

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO PAMPA**

**ANDRÉ DA SILVA AQUINO**

**EXPERIMENTOS DE OSCILAÇÕES PARA O LABORATÓRIO DE MATEMÁTICA  
E FÍSICA DA UNIPAMPA, CAMPUS ITAQUI.**

**Itaqui-RS**

**2022**

**ANDRÉ DA SILVA AQUINO**

**EXPERIMENTOS DE OSCILAÇÕES PARA O LABORATÓRIO DE MATEMÁTICA  
E FÍSICA DA UNIPAMPA, CAMPUS ITAQUI.**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Bacharelado Interdisciplinar em Ciência e Tecnologia da Universidade Federal do Pampa, como requisito parcial para obtenção do Título de Bacharel em Interdisciplinar em Ciência e Tecnologia.

Orientadora: Caroline Jaskulski Rupp

**Itaqui-RS**

**2022**

Ficha catalográfica elaborada automaticamente com os dados fornecidos  
pelo(a) autor(a) através do Módulo de Biblioteca do  
Sistema GURI (Gestão Unificada de Recursos Institucionais).

A586e Aquino, André da Silva

Experimentos de Oscilações para o Laboratório de Matemática  
e Física da UNIPAMPA, Campus Itaqui. / André da Silva Aquino.  
46 p.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) -- Universidade  
Federal do Pampa, INTERDISCIPLINAR EM CIÊNCIA E TECNOLOGIA,  
2022.

"Orientação: Caroline Jaskulski Rupp".

1. Física. 2. Oscilações. 3. Experimentos. 4. Lei de Hooke.  
5. Pêndulo Simples. I. Título.

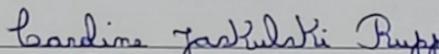
ANDRÉ DA SILVA AQUINO

EXPERIMENTOS DE OSCILAÇÕES PARA O LABORATÓRIO DE MATEMÁTICA  
E FÍSICA DA UNIPAMPA, CAMPUS ITAQUI.

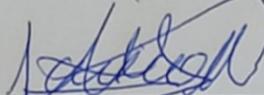
Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Bacharelado interdisciplinar em Ciência e Tecnologia da Universidade Federal do Pampa, como requisito parcial para obtenção do Título de Bacharel em Interdisciplinar em Ciência e Tecnologia.

Trabalho de Conclusão de Curso defendido e aprovado em: 04, agosto, 2022.

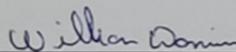
Banca examinadora:



Prof. Dr. Caroline Jaskulski Rupp  
Orientadora  
(UNIPAMPA)



Prof. Dr. Rolando Larico Mamani  
(UNIPAMPA)



Prof. Dr. Willian Damin  
(UNIPAMPA)

Dedico este trabalho a minha família, em especial a minha mãe Eusieni Aquino, que sem o seu apoio e incentivo nada disso seria possível.

## **AGRADECIMENTOS**

Gostaria de começar agradecendo a minha mãe pelo incansável apoio e dedicação durante toda essa trajetória até aqui, e que foi fundamental que esse sonho se realizasse. Também aos meus amigos, em especial o Evair, Tiago, Mariele e Elson que sempre se fizeram presente aconselhando e ajudando nessa caminhada.

Meus agradecimento aos colegas do Campus que me proporcionaram experiências incríveis e que fizeram com que a caminhada até aqui fosse mais leve e mais prazerosa. Aos professores que sempre deram o seu máximo fazendo o possível e impossível indo contra todas as adversidades para garantir um melhor aprendizado tanto para mim quanto para os meus.

Agradeço a minha instituição e a todos os profissionais que fazem com que a Universidade Federal do Pampa-UNIPAMPA, seja essa referência no ensino de qualidade.

E por último, e não menos importante agradeço incondicionalmente minha professora e orientadora Caroline Jaskulski Rupp pela sua dedicação, compreensão e por ter confiado na minha capacidade pra conseguir chegar até aqui. Obrigado a todos, sem vocês não seria possível a finalização deste ciclo.

“O cérebro é como um músculo. Quando está sendo usado, nos sentimos muito bem. O entendimento é prazeroso.”

Carl Sagan

## RESUMO

Para a compreensão dos conceitos de Física e o melhor desenvolvimento da aprendizagem dos discentes existe um consenso entre docentes e discentes de que a atividade prática com a utilização de experimentos simples é uma ferramenta pedagógica de grande auxílio. Existem vários experimentos simples de baixo custo que podem ser construídos para o auxílio da aprendizagem dos conceitos da Física. Dentre estes conceitos, podemos destacar o de Oscilações, que por vezes é visto apenas de forma superficial restringido a equações e exercícios teóricos e matemáticos. Dessa forma, com o intuito de tornar o conteúdo mais didático e acessível para os discentes da Universidade Federal do Pampa, e até mesmo para alunos(as) do ensino médio das escolas de Itaqui construímos dois experimentos relacionados a um tipo básico de oscilação, que é o Movimento Harmônico Simples (MHS). No primeiro experimento, utilizamos um pêndulo simples (formado por um corpo esférico de massa  $m$ , um fio de comprimento  $L$  e um aparato de madeira para prender o pêndulo) e calculamos o valor da aceleração da gravidade  $g$ . No segundo experimento, calculamos a constante elástica de duas molas diferentes utilizando uma mola, um copo plástico, bolas de gude e um aparato de madeira que prendia a mola. Com a variação das massas dentro do copo plástico determinamos a força peso e medimos a elongação da mola ( $x$ ). Com os valores da força peso e da elongação construímos o gráfico da força pela elongação e determinamos o valor da constante elástica para cada mola. Como resultados, encontramos o valor da aceleração da gravidade de  $g = 9,79 \text{ m/s}^2$  no primeiro experimento. No segundo experimento, encontramos os valores de constantes elásticas de  $k = 14,41 \text{ N/m}$  para a primeira mola e  $k = 176,40 \text{ N/m}$  para a segunda mola, que estão de acordo com as características das molas. Dessa forma, através dos experimentos, obteve-se resultados satisfatórios, dentro do planejado, através da aplicação das equações do Movimento Harmônico Simples. Somado a isso, os experimentos foram bem aceitos pelos discentes da Universidade Federal do Pampa, principal público-alvo, e que posteriormente irão ter uma experiência marcante e proveitosa com os instrumentos que ficarão disponíveis no laboratório de Matemática e Física da universidade, agregando mais valor e conhecimento no estudo dos componentes curriculares de Física.

Palavras-Chave: Física; Oscilações; Experimentos; Lei de Hooke; Pêndulo Simples.

## ABSTRACT

For the understanding of the concepts of Physics and the better development of the students' learning, there is a consensus between teachers and students that the practical activity with the use of simple experiments is a pedagogical tool of great help. There are several simple low-cost experiments that can be built to aid in the learning of physics concepts. Among these concepts, we can highlight that of Oscillations, which is sometimes seen only superficially, restricted to formulas and theoretical exercises. Thus, in order to make the content more didactic and accessible to students at the Federal University of Pampa, and even to high school students from schools in Itaqui, we built two experiments related to a basic type of oscillation, which is Simple Harmonic Motion (SHM). In the first experiment, we used a simple pendulum (formed by a spherical body of mass  $m$ , a string of length  $L$  and a wooden support that held the spring and calculated the value of the acceleration due to gravity  $g$ . In the second experiment, we calculated the spring constant of two different springs using a spring, a plastic cup, marbles and a wooden apparatus that held the spring. With the variation of the masses inside the plastic cup, we determine the weight force and measure the elongation of the spring ( $x$ ). With the values of the weight force and the elongation, we build the force by an elongation graph and determine the value of the spring constant for each spring. As a result, we found the value of the acceleration due to gravity of  $g = 9.79 \text{ m/s}^2$  in the first experiment. In the second experiment, we found the values of spring constants of  $k=14.41 \text{ N/m}$  for the first spring and  $k=176.40 \text{ N/m}$  for the second spring, which are in agreement with the characteristics of the springs. Thus, through the experiments, satisfactory results were obtained, as planned, through the application of the Simple Harmonic Motion equations. In addition, the experiments were well accepted by the students of the Federal University of Pampa, the main target audience, and who will later have a remarkable and fruitful experience with the instruments that will be available in the university's Mathematics and Physics laboratory, adding more knowledge in the study of the curricular components of Physics.

Keywords: Physical; Oscillations; experiments; Hooke's Law; Simple Pendulum.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Bloco de massa $m$ preso à uma mola de constante elástica $k$ formando o sistema massa-mola.....	18
Figura 2 - (a) O deslocamento $x(t)$ de uma partícula que executa um MHS. (b) A velocidade $v(t)$ da partícula e (c) a aceleração $a(t)$ da partícula.....	20
Figura 3 - Curva de tensão ( $\delta$ ) x deformação ( $\epsilon$ ) e o limite de elasticidade.....	22
Figura 4 - Sistema massa-mola ideal sem atrito na horizontal.....	23
Figura 5 - As energias potencial, cinética e mecânica total em função do tempo.....	26
Figura 6 - As energias potencial, cinética e mecânica total em função do deslocamento.....	26
Figura 7 - (a) Um pêndulo simples. (b) As forças que agem sobre o pêndulo são a força gravitacional $\vec{F}_g$ e a força de tração no fio $\vec{T}$ . A componente tangencial da força gravitacional $F_g \sin \theta$ é a força restauradora que tende a levar o pêndulo de volta para a posição central....	27
Figura 8 - Aparato experimental similar ao construído para o experimento da Lei de Hooke.....	31
Figura 9 - Forças que atuam no sistema massa-mola vertical.....	32
Figura 10 - Aparato experimental utilizado com os três comprimentos $L$ que foram utilizados: (a) $L_1 = 0,20$ m, (b) $L_2 = 0,40$ m e (c) $L_3 = 0,60$ m.....	34
Figura 11 - Gráfico de $L(m) \times T_{méd}(s)$ .....	38
Figura 12 - Gráfico de $L(m) \times (T_{méd}(s))^2$ .....	39
Figura 13 - Aparato experimental construído para o experimento II: (a) utilizando uma mola menos rígida e (b) utilizando uma mola mais rígida.....	40
Figura 14 - Gráfico de $X(m) \times F_{el}(N)$ para a primeira mola.....	42
Figura 15 - Gráfico de $X(m) \times F_{el}(N)$ para a segunda mola.....	44

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Valores obtidos para os dez períodos de oscilação medidos e a média para $L_1 = 20$ cm.....	35
Tabela 2 - Valores obtidos para os dez períodos de oscilação medidos e a média para $L_2 = 40$ cm.....	36
Tabela 3 - Valores obtidos para os dez períodos de oscilação medidos e a média para $L_3 = 60$ cm.....	37
Tabela 4 - Valores obtidos para os períodos de oscilação médio em relação aos comprimentos do fio.....	37
Tabela 5 - Valores obtidos para os períodos de oscilação médio ao quadrado em relação aos comprimentos do fio.....	38
Tabela 6 - Valores obtidos de $L$ (cm) e $X = L - L_0$ para a primeira mola.....	41
Tabela 7 - Valores obtidos para a massa, a força peso e o deslocamento da primeira mola...	41
Tabela 8 - Valores obtidos de $L$ (cm) e $X = L - L_0$ para a segunda mola.....	43
Tabela 9 - Valores obtidos para a massa, a força peso e o deslocamento da segunda mola....	43

