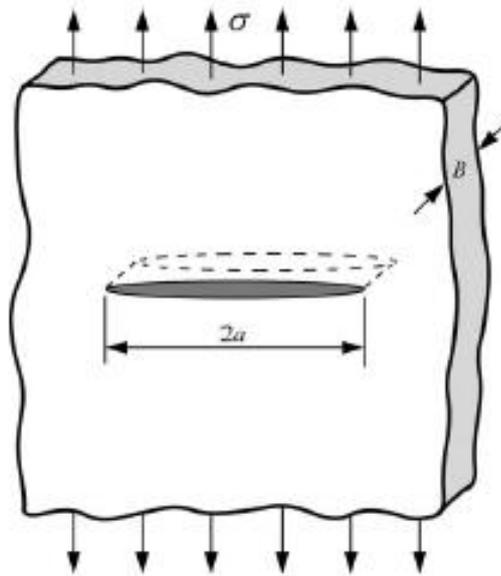


FIGURA 11 – Trinca em uma chapa com largura $\gg 2a$ submetida a uma tensão remota

Fonte: (ANDERSON, 2005)

A equação (5.4) somente é válida para materiais frágeis, portanto não pode ser utilizada para metais. Irwin e Orowan modificaram a equação de Griffith para calcular a tensão limite para fratura em metais, considerando os efeitos da deformação plástica presente em materiais dúcteis.

$$\sigma_f = \left(\frac{2E(\gamma_s + \gamma_p)}{\pi a} \right)^{1/2} \quad \dots(5.5)$$

onde γ_p é o trabalho da deformação plástica por unidade de superfície, normalmente γ_p é muito maior que γ_s .

É possível generalizar o modelo de Griffith para todos os tipos de dissipação de energia.

$$\sigma_f = \left(\frac{2Ew_f}{\pi a} \right)^{1/2} \quad \dots(5.6)$$

onde w_f é a energia superficial da fratura, onde podem ser incluídos os efeitos plásticos, viscoelásticos ou viscoplásticos dependendo do material.

A equação (5.6) pode ser aplicada somente para materiais que apresentam comportamento linear elástico, ou seja, o comportamento global da estrutura deve ser elástico. Todos os efeitos não lineares devem estar confinados em uma pequena região próxima a ponta da trinca, então considera-se w_f constante (ANDERSON, 2005).

5.2 A taxa de liberação de energia

Em 1956, Irwin propôs uma abordagem para fratura que é essencialmente equivalente ao modelo de Griffith, exceto que a abordagem de Irwin está em uma forma mais conveniente para resolver problemas de engenharia. Irwin definiu uma taxa de liberação de energia G , a qual é a quantia de energia disponível para que ocorra um incremento na propagação da trinca. Aqui o termo “taxa” não se refere à derivada em relação ao tempo, e sim a taxa de variação da energia potencial em relação à área da trinca. (ANDERSON, 2005)

Define-se a taxa de liberação de energia durante a propagação de uma trinca como:

$$G = -\frac{d\Pi}{dA} \quad \dots(5.7)$$

Segundo a equação (5.1) podemos definir que a propagação da trinca ocorre quando G atinge um valor crítico G_c , definido por:

$$G_c = -\frac{dW_s}{dA} = 2w_f \quad \dots(5.8)$$

onde G_c é a resistência à fratura do material e Π é a energia potencial de um corpo elástico, dado por:

$$\Pi = U - T \quad \dots(5.9)$$

onde: U é a energia de deformação armazenada no corpo; T é o trabalho realizado por forças externas.

Como G é obtido pela derivada da potência, é chamada também como força motriz de propagação de trinca. Pode-se utilizar a seguinte relação para materiais com comportamento linear elástico:

$$G = \frac{k_I^2}{E'} + \frac{k_{II}^2}{E'} + \frac{k_{III}^2}{2\mu} \quad \dots(5.10)$$

Onde:

$$E' = \begin{cases} E & (\text{Estado plano de tensão}) \\ \frac{E}{1-\nu^2} & (\text{Estado plano de deformação}) \end{cases}$$

μ , é o módulo de elasticidade transversal; k_I , k_{II} e k_{III} são chamados fatores de intensidade de tensão de modos I, II e III de propagação de trinca respectivamente.

Para o nosso caso o carregamento corresponde ao modo I e estado plano de deformação, então reescrevendo a Equação (5.10), temos:

$$G = \frac{(1-\nu^2)k_I^2}{E} \quad \dots(5.11)$$

5.3 Fatores de intensidade de tensões

Existem os três diferentes modos de propagação de trinca, porém aplica-se a esse trabalho o modo I de abertura de trinca (FIGURA 12) e condição de deformação plana.

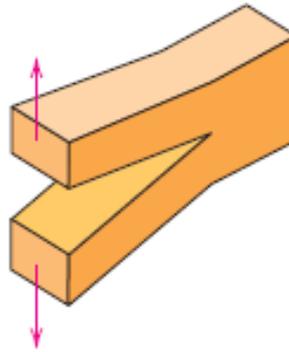


FIGURA 12 – Modo I: Modo de abertura ou de tração
 Fonte: (CALLISTER JR. e RETHWISCH, 2009)

Em estudo realizado sobre a propagação de trincas em perfis de roscas de elementos fixadores, James e Mills (1988) obtiveram várias soluções de fatores de intensidade de tensão (k) para o modo I e forma da seção da trinca circular ou semicircular. Os resultados obtidos são decorrentes de métodos numéricos. O trabalho mostra convergência entre os resultados de vários pesquisadores tornando possível o desenvolvimento de uma equação para obter o fator de intensidade de tensão como a seguinte.

$$k_I(a) = Y(a)\sigma\sqrt{\pi a} = Y(a)\sqrt{\pi a} \frac{MR_a}{I_a} \quad \dots(5.12)$$

$$Y(a) = 1,04 - 3,64\left(\frac{a}{2R}\right) + 16,89\left(\frac{a}{2R}\right)^2 - 32,59\left(\frac{a}{2R}\right)^3 + 28,41\left(\frac{a}{2R}\right)^4 \quad \dots(5.13)$$

onde, conforme demonstra a FIGURA 13:

M é o momento fletor na seção da trinca;

R_a é a distância da fronteira da trinca até o centroide C da área intacta da trinca ;

I_a é o momento de inércia da área intacta em relação ao eixo horizontal que passa no centroide C ;

a Representa a profundidade da trinca.

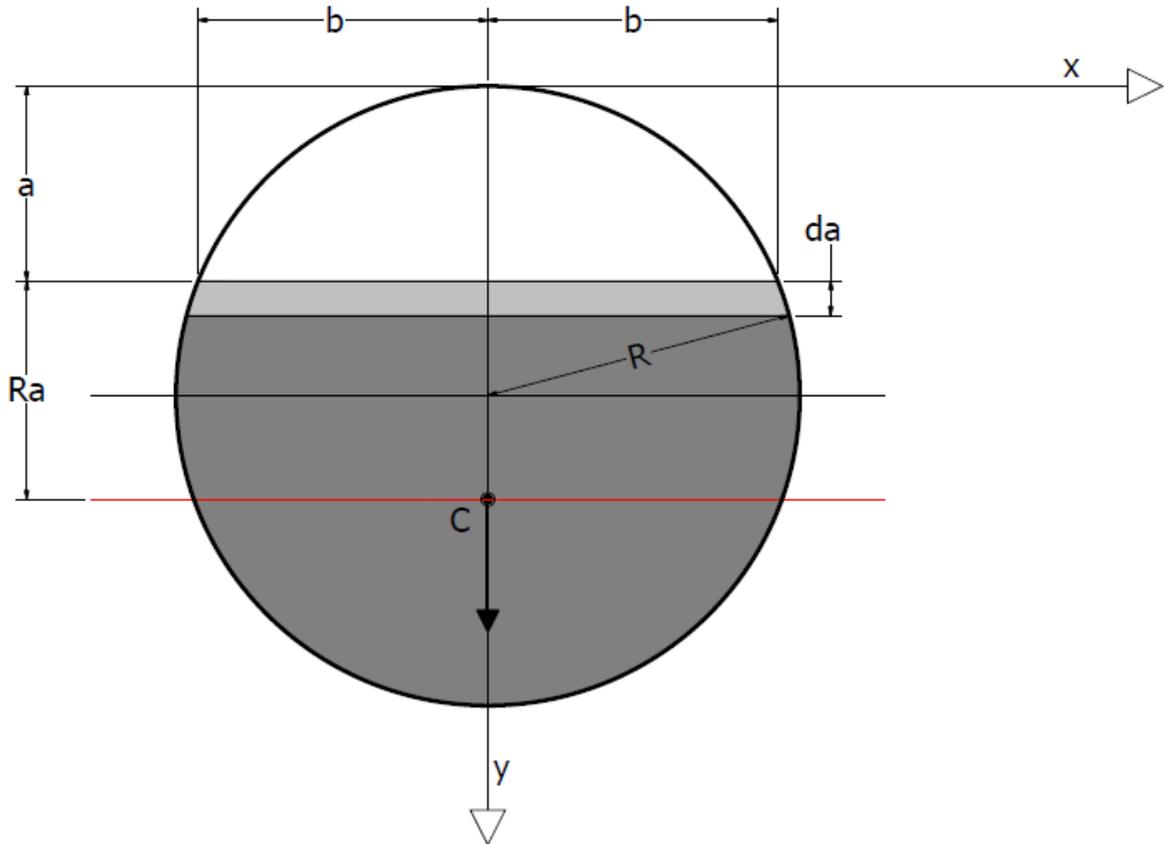


FIGURA 13- Deslocamento do centroide C com a propagação da trinca

5.4 Propagação de trinca

Considera-se que uma trinca se propague em uma área trincada dA . Pelo balanço de energia de Griffith, esta propagação depende da competição entre a força motriz, que tende promover a propagação, e a resistência à propagação da trinca. Para uma propagação dinâmica da trinca na barra em questão, a força motriz consiste na variação da energia cinética e do trabalho realizado pela força da gravidade em relação ao deslocamento ocorrido durante o tempo Δt ; a resistência à propagação da trinca consiste na variação de energia de deformação, energia consumida para formar nova área dA e a energia gerada pelo momento fletor na posição da trinca como uma mola rotacional em relação a rotação da seção da trinca. Para analisar a possibilidade da propagação, precisa-se calcular a força motriz e a resistência à propagação.

5.4.1 Resistência à propagação da trinca

5.4.1.1 Energia necessária para formar novas superfícies de trinca

Na estática, a resistência à propagação de trincas ou a tenacidade à fratura do material G_c , é definida por:

$$G_c = 2(\gamma_p + \gamma_s) \quad \dots(5.14)$$

Onde:

γ_s , é a energia consumida durante a quebra das ligações atômicas/moléculas, em uma superfície unitária;

γ_p , é energia plástica, em uma superfície unitária. Geralmente para materiais dúcteis, como nosso caso de estudo, γ_s , pode ser desprezado em comparação a γ_p no caso exista plastificação considerável na região ao redor da fronteira da trinca. A energia consumida pela propagação de trinca em comprimento da é dada por:

$$\Delta G_c(a, \Delta t) = \int_V w_d dV = w_d V \quad \dots(5.15)$$

onde w_d é a densidade do trabalho de deformação absorvido, o qual é constante para materiais homogêneos, e V é o volume:

$$V = 2r_y b da \quad \dots(5.16)$$

onde b é a largura da trinca e da a profundidade da trinca (FIGURA 13). Segundo Hoffmann (2013), w_d é representado pela área em verde da FIGURA 14 e é dado por:

$$w_d = \frac{1}{2E} (\sigma_e^2 - \sigma_u^2) + \frac{\sigma_e^2}{E(n+1)} \left[\left(\frac{\sigma_u}{\sigma_e} \right)^{\frac{n+1}{n}} - 1 \right] \quad \dots(5.17)$$

onde n é o índice de encruamento e σ_e e σ_u são a tensão de escoamento e a tensão de ruptura do material respectivamente.

