

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO PAMPA**

**EUZINERI DE MENEZES CORTELINI**

**RESPOSTA E CONTROLE DAS VIBRAÇÕES DE UMA TORRE EÓLICA USANDO  
MR-TLCD (MAGNETO REOLÓGICO-AMORTECEDOR DE COLUNA LIQUIDA  
SINTONIZADA)**

**Alegrete**

**2014**

**EUZINERI DE MENEZES CORTELINI**

**RESPOSTA E CONTROLE DAS VIBRAÇÕES DE UMA TORRE EÓLICA USANDO  
MR-TLCD (MAGNETO REOLOGICA-AMORTECEDOR DE COLUNA LIQUIDA  
SINTONIZADA)**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação Stricto sensu em Engenharia, da Universidade Federal do Pampa, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Engenharia.

Orientador: Prof. Dr. Jorge Luis Palacios  
Felix

**Alegrete**

**2014**

Ficha catalográfica elaborada automaticamente com os dados fornecidos  
pelo(a) autor(a) através do Módulo de Biblioteca do  
Sistema GURI (Gestão Unificada de Recursos Institucionais) .

C91r PUGLIA, EUZINERI CORTELINI  
RESPOSTA E CONTROLE DAS VIBRAÇÕES DE UMA TORRE EÓLICA  
USANDO MR-TLCD (MAGNETO REOLÓGICO-AMORTECEDOR DE COLUNA  
LIQUIDA SINTONIZADA) / EUZINERI DE MENEZES CORTELINI.  
123 p.

Dissertação (Mestrado)-- Universidade Federal do  
Pampa, MESTRADO EM ENGENHARIAS, 2014.  
"Orientação: JORGE LUIS PALACIOS FELIX".

1. AMORTECEDOR DE COLUNA LIQUIDA SINTONIZADA. 2.  
VIBRAÇÃO. 3. MAGNETO REOLÓGICO. 4. TORRE ELÓLICA. I.  
Título.

**EUZINERI DE MENEZES CORTELINI**

**RESPOSTA E CONTROLE DAS VIBRAÇÕES DE UMA TORRE EÓLICA USANDO  
MR-TLCD (MAGNETO REOLOGICA-AMORTECEDOR DE COLUNA LIQUIDA  
SINTONIZADA)**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação Stricto sensu em Engenharia, da Universidade Federal do Pampa, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Engenharia.

Área de concentração: Tecnologia de Materiais com a linha de pesquisa: Desenvolvimento de materiais para aplicações tecnológicas.

**DISSERTAÇÃO DEFENDIDA E APROVADA EM: 25, AGOSTO DE 2014.**

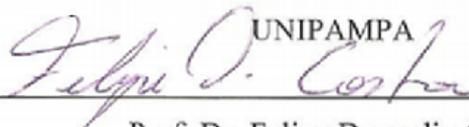
**BANCA EXAMINADORA:**



Prof. Dr. Jorge Luis Palacios Felix

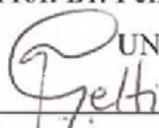
Orientador

UNIPAMPA



Prof. Dr. Felipe Denardin Costa

UNIPAMPA



Prof. Dr. Rosemaira Dalcin Copetti

UFSM

Dedico este trabalho aos meus pais, Luiz Carlos e Ione, e a meu esposo Vicente, em especial pela dedicação e apoio em todos os momentos difíceis.

## AGADECIMENTOS

A Deus, pela vida e pelas melhores oportunidades que ele sempre me reserva.

Aos meus pais, pelo carinho, compreensão e incentivo por minhas escolhas.

Ao meu orientador Dr. Jorge Jorge Luis Palacios Felix e ao Dr. Vicente Bergamini Puglia por me apoiarem e ajudarem a não desviar do foco, pela compreensão, paciência, disponibilidade e estímulo nos momentos difíceis.

Aos professores do curso, pelo apoio, compreensão, dedicação.

Ao casal de amigos Luciana e Luis Eduardo Kostaski.

As amigas que vibram com minhas conquistas, em especiais: Ana Carolina, Bárbara, Denise, Monique, Jacqueline.

A todos que tiveram marcada importância para que esta caminhada fosse possível, registro com imensa gratidão [...].

Ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia, PPEng, pela oportunidade de realização de trabalhos em minha área de pesquisa.

Aos colegas do PPEng pelo seu auxílio nas tarefas desenvolvidas durante o curso e apoio na revisão deste trabalho.

À CAPES pela provisão da bolsa de mestrado.

## RESUMO

As torres eólicas são estruturas esbeltas projetadas para resistir a efeitos dinâmicos da ação do vento. Uma vez excitada, a torre pode entrar em ressonância ocasionando ruptura e falhas em sua estrutura, pás e rotores. Além de evitar possíveis falhas catastróficas, o sistema de amortecimento pode prevenir fadiga prematura de componentes estruturais da torre, entre eles, o gerador e as pás. A presença de amortecimento limita a amplitude de vibração quando o sistema, que sofre vibração forçada, aproxima-se da ressonância.

Dentro desse contexto, foi elaborado um modelo numérico de uma torre eólica que determina a resposta da mesma sob uma excitação forçada. A excitação se deu por meio de um motor de corrente contínua desbalanceado, localizado no topo da torre. A estrutura analisada é composta por uma coluna metálica com um motor elétrico de corrente contínua desbalanceado e acoplado a um amortecedor do tipo MR-TLCD (*Tuned Liquid Column Dampers with magnetorheological*).

Neste trabalho, foi utilizado um amortecedor semiativo, no qual consiste de um tubo em formato de ‘U’ e utiliza o fluido magneto-reológico, onde este impede o movimento de grandes amplitudes sujeito à ação de forças externas. No MR-TLCD é possível diminuir a energia cinética do fluido através da válvula de controle. O Magneto Reológico, quando submetido a um campo magnético, aumenta significativamente a sua viscosidade aparente.

A equação de movimento do sistema acoplado entre a torre, motor elétrico e MR-TLCD foi formulado através das equações de Lagrange.

Nesta dissertação, apresentam-se as respostas dinâmicas regulares e caóticas de uma torre eólica com um amortecedor do tipo MR-TLCD através do método numérico da dinâmica não linear, utilizando-se da série temporal, do retrato de fase, do espectro de Fourier (FFT) e das curvas de ressonância.

Com ensaios experimentais foram obtidos os valores dos parâmetros das configurações físicas e geométricas da estrutura a serem utilizados nas experiências numéricas.

Palavras-chaves: Amortecedor de coluna de líquido- fluido o magneto reológico, Torre eólica, Motor DC.

## ABSTRACT

The wind towers are slender structures designed to handle the dynamic effects of wind action. A once excited, the tower can resonate causing rupture and failures in structure, blades and rotors. Besides preventing possible catastrophic failure the damping system could prevent premature fatigue in structural components of the tower between them the rotor and blades. The presence of damping vibration is limited when the system suffer forced vibration approaches of the resonance.

In this context was developed a numerical model of a wind tower which determines the response of the structure under a forced excitation. The excitation was done by a dc motor unbalanced situated on the top of the tower. The structure consists of a metallic column with an electric unbalanced dc motor attached to a MR-TLCD damper.

This dissertation was presented a Semi-active damper in which consists in U-tube format using magneto rheological fluid (Tuned Liquid Column Dampers with magneto rheological, MR-TLCD). The fluid existing inside the U-tube prevents the movement of large amplitude subject to the actions of external loads. In MR-TLCD is possible to reduce the kinetic energy of the fluid through the control valve. The fluid used in this work, when exposed in a magnetic field significantly increases its apparent viscosity.

The motion equation of coupled system between the tower, electric motor and MR-TLCD was formulated using the Lagrange equations.

This dissertation was presented the regular and chaotic dynamic of a tower using a MR-TLCD damper through the numerical method of nonlinear dynamics, utilizing a time series, phase portrait, Fourier spectrum (FFT) and resonance curves.

The characteristic of experimental model was used for developed the numerical model. Also the free vibration tests were utilized for determine the structural parameters of the system.

Keywords: Magneto-rheological tuned liquid column damper, Wind turbine tower, DC motor.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1- Turbina Eólica de Eixo Horizontal – Parque Eólico de Osório .....	1
Figura 2- Modelagem Física e Geométrica dos Sistemas. a) sem Controle. b) com MR-TLCD .....	2
Figura 3- Matriz Elétrica Brasileira .....	5
Figura 4- Evolução da Capacidade Instalada no Brasil .....	5
Figura 5- À Esquerda, Foto de Moinhos no Verão Siberiano de 1912, (Prokudin-Gorski, 1912). À Direita, Cata-Vento Utilizado para Bombeamento de Água no Brasil e seu Dispositivo de Segurança, Pá à Direita do Rotor. ....	7
Figura 6- Protótipos Americanos, o Aerogerador de Putnam (Carl Wilcox, 1941) e os Aerogeradores MOD 0 (Martin Brown, 1975) e MOD 1 (NASA, 1979). ....	8
Figura 7- a) Aerogerador HAWT e seus Principais Componentes. b) Aerogerador VAWT, por Exemplo, Gerador Darrieus. ....	9
Figura 8- Esquema de Pá de Turbina e sua Interação com o Vento. ....	9
Figura 9- Representação do Movimento de uma Pá de uma Turbina com Controle de Passo. ....	11
Figura 10- Forças de Arrasto e Sustentação. Obs.: É a Força de Sustentação que Faz a Pá Girar e a de Arrasto, Faz a Pá “Frear”. ....	12
Figura 11- Classificação Geral de Movimentos Determinísticos. ....	17
Figura 12- Configuração Modal de uma Coluna em Balanço. ....	18
Figura 13- Fluxograma de Sistema de Amortecimentos e suas Principais Diferenças. ....	19
Figura 14- Interação de um Amortecedor de Coluna Líquido Sintonizado com a Estrutura Pórtico Não Ideal. ....	20
Figura 15- a) Fluido MR na Ausência de um Campo Magnético b) Fluido MR na Presença de um Campo Magnético. ....	22
Figura 16- Interação de um Amortecedor de Coluna Líquido Sintonizado com Válvula de Controle Fluido Magneto Reológico. ....	23
Figura 17- Modelo Operacional do Fluxo de Pressão Orientado .....	23
Figura 18- Representação Esquemática do Circuito do Motor C.C. ....	25
Figura 19- Modelo Geométrico do Sistema sem Controle .....	28
Figura 20- Modelo Representativo do Deslocamento da Estrutura .....	28
Figura 21- Modelo Geométrico do Sistema com Controle. ....	33
Figura 22- Deslocamento do Fluido no Tubo. ....	34
Figura 23- Modelo Geométrico e Físico da Torre. (a) sem Controle (b) com MR-TLCD. ....	39