## **LISTA DE SIGLAS**

MHS - Movimento Harmônico Simples

SI - Sistema Internacional de Unidades

## SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO.....</b>	<b>14</b>
<b>1.1 Objetivos.....</b>	<b>16</b>
<b>2 CONCEITOS GERAIS E REVISÃO DE LITERATURA.....</b>	<b>18</b>
<b>2.1 Movimento Harmônico Simples (MHS).....</b>	<b>18</b>
<b>2.1.1 A Lei do Movimento Harmônico Simples.....</b>	<b>21</b>
<b>2.1.2 A Energia do Movimento Harmônico Simples.....</b>	<b>24</b>
<b>2.1.3 Pêndulo Simples.....</b>	<b>27</b>
<b>3 METODOLOGIA .....</b>	<b>30</b>
<b>3.1 Experimento I - Pêndulo Simples .....</b>	<b>30</b>
<b>3.2 Experimento II - Lei de Hooke .....</b>	<b>31</b>
<b>4 APRESENTAÇÃO DA PESQUISA E ANÁLISE DOS RESULTADOS.....</b>	<b>34</b>
<b>4.1 Experimento do pêndulo simples.....</b>	<b>34</b>
<b>4.1 Experimento da Lei de Hooke.....</b>	<b>40</b>
<b>5 CONSIDERAÇÕES FINAIS.....</b>	<b>45</b>
<b>REFERÊNCIAS.....</b>	<b>46</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Para a compreensão dos conceitos de física e o melhor desenvolvimento da aprendizagem dos discentes existe um consenso entre docentes e discentes de que a atividade prática com a utilização de experimentos simples é uma ferramenta pedagógica de grande auxílio. Existem vários experimentos simples de baixo custo que podem ser construídos para o auxílio da aprendizagem dos conceitos da física. Dentre estes conceitos, podemos destacar os relacionados com o tema “Oscilações”, que por vezes é visto apenas de forma superficial restringido a equações, exercícios teóricos e matemáticos.

Os eventos oscilatórios podem ser vistos em diversas áreas de conhecimento como a biologia, a engenharia e principalmente na física, assim como, podem ser apresentados de várias formas na natureza e no nosso dia-a-dia. Dessa forma, Halliday (2016, p. 212), exemplifica que, quando um peão de rodeio monta em um touro, o corpo do peão oscila para um lado e para outro enquanto o touro gira e corcoveia.

De acordo com Halliday (2016b, p. 213), o Movimento Harmônico Simples (MHS) é uma função senoidal do tempo  $t$ , ou seja, pode ser escrito como uma função seno ou cosseno do tempo  $t$ . Ainda com Halliday (2016b, p. 202) o MHS é o movimento executado por uma partícula sujeita a uma força de módulo proporcional ao deslocamento da partícula e orientada no sentido oposto. Então, desse modo, define-se que o MHS é o movimento de qualquer sistema que oscila periodicamente e indefinidamente sem atuação de forças externas dependentes do tempo. Um exemplo de sistema em MHS é o sistema massa-mola, sem a atuação de forças externas. Nele, a única força que atua no sistema é uma força restauradora que é proporcional ao deslocamento, deformando a mola dentro de um regime elástico. Essa força restauradora do MHS é descrita pela Lei de Hooke. O período  $T$  (tempo necessário para completar uma oscilação completa) de oscilação do sistema massa-mola depende de massa  $m$  e da constante elástica  $k$  da mola.

A energia mecânica no MHS consiste de dois termos, a energia cinética e a energia potencial. Se considerarmos um oscilador linear (sistema massa-mola), a energia cinética está relacionada com a velocidade do sistema (massa-mola) enquanto que energia potencial está associada à mola e é definida como energia potencial elástica. A energia potencial elástica está relacionada com o deslocamento (alongamento ou compressão) da mola, ou seja, de  $x(t)$ . Assim, no MHS, a energia varia, dependendo da velocidade e do deslocamento da mola sendo que uma forma de energia se transfere em outra, ora sendo somente energia cinética, ora sendo somente energia potencial elástica ou o intermediário entre as duas formas de energias.

Segundo Halliday (2016, p. 226) temos que “Isso mostra que a energia mecânica de um oscilador linear é, de fato, constante e independente do tempo. A energia potencial e a energia cinética de um oscilador linear são mostradas em função do tempo  $t$  e em função do deslocamento  $x$ . Agora podemos entender por que um sistema oscilatório normalmente contém um elemento de elasticidade e um elemento de inércia: o primeiro armazena energia potencial e o segundo armazena energia cinética.”

Nota-se que até o momento consideramos sistemas em que a força restauradora era resultante de um elemento elástico, nesse caso, uma mola. Se considerarmos que esta força é proporcional ao deslocamento cuja constante de proporcionalidade depende das características do elemento elástico, precisamos, então considerar o caso em que penduramos uma massa por um fio ou cabo pivotado em um determinado ponto. Assim, quando deslocamos a massa do ponto de equilíbrio, a força da gravidade que atua sobre a massa do ponto de equilíbrio é igual a força restauradora.

O pêndulo simples é um sistema que também realiza o Movimento Harmônico Simples. Desse modo, como explicado por Halliday (2016b, p. 232), o pêndulo simples é composto por uma partícula de massa  $m$  (chamada de massa do pêndulo) suspensa por um fio inextensível, de massa desprezível e comprimento  $L$ . Ainda com Halliday (2016b, p. 232), a massa está livre para oscilar no plano do papel, para a esquerda e para a direita de uma reta vertical que passa pelo ponto de suspensão do fio. O período  $T$  de um pêndulo simples depende do comprimento  $L$  do fio e da aceleração da gravidade  $g$  local.

Observa-se então, que o tema relacionado ao Movimento Harmônico Simples apesar de ser muito comum no nosso cotidiano, acaba se tornando bem complexo quando visto apenas de forma teórica e matemática, fazendo assim, indispensável o uso de experimentos simples que visam facilitar o seu entendimento a respeito do assunto.

Os conteúdos de física quando aplicados de forma práticas e simples, geram experiências marcantes no estudante, assim como cita, o físico teórico britânico Stephen Hawking (2018, p. 28) “a maioria pode compreender e apreciar as ideias básicas, se forem apresentadas de maneira clara e sem equações [...]”, afinal, elas são capazes de incitar a curiosidade, o raciocínio lógico, a criatividade e demonstrado como um assunto teoricamente complicado e complexo como Movimento Harmônico Simples pode estar presente em coisas simples do nosso cotidiano e que por vezes passam despercebidos.

A matemática e as equações em si têm um enorme valor e grande importância na física, o próprio “princípio fundamentalmente criador está na matemática” (EINSTEIN, 2016, p. 129). No entanto, as equações e fórmulas estão presentes na física apenas devido ao critério

de utilização que a própria experiência impõe sobre elas (EINSTEIN; Albert, 2016, p. 129).

Dessa forma, com o intuito de tornar o conteúdo mais didático e acessível para os discentes da Universidade Federal do Pampa, e até mesmo para alunos(as) do ensino médio das escolas de Itaqui que frequentemente fazem visitas aos laboratórios da universidade, construímos dois experimentos relacionados a um tipo básico de oscilação, que é o Movimento Harmônico Simples (MHS). No primeiro experimento (experimento I), utilizamos um pêndulo simples (formado por um corpo esférico de massa  $m$ , um fio de comprimento  $L$  e um aparato de madeira para prender o pêndulo) e calculamos o valor da aceleração da gravidade  $g$ . No segundo experimento (experimento II), calculamos a constante elástica de duas molas diferentes utilizando uma mola, um copo plástico, bolas de gude e um aparato de madeira que prendia a mola. Com a variação das massas dentro do copo plástico determinamos a força peso e medimos a elongação da mola ( $x$ ). Com os valores da força peso e da elongação determinamos o valor da constante elástica para cada mola.

Além disso, realizamos uma revisão teórica sobre os principais conceitos que envolvem o MHS, como: o deslocamento, a velocidade, a aceleração, a Lei de Hooke, a energia mecânica e o pêndulo simples.

Com isso, é evidente que há uma necessidade da realização desse trabalho para os alunos e alunas da UNIPAMPA, pois concluindo com o pensamento do professor Mário Sérgio Cortella, “Se a educação não for provocativa, não constrói, não se cria, não se inventa, só se repete (SAYÃO, 2020, p. 04).

## 1.1 Objetivos

O objetivo geral deste trabalho é construir dois experimentos de física sobre Oscilações e realizando medidas físicas para proporcionar aos discentes uma melhor experiência e entendimento a respeito do assunto.

Os objetivos específicos são:

- Comprovar que o período do pêndulo não depende da massa e amplitude e sim depende do comprimento do fio;
- Determinar a aceleração da gravidade mediante os tempos de oscilação e comprimentos do fio.
- Fazer uma revisão teórica da Lei de Hooke;
- Observar se sistema massa-mola (mola) satisfaz a Lei de Hooke;
- Obter as medidas de força peso através da montagem de experimentos de baixo

custo;

- Determinar matematicamente e experimentalmente a constante elástica da mola.

Os dois experimentos serão disponibilizados no Laboratório de Matemática e Física da Universidade Federal do Pampa (UNIPAMPA), campus de Itaqui, RS, para serem utilizados pela comunidade acadêmica da UNIPAMPA nos componentes curriculares de Física e nos projetos de extensão.

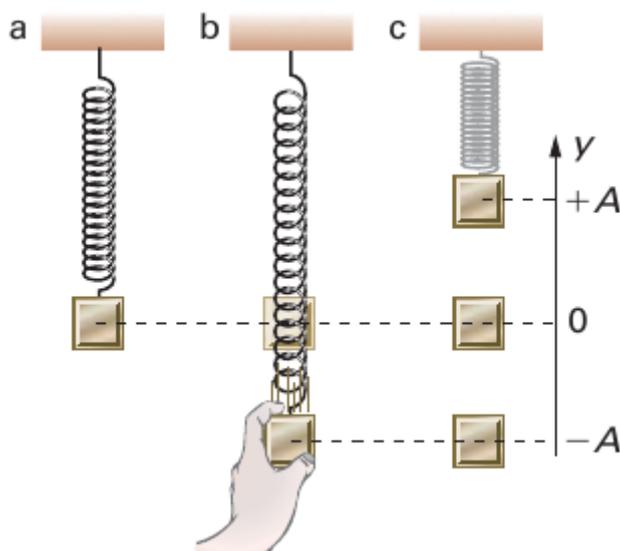
## 2 CONCEITOS GERAIS E REVISÃO DE LITERATURA

Galileu Galilei sempre foi muito dedicado ao estudo do movimento dos corpos, sendo um dos primeiros estudiosos a refletir sobre o movimento oscilatório. Diz a história que uma vez Galileu estava na catedral de Pisa quando começou a olhar e refletir sobre o movimento que um lustre fazia no alto da igreja e teve a ideia de medir o tempo que aquele lustre demorava para oscilar. Como naquela época não existia relógio e nem cronômetro, Galileu mediu o tempo das oscilações com as batidas de seu pulso. O que despertou a atenção de Galileu foi que a amplitude de oscilação desse sistema parecia não alterar o período de oscilação do mesmo.