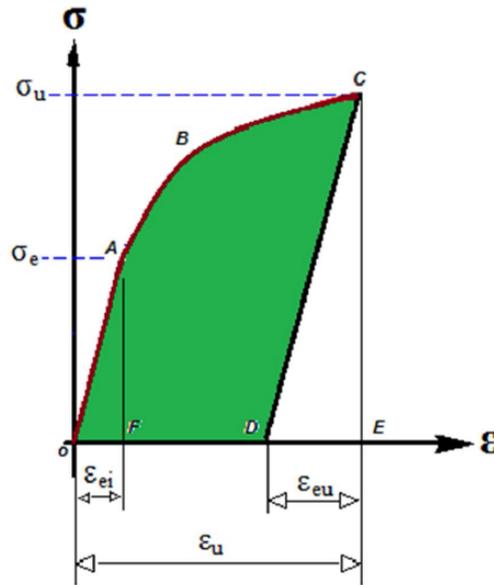


FIGURA 14 - Densidade do trabalho de deformação absorvido W_d

Fonte: (HOFFMANN, 2013)

O raio da zona plástica na fronteira da trinca r_y , segundo (ANDERSON, 2005) é dado por:

$$r_y = \frac{r_p}{2} = \frac{1}{6\pi} \left(\frac{k_I}{\sigma_e} \right)^2 \quad \dots(5.18)$$

Substituindo as equações (5.18), (5.17) e (5.16) na equação (5.15), temos:

$$\Delta G_c(a, \Delta t) = \left(\frac{1}{2E} (\sigma_e^2 - \sigma_u^2) + \frac{\sigma_e^2}{E(n+1)} \left[\left(\frac{\sigma_u}{\sigma_e} \right)^{\frac{n+1}{n}} - 1 \right] \right) \frac{1}{6\pi} \left(\frac{k_I}{\sigma_e} \right)^2 2bda \quad \dots(5.19)$$

$$\Delta G_c(a, \Delta t) = \frac{k_I^2}{6\pi E} \left(1 - \left(\frac{\sigma_u}{\sigma_e} \right)^2 + \frac{2}{(n+1)} \left[\left(\frac{\sigma_u}{\sigma_e} \right)^{\frac{n+1}{n}} - 1 \right] \right) bda \quad \dots(5.20)$$

Substituindo o valor de k_I Equação (5.12) na Equação (5.20), temos:

$$\Delta G_c(a, \Delta t) = \frac{a(Y(a)MR_a)^2}{6EI_a^2} \left(1 - \left(\frac{\sigma_u}{\sigma_e} \right)^2 + \frac{2}{(n+1)} \left[\left(\frac{\sigma_u}{\sigma_e} \right)^{\frac{n+1}{n}} - 1 \right] \right) bda \quad \dots(5.21)$$

onde $Y(a)$ é dado pela Equação (5.13), σ_u pela Equação (5.47), σ_e pela Equação (5.46) e n pela Equação (5.51).

5.4.1.2 Área e momento de inércia da seção não trincada

A área sombreada A, representada na FIGURA 15, mostra a seção não trincada e é dada pela Equação (5.22) (veja Anexo C).

$$A = \frac{r^2}{2} (2\alpha + \pi + \text{sen}2\alpha) \quad \dots(5.22)$$

Onde r é o raio e α é dado por:

$$\alpha = \arcsen\left(\frac{(r-a)}{r}\right) \quad \dots(5.23)$$

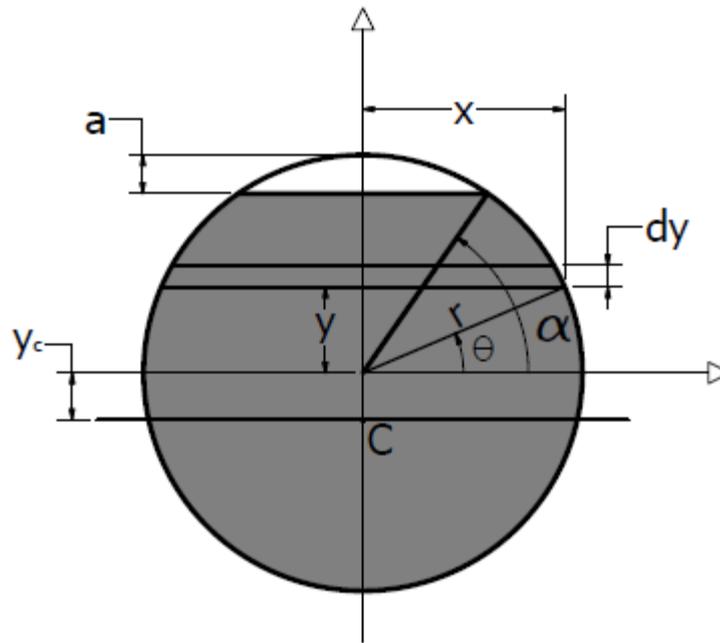


FIGURA 15 – Momento de Inércia Variável

O momento de inércia I_c em relação ao eixo que passa o centroide C, paralelo ao eixo x é dado pela Equação (5.24) (veja ANEXO E).

$$I_0 = I_c = \frac{r^4}{4} \left(\alpha + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4} \text{sen}4\alpha \right) + \frac{8r^4 \cos^6 \alpha}{9(2\alpha + \pi + \text{sen}2\alpha)} \quad \dots(5.24)$$

5.4.1.3 Energia Cinética

A energia cinética é dada pela seguinte expressão:

$$Ek(t) = \frac{1}{2} \int_0^L \rho A v^2(x, t) dx \quad \dots(5.25)$$

onde ρ e A são constantes, tornado adimensional em relação a x pela Equação (4.2), temos:

$$Ek(t) = \frac{\rho AL}{2} \int_0^1 v^2(\zeta, t) d\zeta \quad \dots(5.26)$$

Resolvendo a integral pelo método dos trapézios e a discretização dada, temos:

$$Ek^j = \frac{\rho AL}{2} h \left[\sum_{i=0}^n (v_i^j)^2 - \frac{1}{2} \left((v_0^j)^2 + (v_n^j)^2 \right) \right] \quad \dots(5.27)$$

Onde a variação de energia cinética durante tempo Δt é:

$$\Delta Ek = Ek^j - Ek^{j-1} = \frac{\rho ALh}{2} \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=0}^n (v_i^j)^2 - \sum_{i=0}^n (v_i^{j-1})^2 \\ - \frac{1}{2} \left[(v_0^j)^2 - (v_0^{j-1})^2 + (v_n^j)^2 - (v_n^{j-1})^2 \right] \end{array} \right\} \quad \dots(5.28)$$

5.4.1.4 Trabalho realizado pela mola rotacional

Como a seção trincada pode ter uma rotação, podemos considerar o apoio na extremidade esquerda da barra como uma mola rotacional correspondendo a rotação da seção trincada (FIGURA 16). O trabalho feito pelo momento fletor M_0 em relação a uma pequena rotação da seção trincada pode ser dado por:

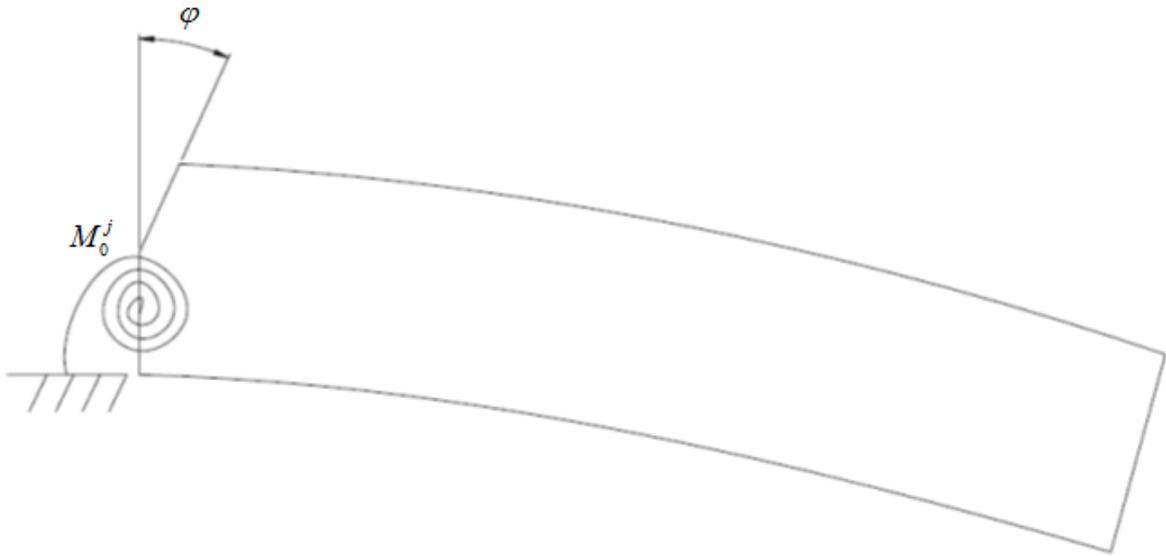


FIGURA 16 – Mola rotacional

$$\Delta Tm_0^j = M_0 \Delta \varphi \quad \dots(5.29)$$

onde M_0 é o momento na seção de trinca, como há variação de um instante de tempo, calcula-se a média entre os momentos $M_0 = \frac{M_0^j + M_0^{j-1}}{2}$. A rotação da mola entre o tempo $j-1$ e j é dada por $\Delta \varphi = \frac{w_1^j - w_1^{j-1}}{Lh}$ conforme mostrado na FIGURA 17.

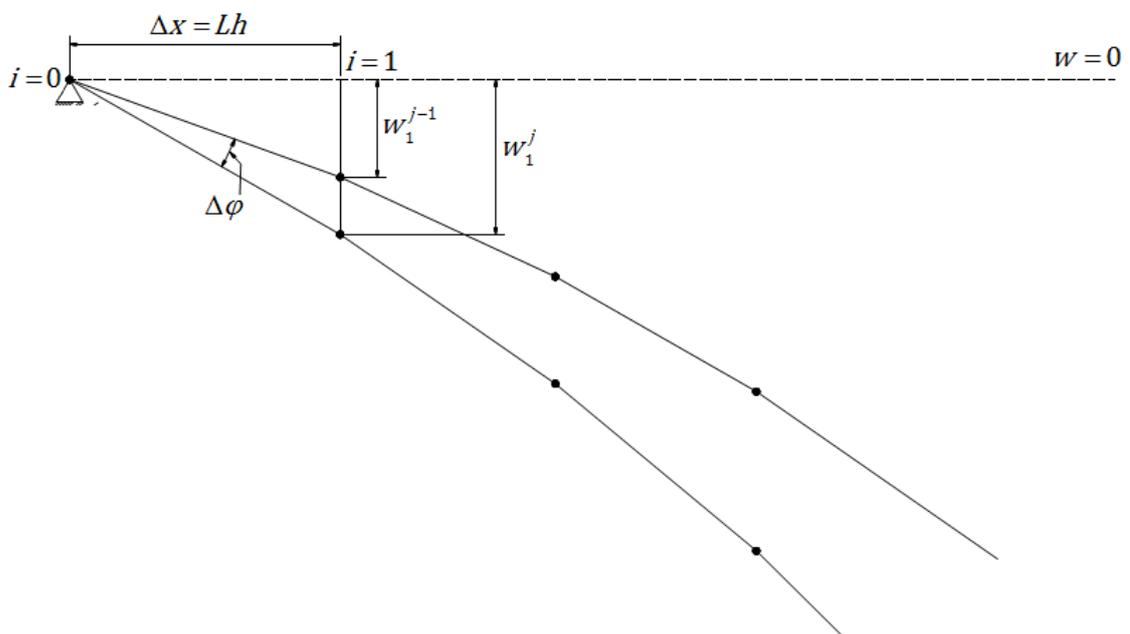


FIGURA 17 – Cálculo da Rigidez

Assim temos:

$$\Delta Tm_0^j = \left(\frac{M_0^j + M_0^{j-1}}{2} \right) \left(\frac{w_1^j - w_1^{j-1}}{Lh} \right) \quad \dots(5.30)$$

$$\Delta Tm_0^j = \frac{1}{2Lh} (M_0^j + M_0^{j-1}) (w_1^j - w_1^{j-1}) \quad \dots(5.31)$$