Figura 24- Modelo Geométrico e Físico da Torre. ....	43
Figura 25- Modelo Geométrico do Sistema com Controle.....	48
Figura 26- Bateria de Alimentação do Motor e a Placa de Controle de Tensão .....	52
Figura 27- Desenho Esquemático da Instalação dos Equipamentos Utilizados nas Medições de Tensão, Corrente e Rotação.....	53
Figura 28- Equipamentos Utilizados para Medir Tensão, Corrente e Rotação.....	54
Figura 29- Curvas de Deslocamento Angular para 3,3V, 6,2V, 9,1V e 11,6V.....	55
Figura 30- Comparação entre as Curvas Teórica Modelo 1 e Experimental.....	57
Figura 31- Comparação entre as Curvas Teórica Modelo 2 e Experimental.....	58
Figura 32- Comparação entre as Curvas Teórica Modelo 3 e Experimental.....	59
Figura 33- Comparação do Modelo 3 e os Dados Experimentais para uma Corrente de 3,3A	60
Figura 34- Comparação do Modelo 3 e os Dados Experimentais para uma Corrente de 9,1A	60
Figura 35- Resposta de um Sistema em Vibração Livre Amortecido .....	62
Figura 36- Modelo Experimental com as Posições dos <i>Strain Gauge</i> .....	64
Figura 37- Sistema de Aquisição e Gravação dos Dados Experimentais.....	65
Figura 38- Representação Esquemática .....	65
Figura 39- TLCD Acoplado a Estrutura. ....	66
Figura 40- Vibração Livre Amortecida do Sistema .....	68
Figura 41- Espectro de Frequência .....	69
Figura 42- Vibração da Estrutura- Strain Gauge 1.....	70
Figura 43- Vibração da Estrutura- Strain Gauge 2.....	70
Figura 44- Vibração da Estrutura com TLCD- Strain Gauge 1. ....	71
Figura 45- Vibração da Estrutura com TLCD- Strain Gauge 2. ....	71
Figura 46- Diferença entre as Máximas e Mínimas Deformações.....	72
Figura 47- Comparação do Sistema sem Amortecedor e com o TLCD. Strain Gauge 1. ....	72
Figura 48- Comparação do Sistema sem Amortecedor e com o TLCD. Strain Gauge 2. ....	73
Figura 49- Comparação do Sistema sem Amortecedor e com o TLCD. Strain Gauge 2. ....	73
Figura 50- Amplitudes de Oscilação $x$ Tempo. Strain Gauge 1.....	74
Figura 51- Amplitudes de Oscilação $x$ Tempo. Strain Gauge 2.....	74
Figura 52- Amplitudes de Oscilação $x$ Tempo. Strain Gauge 1.....	75
Figura 53- Amplitudes de Oscilação $x$ Tempo. Strain Gauge 2.....	75
Figura 54- Modelo Geométrico e Físico da Torre. (a) Sem Controle (b) Com MR-TLCD .....	77
Figura 55- Gráfico de Ressonância Torre de 2 a 12V .....	79

Figura 56- Gráfico de Ressonância Torre de 8 a 10V .....	79
Figura 57- Gráfico de Ressonância Torre de 10 a 11V .....	80
Figura 58- Gráfico de Diferença Entre Máxima e Mínima Amplitude do Motor de 2 a 12V..	80
Figura 59 - Série Temporal do Motor. ....	81
Figura 60- Detalhe no Intervalo de Tempo na Série Temporal, Figura 59. ....	81
Figura 61- Retrato de Fase da Torre com Amortecedor e sem Amortecedor. ....	82
Figura 62- Série Temporal da Torre. ....	82
Figura 63- Detalhe no Intervalo de Tempo na Série Temporal, Figura 62. ....	83
Figura 64- Série Temporal do Motor. ....	83
Figura 65- Detalhe no Intervalo de Tempo na Série Temporal, Figura 64. ....	84
Figura 66- Série Temporal da Torre. ....	84
Figura 67- Detalhe no Intervalo de Tempo na Série Temporal, Figura 66. ....	85
Figura 68- Modelo Geométrico e Físico da Torre. (a) sem controle (b) com MR-TLCD .....	86
Figura 69- Gráfico de Ressonância Torre de 0,5 a 12V .....	87
Figura 70- Gráfico de Ressonância Torre de 0,5 a 5V .....	88
Figura 71- Gráfico de Ressonância do Motor .....	89
Figura 72- Diferença Entre a Máxima e a Mínima amplitude. ....	89
Figura 73- Série Temporada Torre para Diferentes Tensões Aplicada .....	90
Figura 74- Série Temporada Torre para Diferentes Tensões Aplicada .....	91
Figura 75- Modelo Geométrico e Físico da Torre. (a) sem Controle (b) com MR-TLCD.....	92
Figura 76- Gráfico de Ressonância Torre de 2 a 12V .....	93
Figura 77- Gráfico de Ressonância Torre de 8,5 a 10V .....	94
Figura 78- Gráfico de Diferença entre Máxima e Mínima Amplitude do Motor de 2 a 12V ..	94
Figura 79- Série Temporal do Motor. ....	95
Figura 80- Série Temporal da Torre. ....	95
Figura 81- Detalhe no Intervalo de Tempo na Série Temporal, Figura 80.....	96
Figura 82- Retrato de Fase da Torre com Amortecedor e sem Amortecedor. ....	96

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1- Registro de Dados Obtidos com o Tacômetro. Para Cada Valor de Tensão Aplicado ao Motor se Atinge um Valor de Rotação para Cada Instante de Tempo. ....	53
Tabela 2- Dado Experimental Referente ao Motor de Corrente Contínua e o Modelo 1. ....	55
Tabela 3- Comparação dos Dados Experimentais e o Modelo 3 para a Velocidade Angular e a Corrente. ....	59
Tabela 4- Parâmetros Referentes ao Ensaio de Vibração Livre Amortecida da Estrutura. ....	67
Tabela 5- Parâmetros Referentes ao Ensaio de Vibração Livre Amortecida da Estrutura. ....	68
Tabela 6- Valores dos Parâmetros. ....	76
Tabela 7- Valores dos Coeficientes das Equações sem Controle e com MR-TLCD do Caso 1. ....	78
Tabela 8- Valores dos Coeficientes das Equações sem Controle e com MR-TLCD do Caso 2. ....	86
Tabela 9- Valores dos Coeficientes das Equações sem Controle e com MR-TLCD do Caso 3. ....	93

## LISTA DE SÍMBOLOS

	<b>Unidades</b>	<b>Nomenclatura</b>
Lateral da Torre	m	$d_c$
Volume da Torre	$m^3$	$V_{\text{olum}}$
Altura da Torre	m	$l$
Módulo de Elasticidade	$N/m^2$	$E$
Momento de Inércia de Barra Delgada (torre)	$m^4$	$I_c$
Constante de Rigidez Linear da Torre	$N/m$	$k$
Massa da Torre	kg	$M$
Massa Específica do Material da Torre	$kg/m^3$	$\rho_1$
Aceleração da Gravidade	$m/s^2$	$g$
Amortecimento Viscoso	N.s.m	$C_1$
Massa Desbalanceada	kg	$m_0$
Distância do Centro do Motor até a Massa Desbalanceada	m	$r$
Parâmetro de Controle do Motor	N.m	$a$
Constante Positiva para um Modelo de Motor	$N.m/s$	$b_2$
Resistência Elétrica do Motor	$\Omega$	$R_a$
Tensão de Entrada Aplicada na Armadura do Motor	V	$V_a$
Momento de Inércia do Rotor	$kg.m^2$	$I_m$
Constante da Tensão Elétrica do Motor	Wb/rad	$k_b$
Constante de Torque do Motor	$N.m/A$	$k_m$
Corrente Elétrica do Motor	A	$i$
Massa do Motor	kg	$m$
Área do Tubo para o TLCD	$m^2$	$A$
Comprimento Horizontal do TLCD	m	$b$
Altura da Coluna do Fluido do TLCD	m	$h$
Distância entre os Polos Fixos	m	$H$
Distância Percorrida pelo Fluido entre os Polos Fixos	m	$L$
Coefficiente Baseado na Velocidade do Escoamento		$c$
Coefficiente de Perda de Carga Global		$\delta$
Massa Específica do Fluido	$kg/m^3$	$\rho$
Tensão de Escoamento	$N/m^2$	$\tau$
Indutância da Armadura		$L_m$
Coefficiente de Atrito Interno do Motor		$C_m$
Tensão Elétrica		$U(t)$
Torque no Eixo do Motor		$T_m$
Valor Mínimo da Tensão		$V_{\text{min}}$
Valor Máximo do Motor		$V_{\text{max}}$
Força Não Conservativa Referente à Torre		$Q_1$
Força Não Conservativa Referente a Massa Desbalanceada		$Q_2$

Força Não Conservativa Referente a o MR-TLCD		$Q_3$
Deslocamento Angular da Massa Desbalanceada	rad	$\theta_2$
Deslocamento Horizontal da Torre		$x_1$
Deslocamento Vertical do Fluido		$y_3$
Deslocamento Angular da Torre		$\theta_1$
Energia Cinética Total	N.m	$T$
Energia Cinética da Torre	N.m	$T_1$
Energia Cinética da Massa Desbalanceada	N.m	$T_2$
Energia Cinética do Fluido	N.m	$T_3$
Energia Potencial Total	N.m	$V$
Energia Potencial da Torre	N.m	$V_1$
Energia Potencial da Massa Desbalanceada	N.m	$V_2$
Energia Potencial do Fluido	N.m	$V_3$
Razão de Amortecimento		$\zeta$
Decremento Logarítmico		$\delta$
Raio de Curvatura		$B$
Carga Aplicada	N	$P$
Deformação Longitudinal na direção y		$\varepsilon_y$
Período de Oscilação Livre		$\tau_d$
Frequência Natural Amortecida	Hz	$\omega_d$
Frequência Natural Não Amortecida	Hz	$\omega_n$
Coefficiente de Amortecimento Crítico	N.s./m	$c_c$