### 2.1 Movimento Harmônico Simples (MHS).

Para entender melhor o que é o Movimento Harmônico Simples (MHS), vamos considerar a Figura 1, que mostra um bloco preso à uma mola.

Figura 1 - Bloco de massa  $m$  preso à uma mola de constante elástica  $k$  formando o sistema massa-mola.



Fonte: Gaspar, 2013.

Na Figura 1 (a), temos que o bloco está preso à mola em uma situação de equilíbrio ( $y = 0$ ), ou seja, a mola não está sendo nem comprimida nem alongada. Quando o bloco é puxado como na Figura 1 (b) e depois é solto, ele adquire um movimento oscilante e

periódico que é chamado de movimento harmônico simples (MHS). Se associarmos a esse movimento um referencial vertical com origem ( $y = 0$ ) no ponto de repouso, as posições extremas serão  $+A$  e  $-A$ , como mostra a Figura 1 (c). Estes extremos de oscilações correspondem às amplitudes  $A$  do movimento.

A frequência  $f$  da oscilação é o número de vezes por unidade de tempo que a partícula descreve uma oscilação completa (um ciclo). A unidade de frequência do SI é o hertz (Hz), definido como:  $1 \text{ hertz} = 1 \text{ Hz} = 1 \text{ oscilação por segundo} = 1 \text{ s}^{-1}$ .

O tempo necessário para completar um ciclo é o período  $T$  da oscilação, dado por:

$$T = \frac{1}{f} \quad (1)$$

Todo movimento que se repete a intervalos regulares é chamado de movimento periódico ou movimento harmônico. O movimento harmônico simples (MHS) é uma função senoidal do tempo  $t$ , ou seja, pode ser escrito como um seno ou cosseno do tempo  $t$ . Assim, o deslocamento da partícula em MHS é dado por:

$$x(t) = x_m \cos(\omega t + \varphi) \quad (2)$$

Na equação (2), temos que  $x(t)$  é o deslocamento da partícula no tempo  $t$ ,  $x_m$  é a amplitude de oscilação,  $\omega$  é a frequência angular e  $\varphi$  é a constante de fase. A amplitude de oscilação corresponde ao valor máximo de deslocamento (os extremos  $+A$  e  $-A$  na Figura 1 (c) e os extremos  $+x_m$  e  $-x_m$  na Figura 2).

O argumento da função cosseno é chamado de fase do movimento. É a variação da fase com o tempo que faz o valor do cosseno variar. O parâmetro  $\varphi$  é chamado de ângulo de fase ou constante de fase.

O parâmetro  $\omega$  da equação (2) é a frequência angular do movimento que mede a rapidez em que o ângulo de fase é percorrido e é dada por:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \quad (3)$$

A unidade de frequência angular do SI é o radiano por segundo (rad/s).

Podemos determinar a velocidade, ou seja, a função  $v(t)$  que representa a velocidade em qualquer instante de tempo  $t$ . Para isso, vamos calcular a derivada primeira do deslocamento em relação ao tempo e obter uma expressão para  $v(t)$ . Temos que:

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt} [x_m \cos(\omega t + \varphi)] = -\omega x_m \text{sen}(\omega t + \varphi) \quad (4)$$

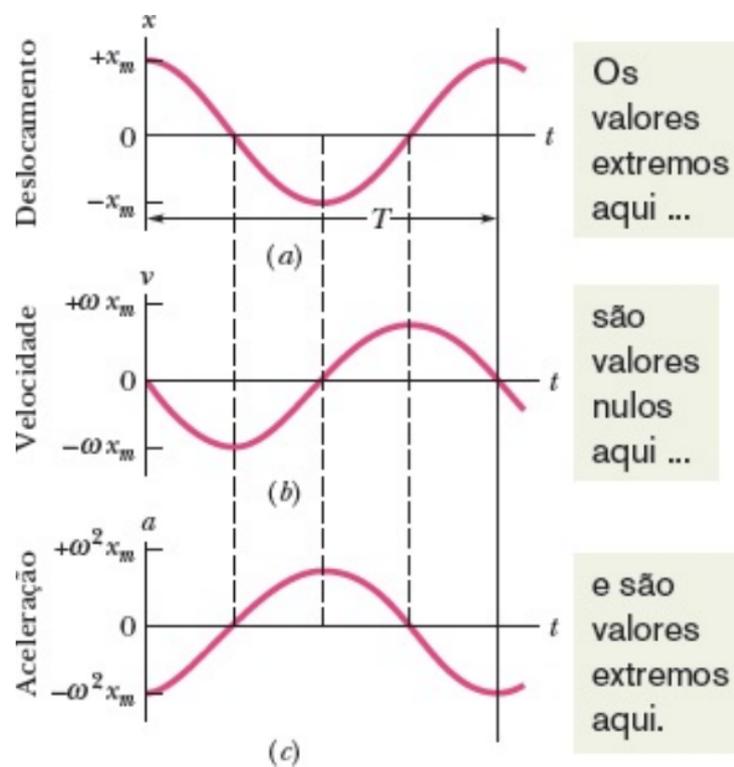
ou seja,

$$v(t) = -\omega x_m \text{sen}(\omega t + \varphi) \quad (5)$$

Temos que a velocidade  $v(t)$  varia com o tempo nos valores de  $+1$  e  $-1$  (em relação a

função seno). Os valores extremos da variação de velocidade são  $-\omega x_m$  e  $+\omega x_m$  (Figura 2). Dizemos que  $\omega x_m$  é a amplitude  $v_m$  da variação de velocidade. Quando a partícula passa pelo ponto  $x = 0$  e está se movendo da esquerda para a direita, a velocidade é positiva e o módulo da velocidade tem o maior valor possível. Quando a partícula passa pelo ponto  $x = 0$  e está se movendo da direita para a esquerda, a velocidade é negativa e o módulo da velocidade tem, novamente, o maior valor possível (HALLIDAY, 2016b).

Figura 2 - (a) O deslocamento  $x(t)$  de uma partícula que executa um MHS. (b) A velocidade  $v(t)$  da partícula e (c) a aceleração  $a(t)$  da partícula.



Fonte: Halliday, 2016b.

Derivando a função velocidade da equação (5) em relação ao tempo, obtemos a aceleração de uma partícula que executa um movimento harmônico simples:

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} [-\omega x_m \text{sen}(\omega t + \varphi)] = -\omega^2 \text{cos}(\omega t + \varphi) \quad (6)$$

ou seja,

$$a(t) = -\omega^2 x_m \text{cos}(\omega t + \varphi) \quad (7)$$

A aceleração varia com a função cosseno no tempo entre -1 e +1. Temos que o fator  $\omega^2 x_m$  determina os valores extremos da variação da velocidade, ou seja, varia de  $-\omega^2 x_m$  a

$\omega^2 x_m$ . Este fator é chamado de amplitude  $a_m$  da variação da aceleração.

A Figura 2 (c) apresenta o gráfico da aceleração em relação ao tempo com a constante de fase igual a 0. Podemos ver que em  $x = 0$ , o módulo da aceleração é zero em função de que a função cosseno é zero neste ponto. Quando a função cosseno é máxima, temos que a partícula está passando pelos pontos extremos do movimento.

Podemos comparar a equação (7) com a equação (2) e escrevemos a aceleração como:

$$a(t) = - \omega^2 x(t) \quad (8)$$

Analisando a equação (8), temos que a aceleração da partícula tem sempre o sentido contrário ao do deslocamento (o sinal negativo) e também que a aceleração e o deslocamento estão relacionados por  $\omega^2$  (constante).

Dessa forma, segundo Halliday, p. 219, temos que:

No MHS, a aceleração  $a$  é proporcional ao deslocamento  $x$ , tem o sentido contrário e as duas grandezas estão relacionadas pelo quadrado da frequência angular  $\omega$ .

### 2.1.2 A Lei do Movimento Harmônico Simples.

A alegada relação linear no domínio elástico, como apresentada por Hooke, envolve a geometria do corpo analisado. O que realmente conhecemos como lei de Hooke esperou mais de cem anos até que, por volta de 1800, o cientista inglês Thomas Young (1773-1829) mostrou a proporcionalidade não em termos de forças e alongamentos, mas em termos de tensão ( $\delta$ ) e deformação ( $\epsilon$ ) - conceitos esses estabelecidos nessa época pelo francês Augustin Cauchy (1789-1857).

A Figura 3 apresenta a curva de tensão ( $\delta$ ) x deformação ( $\epsilon$ ) e o limite de elasticidade. Podemos observar que no regime elástico, existe uma relação linear entre a tensão e a deformação.

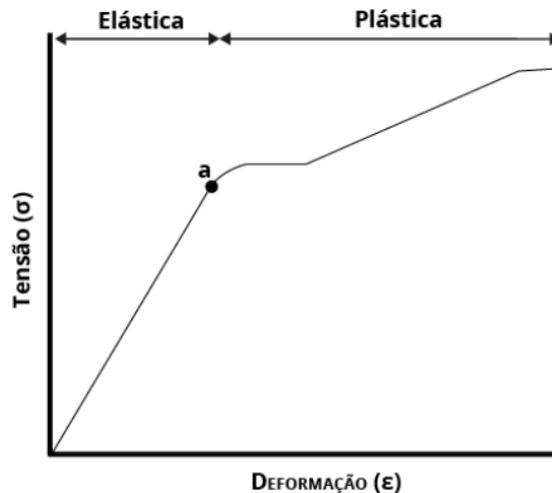
Robert Hooke mostrou que a deformação elástica  $x$  é proporcional a força elástica,  $\vec{F}_{el}$ , até o limite de elasticidade específico do material e provou isso ao determinar a constante elástica ( $k$ ) de uma mola.

Young removeu os fatores geométricos e introduziu uma propriedade do material, o módulo de elasticidade, que define a rigidez de um corpo. Consequentemente, a força aplicada é proporcional a deformação  $x$ :

$$F_{el} = kx, \quad (9)$$

onde a constante elástica de um corpo é representada pela letra “ $k$ ”, que é um parâmetro físico que quantifica a deformação da mola. A constante elástica da mola está relacionada com a rigidez da mola, ou seja, o quão difícil é alongar ou comprimir uma mola. Quanto maior o valor de  $k$ , mais rígida é a mola, ou seja, maior é a força exercida pela mola para um dado deslocamento (HALLIDAY, 2016a, p. 380). A unidade de  $k$  no SI (Sistema Internacional de Unidades) é o newton por metro (N/m).

Figura 3 - Curva de tensão ( $\delta$ ) x deformação ( $\epsilon$ ) e o limite de elasticidade.



Fonte: MENDONÇA, F; 2018.