5.4.1.5 Energia de deformação

A energia de deformação elástica armazenada na barra é calculada pelas tensões normais. Segundo conceito de resistência dos materiais, temos:

$$U = \int \frac{\sigma_x^2}{2E} dV \quad \dots(5.32)$$

Como a barra está submetida à flexão $\sigma_x = \frac{My}{I}$, integrando para o comprimento da barra com E e I constante, temos:

$$U = \frac{1}{2EI} \int_0^L M^2 dx = \frac{L}{2EI} \int_0^1 M^2 d\zeta \quad \dots(5.33)$$

onde ζ é dado pela Equação (4.2). Pela discretização temos:

$$U^j = \frac{L}{2EI} h \left\{ \sum_{i=0}^n (M_i^j)^2 - \frac{1}{2} [(M_0^j)^2 + (M_n^j)^2] \right\}, \text{ por definição sabemos que } M_n^j = 0,$$

então:

$$\begin{aligned}
U^j &= \frac{Lh}{2EI} \left[\sum_{i=0}^n (M_i^j)^2 - \frac{(M_0^j)^2}{2} \right] \\
&= \frac{Lh}{2EI} \left[\sum_{i=1}^{n-1} (w_{i+1}^j - 2w_i^j + w_{i-1}^j)^2 \times \left(\frac{EI}{L^2 h^2} \right)^2 \right] + \frac{Lh}{2EI} \left(\frac{EI_0}{L^2 h^2} \right) \frac{(2w_1^j)^2}{2} \\
&= \frac{Lh}{2EI} \left(\frac{EI}{L^2 h^2} \right)^2 \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} (w_{i+1}^j - 2w_i^j + w_{i-1}^j)^2 + \left(\frac{I_0}{I} \right)^2 \frac{(2w_1^j)^2}{2} \right\} \\
&= \frac{Lh}{2} \alpha \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} (w_{i+1}^j - 2w_i^j + w_{i-1}^j)^2 + 2 \left(\frac{I_0}{I} \right)^2 (w_1^j)^2 \right\}
\end{aligned} \tag{5.34}$$

onde α é representado na Equação (4.13). A variação da energia de deformação é dada por:

$$\Delta U = U^j - U^{j-1} \tag{5.35}$$

5.4.2 Força motriz

5.4.2.1 Trabalho realizado pela força da gravidade

O trabalho realizado pela força da gravidade durante tempo t é dado pela seguinte expressão:

$$Tg(t) = \rho Ag \int_0^L w(x,t) dx \tag{5.36}$$

Aplicando a definição (4.2), temos:

$$Tg(t) = \rho AgL \int_0^1 w(\zeta,t) d\zeta \tag{5.37}$$

Discretizando (5.37), temos:

$$Tg^j = \rho AgLh \left[\sum_{i=0}^n w_i^j - \frac{1}{2}(w_0^j + w_n^j) \right] \quad \dots(5.38)$$

Aplicando a condição de contorno (4.20) na Equação (5.38), temos:

$$Tg^j = \rho AgLh \left[\sum_{i=0}^n w_i^j - \frac{w_n^j}{2} \right] \quad \dots(5.39)$$

A variação o trabalho realizado pela força da gravidade durante o tempo Δt é:

$$\Delta Tg = Tg^j - Tg^{j-1} \quad \dots(5.40)$$

5.4.3 Condição para a propagação da trinca

$$\Delta Tg \geq U^j - U^{j-1} + \frac{1}{2Lh} (M_0^j + M_0^{j-1})(w_1^j - w_1^{j-1}) + \Delta G_c + (E_K^j - E_K^{j-1}) \quad \dots(5.41)$$

5.4.4 Critério para Iniciação da Trinca e a propagação de trinca

Sabemos que a tensão na superfície da haste em uma posição i , é dada por:

$$\sigma_{si} = \frac{M_i^j r}{I_i} \quad \dots(5.42)$$

Onde M_i^j é dado pela Equação (4.43), r é o raio da barra e $I_i = I$ é o momento de inercia da seção transversal, que é constante para $1 \leq i \leq n$ Equação (5.24).

Para a posição onde ocorre o início da trinca $i=0$, temos:

$$\sigma_s = \frac{M_0^j r}{I_0} \quad \dots(5.43)$$

Onde:

M_0^j é dado pela Equação (4.42) e I_0 é o momento de inercia da seção transversal dado pela Equação (5.24).

Para que inicie a propagação da trinca, a tensão na superfície da barra deve ser maior que a tensão de ruptura do material.

$$\sigma_s > \sigma_u \quad \dots(5.44)$$

$$\sigma_u < \frac{M_0^j r}{I} \quad \dots(5.45)$$

Quanto a propagação de trinca, aplica-se o critério:

$$k_I \geq k_{IC}$$

onde k_I é obtido pela Equação (5.12) e k_{IC} é a tenacidade à fratura de material no estado de deformação plano, que é medida por ensaio.

5.4.4.1 Relação entre tensão de escoamento, tensão última e coeficiente de encruamento com a dureza

(PAVLINA e VAN TYNE, 2008) Após analisar dados de mais de 150 experimentos, de aços hipoeutetóides e não austeníticos, afirmam em seu trabalho que as correlações de tensão de escoamento e tensão última com dureza, podem ser dadas por:

$$\sigma_e = -90,7 + 2,876H_v \quad \dots(5.46)$$

$$\sigma_u = -99,8 + 3,734H_V \quad \dots(5.47)$$

onde a tensão de escoamento σ_e e a tensão última σ_u estão em MPa. H_V é a dureza medida pela pirâmide de diamante conhecida por dureza Vickers, em kgf/mm².

A dureza Vickers é uma forma de classificação da dureza dos materiais onde uma pirâmide de diamante com ângulo de diedro de 136° é comprimida por uma força "F", contra a superfície do material. Essa força é chamada de carga plena e é aplicada normalmente durante um tempo de 10 a 15 segundos. Após a retirada da carga as duas diagonais da indentação impressas na superfície do material são medidas através de um microscópio. Com a média aritmética dos valores lidos calcula-se a área da superfície inclinada da indentação. A dureza Vickers é o quociente obtido dividindo a carga (kgf) pela área da indentação (mm²).

O encruamento do material é definido pelo endurecimento por deformação a frio. Quanto mais força age sobre o corpo, mais resistente ele se torna. Ao analisar o gráfico de tensão ($\bar{\sigma}$) e deformação ($\bar{\epsilon}$) do aço, observa-se que ocorre um aumento contínuo da resistência a tensão do material após o escoamento. Isto ocorre devido às interações entre as discordâncias que impedem o escorregamento dos planos cristalográficos, formando barreiras para a deformação. Podemos medir o encruamento através do coeficiente de encruamento, representado por "n". O valor de "n" é determinado por uma relação matemática empírica, considerando que a parcela da curva tensão-deformação real ou verdadeira entre o escoamento e a estricção é representada por uma equação exponencial.

Cahoon (1970) conclui em seu estudo, que as medições de dureza podem ser utilizadas para determinar a tensão de escoamento, o coeficiente de encruamento e a tensão última para uma vasta gama de materiais, tais como alumínio, bronze e aço.

A relação entre tensão última (σ_u), coeficiente de encruamento (n) e dureza H_V , é dada por (CAHOON, 1970):

$$\sigma_u = \frac{H_V}{2,9} \left(\frac{n}{0,217} \right)^n \quad \dots(5.48)$$

onde σ_u é dado em kgf/mm².

Para o presente estudo, a fim de reduzir o erro é melhor não introduzir mais dados que necessitam ser determinados através de experimentos, exceto a dureza e a tenacidade a fratura

do material. Isto implica que o coeficiente de encruamento (n), deverá ser determinado pela dureza. Assim substituímos a Equação (5.47) na Equação (5.48) e convertemos MPa para kgf/mm² multiplicando por 0,1, resultando em:

$$0,1(-99,8 + 3,734H_V) = \frac{H_V}{2,9} \left(\frac{n}{0,217} \right)^n \quad \dots(5.49)$$

$$n(\ln n - \ln 0,217) + \ln H_V - \ln(1,08286H_V - 28,942) = 0 \quad \dots(5.50)$$

Obtemos então o coeficiente em função da dureza H_V , a qual pode ser resolvida por método numérico.

$$n = n(H_V) \quad \dots(5.51)$$

5.4.5 Programa para análise da propagação de trinca

Após definir as equações que descrevem o comportamento físico da vibração e propagação de trinca, foi elaborado um programa no software MATLAB para realizar a simulação numérica. O fluxograma do programa é mostrado na FIGURA 18.

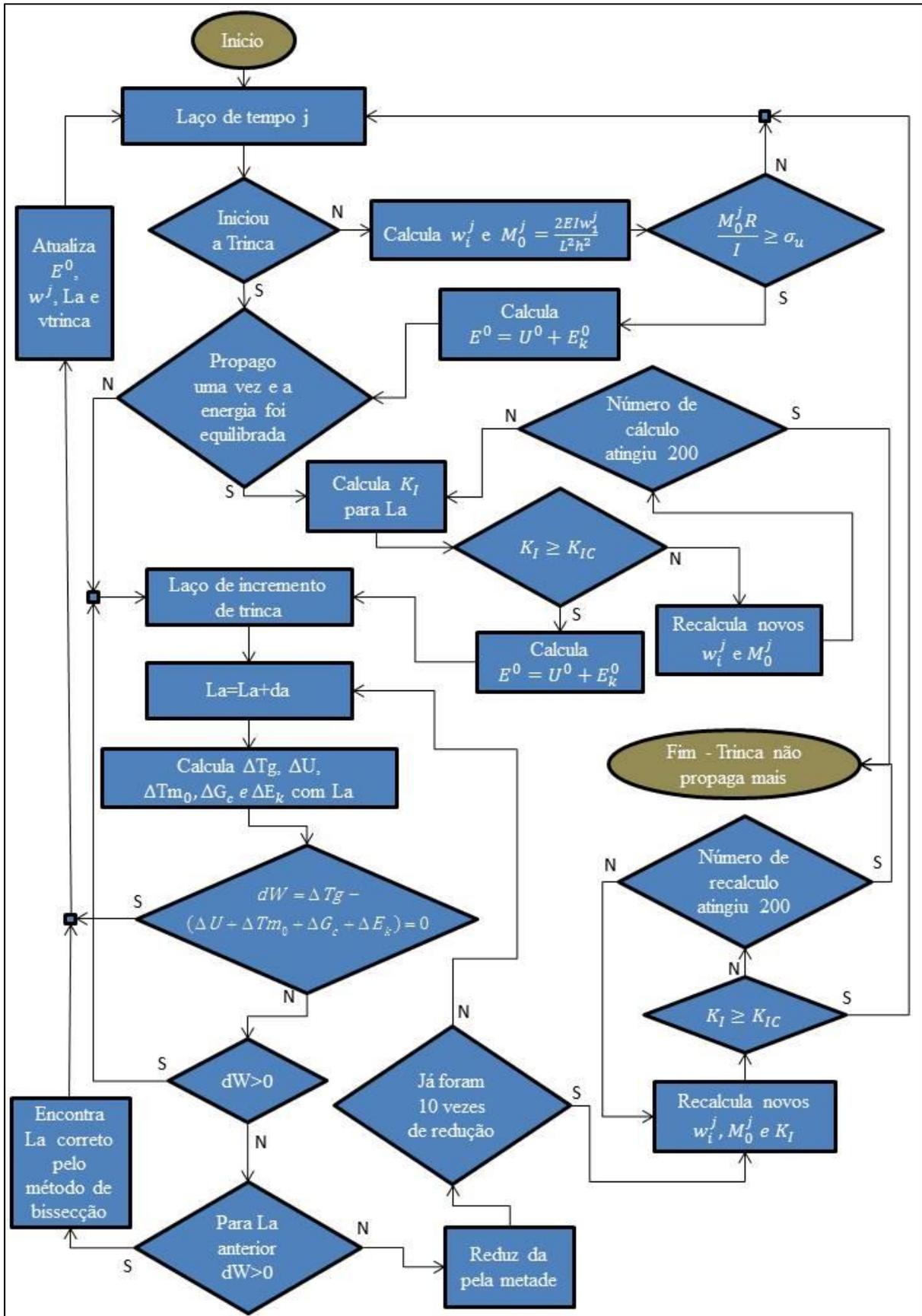


FIGURA 18 – Fluxograma do algoritmo para análise da propagação de trinca

6 Resultados e discussões

6.1 Vibração após o choque e antes da iniciação de trinca

A fim de verificar a confiabilidade do método de diferenças finitas foi realizada uma simulação dinâmica no software Ansys LS-DYNA e ambos comparados com os resultados obtidos pela solução analítica de Hoffmann (2013). Os dados de entrada para as simulações encontram-se na Tabela 1.