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO.....</b>	<b>1</b>
1.1	OBJETIVOS.....	3
1.2	OBJETIVOS ESPECÍFICOS.....	3
1.3	DESCRIÇÃO DO TRABALHO.....	3
<b>2</b>	<b>REFERENCIAL TEÓRICO.....</b>	<b>4</b>
2.1	CENÁRIO ATUAL DA ENERGIA EÓLICA NO BRASIL E NO RIO GRANDE DO SUL.....	4
2.2	GERADORES EÓLICOS.....	6
2.2.1	<i>Características Construtivas dos Aerogeradores.....</i>	<i>8</i>
2.2.2	<i>Sistema de Controle de Potência e Velocidade das Turbinas.....</i>	<i>11</i>
2.3	DINÂMICA NÃO LINEAR E CAOS.....	12
2.3.1	<i>Sistemas Dinâmicos.....</i>	<i>13</i>
2.3.2	<i>Imprevisibilidade em Sistemas Dinâmicos Não Lineares.....</i>	<i>13</i>
2.4	SISTEMA IDEAL E NÃO IDEAL.....	14
2.4.1	<i>Sistema Não Ideal.....</i>	<i>15</i>
2.5	VIBRAÇÃO.....	16
2.5.1	<i>Graus de Liberdade.....</i>	<i>17</i>
2.5.2	<i>Tipos de Movimento.....</i>	<i>17</i>
2.5.3	<i>Análise Modal.....</i>	<i>18</i>
2.6	AMORTECEDORES.....	18
2.7	MAGNETO REOLÓGICO.....	21
2.7.1	<i>Comportamento do Fluido MR em um Tubo Retangular.....</i>	<i>23</i>
2.8	MOTOR DE CORRENTE CONTÍNUA.....	24
2.8.1	<i>As Equações Governantes do Movimento de um Motor de Corrente Continua (CC).....</i>	<i>25</i>
<b>3</b>	<b>DINÂMICA E CONTROLE DO SISTEMA VIBRATÓRIO.....</b>	<b>27</b>
3.1	INTRODUÇÃO.....	27
3.2	OBTENÇÃO DAS EQUAÇÕES DE MOVIMENTO.....	27
3.3	DESCRIÇÃO DO CASO 1:.....	27
3.3.1	<i>Equações de Movimento do Sistema Sem Controle.....</i>	<i>27</i>
3.3.2	<i>Equações do Movimento do Sistema com Controle.....</i>	<i>33</i>
3.4	DESCRIÇÃO DO CASO 2:.....	38
3.4.1	<i>Equação de Movimento do Sistema Sem Controle.....</i>	<i>39</i>
3.4.2	<i>Equação de Movimento do Sistema Com Controle.....</i>	<i>41</i>

3.5	DESCRIÇÃO DO CASO 3:.....	43
3.5.1	<i>Equações de Movimento do Sistema Sem Controle</i> .....	44
3.5.2	<i>Equações de Movimento do Sistema Com Controle</i> .....	47
<b>4</b>	<b>ANÁLISE EXPERIMENTAL DO MOTOR DE CORRENTE CONTÍNUA.....</b>	<b>52</b>
4.1	AQUISIÇÃO DE DADOS.....	52
4.2	EQUAÇÕES GOVERNANTES DO MOVIMENTO.....	54
4.2.1	<i>Modelo 1: Linear</i> .....	55
4.2.2	<i>Modelo 2: Linear</i> .....	57
4.2.3	<i>Modelo 3: Não Linear</i> .....	58
<b>5</b>	<b>ANÁLISE EXPERIMENTAL DA RESPOSTA DO SISTEMA.....</b>	<b>61</b>
5.1	CARACTERÍSTICAS DO SISTEMA.....	61
5.2	DETERMINAÇÃO DA RESPOSTA DO SISTEMA.....	69
<b>6</b>	<b>INTERPRETAÇÃO DOS RESULTADOS NUMÉRICOS.....</b>	<b>76</b>
6.1	CASO 1:.....	77
6.1.1	<i>Análise Série Temporal e Plano de Fases Para Tensão de 8,5V</i> .....	81
6.1.2	<i>Análise Série Temporal e Plano de Fases para Tensão de 9,6V</i> .....	83
6.2	CASO 2:.....	85
6.3	CASO 3:.....	91
6.3.1	<i>Análise Série Temporal e Plano de Fases para Tensão de 9,6V</i> .....	94
<b>7</b>	<b>CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS.....</b>	<b>97</b>
7.1	CONCLUSÕES.....	97
7.2	TRABALHOS FUTUROS.....	98
<b>8</b>	<b>BIBLIOGRAFIA.....</b>	<b>99</b>
	<b>APÊNDICE A.....</b>	<b>102</b>
	<b>APÊNDICE B.....</b>	<b>104</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Estruturas esbeltas, como, por exemplo, torres eólicas,

Figura 1, são projetadas para resistir a efeitos dinâmicos da ação do vento. Uma vez excitada, a torre pode entrar em ressonância ocasionando ruptura e falhas em sua estrutura, pás e rotores. Além de evitar possíveis falhas catastróficas o sistema de amortecimento pode prevenir fadiga prematura de componentes estruturais da torre, entre eles o gerador e as pás.

A resposta ou amplitude de vibração de um sistema que sofre vibração forçada torna-se maior quando próxima da ressonância, se não houver nenhum amortecimento. Assim a presença de amortecedores, em muitos casos, é sempre desejada, pois limita a amplitude de vibração.

É mais comum em países com ocorrência de sismos ou equipamentos instalados em alto mar, a utilização de amortecedores. Não são frequentes os problemas de ressonância entre estrutura e gerador nos parques nacionais, porém o uso de amortecedores para equipamentos, localizados nessas regiões, são importantes, pois proporcionam maior vida útil dos equipamentos mecânicos do sistema.

As forças provenientes de ventos ou sismos são de origens aleatórias, logo as frequências de excitação são diferentes em cada caso. Em estruturas esbeltas, a frequência natural e a razão de amortecimento são fatores de extrema relevância para o projeto da estrutura, uma vez que as ações externas do vento podem influenciar fortemente na resposta dinâmica.

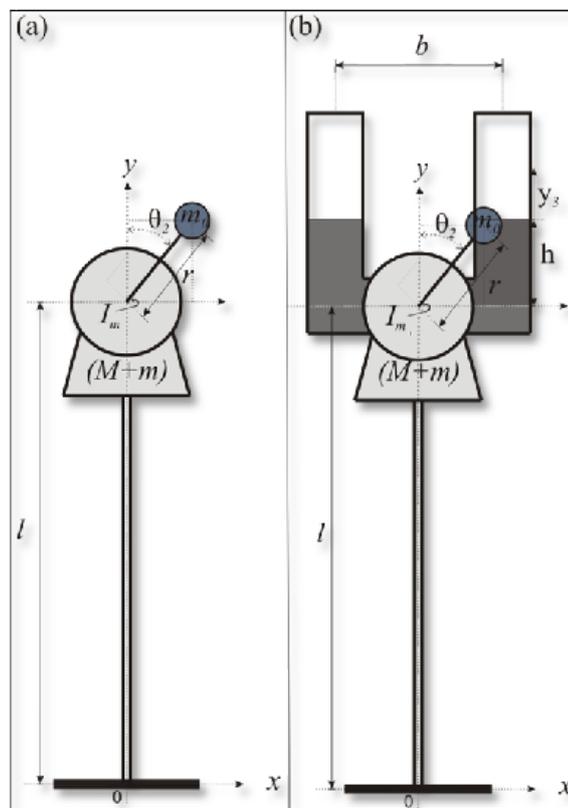
Figura 1- Turbina Eólica de Eixo Horizontal – Parque Eólico de Osório



Dentro deste contexto, foram elaborados três modelos numéricos que representam uma torre eólica, a fim de determinar a resposta dinâmica. A estrutura analisada é composta por uma coluna metálica, um motor elétrico de corrente contínua e uma massa desbalanceada a uma distância  $r$  do eixo de rotação do motor, Figura 2.

Neste trabalho, será utilizado um amortecimento do tipo semiativo, o qual é um sistema onde a proteção é permanente, não necessitando de energia externa fornecida, ou seja, consiste em um membro permanente (rigidez) e um dissipador de energia (amortecedor). Dentro deste contexto, foi utilizado o amortecedor do tipo *Tuned Liquid Column Dampers* (TLCD). No TLCD é possível diminuir a energia cinética do fluido, resultante do movimento da estrutura, através da válvula de controle. O TLCD tem seu funcionamento em regime ideal quando a excitação atinge níveis de valores específicos, por exemplo, determinadas faixas de frequência de excitação do vento. A fim de melhorar e refinar a possibilidade de ajuste do TLCD foi utilizado um fluido do tipo Magneto Reológico (MR). Esse fluido quando submetido a um campo magnético, aumenta significativamente a sua viscosidade aparente, a ponto de se tornar um visco elástico sólido.

Figura 2- Modelagem Física e Geométrica dos Sistemas. a) sem Controle. b) com MR-TLCD



MR-TLCD consiste em um tubo U aberto no topo que contém o fluido MR. O Magneto Reológico percorre uma distância  $L$  entre os polos que formam o campo magnético.

O MR-TLCD é um dispositivo rigidamente conectado à estrutura da torre e com capacidade de dissipar a energia de oscilação através do movimento do líquido. As forças de amortecimento viscoso ocorrem devido à perda de carga hidrodinâmica provocadas pelo movimento do MR no interior do tubo. Devido à aplicação do campo magnético, pode-se alterar o escoamento do fluido, ou seja, restrição da passagem do MR entre os polos, conseqüentemente influenciando na perda de carga e nas forças de amortecimento.

### **1.1 Objetivos**

O objetivo geral do trabalho é realizar um estudo da resposta dinâmica de torres eólicas a partir da simulação de modelos numéricos com aplicação de amortecedores com materiais inteligentes. Também foi desenvolvido um modelo experimental preliminar referente a uma estrutura equivalente a estrutura esbelta e de um sistema de amortecimento.

### **1.2 Objetivos Específicos**

Também é possível definir os seguintes objetivos específicos:

- Analisar as respostas dinâmicas regulares e/ou caóticas de uma torre-eólica com um amortecedor de coluna líquida sintonizado com fluido magneto reológico.
- Analisar através da resposta dinâmica não linear, do retrato de fase, da Transformada Rápida de Fourier (FFT) e de séries temporais do modelo numérico simulado;
- Caracterização estrutural da torre equivalente;
- Análise preliminar da resposta dinâmica do modelo experimental com e sem o dispositivo de amortecimento;
- Caracterização numérica do sistema de excitação (motor corrente contínua) do modelo experimental;

### **1.3 Descrição do Trabalho**

Este trabalho é constituído de sete capítulos. No capítulo 1, é realizada uma breve introdução dos conceitos utilizados para o desenvolvimento do mesmo. O capítulo 2 aborda as bases teóricas pertinentes aos conceitos envolvidos no estudo. No capítulo 3, são apresentadas as condições de contorno e a modelagem matemática das equações de movimentos dos três Casos que serão apresentados. Nos capítulos 4 e 5, são desenvolvidas a caracterização do

motor e estrutura, respectivamente. O capítulo 6 mostra os resultados numéricos e no último capítulo é apresentado as conclusões finais e propostas de trabalho futuro.

## **2 REFERENCIAL TEÓRICO**

Neste capítulo pretende-se colocar as bases teóricas pertinentes aos conceitos envolvidos no estudo, começando pela mecânica vibratória e suas características. Logo, realiza-se uma descrição dos conceitos de amortecimento, particularmente, magneto reológico. Também é apresentada uma base teórica sobre motores de corrente contínua e métodos de integração numérica.