O protótipo idealizado da lei de Hooke é o de uma massa presa a uma mola (sistema massa-mola). Ao perturbar esse sistema, o mesmo responde com uma força restauradora, isto é, uma força contrária ao deslocamento que a gerou. Essa força também pode ser descrita de forma vetorial, como:

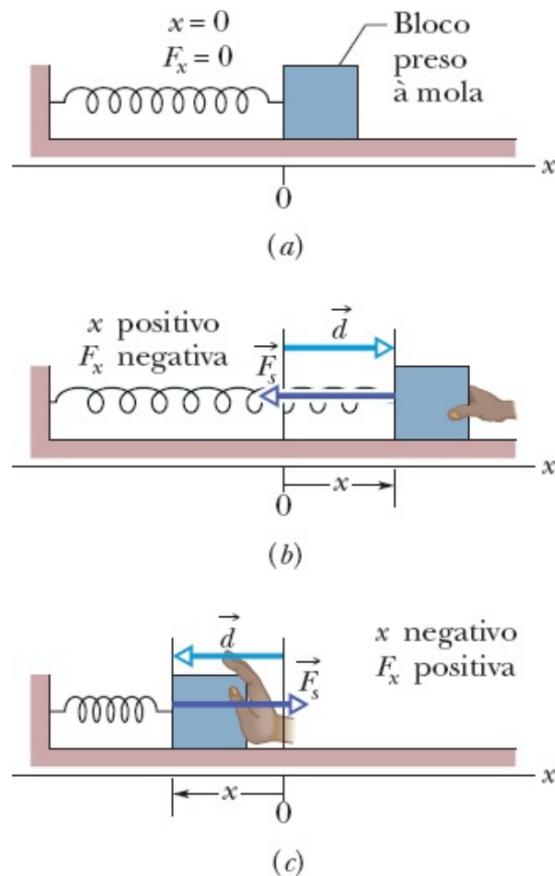
$$\vec{F}_{el} = - k\vec{x} \quad (10)$$

O sinal negativo (-) na equação vetorial indica que a força elástica e a deformação são representadas por vetores com sentidos opostos, ou seja, fato de a força  $\vec{F}$  ser restauradora. O vetor  $\vec{x}$  é o vetor que liga a posição de equilíbrio à posição atual do corpo.

Na Figura 4 apresentamos um sistema massa-mola horizontal. A mola se encontra fixa em uma das extremidades e na outra extremidade se encontra um bloco de massa  $m$ , preso à mola. Na Figura 4 (a), podemos observar que a mola se encontra na posição de equilíbrio ( $x=0$ ), ou seja, não está nem comprimida e nem alongada. Neste caso, a força elástica é igual a zero.

Quando o bloco é puxado para a direita alongando a mola de uma distância  $x = d$  (Figura 4 (b)), temos que a força elástica tenta restaurar a mola para a posição de equilíbrio. Assim, se o bloco é deslocado no sentido de  $x$  positivo, a força elástica atua no sentido contrário ao deslocamento, ou seja, no sentido de  $x$  negativo. Se comprimimos a mola, deslocando o bloco de uma distância  $x = d$  para a esquerda (Figura 4 (c)), a força elástica tenta restaurar a posição de equilíbrio, puxando o bloco para a direita. Logo, se o bloco é deslocado no sentido de  $x$  negativo, a força elástica atua no sentido contrário ao deslocamento, ou seja, no sentido de  $x$  positivo.

Figura 4 - Sistema massa-mola ideal sem atrito na horizontal.



Fonte: Halliday, 2016a.

A equação (10) representa uma equação característica do MHS, ou seja, segundo Halliday (2016b, p. 220): Movimento harmônico simples é o movimento executado por uma partícula sujeita a uma força de módulo proporcional ao deslocamento da partícula e orientada no sentido oposto.

O sistema massa-mola pode ser chamado de oscilador harmônico linear pois

representa a relação linear entre a força elástica e o deslocamento.

A frequência angular do sistema massa-mola é dada por:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (11)$$

E o período do movimento pode ser dado pela equação (3), ou seja:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad (12)$$

Substituindo  $\omega$  da equação (11) na equação (12) e explicitando o período T, temos:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad (13)$$

### 2.1.2 A Energia do Movimento Harmônico Simples.

Sabendo que a força restauradora que atua sobre uma partícula que possui movimento harmônico simples é uma força conservativa. Consideramos o trabalho desta força sobre uma partícula de massa  $m$  no deslocamento de um ponto A de coordenada ( $x_1$ ) até outro ponto B de coordenada  $x_2$ , onde ( $x_2 > x_1$ ), e depois na volta de B até A. O trabalho total realizado pela força é:

$$W = W_{AB} + W_{BA} = 0 \quad (14)$$

$$W = \int_{x_1}^{x_2} (-kx)dx + \int_{x_2}^{x_1} (-kx)dx + \int_{x_1}^{x_2} (-kx)dx - \int_{x_2}^{x_1} (-kx)dx = 0 \quad (15)$$

Desse modo, a energia potencial em um ponto de coordenada  $x$ , associada à força, quando o nível zero é tomado no ponto de coordenada  $x_1$  em que,  $\vec{F} = 0$ , é:

$$U(x) = - \int_{x_1}^{x_2} (-kx)dx = \frac{1}{2}kx^2 - \frac{1}{2}kx_0^2 \quad (16)$$

Se fizermos a origem do sistema de coordenadas cartesianas coincidir com o nível zero de energia potencial, a energia potencial no ponto de coordenada  $x$  fica:

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2 \quad (17)$$

Essa expressão nos dá a energia potencial elástica em função da posição do oscilador. A energia potencial elástica também pode ser expressa em função do tempo, com a equação de movimento. Lembrando da equação (2), temos que:

$$x(t) = x_m \cos(\omega t + \varphi) \quad (18)$$

Substituindo a equação (18) na equação (17), temos:

$$U(t) = \frac{1}{2}kx_m^2 \cos^2(\omega t + \varphi) \quad (19)$$

O valor máximo da energia potencial elástica é:

$$U(t)_{\text{máx}} = \frac{1}{2}kx_m^2, \quad (20)$$

e ocorre quando a partícula está em seu deslocamento máximo.

A energia cinética é escrita como:

$$K(t) = \frac{1}{2}mv^2 \quad (21)$$

Substituindo a velocidade na equação (21) pela equação (5), temos que:

$$K(t) = \frac{1}{2}m\omega^2 x_m^2 \sin^2(\omega t + \varphi) \quad (22)$$

Da relação entre  $m$ ,  $k$  e  $\omega$  da equação (11), podemos escrever a energia cinética em termos da constante  $k$ :

$$K(t) = \frac{1}{2}kx_m^2 \sin^2(\omega t + \varphi) \quad (23)$$

O valor máximo da energia cinética é:

$$K(t)_{\text{máx}} = \frac{1}{2}kx_m^2 \quad (24)$$

e ocorre quando a partícula está em sua posição de equilíbrio, ou seja,  $x = 0$ .

O valor mínimo da energia cinética é zero. Então, durante o movimento, a energia cinética varia entre esses dois valores.

A energia mecânica total do oscilador é, então:

$$E(t) = K(t) + U(t) = \frac{1}{2}kx_m^2 \sin^2(\omega t + \varphi) + \frac{1}{2}kx_m^2 \cos^2(\omega t + \varphi) \quad (25)$$

$$E(t) = K(t) + U(t) = \frac{1}{2}kx_m^2 [\sin^2(\omega t + \varphi) + \cos^2(\omega t + \varphi)] \quad (26)$$

Temos que:

$$\sin^2(\omega t + \varphi) + \cos^2(\omega t + \varphi) = 1 \quad (27)$$

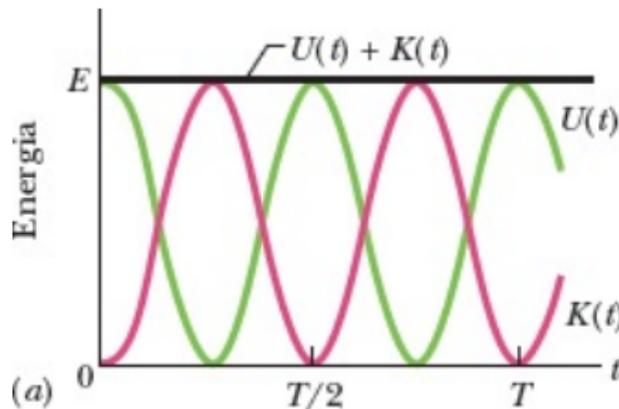
Dessa forma, a energia mecânica total será dada por:

$$E = \frac{1}{2}kx_m^2 \quad (28)$$

A energia total é proporcional ao quadrado da amplitude do movimento. Não havendo forças dissipativas atuando sobre a partícula, sua energia mecânica total ( $E$ ) se conserva. Analisando a equação (28) temos que um sistema oscilatório normalmente contém um elemento de elasticidade e um elemento de inércia: o primeiro armazena energia potencial e o segundo armazena energia cinética (HALLIDAY, 2016b, p. 226).

A Figura 5 apresenta o gráfico da energia cinética, da energia potencial elástica e da energia mecânica total em função do tempo. Podemos ver que à medida que o tempo passa, as energias cinética e potencial vão se transferindo de uma forma para outra. Porém, a energia total é constante e igual aos valores máximos das energias potencial e cinética.

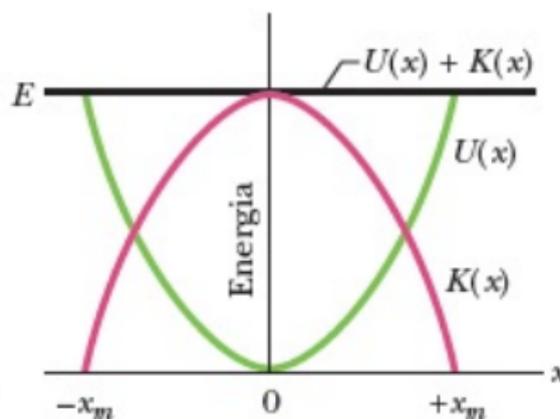
Figura 5 - As energias potencial, cinética e mecânica total em função do tempo.



Fonte: Halliday, 2016b.

A Figura 6 mostra os gráficos da energia cinética, da energia potencial e da energia total em função do deslocamento  $x$  da partícula. Para as duas primeiras, as curvas são parábolas, com máximos em  $x = 0$  para a energia cinética e com valor zero neste ponto para a energia potencial (lembre-se que o nível de energia potencial é tomado em  $x = 0$ ). Em  $+x_m$  e  $-x_m$ , temos que a energia cinética é zero e a energia potencial é máxima. A energia total é constante.

Figura 6 - As energias potencial, cinética e mecânica total em função do deslocamento.



Fonte: Halliday, 2016b.