Tabela 1 – Dados de entrada da simulação

Parâmetro	Valor
Módulo de Elasticidade (E)	207 GPa
Raio (r)	0.0508 m
Comprimento da metade da barra (L)	2.21 m
Densidade (ρ)	7850 Kg/m ³
Altura da queda (H)	6.096 m (20 pés)
Intervalo de tempo (Δt)	1 μ s
Número de discretização (n)	221

Os resultados do deslocamento do último ponto da barra $i = n$ podem ser visualizados na FIGURA 19.

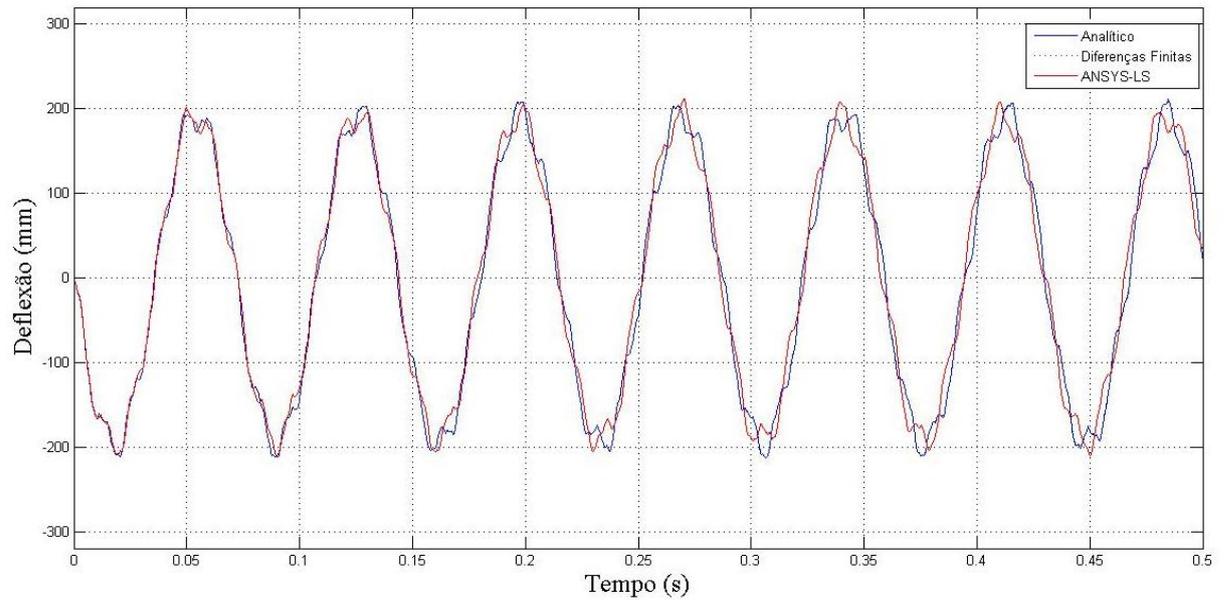


FIGURA 19 – Comparação da deflexão entre os resultados dos métodos: Analítico, Diferenças Finitas e Ansys LS-DYNA. $\Delta t = 1\mu s$

Observa-se no gráfico da FIGURA 19 que nos picos ocorre um afastamento do resultado do Ansys em comparação com o resultado analítico, esse erro ocorre provavelmente porque o software introduz algum tratamento específico para evitar o efeito de *Hourglass*.

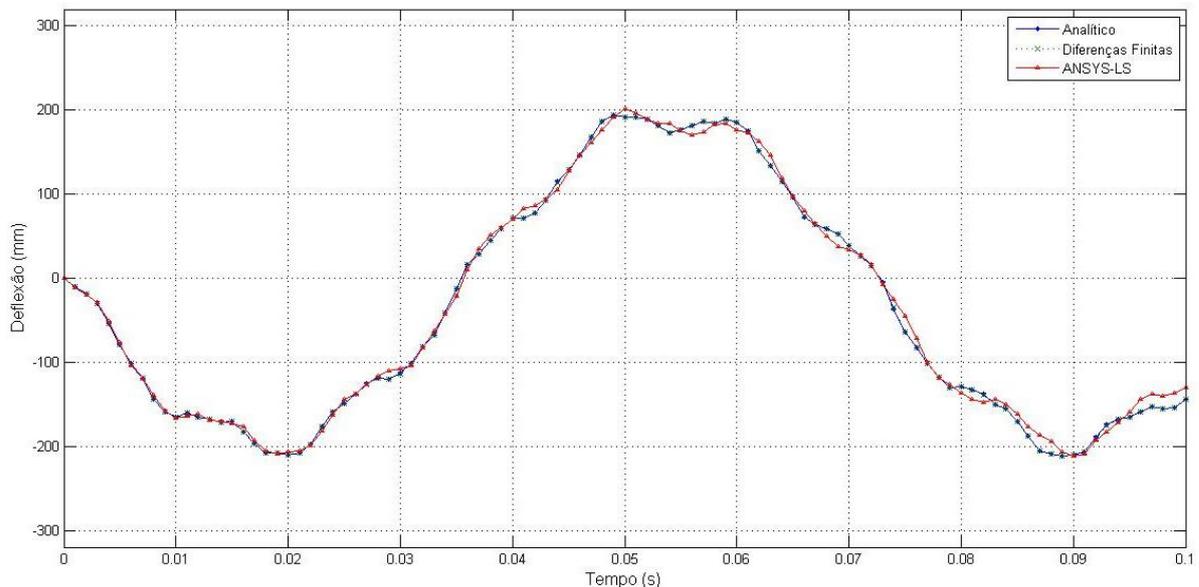
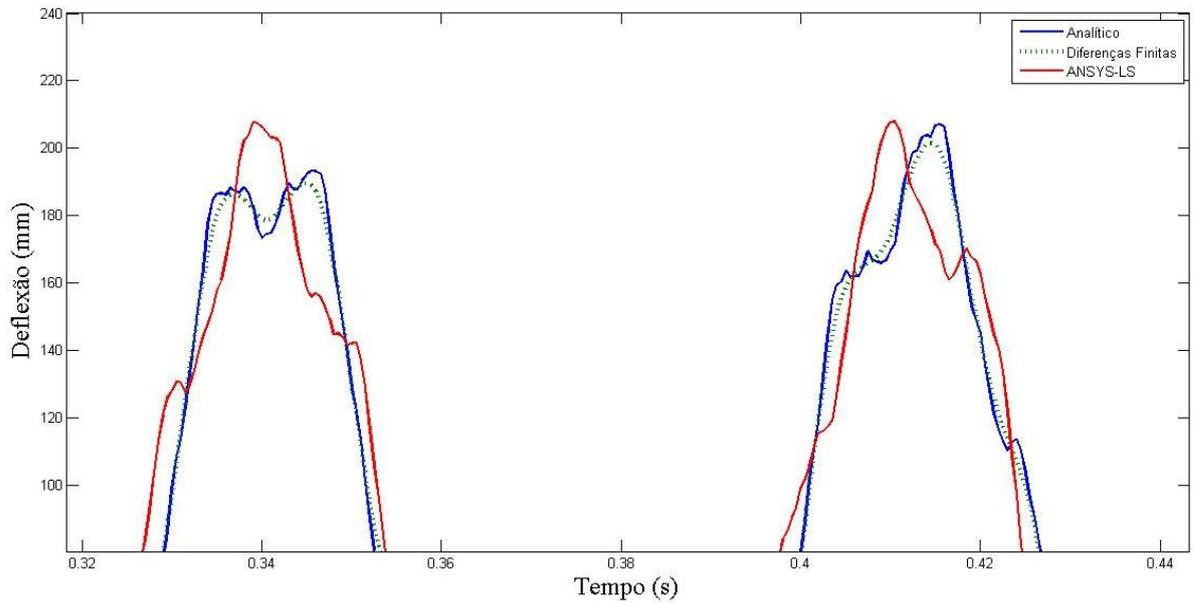


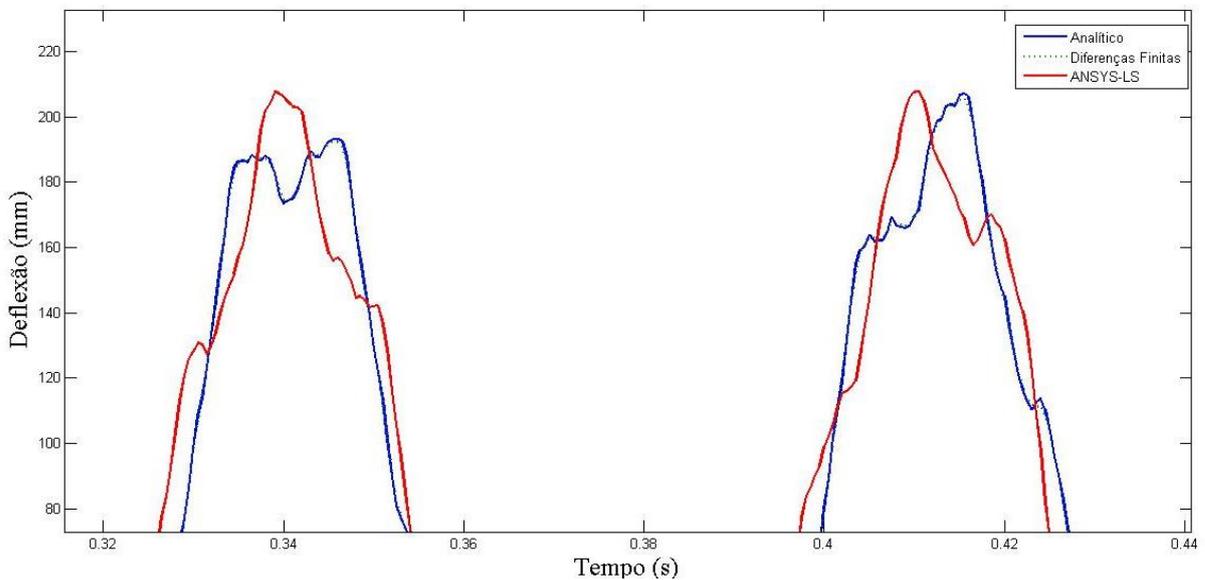
FIGURA 20 – Analítico x Diferenças finitas x Ansys LS-DYNA, ($\Delta t = 1\mu s$).

Ao analisar os resultados dos gráficos das FIGURA 19 e FIGURA 20, podemos perceber que a solução numérica do método de diferenças finitas ficou quase idêntica com a solução analítica, o que comprova a eficiência do método de diferenças finitas para a

resolução desse tipo de problema. Também estas figuras confirmam que a solução analítica obtida por Hoffmann está correta.



(a)



(b)

FIGURA 21 - Comparação entre aplicação de incremento de tempo: (a) $\Delta t = 10\mu s$; (b) $\Delta t = 1\mu s$.