### **2.1 Cenário Atual da Energia Eólica no Brasil e no Rio Grande do Sul**

A consolidação da energia eólica no Brasil ocorreu em 2011, a expressiva contratação nos leilões foi superior aos 2GW esperados pela indústria, assim a energia eólica se afirma como a segunda fonte de energia mais competitiva do país.

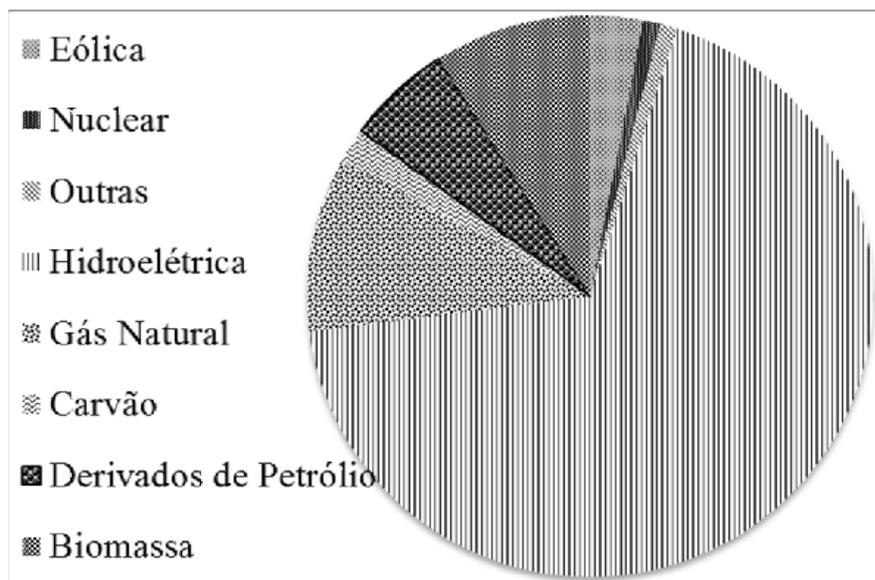
Dois aspectos foram fundamentais para o desenvolvimento da energia eólica no país, a política do Programa de Fontes Alternativas (PROINFA), lançado em 2004, que é baseado em um modelo de financiamento e políticas regionais de apoio à indústria de energias alternativas. Outro ponto é o fator de competitividade desta indústria no país, pois com algumas mudanças estruturais nos aerogeradores, é possível alcançar cerca de 45% da potência total enquanto que nos demais países esse número fica em torno de 30 a 35%, o que torna o Brasil um dos países mais produtivos em termos de energia eólica (ABEEólica, 2013).

No leilão ocorrido em novembro de 2013, o Rio Grande do Sul teve participação recorde na energia eólica, realizado pela Empresa de Pesquisa Energética (EPE). No total, o estado deve receber mais de R\$ 1,5 bilhão de investimentos em energia eólica nos próximos anos. O valor representa quase metade dos R\$ 3,37 bilhões garantidos pelo leilão em nível nacional. O estado respondeu por 37,64% das contratações, equivalentes a 19 parques de geração eólica, com um total de 326,6 MW comercializados. Atualmente, há 15 parques eólicos em operação no Rio Grande do Sul, com uma capacidade instalada de 460 MW. Com as contratações do leilão ocorrido em novembro de 2013, a carteira prevista até 2017 chega a 78 parques e capacidade instalada de 1.826,9 MW.

Segundo ABEEólica (2013) no mês de outubro de 2013, a Agência Nacional de Energia Elétrica (ANEEL) aprovou uma série de usinas eólicas como aptas a operar, o que acarretou em um aumento expressivo na capacidade instalada apresentada no mês anterior.

Sendo assim, a capacidade instalada passou para 3,4 GW, distribuída em 140 parques eólicos. A Figura 3, ilustra a participação das fontes na matriz elétrica brasileira.

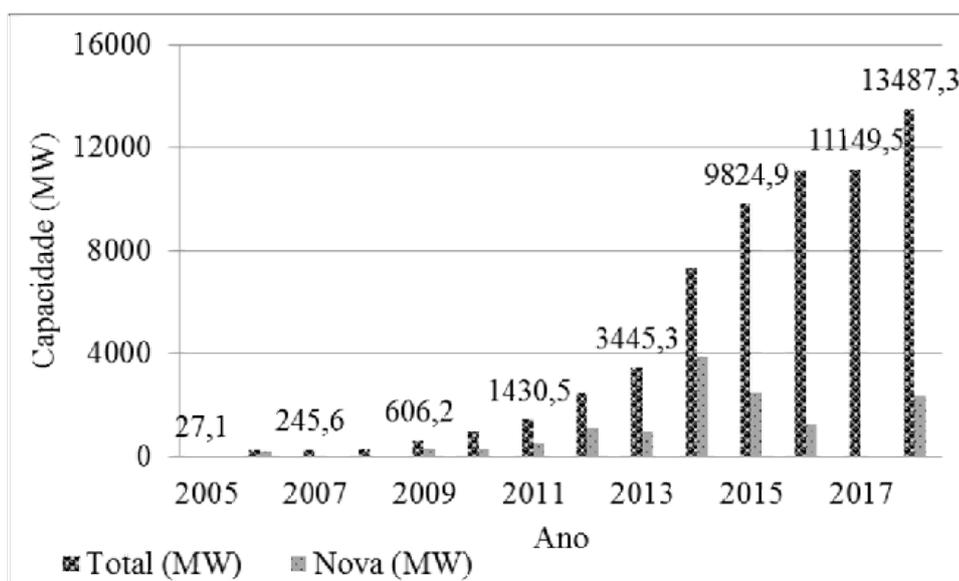
Figura 3- Matriz Elétrica Brasileira



Fonte: Aneel/ABEEólica(2013)

Segundo ABEEólica (2013) a Figura 4, mostra a evolução da capacidade instalada da fonte eólica e a previsão de crescimento em função das contratações já realizadas nos leilões regulados e no mercado livre.

Figura 4- Evolução da Capacidade Instalada no Brasil



Fonte: Aneel/ABEEólica (2013)

## 2.2 Geradores Eólicos

Os primeiros moinhos de vento foram utilizados para moagem de grãos, tinham o aspecto de dispositivos de eixos verticais e eram empregados por afegãos que existiram por volta de 1700 A.C. Outros equipamentos de eixo horizontal, empregados para o mesmo fim, são citados em documentos persas, tibetanos e chineses de 1000 A.C. (Ackermann, 2002). As Cruzadas influenciaram a configuração de eixo horizontal que se espalhou pelo Oriente Médio, Mediterrâneo e Europa, por volta do século XII, e também inspirou o desenho dos aparatos portugueses, holandeses e dinamarqueses.

O desempenho dos moinhos foi melhorado continuamente entre os séculos XII e XIX. Em 1800 aproximadamente 20000 moinhos estavam em operação somente na França e 90% da energia mecânica utilizada na indústria holandesa vinha do vento (Ackermann, 2002). A Figura 5, mostra os moinhos que eram vistos do sul até o extremo norte da Europa. Esses foram introduzidos nos Estados Unidos por colonizadores europeus onde ficaram muito populares no bombeamento de água de poços.

A primeira turbina eólica fabricada no mundo foi a “rosa dos ventos”, comumente chamada de catavento. Este moinho de múltiplas pás foi desenvolvido nos Estados Unidos entre 1850-1860 por Daniel Halladay, um dos primeiros fabricantes. O cata-vento americano possuía um dispositivo mecânico, uma grande pá paralela ao plano da turbina, cuja função era girar a turbina sobre seu eixo vertical de maneira a proteger o aparelho em situações onde a força do vento poderia danificar as pás da turbina. No Brasil, é muito comum ver este modelo de turbina em fazendas onde são utilizadas para bombear água, Figura 5.

O físico e meteorologista dinamarquês, Poul la Cour, foi um dos primeiros a realizar experimentos em uma turbina eólica com a finalidade de gerar eletricidade. Seu trabalho no estudo da aerodinâmica das pás da turbina foi revolucionário para a época e resultou em dois modelos de turbina financiados pelo governo dinamarquês, o primeiro em 1891 e o segundo em 1897 (Ackermann, 2002).

Construído pela empresa F.L. Smidth, o precursor dos aerogeradores modernos surgiu na Dinamarca em 1941, e utilizava aerofólios no lugar de pás de arrasto, além de possuir controle de velocidade do rotor pela variação do perfil das pás da turbina. O resultado da escassez de energia devido a segunda grande guerra serviu de motivação para a Dinamarca investir em aerogeradores. Na mesma época, nos EUA, uma turbina com 53 metros de diâmetro de rotor foi projetada por uma equipe de engenheiros, coordenados por Palmer Putnam, sob a encomenda de uma empresa fabricante de geradores hidrelétricos. A turbina era

baseada em uma ideia diferente de funcionamento, onde o rotor vertical recebia o vento por trás da torre e o controle de velocidade do rotor ocorria pela variação do ângulo de ataque das pás da turbina (Ackermann, 2002).

Figura 5- À Esquerda, Foto de Moinhos no Verão Siberiano de 1912, (Prokudin-Gorski, 1912). À Direita, Cata-Vento Utilizado para Bombeamento de Água no Brasil e seu Dispositivo de Segurança, Pá à Direita do Rotor.



Após a segunda guerra, a matriz energética mundial se baseou no petróleo e o desenvolvimento privado de aerogerador era restrito a iniciativas individuais que atingiu as empresas que produziam aparelhos de pequeno porte. As empresas foram novamente impulsionadas pelas políticas de investimento público em energias renováveis no final da década de 70, época da crise do petróleo. Mais de 30 anos depois o investimento aplicado na construção de alguns protótipos financiados com recursos estatais e privados promoveu a continuidade dos estudos que resultaram nos padrões atuais de projetos comerciais modernos com mais de 1MW de capacidade. A atual indústria mundial é formada por empresas europeias, americanas, indianas e chinesas.

Nos últimos 30 anos, houve a necessidade de aperfeiçoar os métodos de análise e simulação dos componentes dos aerogeradores devido ao aumento da potência e do diâmetro dos rotores produzidos.

Os protótipos não comerciais são verdadeiras bancadas de testes para simulação estática e análise dinâmica baseada na resposta aeroelástica da turbina, rotor, nacelle e torre. As ferramentas de cálculo dos esforços nas estruturas tiveram que ser aperfeiçoados para levar em conta todas as condições aplicadas ao comportamento e fenomenologia de aerogeradores cada vez maiores (Hansen, et al., 2006).

Na Figura 6, podem ser observados as torres de treliça metálica dos protótipos americanos da NASA, MOD-0 e MOD-1. Nos aerogeradores comerciais modernos, as torres são, em sua grande maioria, estruturas metálicas tubulares.

Figura 6- Protótipos Americanos, o Aerogerador de Putnam (Carl Wilcox, 1941) e os Aerogeradores MOD 0 (Martin Brown, 1975) e MOD 1 (NASA, 1979).