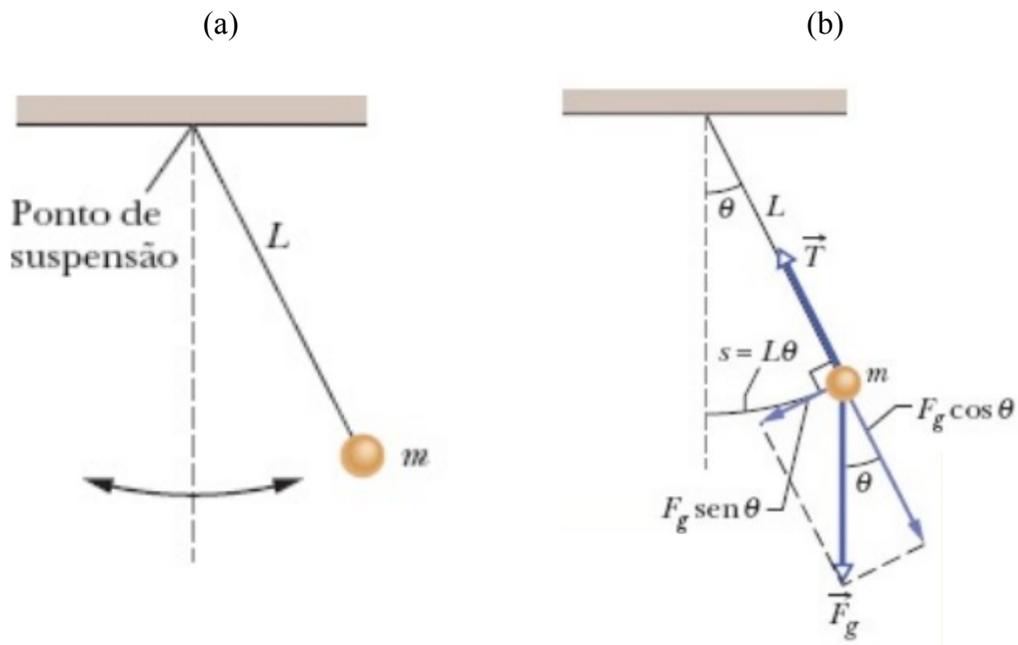
### 2.1.3 Pêndulo Simples.

O exemplo mais elementar de pêndulo é o chamado pêndulo simples que consiste em uma massa  $m$  pendurada em uma das extremidades de um fio de comprimento  $L$  enquanto a outra extremidade está localizada em ponto fixo, conforme mostrado na Figura 7 (a).

Para determinar o movimento da massa  $m$  em torno do ponto fixo, decompomos as forças que atuam sobre ela conforme mostrado na Figura 7 (b). Temos a força gravitacional  $\vec{F}_g$  atuando na direção vertical e a força de tração no fio  $\vec{T}$  atuando ao longo do fio. As componentes da força gravitacional são  $F_g \cos \theta$  e  $F_g \sin \theta$ .

A força de tração no fio é equilibrada pela componente da força gravitacional  $F_g \cos \theta$  enquanto que a componente perpendicular da força gravitacional ( $F_g \sin \theta$ ) ao fio produz um torque igual a  $F_g L \sin \theta$ , que será negativo, devido ao torque produzir um movimento no sentido horário, que por convenção é negativo.

Figura 7 - (a) Um pêndulo simples. (b) As forças que agem sobre o pêndulo são a força gravitacional  $\vec{F}_g$  e a força de tração no fio  $\vec{T}$ . A componente tangencial da força gravitacional  $F_g \sin \theta$  é a força restauradora que tende a levar o pêndulo de volta para a posição central.



Fonte: Halliday, 2016b.

Seja  $s$ , o comprimento do arco descrito, medido a partir do ponto mais baixo da

trajetória. A relação entre o comprimento do arco e o ângulo  $\theta$  é:

$$s = L\theta \quad (29)$$

A componente tangencial da aceleração do corpo oscilante é  $\frac{d^2s}{dt^2}$ .

A componente tangencial da Segunda Lei de Newton é:

$$\sum F_t = -F_g \text{sen } \theta = m \frac{d^2s}{dt^2} \quad (30)$$

Onde  $F_g = mg$ , assim:

$$\sum F_t = -mg \text{sen } \theta = m \frac{d^2s}{dt^2} \quad (31)$$

Simplificando as massas, temos:

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -g \text{sen } \theta \quad (32)$$

Esta componente tangencial é a força de restauração, porque sempre age em oposição ao deslocamento da partícula, de forma a trazê-la de volta à posição de equilíbrio. O sinal negativo indica que a força age em oposição ao deslocamento.

E a componente radial do movimento é :

$$\sum F_r = T - F_g \cos \theta = F_c \quad (33)$$

Para pequenas oscilações  $\theta \leq 12^\circ$ , e  $\theta$  expresso em radianos, temos que  $s$  é muito menor que  $L$  e o ângulo  $\theta = \frac{s}{L}$ , é pequeno. Podemos aproximar  $\text{sen } \theta$  por  $\theta$ . A componente tangencial do movimento do pêndulo pode ser considerada um MHS, porque com  $\theta$  pequeno, temos que  $\text{sen } \theta \cong \text{tg } \theta \cong \theta$  e  $\text{tg } \theta = \frac{CO}{CA}$ . Então a componente tangencial da equação (32) fica:

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -g\theta \quad (34)$$

Como  $\theta = \frac{s}{L}$ , temos que:

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -\frac{g}{L}s \quad (35)$$

Podemos escrevê-la como:

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -\omega^2 s \quad (36)$$

Onde:

$$\omega^2 = \frac{g}{L}, \quad (37)$$

que corresponde a frequência angular do pêndulo simples. Da equação (12), temos que o período de oscilação é:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (38)$$

Substituindo  $\omega$  da equação (37) na equação (38), temos que o período para o pêndulo simples (para pequenas oscilações) é:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{L}}} \quad (39)$$

Logo, o período de oscilação de um pêndulo simples pode ser escrito como:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \quad (40)$$

Dessa forma, temos que o período de oscilação do pêndulo simples depende do comprimento do fio, ou seja, quanto maior o comprimento do fio, maior é o período de oscilação. Além disso, não existe dependência com a massa presa ao fio do pêndulo. Logo, podemos usar um pêndulo simples para medir a aceleração da gravidade local.

### 3 METODOLOGIA

Como um dos objetivos desse projeto é que os experimentos confeccionados sejam de baixo custo, e do nosso cotidiano, serão utilizados apenas materiais simples e de fácil acesso. Todos os gráficos utilizados nos experimentos foram construídos com o Microsoft Excel.

#### 3.1 Experimento I - Pêndulo Simples

Para o Experimento I, utilizamos como materiais de baixo custo:

- suportes de madeira;
- objeto de massa  $m$  de formato esférico;
- fio de malha de comprimento  $L$  ( $L = 20$  cm,  $40$  cm e  $60$  cm) de massa desprezível;
- um cronômetro;
- um transferidor de plástico.

Para a execução do experimento, iremos variar o comprimento do fio e calcular o período  $T$  de oscilação do pêndulo para três comprimentos. Para cada comprimento de fio, faremos dez medidas do período de oscilação  $T_{méd}$  e em seguida, a média aritmética dada por:

$$T_{méd} = \frac{\sum_{i=1}^{N=10} T_i}{10} \quad (41)$$

Calculamos também, o desvio padrão da média dos valores dos períodos pela equação:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (T_i - T)^2}{n-1}}, \quad (42)$$

onde  $n = 10$  e expressamos o resultado como  $T = T_{méd} \pm \sigma$ .

A partir dos valores de  $L$  e  $T_{méd}$  para cada comprimento do fio, construímos o gráfico de  $L(m) \times T_{méd} (s)$  para verificar a relação do comprimento com o período de oscilação.

Conforme a equação (40), temos que o período de oscilação de um pêndulo simples é:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \quad (43)$$

Se elevarmos a equação (43) ao quadrado, temos que:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{g}L \quad (44)$$

Podemos fazer a aproximação de:

$$y = ax \quad (45)$$

Onde  $y = T^2$ ,  $x = L$  e:

$$a = \frac{4\pi^2}{g} \quad (46)$$

Dessa forma, se construirmos um gráfico de  $L(m)$  x  $T_{méd}(s)$  utilizando os valores que obtivemos das medidas, o valor de  $a$  será o coeficiente angular do gráfico. Com o valor do coeficiente angular do gráfico encontraremos o valor da aceleração da gravidade  $g$  local através da equação (46).

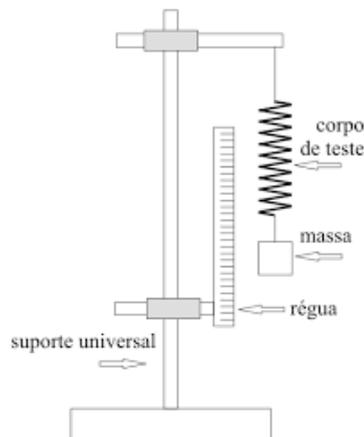
### 3.2 Experimento II - Lei de Hooke.

No segundo experimento, calculamos a constante elástica  $k$  da mola utilizando como materiais:

- duas molas (a primeira é de caderno e a segunda foi encontrado em uma oficina) ;
- um copo plástico;
- bolas de gude de massas conhecidas;
- suporte de madeira;
- régua;
- um gancho (tipo anzol de pesca).

O aparato experimental do sistema massa-mola vertical construído é similar ao da Figura 8, porém na extremidade livre da mola é colocado um gancho que prende um copo plástico, onde as bolas de gude são colocadas.

Figura 8 - Aparato experimental similar ao construído para o experimento da Lei de Hooke.



Fonte: TOGINHO FILHO, D. O.; ZAPPAROLI, F. V. D.; PANTOJA, J. C. S., 2012.

No caso das duas molas, fomos variando as massas das bolas de gude dentro do copo plástico e medindo os valores do comprimento  $L$  de cada mola. Com os valores de  $L$ , obtivemos o deslocamento  $X$  através da equação:

$$X = L - L_o, \quad (47)$$

onde  $L_o$  é o comprimento inicial da mola na posição de equilíbrio, ou seja, quando  $L = 0$ .

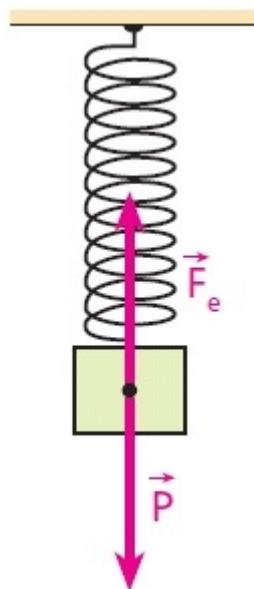
Com os valores conhecidos das massas das bolas de gude, calculamos a intensidade da força peso,  $P$ , através da equação:

$$P = mg \quad (48)$$

Utilizamos o valor de  $g = 9,80 \text{ m/s}^2$  (HALLIDAY, 2016a) para a aceleração da gravidade.

No equilíbrio do sistema massa-mola vertical, temos que a força resultante ( $F_{RES}$ ) é nula, pois o sistema está em repouso em relação ao referencial que adotamos. As forças que atuam no sistema são a força peso ( $P$ ) na direção vertical para baixo e a força elástica na direção vertical para cima ( $F_e$ ), conforme mostra a Figura 9.

Figura 9 - Forças que atuam no sistema massa-mola vertical.



Fonte: BISCUOLA, G. J.; BÔAS, N. V.; DOCA, R. H., 2021.