Sabe-se que para resolução de problemas dinâmicos, o tamanho do passo de tempo é importante para obter bons resultados. Este princípio pode ser observado neste trabalho. A FIGURA 21 ilustra os resultados de aplicação para diferentes Δt . Pode-se ver claramente quando $\Delta t = 10\mu s$ (FIGURA 21(a)), há uma pequena diferença nos picos entre o resultado do

método de diferenças finitas e o analítico, mas essa diferença diminui significativamente quando $\Delta t = 1\mu s$.

A FIGURA 22 apresenta no eixo esquerdo, em azul, a posição onde ocorre a tensão superficial máxima em relação ao tempo, dada pela Equação (5.43). No eixo direito, em verde, é representado o valor do momento fletor máximo na barra também em relação ao tempo. O pico entre 1700 e 1800 μs pode ser interpretado que existem dois locais (a 8% e a 50% do comprimento) na viga onde os momentos fletores são quase idênticos e máximos no instante 1707 μs , ou seja, as tensões máximas poderão ocorrer nestes dois lugares no mesmo instante de tempo. Isto implica que uma trinca poderá ser iniciada nestes lugares, ou seja, em vários pontos no mesmo instante.

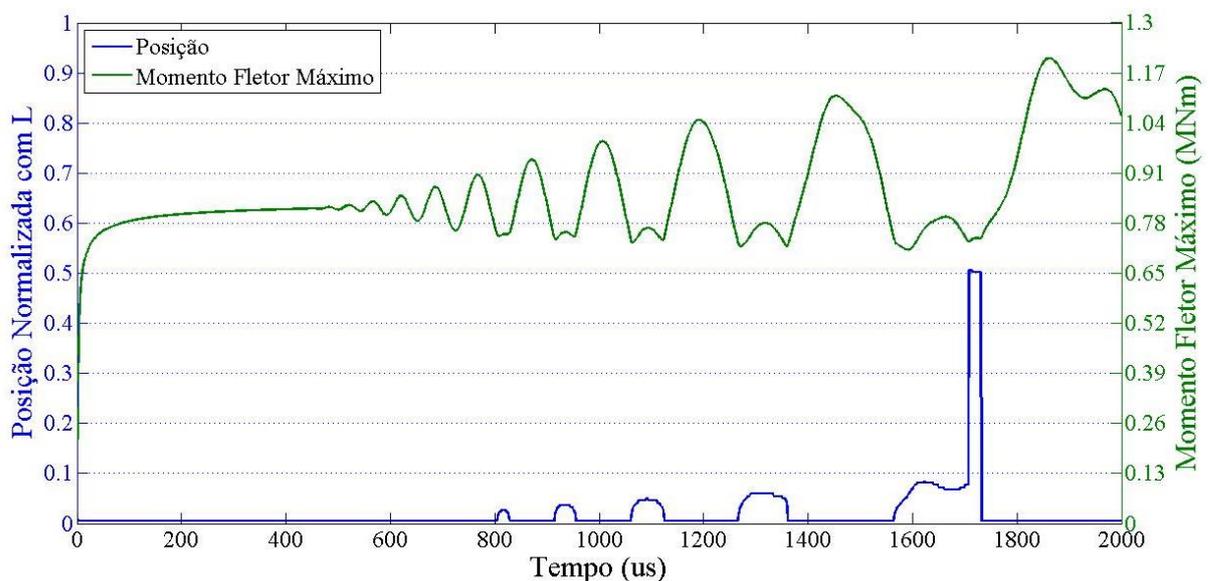


FIGURA 22 – Posição longitudinal onde ocorre o momento máximo (eixo esquerdo) e o valor do Momento Fletor Máximo (eixo direito), ambos em relação ao tempo.

6.2 Propagação da trinca

Para facilitar o entendimento, é possível separar a simulação em duas fases: a primeira consiste no início da trinca onde a tensão gerada na superfície superior da barra deve atingir ou ultrapassar a tensão de ruptura do material, demonstrada pela Equação (5.45), somente assim ocorrerá o início da trinca. A segunda analisa as condições para que ocorra a

propagação da trinca, essa análise é descrita pela Equação (5.41). O algoritmo do programa é apresentado no fluxograma da FIGURA 18.

A modelagem apresentada nesse trabalho somente é válida enquanto a haste encontra-se em contato com o apoio, ou seja, as simulações são realizadas para $w_0^j = 0$. No momento em que $w_0^j < 0$ (a barra se solta e perde o contato com o apoio) a simulação é finalizada.

Devido à proporção, os resultados são plotados pelo comprimento da trinca em relação ao diâmetro total da barra e a velocidade de propagação em relação a velocidade do som para a propagação de uma onda unidimensional no material dada por $\sqrt{E / \rho}$.

6.2.1 Materiais analisados

A fim de verificar o comportamento da barra para diferentes materiais, a simulação da propagação de trinca foi realizada para os aços 1040, 4140 e 4340. Ambos são comercializados em barras e apresentam boa temperabilidade e outras características particulares (SUPPLIERS, 1995-2015):

- O aço 1040 é classificado de médio carbono e utilizado para fabricação de virabrequins, acoplamentos e peças conformadas a frio. Quando endurecido por tempera apresenta elevada tensão de ruptura.
- O aço 4140 é um aço baixa liga de Cromo, Molibdênio e Manganês utilizado nas mais diversas aplicações. É caracterizado pela sua tenacidade e boa resistência à fadiga. Outra característica interessante é a temperabilidade, sendo possível atingir alta tensão de ruptura com baixa temperatura de tempera.
- O aço liga 4340 quando tratado termicamente apresenta elevada tenacidade e é capaz de desenvolver alta resistência mecânica mantendo boa resistência a fadiga. É aplicado normalmente em estruturas, eixos, barras e outros.

As propriedades dos referidos materiais utilizados para a simulação, encontram-se na Tabela 2.

Tabela 2 – Propriedades e resultados da propagação de trinca para diferentes tipos de aços e temperas

	1040	4140	4340	4340	4340
Dureza (HV)		490*	584*	456*	401*
Tensão última ou de ruptura σ_u (MPa)	520*	1729,86**	2080,86**	1602,90**	1397,53**
Coefficiente de encruamento (n)	0.14*	0.2393**	---	0,2354**	0,2273**
Tenacidade a fratura $MPa\sqrt{m}$	54*	60*	53*	75*	110*
Início da trinca (μ s)	1	3985	---	3967	2393
Tempo de duração (μ s)	3673	1594	---	1644	2013
Comprimento Propagado (mm)	16.74	71,52	---	66,52	59,61
Velocidade Máxima de Propagação (m/s)	4124,29	2999,02	---	3104,46	2851,99

* Dados da literatura, Fonte: (ASM-HANDBOOK, 1991).

** Dados calculados através da dureza. A dureza Vickers (HV) foi convertida de Brinell (HB), conforme ASTM E140.

“---“ Não inicia a propagação.

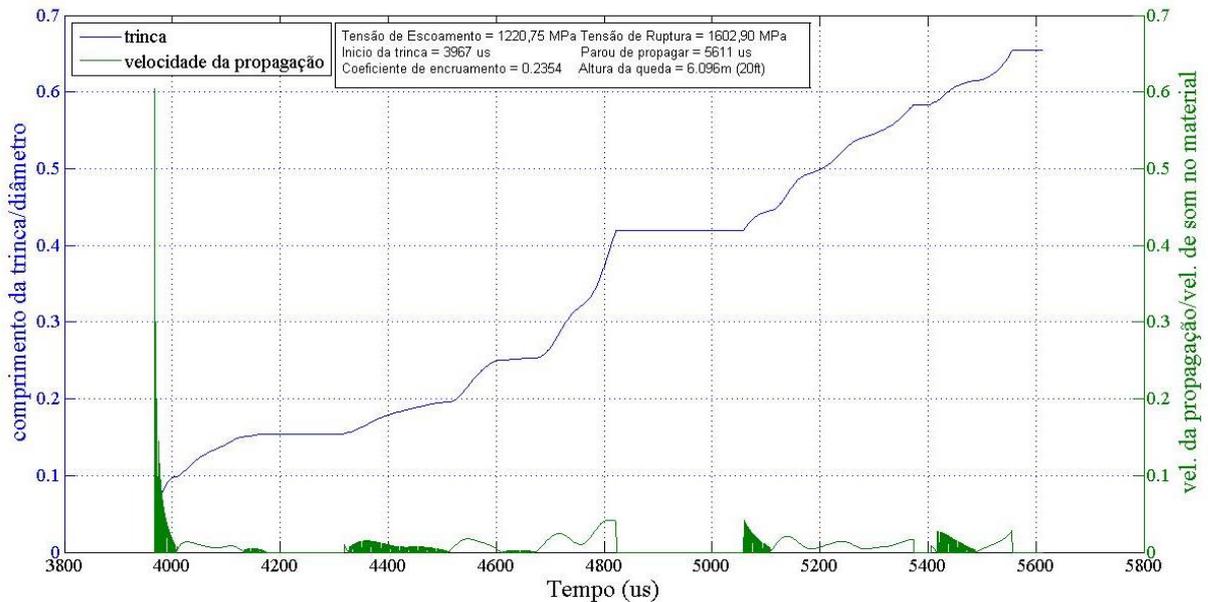
Pelos dados a velocidade do som para a propagação de uma onda unidimensional no material dada é 5135 m/s.

6.2.2 Influência de dureza e tenacidade à fratura de material

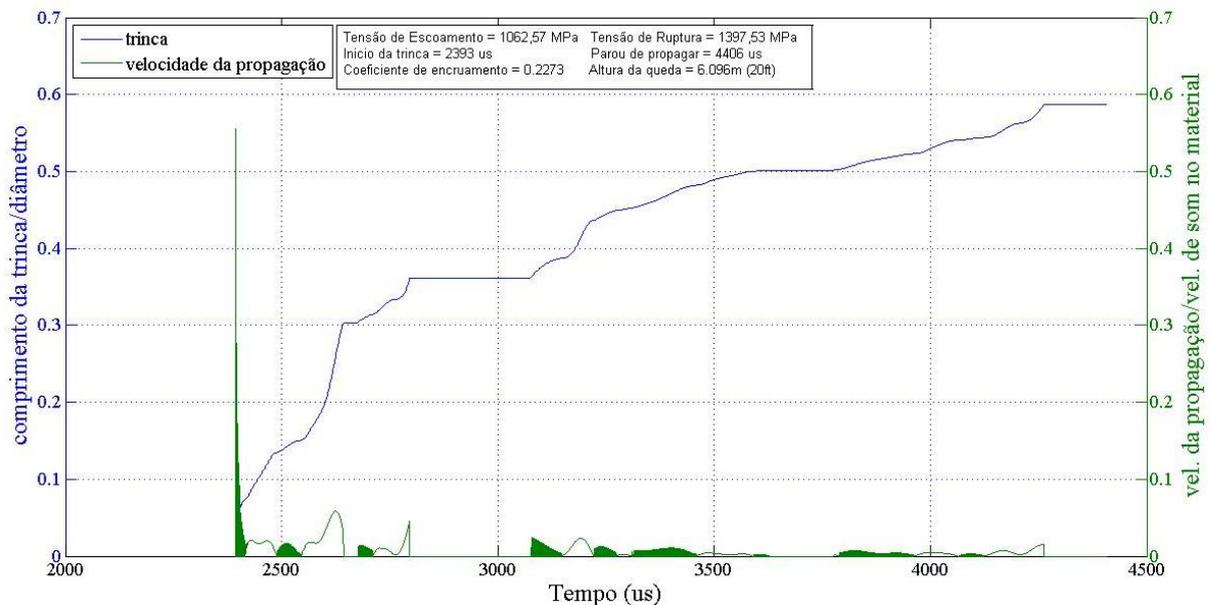
Ao analisar o aço 4340 de 584 HV (Tabela 2), observamos que não ocorre o início da trinca quando $H=6,096$ m (20 pés) devido à elevada tensão de ruptura do material, nesse caso não há tensão gerada suficiente na superfície para que ocorra o início da trinca e conseqüentemente não há propagação.