### 2.2.1 Características Construtivas dos Aerogeradores

Aerogeradores são equipamentos cuja função é a conversão da energia cinética do vento em energia elétrica. Basicamente pode ser dividido em turbina, sistemas de controle, gerador e torre, conforme Figura 7.

A turbina eólica mais simples consiste em três partes fundamentais:

**Pás do rotor:** São basicamente as velas do sistema. Quando o vento força as pás a se moverem, transfere parte de sua energia para o rotor;

**Eixo:** o eixo da turbina eólica é conectado ao cubo do rotor. Quando o rotor gira, o eixo gira junto. Desse modo, o rotor transfere sua energia mecânica rotacional para o eixo, que está conectado a um gerador elétrico na outra extremidade.

**Gerador:** É um dispositivo bastante simples, que usa as propriedades de indução eletromagnética para produzir tensão elétrica.

As turbinas podem ser classificadas quanto à maneira com que interagem com o vento e, também, quanto à disposição do eixo para o qual é transmitido o movimento mecânico. São dois tipos de pás: por arraste ou sustentação (Ackermann, 2002). As pás por arraste são empurradas pelo vento incidente e a velocidade das pás nunca é maior que a do vento, sendo este um fator limitante para sua eficiência. As pás do tipo sustentação têm o formato de um aerofólio onde o vento trabalha empurrando-as, como nas turbinas de arraste, mas o fluxo de ar pelas pás também faz surgir uma força de sustentação que aumenta a eficiência da turbina (Ackermann, 2002), (Custódio, 2009).

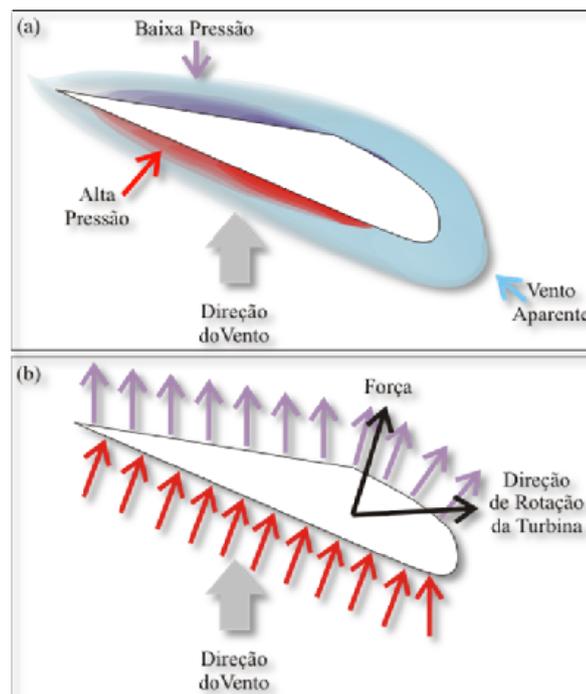
A disposição do eixo das turbinas pode ser do tipo eixo vertical, *Vertical Axis Wind Turbine – VAWT* ou eixo horizontal, *Horizontal Axis Wind Turbine - HAWT*. A vantagem da turbina de eixo vertical está na disposição facilitada na operação de manutenção. Visto que a instalação do gerador fica junto ao solo e não há a necessidade de dispositivos direcionais. Sua desvantagem está no tamanho limitado, pois os esforços gerados no suporte do dispositivo inviabilizam o seu uso em projetos de grande porte, (Custódio, 2009), Figura 7.

Figura 7- a) Aerogerador HAWT e seus Principais Componentes. b) Aerogerador VAWT, por Exemplo, Gerador Darrieus.



Na Figura 8 (a), observa-se o desenho esquemático do fluxo aparente do vento em relação à pá, mostrando as formações de regiões de alta e baixa pressão. Na Figura 8 (b) pode ser visto a resultante das forças aerodinâmicas sobre a pá.

Figura 8- Esquema de Pá de Turbina e sua Interação com o Vento.



O número de pás das turbinas comerciais do tipo HAWT pode variar de uma a quatro pás e quanto maior é o número de pás, menor é a velocidade de rotação e maior o torque no eixo do rotor, assim, por essa razão, os cata-ventos são tão eficientes no bombeamento de água (Custódio, 2009), (Ackermann, 2002). As Turbinas com três pás emitem menos ruídos que turbinas com duas pás, pois possui menor velocidade de giro do rotor.

O nacele do aerogerador contém os dispositivos e sistemas de controle como: o gerador, o freio de estacionamento da turbina e as caixas de transmissão mecânica e elétrica. Esse último pode também estar situado na base da torre eólica. O tipo de gerador depende das características de instalação do aerogerador, se sozinho ou componente de parque eólico, do tipo de aplicação e do tipo rede onde será instalado o equipamento ou parque eólico (Custódio, 2009).

Turbinas do tipo HAWT são as que têm o maior aproveitamento de energia do vento e são estruturas extremamente dinâmicas, sujeitas a distribuições complexas de cargas aerodinâmicas. Essas também são muito empregadas nos projetos modernos de aerogeradores de classe Mega Watt, porém, necessitam ser posicionadas a uma altura compatível com as características do local onde está sendo instalada, para o melhor aproveitamento do vento (Ackermann, 2002), (Hansen, et al., 2006).

A torre é o componente cuja função principal é posicionar a turbina na melhor altura de trabalho, onde o desempenho da turbina eólica é otimizada (Custódio, 2009). Essas podem ser de três tipos: tubular cilíndrica, cônica ou treliça.

As torres são projetadas para suportar a ação do comportamento dinâmico do gerador e do vento. Também há outros tipos de carregamento resultantes do meio no qual o sistema é montado, como, por exemplo, estruturas *offshore*, parques eólicos em altamar, onde a estrutura sofre a ação das ondas do mar. Em termos gerais o vento é a causa principal de todos os esforços dinâmicos. As pás da turbina interagem com o ar, cujo comportamento turbulento segue um padrão de carregamento estocástico.

O estudo de novos aerofólios para a aplicação específica em HAWT começou em 1984. Estes foram desenvolvidos para atender as demandas específicas das turbinas, assim resultando na maior eficiência de captura de energia. As pás da turbina com perfis específicos aumentaram em 20% a eficiência dos rotores (Hansen, et al., 2006).

Os fenômenos oscilatórios e restrições da rede elétrica também recebem tratamento ou modelagem específica. O subsistema composto pela turbina e todos os componentes

abrigados pela nacelle aplicam esforços sobre a torre que os sustenta e o movimento desta altera a resposta do subsistema (Hansen, et al., 2006).

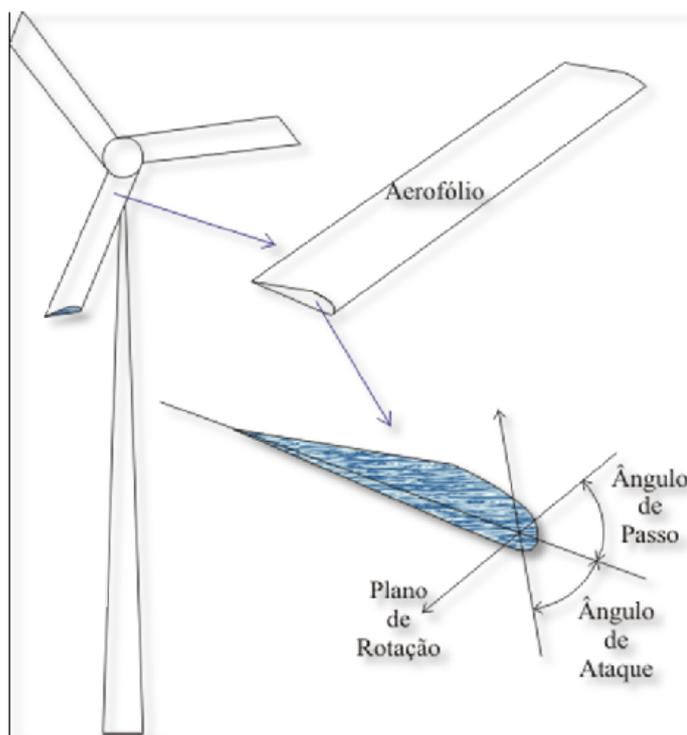
### 2.2.2 Sistema de Controle de Potência e Velocidade das Turbinas

O gerador e os sistemas de apoio também interagem com a turbina, cuja rotação é controlada pelo freio para que não passe da velocidade limite de trabalho do dispositivo gerador.

É importante um efetivo e rápido controle de potência do rotor, para que evite danos em virtude de ventos de maior intensidade. O controle aerodinâmico pode ser do tipo passivo, chamado de controle por estol (*stall control*), e ativo, chamado de controle de passo (*pitch control*).

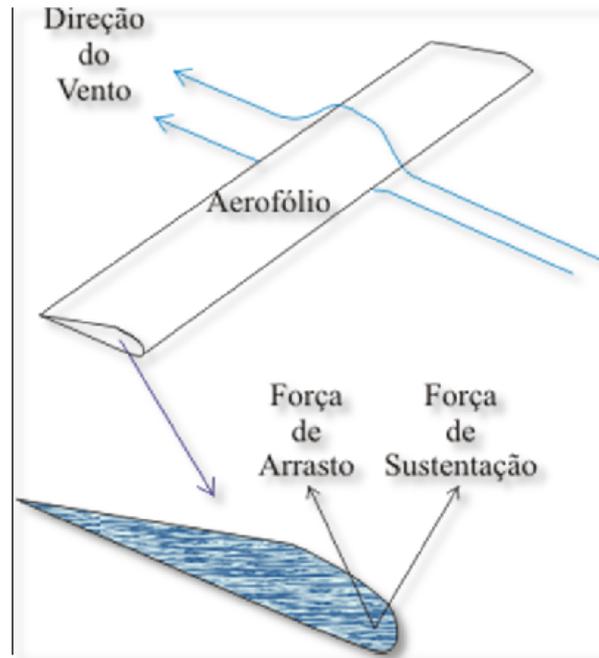
O controle de passo (ativo) faz com que as pás girem em torno do seu eixo longitudinal, modificando o ângulo de ataque sempre que a potência nominal do gerador é superada. Esse recurso faz com que as forças aerodinâmicas atuantes e a extração de potência do vento pela turbina diminuam. A Figura 9 mostra o esquema de funcionamento do sistema de passo.

Figura 9- Representação do Movimento de uma Pá de uma Turbina com Controle de Passo.



O sistema de controle por estol (passivo), Figura 10, apresenta o projeto de pás do rotor fixas e não podem ser giradas em torno do seu eixo longitudinal.

Figura 10- Forças de Arrasto e Sustentação. Obs.: É a Força de Sustentação que Faz a Pá Girar e a de Arrasto, Faz a Pá “Frear”.