No equilíbrio, temos que:

$$F_{RES} = 0 \quad (49)$$

$$F_e - P = 0 \quad (50)$$

$$P = F_e \quad (51)$$

A intensidade da força elástica é dada por  $F_e = kX$ , onde  $k$  é a constante elástica da mola e  $X$  é o deslocamento. Assim:

$$P = kX \quad (52)$$

Podemos fazer a aproximação de:

$$y = ax \quad (53)$$

Onde  $y = P$ ,  $x = X$  e:

$$a = k \quad (54)$$

Assim, com os valores do deslocamento  $X$  e da força peso, construímos o gráfico de  $P(N)$  *x*  $X(m)$  e através do coeficiente angular do gráfico encontramos o valor da constante elástica de cada mola.

## 4 APRESENTAÇÃO DA PESQUISA E ANÁLISE DOS RESULTADOS

### 4.1 Experimento do pêndulo simples.

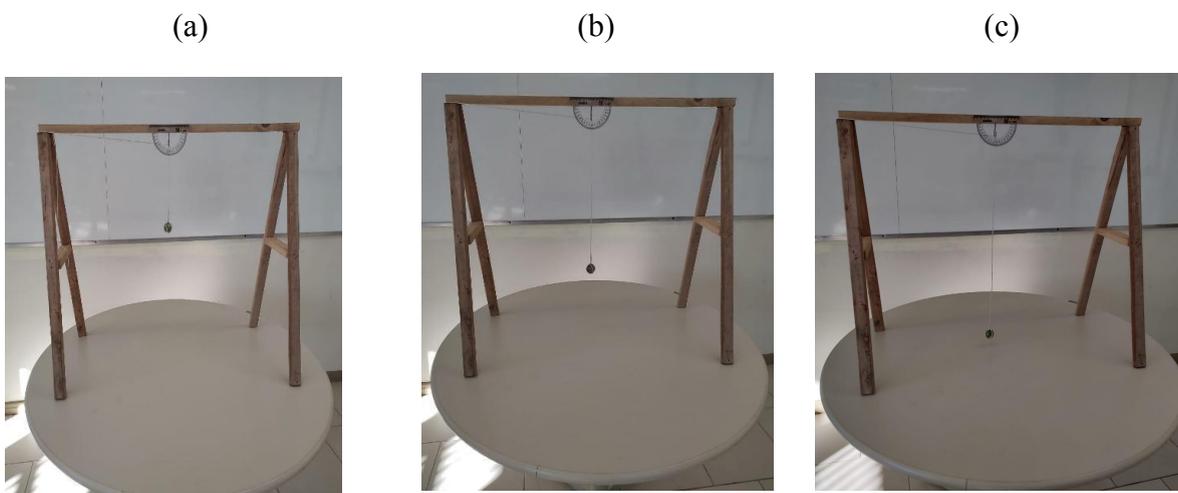
De acordo com o que foi citado anteriormente, esse experimento tem como objetivo a determinação da aceleração gravitacional local,  $g$ .

Com essa meta traçada, montou-se o aparato experimental constituído de uma pequena bola de gude de massa  $m$  presa em um fio (supostamente inextensível) de comprimento  $L$ . O fio foi preso em uma base no formato de cavalete, onde foi colocado um transferidor para ter maior precisão nas medidas e fazendo com que o ângulo não fosse maior do que  $10^\circ$ , em relação à posição de equilíbrio.

Foram utilizados três comprimentos de fio, sendo,  $L_1 = 0,20$  m (20 cm),  $L_2 = 0,40$  m (40 cm) e  $L_3 = 0,60$  m (60 cm). Cabe destacar que quanto maior for o fio, mais confiáveis serão os dados obtidos. Essa confiabilidade se deve ao fato de que um fio de maior comprimento aumenta o período de oscilação (facilitando a medida do mesmo), além de possibilitar que utilizemos desvios bem “pequenos” da posição de equilíbrio, melhorando muito a aproximação de  $\text{sen}\theta \approx \theta$ .

Neste experimento não é necessário conhecer a massa da bola de gude, basta apenas garantir que os efeitos do ar serão desprezíveis, testando o tipo de bola de gude que será utilizada. O aparato experimental usado está apresentado na Figura 10.

Figura 10 - Aparato experimental utilizado com os três comprimentos  $L$  que foram utilizados: (a)  $L_1 = 0,20$  m, (b)  $L_2 = 0,40$  m e (c)  $L_3 = 0,60$  m.



Fonte: Autor, 2022.

Com o experimento completamente montado, o pêndulo foi levemente deslocado de sua posição de equilíbrio em  $10^\circ$ , de modo a obtermos um pequeno ângulo de deslocamento, e colocado para oscilar. Com o auxílio de um cronômetro foi medido o tempo de 10 oscilações para cada comprimento. Em seguida, este tempo foi dividido por dez para termos o valor do período de somente uma oscilação. Este procedimento foi repetido dez vezes.

Na Tabela 1, apresentamos os valores obtidos para os períodos de oscilação quando  $L_1 = 20$  cm. O período médio de oscilação foi de  $T_{\text{méd}} = 0,9296$  s. Calculamos a dispersão da média dos valores dos períodos utilizando a equação (42) e encontramos o valor de 0,010 que mostra que as nossas medidas estão próximas do valor médio encontrado para o período de oscilação (não ocorreu amplitudes grandes nos valores dos períodos).

Tabela 1 - Valores obtidos para os dez períodos de oscilação medidos e a média para  $L_1 = 20$  cm.

Medidas	T (s)
1	0,947
2	0,916
3	0,919
4	0,936
5	0,937
6	0,923
7	0,929
8	0,931
9	0,918
10	0,940
$T_{\text{méd}}$	0,9296
$T_{\text{méd}} \pm \sigma$	$0,93 \pm 0,01$

Fonte: Autor, 2022.

Na Tabela 2, apresentamos os valores obtidos para os períodos de oscilação quando  $L_2 = 40$  cm. O período médio de oscilação foi de  $T_{\text{méd}} = 1,2824$  s. Calculamos a dispersão da média dos valores dos períodos utilizando a equação (42) e encontramos o valor de 0,008

onde, não ocorreu amplitudes grandes nos valores dos períodos medidos.

Tabela 2 - Valores obtidos para os dez períodos de oscilação medidos e a média para  $L_2 = 40$  cm.

Medidas	T (s)
1	1,267
2	1,285
3	1,279
4	1,289
5	1,278
6	1,296
7	1,282
8	1,276
9	1,282
10	1,290
$T_{\text{méd}}$	1,282
$T_{\text{méd}} \pm \sigma$	$1,28 \pm 0,01$

Fonte: Autor, 2022.

Na Tabela 3, apresentamos os valores obtidos para os períodos de oscilação quando  $L_3 = 60$  cm. O período médio de oscilação foi de  $T_{\text{méd}} = 1,568$  s. Calculamos a dispersão da média dos valores dos períodos utilizando a equação (42) e encontramos o valor de 0,017. Este é o maior valor de dispersão encontrado para as medidas dos períodos, mas, ainda assim, é um valor pequeno mostrando que não ocorreram grandes variações nas medidas individuais dos períodos em comparação com o valor médio.

Na Tabela 4 apresentamos um resumo dos valores obtidos nas medidas dos períodos médios em relação aos comprimentos do fio. Podemos perceber que quando o comprimento do fio aumenta, o período de oscilação aumenta também. Essa relação era de se esperar, pois

na equação do período de oscilação de um pêndulo simples existe uma dependência entre o período e o comprimento.

Tabela 3 - Valores obtidos para os dez períodos de oscilação medidos e a média para  $L_3 = 60$  cm.

Medidas	T (s)
1	1,561
2	1,586
3	1,569
4	1,590
5	1,565
6	1,545
7	1,553
8	1,548
9	1,595
10	1,565
$T_{\text{méd}}$	1,567
$T_{\text{méd}} \pm \sigma$	$1,57 \pm 0,02$

Fonte: Autor, 2022.

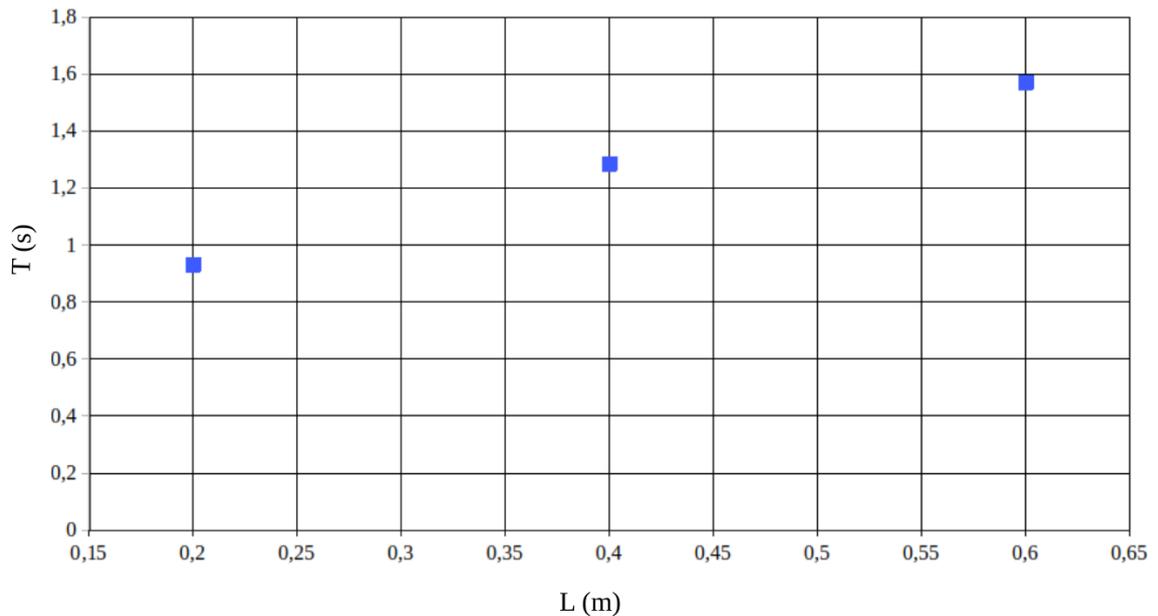
Tabela 4 - Valores obtidos para os períodos de oscilação médio em relação aos comprimentos do fio.

L (m)	$T_{\text{méd}} \pm \sigma$
0,20	$0,930 \pm 0,010$
0,40	$1,282 \pm 0,008$
0,60	$1,568 \pm 0,017$

Fonte: Autor, 2022.

Com os valores da Tabela 4, construímos o gráfico de  $L(m) \times T_{méd}(s)$  para analisar a dependência do período de oscilação com o comprimento do fio. A Figura 11 apresenta o gráfico de  $L(m) \times T_{méd}(s)$ . Podemos observar que à medida que o comprimento do fio  $L$  aumenta, o período de oscilação aumenta também, de acordo com a equação (40).

Figura 11 - Gráfico de  $L(m) \times T_{méd}(s)$ .



Fonte: Autor, 2022.

De acordo com a equação (44), temos que:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{g}L \quad (55)$$

Dessa forma, temos que construir o gráfico de  $L(m) \times (T_{méd}(s))^2$  e os valores estão resumidos na Tabela 5.