Em relação ao aço 4340 para diferentes temperas, onde a dureza é inversamente proporcional à tenacidade a fratura (Tabela 2). Observa-se que, nos casos onde há o início da

trinca, a trinca propaga mais e com maior velocidade no aço 4340 de maior resistência mecânica e menor tenacidade (HV=456, FIGURA 22 (a)), comparado ao de menor resistência mecânica e maior tenacidade à fratura (HV=401, FIGURA 23 (b)). Assim é possível verificar a influência da tenacidade à fratura do material na velocidade máxima e na propagação da trinca.



(a)



(b)

FIGURA 23 – Comparação entre comprimento de trinca e velocidade de propagação para o Aço Liga 4340 submetido a diferentes temperas (a) 456HV e $K_{IC} = 75MPa\sqrt{m}$ (b) 401HV e $K_{IC} = 110MPa\sqrt{m}$

A FIGURA 24 mostra a influência da tenacidade a fratura do material no comprimento da trinca, observa-se que quando temos a elevação do K_{IC} de $81MPa\sqrt{m}$ para $108MPa\sqrt{m}$ ocorre uma redução drástica no comprimento da trinca.

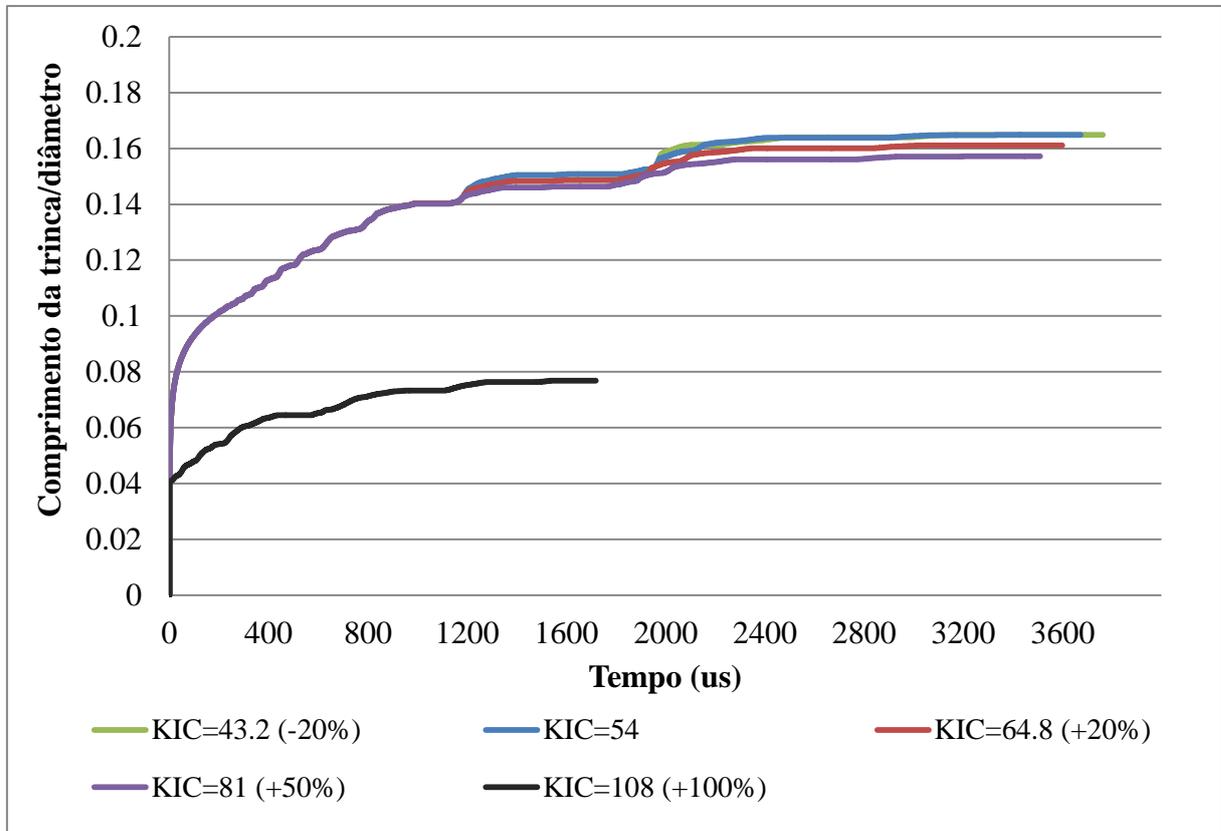
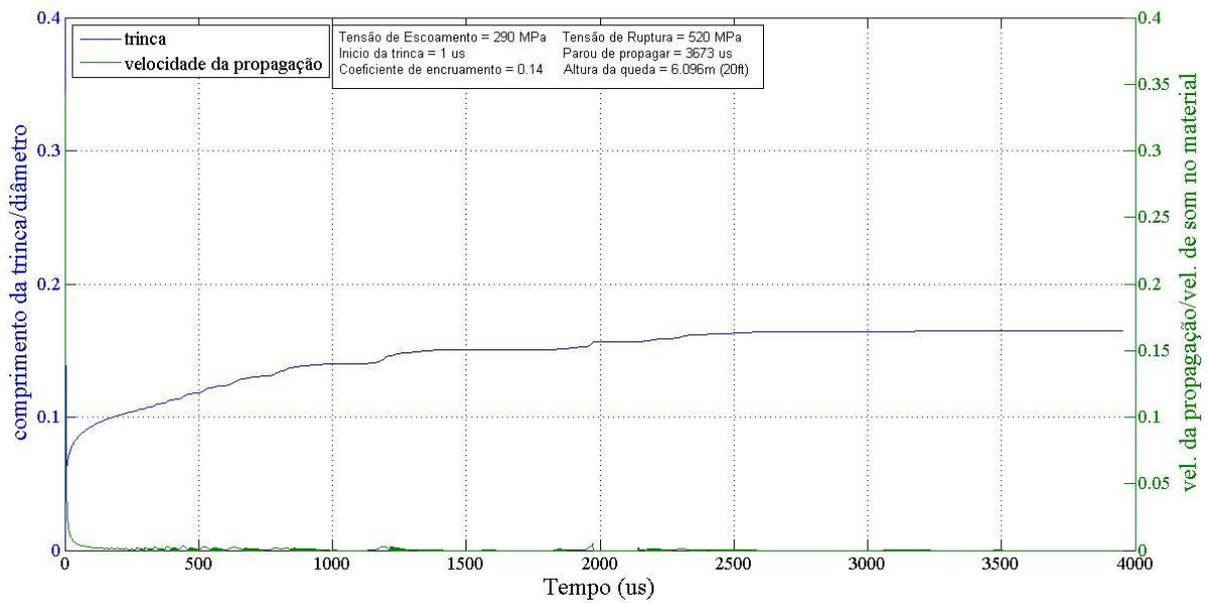


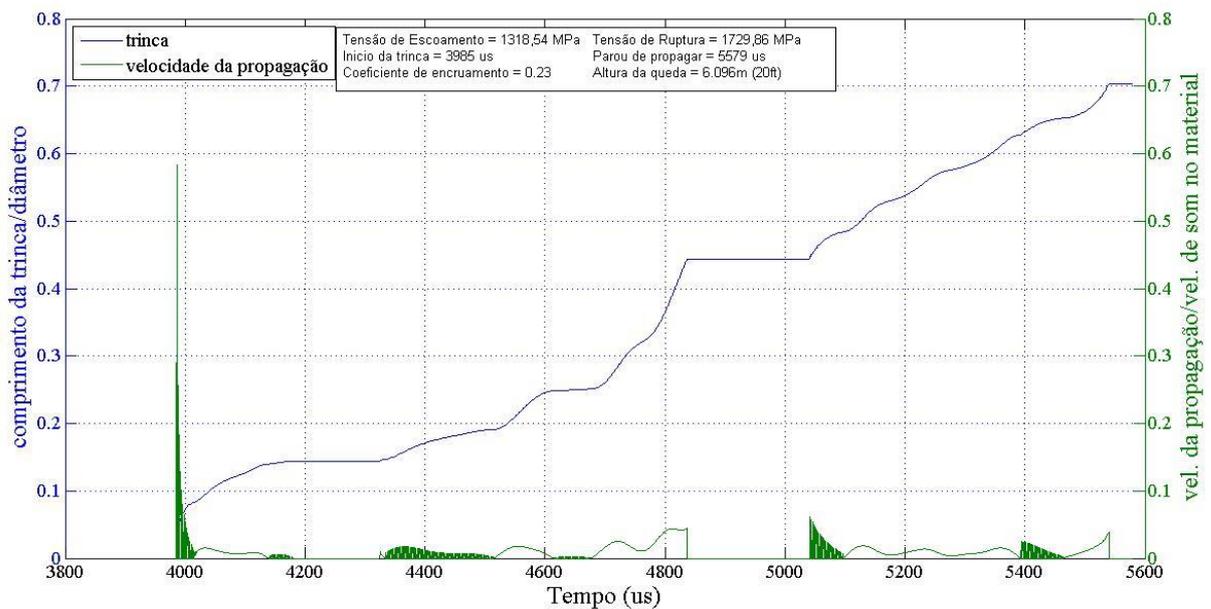
FIGURA 24 – Influência da tenacidade a fratura (K_{IC}) na propagação da trinca.

6.2.3 Influência do coeficiente de encruamento na propagação da trinca

Quando ocorre a propagação, há deformação plástica na fronteira da trinca. Essa zona plástica tende a travar e impedir a propagação. Sendo assim é notável que quanto menor o coeficiente de encruamento menor a propagação e consequentemente menor o comprimento da trinca.



(a)



(b)

FIGURA 25 - Comprimento da trinca e velocidade de propagação para
 (a) aço 1040, $\sigma_u = 520 \text{ MPa}$ e $k_{IC} = 54 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$; (b) aço 4140 $\sigma_u = 1729,86 \text{ MPa}$ e $k_{IC} = 60 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$.

Comparando os resultados para os aços 1040 e 4140, mostrado na FIGURA 23. Observa-se que, no aço de menor tensão última, a trinca inicia logo no primeiro instante de tempo ($j=1\mu\text{s}$), isso ocorre devido à tensão de ruptura do aço 1040 corresponder a aproximadamente 1/3 a do aço 4140.

Ainda em relação a esses materiais, ao comparar o comprimento e velocidade de propagação da trinca, observa-se que no aço 1040 a trinca propaga menos (16,74 mm) em

relação ao aço 4140 onde a trinca chega a 71,52 mm. Porém para esses dois materiais os valores de tenacidade a fratura não apresentam diferença significativa, o que leva a analisar o coeficiente de encruamento “n” que nesse caso apresenta diferenças significativas para entre os aços 1040 e 4140, com valores de 0.14 e 0.23 respectivamente.

A FIGURA 23 mostra o aço 4140 para diferentes coeficientes de encruamento. É possível observar que a trinca propaga menos quando “n” é menor, isso ocorre devido à influência desse parâmetro na energia necessária para formar novas superfícies de trinca, conforme a Equação (5.41).