### 2.3 Dinâmica Não Linear e Caos

Sistemas de equações de evolução, onde o tempo é uma variável independente, são estudados com o auxílio da teoria matemática da dinâmica não linear.

Para os casos em que as equações são do tipo linear, ocorrem soluções gerais que permitem determinar o comportamento futuro do sistema descrito de forma exata, em função do estado atual do sistema. Nas equações não lineares as soluções exatas, em geral, não existem numa forma fechada. Comportamentos inesperados e complexos podem surgir quando estudado a evolução temporal de sistemas descritos por equações não-lineares: órbitas periódicas e quase-periódicas, ciclos limite, transientes e caos.

A avaliação de comportamento de sistemas em longos períodos é realizada através da dinâmica não linear. O comportamento futuro a pequenos tempos pode ser obtido por solução numérica das equações de evolução (Newton, 2002).

Aplicação da dinâmica não linear é muito extensa, pois abrange qualquer sistema físico e biológico que possa ser descrito por equações de evolução. Por exemplo, na física, a dinâmica de partículas e corpos rígidos apresenta uma série de exemplos interessantes de sistemas dinâmicos não lineares.

A teoria de sistemas dinâmicos teve início com Newton (1642-1727) que idealizou o cálculo diferencial e integral. Uma das colaborações importante de Newton foi relacionar a

gravitação com o comportamento dinâmico do Sistema Solar e com base nessa lei, comprovou os experimentos realizados por Galileu e assim iniciou a busca de métodos de resolução analítica de sistemas dinâmicos.

### **2.3.1 *Sistemas Dinâmicos***

Segundo Aligood, *et al.* (1996) um sistema dinâmico consiste de um conjunto de estados e de uma regra, preferencialmente determinística, que determina de maneira única o estado presente em função de estados anteriores. Assim, em mapas ou sistemas de tempo discreto, esta especificação é desenvolvida em instantes discretos, tendo o estado atual  $\vec{x}_t = \vec{x}(t)$  como entrada e o momento seguinte  $\vec{x}_{t+1} = \vec{x}(t+1)$  como saída. O avanço do sistema discreto ao longo do tempo é obtido pelas iterações do mapa em incrementos discretos de tempo.

Para sistemas de tempo contínuo, a representação é feita por uma taxa de variação em função do estado atual que resulta em uma equação diferencial. A resposta dinâmica de estruturas esbeltas é determinada a partir de equações de movimento, as quais serão apresentadas no Capítulo 3.

Monteiro (2006) relata que uma equação diferencial de ordem  $n \geq 1$ , pode ser transformada em um sistema de  $n$  equações diferenciais de primeira ordem. No caso de sistemas não lineares, esses são analiticamente integráveis somente em situações muito particulares. Assim devem ser verificadas as condições necessárias para que o sistema admita uma única solução. Também é necessária uma análise qualitativa para determinar o comportamento local nas soluções de interesse.

A análise de caos permite verificar quais parâmetros do problema tornam o sistema sensível às condições iniciais. Após a escolha dos parâmetros do sistema são realizadas as integrações numéricas para determinar a evolução do sistema com o tempo e o respectivo retrato de fase.

### **2.3.2 *Imprevisibilidade em Sistemas Dinâmicos Não Lineares***

Muitos fenômenos que ocorrem em sistemas dinâmicos são previsíveis teoricamente, entretanto isso nem sempre ocorre, e muitos fenômenos são difíceis de ser previstos.

Para alguns sistemas, quando conhecido o estado inicial, a impossibilidade de se prever o futuro do mesmo é conhecida com precisão finita e foi constatada por J.C. Maxwell em 1873. Em 1903, após ter desenvolvido estudos a respeito da estabilidade do sistema solar,

J.H. Poincaré concluiu que pequenas diferenças nas condições iniciais produzam grandes diferenças no fenômeno final, um pequeno erro na entrada produzirá um erro enorme na saída e assim a previsão torna-se impossível. O efeito de amplificação de erros nas condições iniciais é conhecido como sensibilidade às condições iniciais e uma consequência imediata é a imprevisibilidade do comportamento da solução de um sistema dinâmico caótico.

Poincaré propõem que as soluções em série, geralmente utilizadas, eram divergentes e mais tarde Kolmogorov, V.I. Arnold e J. Moser provam que a convergência e/ou divergência dessas séries depende da escolha das condições iniciais. Assim, um sistema com três ou mais corpos pode ter movimentos regulares ou caóticos.

Em sistemas caóticos, os erros nas condições iniciais crescem exponencialmente com o tempo, inviabilizando uma previsão de longo prazo. A resolução de um modelo meteorológico simplificado, realizada através de simulações, resultou na descoberta do primeiro sistema com características caóticas.

Caos ocorre num sistema determinista quando seu comportamento é aperiódico e depende sensivelmente das condições iniciais. Na prática, erros nas condições iniciais são sempre presentes devido a uma série de fatores tais como ruído, efeitos de diagonalização, precisão, etc.

Para a solução de sistemas formados por equações diferenciais ordinárias, que não são facilmente integradas, existem vários algoritmos que permitem o cálculo de sua solução. Os mais conhecidos são o método de Euler, de Runge-Kutta, de Adams-Bashforth, AdamsMoulton e o método trapezoidal. O método mais utilizado é o de Runge-Kutta de 4ª ordem.

## **2.4 Sistema Ideal e Não Ideal**

A interação entre a fonte de excitação e o sistema sobre o qual está atuando é chamado de sistema dinâmico e pode ser classificado como ideal e não ideal. Os sistemas classificados como ideal são aqueles cuja excitação é previamente conhecida sendo de forma prescrita. Assim o atuador influencia na dinâmica da estrutura, porém a dinâmica da estrutura não influencia a dinâmica do atuador. Para esses sistemas, a excitação é geralmente uma função do tempo.

Nos casos onde a dinâmica do atuador influencia na estrutura e vice-versa, o perfil da excitação não pode ser conhecido inicialmente. Esses sistemas são classificados como não ideais. Assim, para esses sistemas, as equações do atuador (excitação) devem ser integradas,

juntamente com as equações governantes do movimento da estrutura a fim de que o comportamento do sistema possa ser avaliado. A excitação é uma função do tempo e das variáveis da estrutura.

#### 2.4.1 Sistema Não Ideal

O sistema não ideal consiste de um motor elétrico desbalanceado de potência limitada que se apoia sobre uma plataforma, quando se aplica a voltagem de forma crescente, tem-se que velocidade angular do motor cresce na passagem de ressonância e a plataforma oscila em amplitudes extremamente maiores até chegar um ponto crítico de acontecer um salto na excitação.

A formulação de um sistema não ideal deve incluir um termo  $R(\varphi, \dot{\varphi}, x, \dot{x})$ , com  $\varphi$  e  $x$  como coordenadas de movimento da fonte de energia e do sistema oscilante, respectivamente, que descreve a influência do sistema oscilante na fonte de excitação. Pode-se acrescentar ainda um termo  $Q(x, \dot{x}, \varphi, \dot{\varphi})$  que expressa a ação do motor sobre a estrutura.

Assim, o sistema de equações de movimento do sistema não ideal consiste da dinâmica da plataforma e do motor representada por equações diferenciais de segunda ordem:

$$m\ddot{x}_1 + \beta\dot{x}_1 + kx_1 = Q_i(\varphi, \dot{\varphi}, \ddot{\varphi}), \quad (2.1)$$

$$I\ddot{\varphi} + H(\varphi, \dot{\varphi}) - L(\varphi, \dot{\varphi}) = R(\varphi, \ddot{x}_1), \quad (2.2)$$

sendo  $L(\varphi, \dot{\varphi})$  a função do torque de direcionamento ou força eletromecânica do perturbador e está intimamente ligada à natureza da fonte de energia.

Os sistemas dinâmicos modelados matematicamente como não ideais possuem pelo menos um grau de liberdade a mais do que o sistema ideal correspondente, dependendo do número de motores presentes nele. O fenômeno de salto e o aumento de potência exigido pela fonte de energia, operando na região da ressonância, são manifestações do fenômeno conhecido como efeito *Sommerfeld* (Felix, 2002).

Características importantes são observadas em modelos matemáticos de sistema dinâmico provenientes da interação da estrutura com a fonte de excitação, tais como:

- Variações bruscas (saltos ou “*jumps*”) da amplitude de deslocamento da estrutura e da frequência de excitação, no caso particular em que se consideram as condições estacionárias do movimento;
- Descontinuidade da curva “amplitude versus frequência”, indicando regiões de instabilidade;

- Influência do perfil da curva “amplitude versus frequência” quando o operador altera a velocidade do motor elétrico em acréscimos ou decréscimos;
- Dependência destes efeitos com relação às características eletromecânicas do motor.

Observa-se que os sistemas dinâmicos, modelados matematicamente como não ideais possuem um ou mais graus de liberdade, dependendo do número de motores presentes no sistema, superior ao sistema ideal correspondente (Felix, 2002).

## 2.5 Vibração

Na grande maioria das atividades diárias da população envolve vibração de uma forma ou de outra. Movimentos que se repetem em um intervalo do tempo é denominado vibração ou oscilação, por exemplo, o balançar de um pêndulo, a vibração dos nossos tímpanos que nos permitem ouvir ou ainda as ondas de luz que sofrem vibrações e nos permitem ver. Assim, pode-se definir que a teoria de vibração trata do estudo de movimentos oscilatórios e as forças associadas a eles (Rao, 2008).

Classificações para o tipo de vibração:

- Vibração linear: é um sistema vibratório que apresenta todos os seus componentes (massa, amortecedor e mola) com resposta linear;
- Vibração não linear: é o sistema que apresenta um ou mais dos seus componentes com resposta não linear;
- Vibração livre: ocorre no sistema que após uma perturbação inicial continua a vibrar por conta própria. Nenhuma força externa age no sistema após a excitação inicial;
- Vibração forçada: é quando o sistema está sujeito a uma força externa repetitiva;
- Vibração não amortecida: é quando nenhuma energia for perdida ou dissipada por atrito ou outra resistência durante a oscilação;
- Vibração amortecida: ocorre quando, durante a oscilação, a energia é perdida. Na maioria dos sistemas físicos a quantidade de amortecimento é muito pequena e desprezível, porém, em casos de sistemas vibratórios próximos à ressonância, é muito importante considerar o amortecimento;
- Vibração determinística: sucede quando o valor ou magnitude da excitação que está agindo sobre o sistema vibratório é conhecido em qualquer instante;

- Vibração não determinística: também dita vibração aleatória, é quando o valor de excitação em dado instante não pode ser previsto. Para esses casos é necessário um grande número de registros da excitação e assim estimar uma regularidade estatística, como, por exemplo, a velocidade do vento.