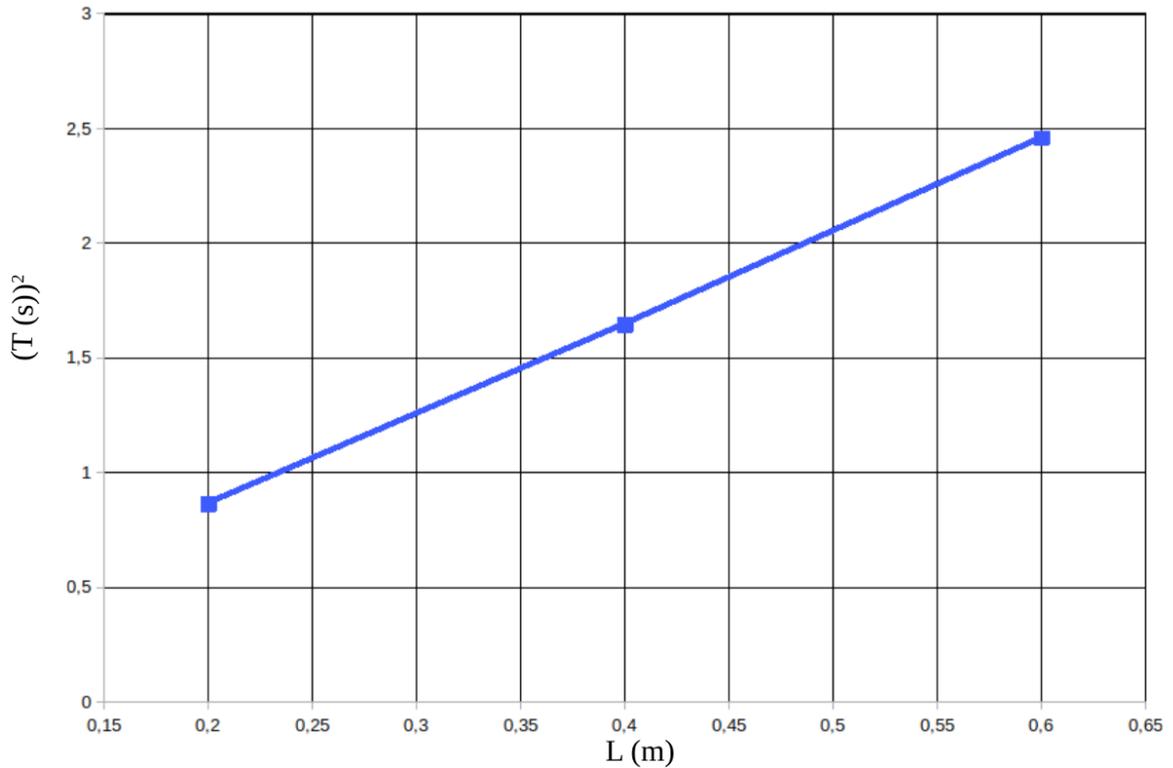
Tabela 5 - Valores obtidos para os períodos de oscilação médio ao quadrado em relação aos comprimentos do fio.

L (m)	$(T_{méd}(s))^2$
0,20	0,864
0,40	1,645
0,60	2,458

Fonte: Autor, 2022.

A Figura 12 apresenta o gráfico de  $L(m)$  x  $(T_{méd}(s))^2$ . Podemos observar que à medida que o comprimento do fio  $L$  aumenta, o período de oscilação aumenta também, de acordo com a equação (40).

Figura 12 - Gráfico de  $L(m)$  x  $(T_{méd}(s))^2$ .



Fonte: Autor, 2022.

O coeficiente angular da reta do ajuste linear dos pontos será dado por:

$$tg\alpha = a = \frac{\Delta T^2}{\Delta L} \quad (56)$$

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad (57)$$

$$a = \frac{2,458 - 0,864}{0,60 - 0,20} \quad (58)$$

$$a = \frac{1,613}{0,40} \quad (59)$$

$$a = 4,03s^2/m \quad (60)$$

Agora calculamos o valor de  $g$ , substituindo o valor de  $a$  encontrado na equação acima na equação (46), ou seja:

$$a = \frac{4\pi^2}{g} \quad (61)$$

$$4,03 = \frac{4\pi^2}{g} \quad (62)$$

$$g = 9,79 \frac{m}{s^2} \quad (63)$$

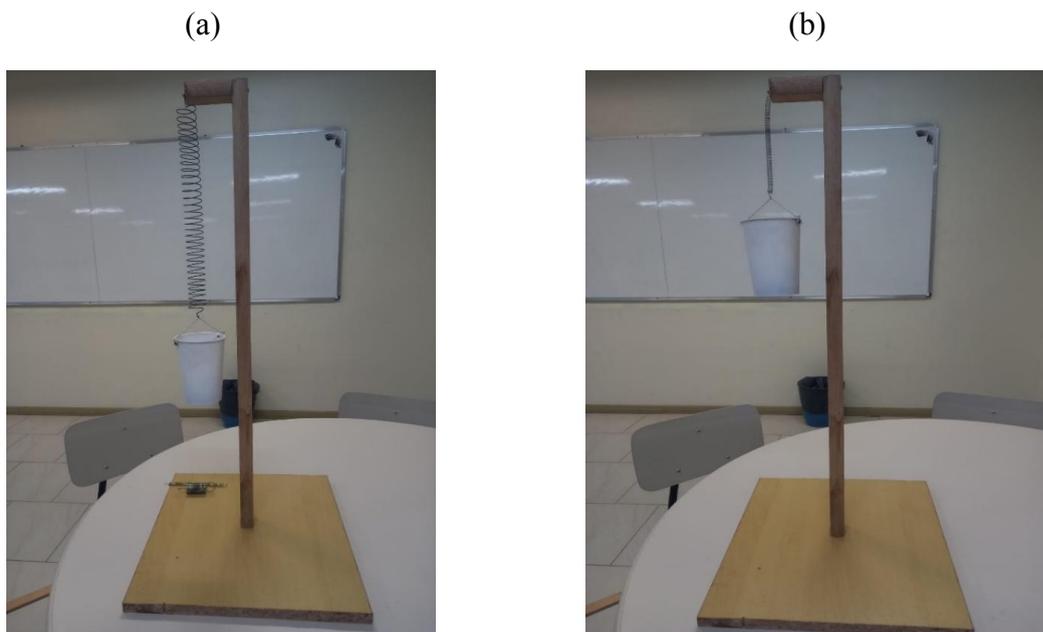
Comparando este valor com o valor da aceleração da gravidade que se encontra na literatura no valor de  $g = 9,80 \text{ m/s}^2$  (HALLIDAY, 2016), temos que a diferença entre os valores de gravidade é 0,01. Desse modo, temos que o experimento do pêndulo simples fornece um valor de aceleração da gravidade que é próximo do valor médio utilizado na literatura para objetos que se encontram na superfície da Terra.

O valor da aceleração da gravidade não é constante, dependendo da latitude e da altura acima do nível do mar. Como o planeta não é uma esfera perfeita, nos pólos, o valor de  $g$  atinge o seu valor mais alto (em torno de  $9,83 \text{ m/s}^2$ ) e, no Equador, o mais baixo ( $9,78 \text{ m/s}^2$ ) (HALLIDAY, 2016, p. 97).

#### 4.1 Experimento da Lei de Hooke.

O aparato experimental construído para a realização do experimento II está apresentado na Figura 13.

Figura 13 - Aparato experimental construído para o experimento II: (a) utilizando uma mola menos rígida e (b) utilizando uma mola mais rígida.



Na Figura 13 (a) o experimento foi realizado utilizando uma mola com uma rigidez menor do que a mola utilizada para o experimento da Figura 13 (b). Após montarmos o aparato experimental de forma que a mola pudesse ficar na posição vertical, enquanto que na extremidade inferior foi colocado um suporte em formato de gancho para segurar o copo de plástico onde iria ser inserido as bolinhas de gude.

Inicialmente, medimos o comprimento da mola na posição de equilíbrio, ou seja, em seu estado natural. Encontramos o valor de  $L_{o1} = 27,6$  cm. Em seguida, fomos adicionando as bolinhas de gude, de duas em duas, que somadas possuíam uma massa de 25 g (a bola menor tinha uma massa de 5 g e a bola maior tinha uma massa de 20 g). Logo, colocamos primeiro 25 g, depois 50 g, 75 g, 100 g e 125 g. Para cada valor de massa, medimos o valor de L, ou seja, o comprimento que a mola se alongava. Com o valor de L, calculamos o deslocamento X da mola fazendo  $X = L - L_o$ . Os valores obtidos estão resumidos na Tabela 6.

Tabela 6 - Valores obtidos de L (cm) e  $X = L - L_o$  para a primeira mola.

m (g)	25	50	75	100	125
L (cm)	30,0	31,0	32,4	34,0	35,8
$X = L - L_o$ (cm)	2,4	3,4	4,8	6,4	8,2

Fonte: Autor, 2022.

Com os valores das massas em quilogramas (kg), calculamos a força peso (P) utilizando a equação (48) e o valor de  $g = 9,80$  m/s<sup>2</sup>, para cada uma das massas. Os valores obtidos estão na Tabela 7.

Tabela 7 - Valores obtidos para a massa, a força peso e o deslocamento da primeira mola.

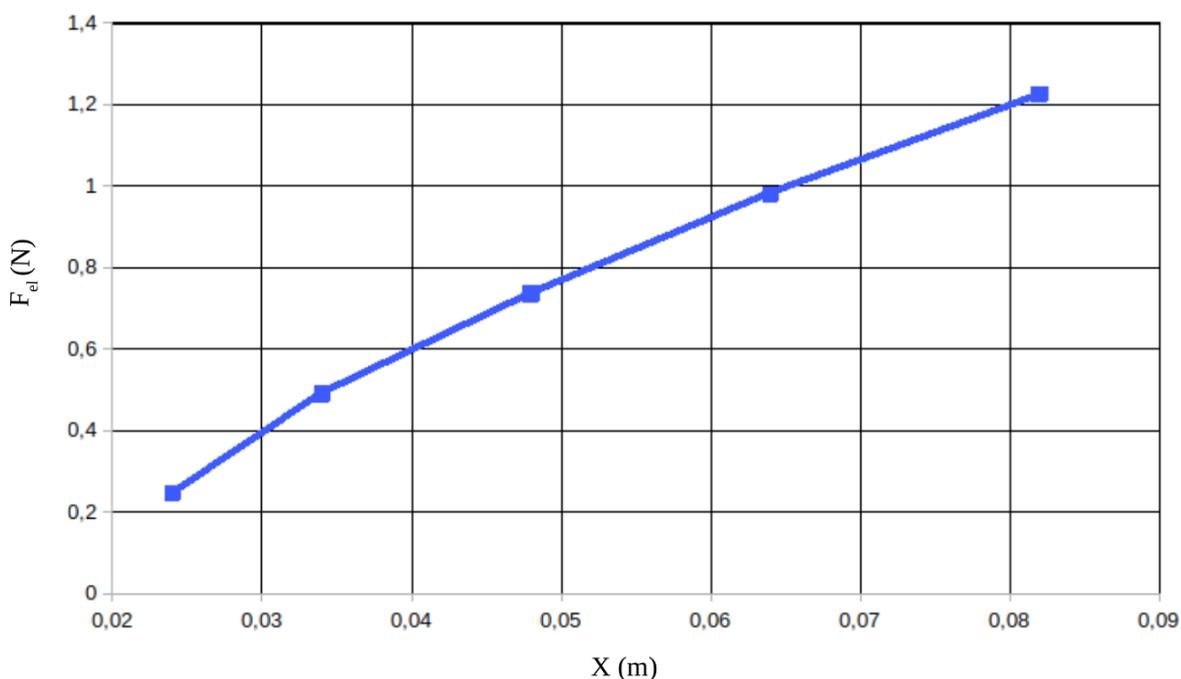
m (kg)	$P = F_{el}$ (N)	X (m)
0,025	0,245	0,024
0,050	0,490	0,034
0,075	0,735	0,048
0,100	0,980	0,064
0,125	1,225	0,082

Fonte: Autor, 2022.