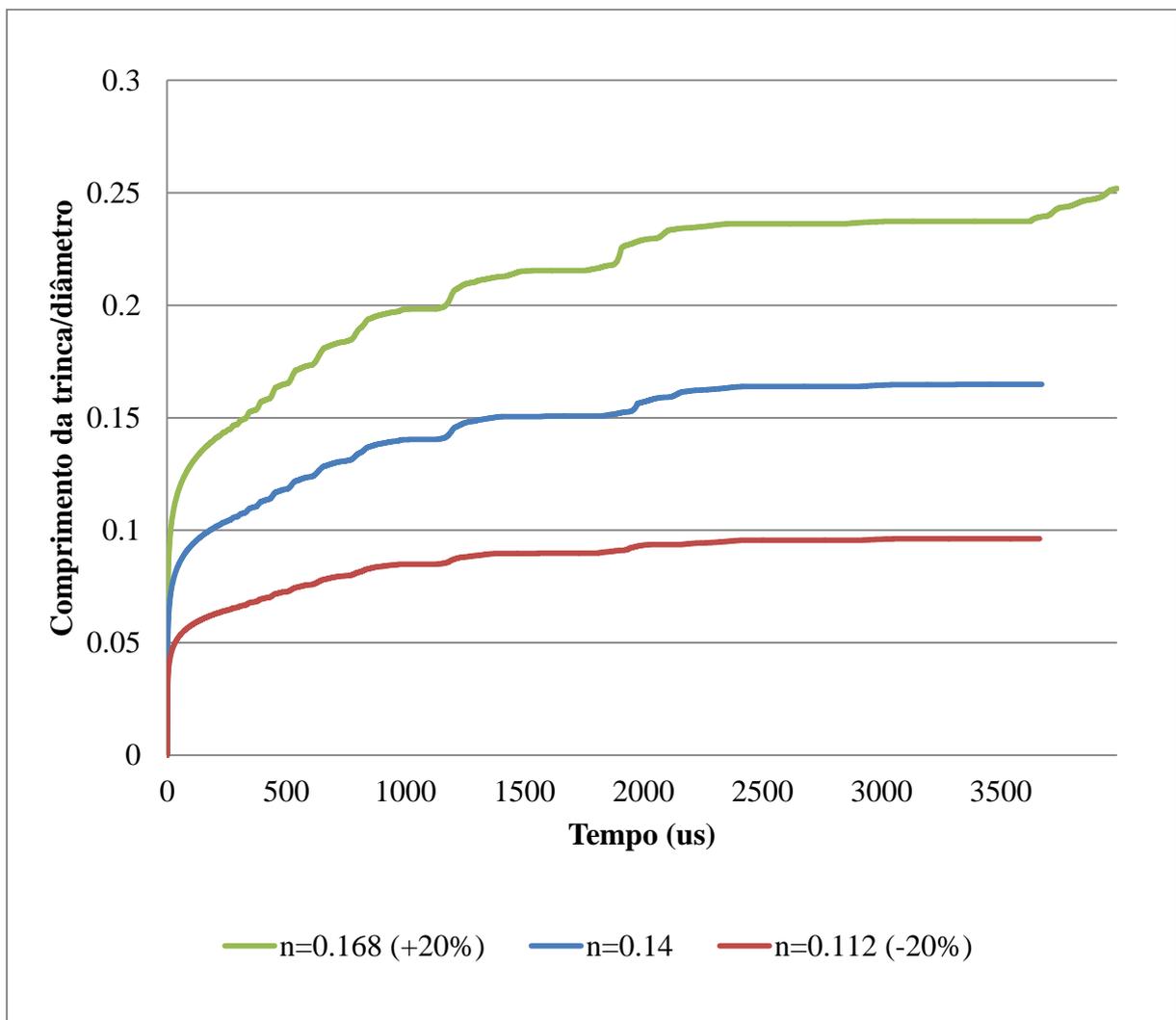


FIGURA 26- Variação no comprimento da trinca (normalizado) para diferentes hipóteses de coeficientes de encruamento (n), considerando como base $n=0.14$ do aço 1040.

6.2.4 Influência da altura da queda no início e propagação da trinca

A FIGURA 27 mostra a propagação da trinca quando varia-se somente a altura da queda da barra, os resultados são os esperados. A trinca propaga mais quando cai de uma altura maior e menos quando cai da menor.

Além disso, os tempos de início da trinca são diferentes, para a altura maior a trinca inicia mais rapidamente que na altura de queda menor.

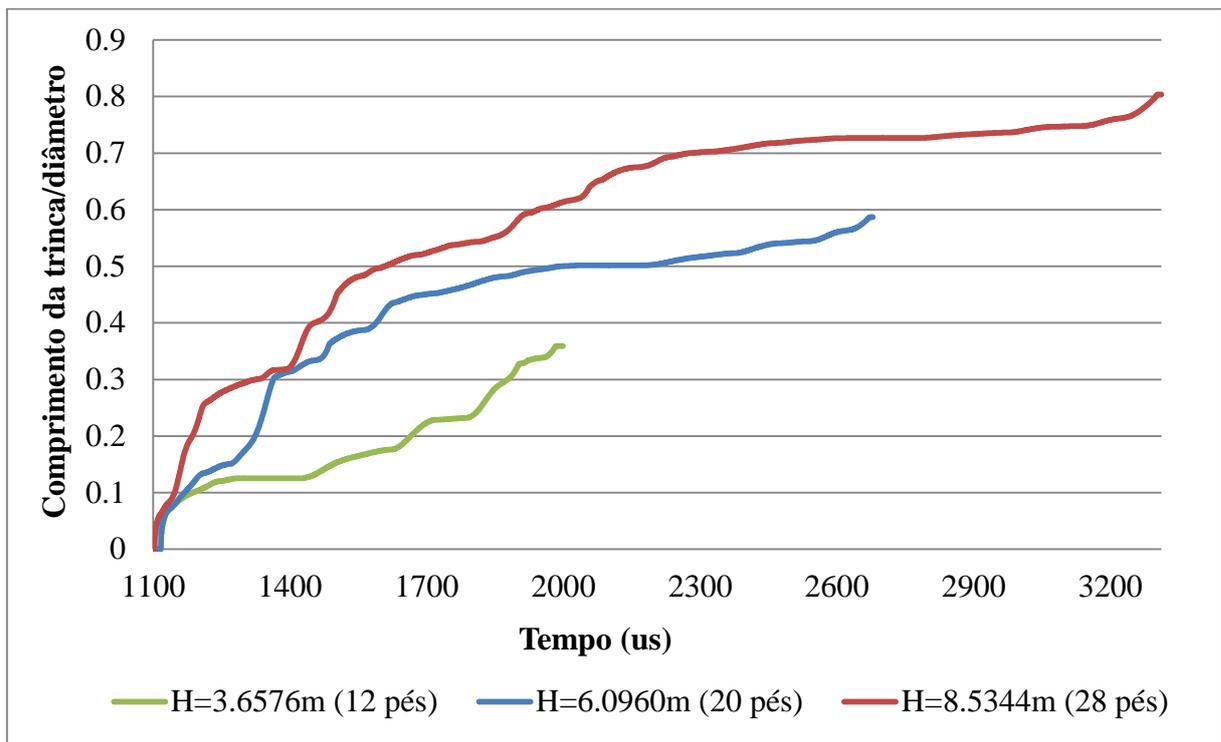


FIGURA 27 – Variação na propagação da trinca na barra para diferentes alturas de quedas (H), considerando que a barra é fabricada em aço 1040.

7 Conclusão

Analisando os resultados obtidos, pode-se concluir que:

(1) A solução pelo método de diferenças finitas para análise de impacto transversal em vigas de Euler - Bernoulli apresentada, mostra-se capaz de descrever o deslocamento de uma viga intacta. A confiabilidade da solução é aferida através da comparação entre os resultados da resolução analítica realizada com ausência de trinca por Hoffmann (2013) do mesmo grupo de pesquisa, da simulação dinâmica pelo software de Elementos Finitos ANSYS-LS DYNA e pelo Método de Diferenças Finitas descrita nesse trabalho;

(2) Tensão máxima poderá ocorrer em mais de uma posição, ocasionando a quebra da barra em vários pedaços;

(3) Em materiais com dureza elevada pode não ocorrer o início da trinca, porque a tensão na superfície da barra não atinge a tensão última do material, a qual aumenta com a dureza. Observa-se um pico de velocidade no início da trinca e logo uma queda acentuada não voltando a ocorrer extremos, esse fenômeno pode ser explicado pelo consumo de energia da zona plástica na ponta da trinca, essa região tende a frear a propagação;

(4) A influência da tenacidade à fratura do material na propagação da trinca é notável: quanto maior tenacidade a fratura, menor serão as velocidades e tempo de propagação. Observa-se ainda que, quanto menor k_{IC} , maior a propagação da trinca;

(5) O coeficiente de encruamento mostra-se capaz de frear a propagação da trinca. Esse parâmetro interfere diretamente na propagação da trinca devido a sua influência na energia de deformação. Quanto menor for “n” mais difícil da trinca propagar no material.

8 Sugestão para trabalhos futuros

Neste trabalho, a dureza é considerada constante em toda a barra. Em caso real as barras são tratadas termicamente, então, o perfil de dureza é variável em termos da distância da superfície da barra até o centro da seção transversal. O perfil da dureza pode ter grande influência na propagação da trinca. Por isso, sugere-se a realização de simulação com perfis de dureza variáveis. Além disso é possível modelar a barra inteira com surgimento de várias trincas. Também poderá usar o DEM para realizar modelagem e comparar os resultados com os de MDF.

REFERÊNCIAS

- ANDERSON, T. L. **Fracture mechanics fundamentals and applications**. 3°. ed. [S.l.]: Taylor & Francis Group, 2005.
- ASM-HANDBOOK. **ASM HANDBOOK Heat Treating**. [S.l.]: ASM Handbook Committee, v. 4, 1991.
- BEER, F. P. et al. **Mechanics of Materials**. 6ª. ed. [S.l.]: MeCraw-Hill, 2012.
- BRICKSTAD, B. A Viscoplastic Analysis of Rapid Crack Propagation Experiments in Steel. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, Stockholm, v. 31, p. 307-327, 1983.
- CAHOON, J. R. . B. W. H. A. K. A. R. The Determination of Yield Strength From Hardness Measurements. **Journal Metallurgical Transactions**, v. 2, p. 1971 - 1979, julho 1970.
- CALLISTER JR., W. D.; RETHWISCH, D. G. **Materials science and engineering an introduction**. 8th. ed. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2009.
- CANNON, J. T.; DOSTROVSKY, S. **The evolution of dynamics: vibration theory from 1687**. Nova York: [s.n.], 1981.
- DONA, M. et al. **A two-node multi-cracked beam element for static and dynamic analysis of planar frames**. Proceedings of the Eleventh International Conference on Computacional Structures Technology. Escócia: B. H. V. Topping. 2012.
- HOFFMANN, A. U. **Modelagem matemática de propagação de trinca em uma haste em queda livre chocando-se transversalmente contra um apoio rígido**. Universidade Federal do Pampa. Alegrete. 2013.
- JAMES, L. A.; MILLS, W. J. Review And Synthesis Of Stress Intensity Factor Solutions Applicable To Cracks In Bolts. **Engineering Fracture Mechanics**, Richland, v. 30, p. 641-654, 1988.
- KIM, K. -H.; KIM, J. -H. Effect of a crack on the dynamic stability of a free-free beam subjected to a follower force. **Journal of Sound and Vibration**, Seoul, p. 119-135, 2000.
- KISA, M.; GUREL, M. A. Free vibration analysis of uniform and stepped cracked beams with circular cross sections. **International Journal of Engineering Science**, Sanliurfa, n. 45, p. 364-380, Março 2007.
- MARUR, P. R. An Engineering Approach to Impact Analysis of Notched Beams by Conventional Beam Elements. **Computers & Structures**, Bangalore, v. 59, p. 1115-1120, Outubro 1994.

MILLER, D. C. **Anecdotal History of the Science of sound**. Nova York: Macmillan: [s.n.], 1935.

NEEDLEMAN, X.-P. X. A. A. Numerical Simulations of Fast Crack Growth in Brittle Solids. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, Providence, v. 42, p. 1397-1434, março 1994.

PAVLINA, E. J.; VAN TYNE, C. J. Correlation of Yield Strength and Tensile Strength. **Journal of Materials Engineering and Performance**, v. 17(6), p. 888-893, Dezembro 2008.

RAO, S. S. **Mechanical Vibrations**. 5^a. ed. Miami: Pearson PRENTICE Hall, 2011.

RUGGIERO, M. A. G.; LOPES, V. L. R. **Cálculo numérico**: aspectos teóricos e computacionais. 2. ed. [S.l.]: Pearson Makron Books, 1996.

SUBRAHMANYAN, K. B.; LEISSA, A. W. An improved finite difference analysis of uncoupled vibrations of cantilevered beams. **Journal of Sound and Vibration**, Ohio, p. 1-11, Dezembro 1983.