### 2.5.1 Graus de Liberdade

O número de coordenadas independentes requeridas para determinar completamente as posições de todas as partes de um sistema a qualquer instante define o grau de liberdade do sistema. As coordenadas necessárias para descrever o movimento do sistema constituem um conjunto de coordenadas generalizadas e podem representar coordenadas cartesianas ou não cartesianas. Sistemas com um número finito de graus de liberdade são denominados de sistemas discretos ou de parâmetros concentrados, e os que têm um número infinito de graus de liberdade são denominados sistemas contínuos ou distribuídos. (Rao, 2008)

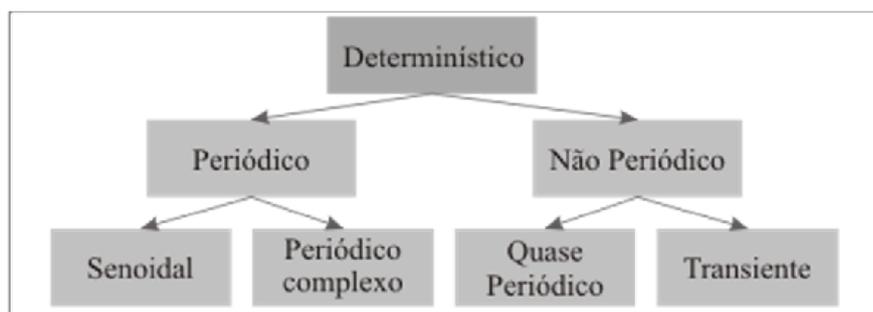
### 2.5.2 Tipos de Movimento

Segundo Groehs (2005), os movimentos resultantes da excitação de um sistema elástico, podem ser classificados em determinístico e não determinístico. Os determinísticos são aqueles que podem ser descritos por uma relação matemática explícita, já os não determinísticos são classificados em periódicos e não periódicos. Os movimentos não periódicos não se repetem ao longo do tempo e podem ser divididos em quase periódicos e transientes. Os movimentos periódicos, por sua vez, podem ser divididos em senoidal e complexo.

Movimentos quase periódicos são o resultado da soma de dois ou mais movimentos senoidais cujos períodos têm uma relação que envolve um número irracional. Os movimentos transientes são os demais movimentos não periódicos e têm como característica principal o fato que não podem ser representados por um conjunto discreto de componentes senoidais.

Na Figura 11, observa-se a classificação geral dos movimentos determinístico.

Figura 11- Classificação Geral de Movimentos Determinísticos.



Fonte: Groehs (2005)

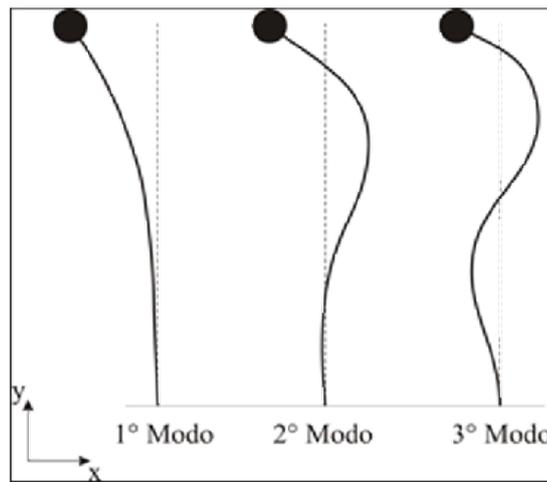
### 2.5.3 Análise Modal

A dinâmica das estruturas estuda as modificações ocorridas na quantidade de movimento dos sistemas elásticos. Alguns exemplos são: ação de um motor sobre sua base, ação de ventos ou das ondas do mar em estruturas, ação dos terremotos ou explosões, impactos de cargas móveis sobre sistemas estruturais e cargas produzidas pelo movimento de pessoas em estruturas.

Sabe-se que graus de liberdade são coordenadas que definem como se encontram as configurações do sistema em qualquer instante. O modo de vibração é uma configuração do sistema segundo o qual este pode oscilar, mantendo-se constante a relação entre os deslocamentos dos diversos pontos da estrutura (Clough, 1993).

Na Figura 12, é representada de forma esquemática a configuração modal de uma coluna em balanço com massa concentrada no topo para os três primeiros modos de vibração.

Figura 12- Configuração Modal de uma Coluna em Balanço.

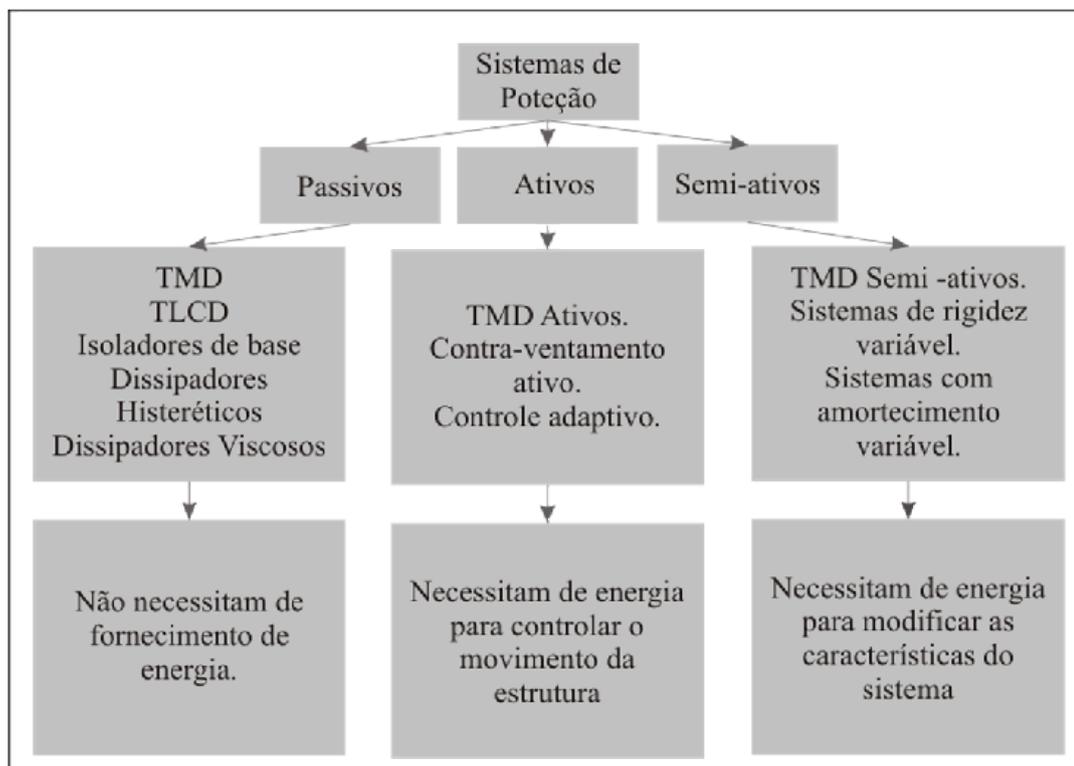


### 2.6 Amortecedores

O amortecimento é um fenômeno pelo qual a energia mecânica de um sistema é dissipada, seja por geração de calor e ou outro meio. O amortecimento de um sistema ou material pode ser classificado como interno, estrutural e fluídico. O interno associa-se aos defeitos na microestrutura, granularidade e impurezas do material e a efeitos termo elásticos causados por gradientes locais de temperatura. O estrutural está associado a perdas de energia por atrito em juntas, parafusos e articulações semirrígidas e o fluídico ocorre por resistência ao arrasto, por exemplo, a conversão de energia cinética de um pêndulo em energia térmica para o ar (Cossolino, et al., 2010).

É possível encontrar vários tipos de amortecedores, estes são apresentados através do fluxograma da Figura 13 e podem ser classificados em três classes: Sistemas de Proteção Passivos, Ativos e Semiativos.

Figura 13- Fluxograma de Sistema de Amortecimentos e suas Principais Diferenças.



O conceito de TMD (*Tuned Mass Damper*), TLD (*Tuned Liquid Damper*), e TLCD (*Tuned Liquid Column Damper*), é muito semelhante, porém o TLCD apresenta melhores resultados, pois possibilita um ajuste fino no sistema de amortecimento. É possível diminuir a energia cinética do fluido resultante do movimento da estrutura através da válvula de controle. O controle da frequência no TLCD está relacionado com a perda de carga do líquido no tubo.

A seguir, são descritos com detalhes, os dois tipos de amortecedores:

- *Active Tuned Liquid Column Damper (ATLCD)*: é outra técnica de controle de vibração. Esse método é definido analogamente como um amortecedor do tipo TLCD ligado à estrutura por meio de atuador. O uso do ATLCD em torres eólicas foi estudado através da adoção de um algoritmo que analisa a resposta dinâmica estrutural e controla o amortecedor, o qual produz uma força oposta à excitação da estrutura (Yang, et al., 2002).

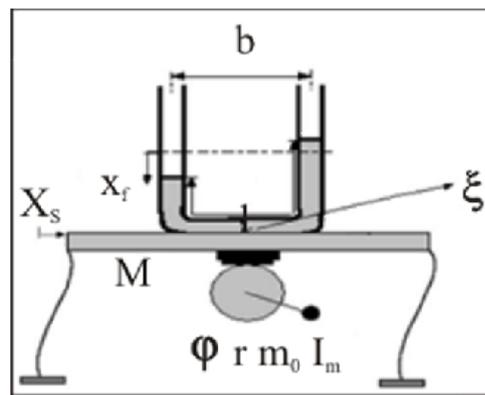
- *Tuned Liquid Dampers (TLDs)*, são reservatórios rígidos contendo líquido (como, por exemplo, água) à pressão atmosférica. Esses reservatórios ligados à estrutura induzem um movimento do fluido quando a estrutura é excitada, originando forças que alteram as

características dinâmicas da própria estrutura de forma a reduzir as vibrações causadas pelas ações dinâmicas;

- *Tuned Liquid Column Dampers* (TLCDs) é constituído por um tubo em formato de *U* que controla o fluxo do fluido através da abertura de um orifício dentro do tubo horizontal do amortecedor, essa abertura determina o coeficiente de perda de carga do líquido, fornecendo desta maneira o amortecimento desejado.

A Figura 14 mostra um modelo esquemático com aplicação do TLCD em um pórtico plano e o motor CC como excitação externa. O controle líquido teve um bom desempenho em um pórtico não ideal.

Figura 14- Interação de um Amortecedor de Coluna Líquido Sintonizado com a Estrutura Pórtico Não Ideal.



Fonte: Felix, et al., (2005)

A redução das vibrações utilizando TLCDs tem sido motivo de extenso estudo sobre o assunto, (Yang, et al., 2002). A vantagem do TLCD está no controle de vibração em uma ampla faixa de nível de excitação, na eficiência no rendimento volumétrico quando comparado com outros amortecedores líquidos e na autossuficiência, não necessitando de equipamentos auxiliares para o controle das vibrações. O ajuste do TLCD é definido pela relação entre a frequência natural do amortecedor e a frequência natural da estrutura.