Como a força peso é igual a força elástica (no equilíbrio), construímos o gráfico de  $X(m) \times F_{el} (N)$  e com o ajuste linear dos pontos, encontramos o coeficiente angular da reta. A Figura 14 apresenta o gráfico.

O coeficiente angular da reta (três últimos pontos) forneceu o valor de 14,41 N/m para a constante elástica  $k$  da primeira mola.

Figura 14 - Gráfico de  $X (m) \times F_{el} (N)$  para a primeira mola.



Fonte: Autor, 2022.

Para a segunda mola, medimos o comprimento inicial como sendo de  $L_{o2} = 13,7$  cm. Como essa mola é mais rígida, aumentamos as massas a serem adicionadas para podermos observar a deformação da mola. Adicionamos uma bola grande (20 g) e cinco bolas pequenas de 5 g, cada uma. Logo, colocamos primeiro 45 g, depois 90 g, 135 g, 180 g e 225 g. Para cada valor de massa, medimos o valor de  $L$ , ou seja, o comprimento que a mola se alongava. Com o valor de  $L$ , calculamos o deslocamento  $X$  da mola fazendo  $X = L - L_o$ . Os valores obtidos estão resumidos na Tabela 8.

Podemos comparar os valores da deformação  $X$  da Tabela 8 com os da Tabela 6. Como a segunda mola é mais rígida, ela apresenta mais resistência à deformação e, devido a isso, os valores de  $X$  são menores para a segunda mola.

Com os valores das massas em quilogramas (kg), calculamos a força peso (P) e os valores obtidos estão na Tabela 9.

Tabela 8 - Valores obtidos de L (cm) e  $X = L - L_0$  para a segunda mola.

m (g)	45	90	135	180	225
L (cm)	14	14,6	14,8	15,1	15,3
$X = L - L_0$ (cm)	0,3	0,8	1,1	1,4	1,6

Fonte: Autor, 2022.

Tabela 9 - Valores obtidos para a massa, a força peso e o deslocamento da segunda mola.

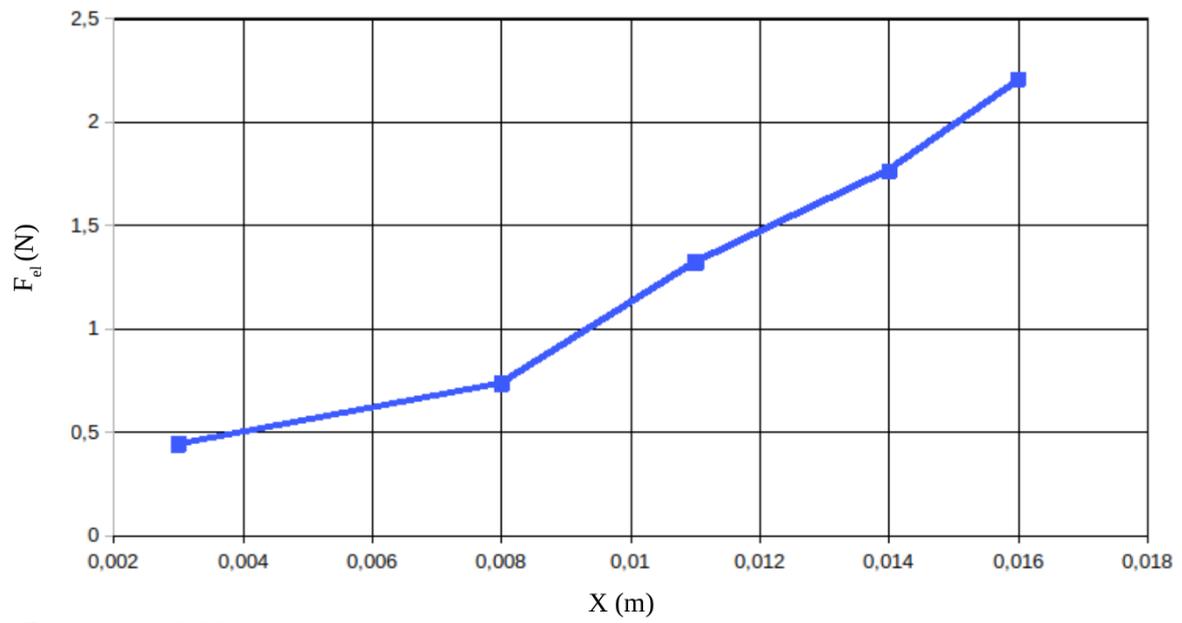
m (kg)	$P = F_{el}$ (N)	X (m)
0,045	0,441	0,003
0,090	0,735	0,008
0,135	1,323	0,011
0,180	1,764	0,014
0,225	2,205	0,016

Fonte: Autor, 2022.

Construímos o gráfico de  $X(m) \times F_{el} (N)$  e com o ajuste linear dos pontos, encontramos o coeficiente angular da reta. A Figura 15 apresenta o gráfico. O coeficiente angular da reta (três últimos pontos) forneceu o valor de 176,40 N/m para a constante elástica k da segunda mola.

Como a segunda mola era mais rígida do que a primeira mola, era esperado encontrar um valor de constante elástica desta mola bem mais alto do que da primeira mola. Além disso, podemos observar no gráfico da Figura 15 que a força elástica não está proporcional em todos os pontos do gráfico. Isso deve-se também ao fato de que estava difícil fazer as medidas da deformação da mola em função da sua rigidez.

Figura 15 - Gráfico de  $X$  (m)  $\times$   $F_{el}$  (N) para a segunda mola.



Fonte: Autor, 2022.

## 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O presente Trabalho de Conclusão de TCC teve como objetivo a construção de dois experimentos relacionados a um tipo básico de oscilação, que é o Movimento Harmônico Simples (MHS) para o Laboratório de Matemática e Física da UNIPAMPA, campus de Itaqui, RS.

No primeiro experimento, utilizamos um pêndulo simples (formado por um corpo esférico de massa  $m$ , um fio de comprimento  $L$  e um aparato de madeira para prender o pêndulo) e calculamos o valor da aceleração da gravidade  $g$ . Como resultado, encontramos o valor da aceleração da gravidade de  $g = 9,79 \text{ m/s}^2$ . Comparando este valor com o valor da aceleração da gravidade que se encontra na literatura no valor de  $g = 9,80 \text{ m/s}^2$  (HALLIDAY, 2016), temos que a diferença entre os valores de aceleração gravidade é  $0,01 \text{ m/s}$ . Desse modo, temos que o experimento do pêndulo simples fornece um valor de gravidade que é próximo do valor médio utilizado na literatura para objetos que se encontram na superfície da Terra.

No segundo experimento, calculamos a constante elástica de duas molas diferentes utilizando uma mola, um copo plástico, bolas de gude e um aparato de madeira que prendia a mola. Com a variação das massas dentro do copo plástico determinamos a força peso e medimos a elongação da mola ( $x$ ). Com os valores da força peso e da elongação construímos o gráfico da força pela elongação e determinamos o valor da constante elástica para cada mola. Como resultados, encontramos os valores de constantes elásticas de  $k = 14,41 \text{ N/m}$  para a primeira mola e  $k = 176,40 \text{ N/m}$  para a segunda mola, que estão de acordo com as características das molas, onde a primeira mola que é de caderno é bem menos rígida do que a primeira.

Dessa forma, através dos experimentos, obteve-se resultados satisfatórios, dentro do planejado, através da aplicação das equações do Movimento Harmônico Simples. Somado a isso, os experimentos foram bem aceitos pelos discentes da Universidade Federal do Pampa, principal público-alvo, e que posteriormente irão ter uma experiência marcante e proveitosa com os instrumentos que ficarão disponíveis no laboratório de Matemática e Física da universidade, agregando mais valor e conhecimento no estudo dos componentes curriculares de Física.

## REFERÊNCIAS

- EINSTEIN, Albert. **Como vejo o Mundo**. Tradução de H. P. de Almeida. Editora Nova Fronteira, 2016.
- BISCUOLA, G. J.; BÔAS, N. V.; DOCA, R. H. **Tópicos de Física**, v. 1, 21<sup>a</sup> ed. São Paulo: Saraiva Didático, 2021.
- GASPAR, Alberto. **Compreendendo a Física**, v. 2., 2<sup>a</sup> ed. São Paulo: Ática, 2013.
- HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J. **Fundamentos de Física: Mecânica**, v 1, 10<sup>a</sup> ed. LTC: Rio de Janeiro, 2016a.
- HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J. **Fundamentos de Física: Gravitação, Ondas e Termodinâmica**, v 2, 10<sup>a</sup> ed. LTC: Rio de Janeiro, 2016b.
- HAWKING, Stephen. **Breves Respostas para Grandes Questões**. Tradução Cássio de Arantes Leite. Editora Intrínseca, 2018.
- MENDONÇA, F. Lei de Hooke: um ensaio fundamental para compreender a resistência dos materiais (RESMAT). Revista Manutenção, 2018. Disponível em: <https://www.revistamanutencao.com.br/literatura/cientifica/engenharia/lei-de-hooke-um-ensai-o-fundamental-para-compreender-a-resistencia-dos-materiais-resmat.html>. Acesso em 28 de julho de 2022.
- TOGINHO FILHO, D. O.; ZAPPAROLI, F. V. D.; PANTOJA, J. C. S. Catálogo de Experimentos do Laboratório Integrado de Física Geral Departamento de Física, Universidade Estadual de Londrina, 2012. Disponível em: <http://www.uel.br/pessoal/inocente/pages/arquivos/12-Lei%20de%20Hooke%20-%20coeficiente%20de%20elasticidade.pdf>. Acesso em 25 de julho de 2022.
- PEREIRA, M. Experimentum. Disponível em: <https://sites.google.com/site/experimentun/2a-lista-de-exercicios---conservacao-de-energia>. Acesso em 25 de julho de 2022.
- SAYÃO, Caic Bernardo. **Proposta Pedagógica**, 2019. Disponível em: <https://cupdf.com/document/proposta-pedag-2019-7-29-a-proposta-pedaggica-do-caic-bernardo-sayo-.html?page=1>. Acesso em 31/05/2022.