SUPPLIERS, M. Metal Suppliers Online, 1995-2015. Disponível em: <<http://www.suppliersonline.com/propertypages/4340.asp>>. Acesso em: 15 Maio 2015.

SUPPLIERS, M. Metal Suppliers Online, 1995-2015. Disponível em: <<http://www.suppliersonline.com>>. Acesso em: 15 Maio 2015.

temos o método de diferença finita progressiva, pela esquerda através do ponto x_{-1} o método de diferença finita regressiva e finalmente aproximando $u(x_0)$ pelos pontos x_{-1} e x_1 temos o método de diferença finita centrada.

I. Diferença finita progressiva

Truncando a série (A.1) após o segundo termo $u_{i+1} = u_i + \Delta x \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_i$, temos:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_i = \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x} \quad \dots(\text{A.3})$$

Com erro:

$$\epsilon = + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\xi) \Delta x = o(\Delta x) \quad \dots(\text{A.4})$$

II. Diferença finita regressiva

Truncando a série (A.2) após o segundo termo $u_{i-1} = u_i - \Delta x \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_i$, temos:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_i = \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x} \quad \dots(\text{A.5})$$

Com erro:

$$\epsilon = - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\xi) \Delta x = o(\Delta x) \quad \dots(\text{A.6})$$

III. Diferença finita centrada

Nessa formulação a aproximação é mais precisa porque utiliza-se de dois pontos, anterior e posterior.

a) Derivada de primeira ordem

Subtraindo a Equação (A.1) de (A.2) e truncando após o segundo elemento, temos:

$$\begin{aligned} u_{i+1} &= u_i + \Delta x \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_i \\ - \\ u_{i-1} &= u_i - \Delta x \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_i \end{aligned} \quad \dots(\text{A.7})$$

Resolvendo temos:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_i = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x} \quad \dots(\text{A.8})$$

Com erro:

$$\epsilon = -\frac{1}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(\xi) \Delta x^2 = o(\Delta x^2) \quad \dots(\text{A.9})$$

b) Derivada de segunda ordem

Para obter a expressão para a derivada segunda $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_i$, somamos as Equações (A.1)

de (A.2) e truncamos após o segundo elemento, temos:

$$\begin{aligned} u_{i+1} &= u_i + \Delta x \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_i \\ + \\ u_{i-1} &= u_i - \Delta x \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_i \end{aligned} \quad \dots(\text{A.10})$$

Resolvendo temos:

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_i = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{\Delta x^2} \quad \dots(\text{A.11})$$

Com erro:

$$\epsilon = -\frac{1}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\xi) \Delta x^2 = o(\Delta x^2) \quad \dots(\text{A.12})$$

c) Derivada de terceira ordem

Derivando uma vez os termos de u na Equação (A.11), temos:

$$\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)_i = \frac{-u_{i-2} + 2u_{i-1} - 2u_{i+1} + u_{i+2}}{2\Delta x^3} \quad \dots(\text{A.13})$$

d) Derivada de quarta ordem

Derivando uma vez os termos de u na Equação (A.13), temos:

$$\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right)_i = \frac{u_{i-2} - 4u_{i-1} + 6u_i - 4u_{i+1} + u_{i+2}}{\Delta x^4} \quad \dots(\text{A.14})$$

ANEXO B – Momento de inércia do círculo cortado em relação ao eixo x

A equação geral do momento de inércia em relação ao eixo x é dada por:

$$I_x = \int_A y^2 dA \quad (\text{B.1})$$

Para esse caso, com a propagação da trinca “a” FIGURA 15, há variação no momento de inércia I_a , aplica-se então a integral definida em relação ao eixo y.

$$I_x = \int_{-r}^{r-a} y^2 2x dy \quad \dots(\text{B.2})$$

Por substituição trigonométrica utiliza-se a relação $y = \text{sen}\theta r$, $dy = \cos\theta r d\theta$ e $x = \text{cos}\theta r$, resultando em:

$$I_x = 2r^4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\alpha} \text{sen}^2\theta \cos^2\theta d\theta \quad \dots(\text{B.3})$$

Utilizando as identidades trigonométricas:

$$\text{sen}^2\theta = \left(\frac{1 - \cos 2\theta}{2} \right) \quad \dots(\text{B.4})$$

$$\cos^2\theta = \left(\frac{1 + \cos 2\theta}{2} \right) \quad \dots(\text{B.5})$$

Substituindo (B.4) e (B.5) em (B.3), temos:

$$I_x = 2r^4 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\alpha} \left(\frac{1 - \cos 2\theta}{2} \right) \left(\frac{1 + \cos 2\theta}{2} \right) d\theta = \frac{r^4}{2} \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\alpha} d\theta - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\alpha} \cos^2 2\theta d\theta \right) \quad \dots(\text{B.6})$$

$$I_x = \frac{r^4}{2} \left(\alpha + \frac{\pi}{2} - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\alpha} \cos^2 2\theta d\theta \right) \quad \dots(\text{B.7})$$

A resolução da integral $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\alpha} \cos^2 2\theta d\theta$, é obtida por substituição, onde $u = 2\theta$,

$du = 2d\theta$, resulta em:

$$\frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\alpha} \cos^2 2\theta 2d\theta = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\alpha} \cos^2 u du = \frac{1}{2} \left(\alpha + \frac{\pi}{2} + \frac{1}{4} \text{sen}4\alpha \right) \quad \dots(\text{B.8})$$

Substituindo na Equação (B.7), temos:

$$I_x = \frac{r^4}{2} \left(\alpha + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \left(\alpha + \frac{\pi}{2} + \frac{1}{4} \text{sen}4\alpha \right) \right) = \frac{r^4}{4} \left(\alpha + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4} \text{sen}4\alpha \right) \quad \dots(\text{B.9})$$

ANEXO C – Área do círculo cortado

A área do círculo (FIGURA 15) varia com a propagação da trinca “a” e é calculada pela integral definida em relação ao eixo y.

$$A = \int_A dA = \int_A 2x dy \quad \dots(\text{C.1})$$

Onde por substituição trigonométrica $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ e $dy = r \cos \theta$, substituindo na Equação (C.1), temos:

$$A = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\alpha} 2r \cos \theta r \cos \theta d\theta = 2r^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\alpha} \cos^2 \theta d\theta \quad \dots(\text{C.2})$$

Aplicando identidade trigonométrica, temos:

$$A = r^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\alpha} (1 + \cos 2\theta) d\theta = r^2 \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\alpha} d\theta + \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\alpha} \cos 2\theta 2d\theta \right) = \frac{r^2}{2} (2\alpha + \pi + \sin 2\alpha) \quad \dots(\text{C.3})$$

ANEXO D – Centroide do círculo cortado

O centroide C (FIGURA 15) de coordenadas \bar{x} e \bar{y} (FIGURA 29) da área A em relação ao eixo x , pode ser determinado pela seguinte expressão:

$$\int_A y dA = A\bar{y} \quad \dots(D.1)$$

Onde $\bar{y} = y_c$ na FIGURA 15.

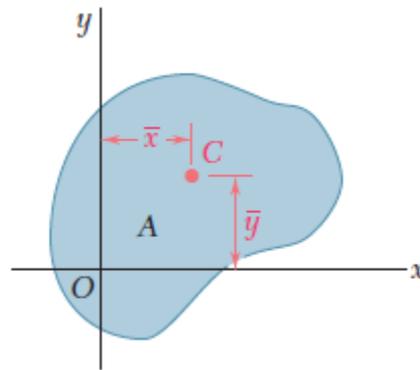


FIGURA 29 – Centroide de uma área

Fonte: (BEER, JR., *et al.*, 2012)

Colocando em evidência \bar{y} na equação (D.1), temos:

$$\begin{aligned} \bar{y} = y_c &= \frac{1}{A} \int_A y dA = \frac{1}{A} \int_A y 2x dy = \frac{1}{A} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\alpha} (\text{sen}\theta r)(2 \cos \theta r \cos \theta r) d\theta \\ &= \frac{2r^3}{A} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\alpha} \text{sen}\theta \cos^2 \theta d\theta \end{aligned} \quad \dots(D.2)$$

Resolvendo a integral por substituição, onde $u = \cos \theta$ e $du = -\text{sen}\theta d\theta$, temos:

$$y_c = -\frac{2r^3}{A} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\alpha} u^2 du = -\frac{2r^3}{A} \left[\frac{\cos^3 \theta}{3} \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\alpha} = -\frac{2r^3}{3A} \cos^3 \alpha = -\frac{4r \cos^3 \alpha}{3(2\alpha + \pi + \text{sen}2\alpha)} \quad \dots(D.3)$$

ANEXO E – Momento de inércia do círculo cortado em relação ao eixo que passa o centroide do círculo cortado

O momento de inércia do círculo cortado em relação ao eixo que passa pelo centroide é dado pela Equação (B.9). Porém o centroide da seção transversal move-se com a propagação da trinca, conforme mostrado na FIGURA 30. Para considerar o deslocamento aplica-se o Teorema dos Eixos Paralelos para calcular o momento de inércia I_c .

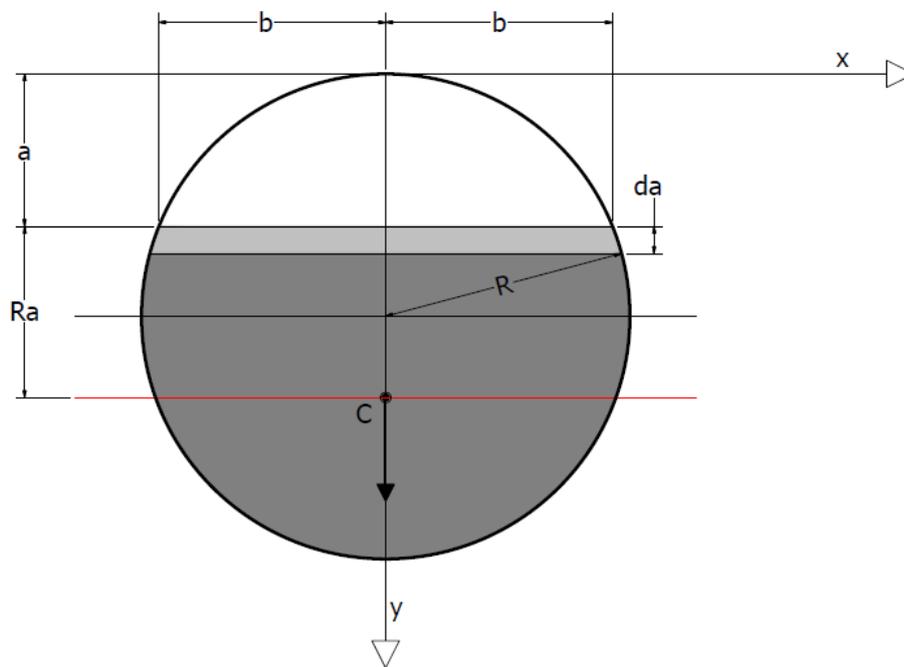


FIGURA 30- Deslocamento do centroide C com a propagação da trinca

Segundo o Teorema dos Eixos Paralelos a equação do momento de inércia é dada por:

$$I_c = I_x + y_c^2 A \quad \dots(\text{E.1})$$

Substituindo as Equações (B.9), (D.3) e (C.3) na Equação (E.1), temos:

$$\begin{aligned} I_c &= \frac{r^4}{4} \left(\alpha + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4} \text{sen}4\alpha \right) + \frac{16r^2 \cos^6 \alpha}{9(2\alpha + \pi + \text{sen}2\alpha)^2} \frac{r^2}{2} (2\alpha + \pi + \text{sen}2\alpha) \\ &= \frac{r^4}{4} \left(\alpha + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4} \text{sen}4\alpha \right) + \frac{8r^4 \cos^6 \alpha}{9(2\alpha + \pi + \text{sen}2\alpha)} \end{aligned} \quad \dots(\text{E.2})$$