A otimização do amortecimento do TLCD para diferentes excitações na estrutura é controlado através da abertura de um orifício dentro do tubo horizontal do amortecedor. Essa abertura determina o coeficiente de perda de carga do líquido que flui dentro do tubo (TLCD) fornecendo desta maneira o amortecimento desejado.

## 2.7 Magneto Reológico

Fluidos controláveis, também chamados de materiais inteligentes, são definidos como sensíveis ou adaptáveis a alterações nas condições operacionais e ambientais, que visam manter o comportamento requerido do sistema.

Fluidos inteligentes apresentam uma ou mais alterações reversíveis nas propriedades mecânicas quando submetidos a alguma variação de grandeza física como, por exemplo, temperatura, campo elétrico e pressão (Yang, et al., 2002).

Os fluidos com propriedades mecânicas controláveis e reversíveis são empregados em dispositivos de controle de vibração, chamados de fluido magneto reológicos e fluido eletro reológicos, entre os materiais mais utilizados estão os piezo elétricos, eletrostrictivos e os com memória de forma (Lima, 2011).

Os materiais Eletro Reológicos (ERs) são dispersões coloidais de partículas sólidas em um meio fluido isolante, sendo as dimensões das partículas sólidas muito superiores às dimensões das partículas do solvente. Quando submetidos a um campo elétrico, apresentam alterações em suas propriedades reológicas (viscosidade). Essas alterações permanecem até que seja aplicada uma tensão de escoamento maior que a tensão de cisalhamento do fluido ou então a retirada do campo elétrico externo (Lima, 2011). A principal aplicação de fluido eletro reológico está voltada para o desenvolvimento de transmissão e suspensão veicular (Yang, et al., 2002).

Os fluidos MRs (Magneto Reológicos) apresentam uma alteração reversível em suas propriedades reológicas: viscosidade, elasticidade e plasticidade, quando expostos a um campo magnético que varia sua reologia em função da intensidade desse campo. No entanto o material se comporta como um fluido Newtoniano comum na ausência de campo magnético. (Lima, 2011)

Os materiais do tipo MRs são constituídos de partículas magneticamente polarizadas (óxido de ferro), suspensas em um fluido, como óleo mineral, óleo sintético ou silicone. Apesar dos fluidos ERs terem chamado mais atenção dos pesquisadores nas décadas de 50 até 80, os fluidos MRs são os mais utilizados por serem superiores em vários aspectos atualmente com relação aos fluidos ERs. Abaixo são listadas quatro desvantagens dos fluidos ERs:

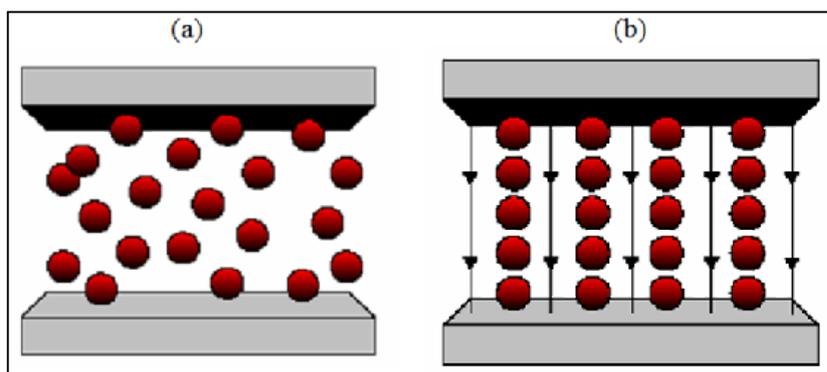
- Requer tensão acima de 1kV, o que torna a exigência de fontes de alta tensão relativamente caras, maior isolamento do meio onde está instalado o equipamento e necessitando maiores cuidados de operação e manutenção, principalmente em veículos

onde circuitos de alta tensão teriam que compartilhar espaço com dutos de combustível, no caso de aplicação em suspensão automotiva;

- Os dispositivos que utilizam fluidos ERs apresentam uma resposta dinâmica em média dez vezes menor que os fluidos MRs, o que resulta em dispositivos menos eficientes. De acordo com Geng., (2002) esta diferença ocorre devido às tensões de escoamento do MR alcançar valores mais elevados, o que está relacionado ao fato da densidade de energia magnetostática,  $\mu_0 H_0^2$ , no MR ser maior que a densidade de energia eletrostática,  $\varepsilon_0 E_0^2$ , no ER;
- É altamente susceptível a contaminantes externos (por exemplo, umidade), devido seu comportamento reológico depender em última instância do movimento dos íons ou cargas elétricas, facilmente afetadas;
- Operam em uma faixa estreita de temperatura, pois sua viscosidade apresenta grande influência da temperatura. Por outro lado, os fluidos MRs apresentam estabilidade entre -40 °C e 150 °C.

Na Figura 15(a) observa-se o fluido entre as placas com ausência de campo magnético e conseqüentemente a não ordenação das partículas maiores. A Figura 15(b) apresenta a aplicação do campo magnético fazendo com que as partículas fiquem organizadas e restringindo a passagem do fluido de transporte.

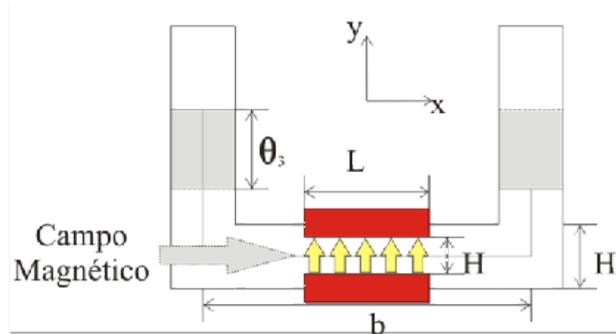
Figura 15- a) Fluido MR na Ausência de um Campo Magnético b) Fluido MR na Presença de um Campo Magnético.



Fonte: Lima(2011)

A válvula de controle do MR, Figura 16, é acionada com o aumento da corrente elétrica que propicia um campo magnético maior, que por sua vez, aumenta a viscosidade aparente do fluido. Assim a taxa de fluxo através da válvula pode ser controlada.

Figura 16- Interação de um Amortecedor de Coluna Líquido Sintonizado com Válvula de Controle Fluido Magneto Reológico.



### 2.7.1 Comportamento do Fluido MR em um Tubo Retangular

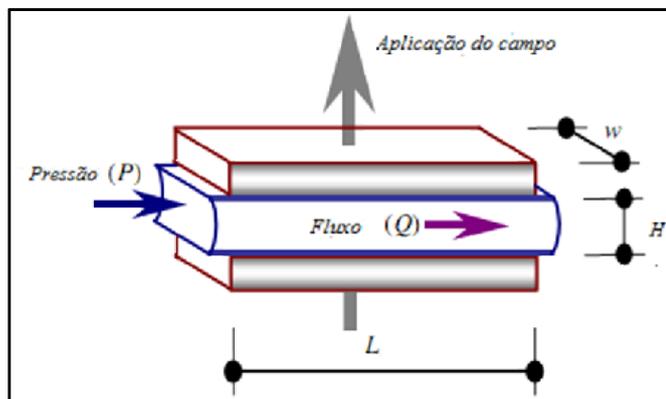
O movimento do fluido MR entre os polos fixos é mostrado na Figura 17, sendo que o mesmo pode ser modelado usando a teoria de placas paralelas descrita por Yang, *et al.*(2002).

De acordo com a teoria, a diferença de pressão  $\Delta p$ , Equação (2.3), desenvolvida ao longo de um fluxo de pressão orientado, é a soma do componente viscoso ( $\Delta p_\eta$ ) com a componente da tensão de escoamento ( $\Delta p_\tau$ ), (Jolly, *et al.*, 1999) e (Phillips, 1969).

$$\Delta p = \Delta p_\eta + \Delta p_\tau = \frac{12\eta QL}{H^3 w} + \frac{c\tau L}{H}, \quad (2.3)$$

onde  $L$ ,  $H$  e  $w$  é o comprimento, distância entre as placas e a largura destas respectivamente.  $Q$  é a razão de fluxo volumétrico,  $\eta$  é o campo independente da viscosidade,  $\tau$  é a tensão de escoamento relacionado à aplicação do campo magnético e  $c$  é o coeficiente baseado na velocidade do escoamento sendo que o intervalo de valores é definido entre 2,07 e 3,07 (Yang, *et al.*, 2002 e Spencer, *et al.*, 1999).

Figura 17- Modelo Operacional do Fluxo de Pressão Orientado



A perda de carga  $H_p$  e a diferença de pressão  $\Delta p$  podem ser relacionadas através da Equação (2.4), onde  $\rho$  é a densidade do líquido e  $g$  é a aceleração gravitacional.

$$H_p = \frac{\Delta p}{g\rho} = \frac{12\eta QL}{g\rho H^3 w} + \frac{c\tau L}{g\rho H}. \quad (2.4)$$

O primeiro termo da Equação (2.4) é a perda de carga causada pela viscosidade do fluido, a qual pode ser expressa pela Equação (2.5).

$$H_{pv} = \frac{\delta_v V^2}{2g}. \quad (2.5)$$

O coeficiente de perda de carga  $\delta_v$  é obtido através da Equação (2.6).

$$\delta_v = \frac{48}{\text{Re}_{H1}} \frac{L}{\left(1 + \frac{H}{w}\right)^2 H}, \quad (2.6)$$

$$\text{Re}_{H1} = \frac{2\rho V(w+H)}{\eta w H}, \quad (2.7)$$

onde  $\text{Re}_{H1}$  é o número de Reynold e  $V$  a velocidade do fluido.

A perda de carga total ao longo do tubo em U é definida pela Equação (2.8) e (2.9).

$$H_w = \frac{\delta V^2}{2g} + \frac{c\tau L}{g\rho H}, \quad (2.8)$$

$$\delta = \frac{48}{\text{Re}_{H1}} \frac{L}{\left(1 + \frac{H}{w}\right)^2 H} + \sum_j \zeta_j, \quad (2.9)$$

sendo que  $\delta$  o coeficiente de perda de carga global e  $\zeta_j$  é o coeficiente de perda de carga minoritária incluindo os cotovelos e orifícios do tubo (Wang, et al., 2005).

## 2.8 Motor de Corrente Contínua

Motor de corrente contínua é formado por duas partes básicas, armadura e campo, havendo possibilidade de diferentes formas de conexão entre ambas. É importante ressaltar que ambos, armadura e campo, apresentam propriedades particulares e atrativas para distintas aplicações.

O motor de corrente contínua (CC) com excitação independente é empregado para reproduzir a energia mecânica disponibilizada pelo gerador. Vários trabalhos publicados demonstram a capacidade da máquina de corrente contínua de simular as turbinas eólicas. (Bonelli, 2010 e Alvarenga, 2012).

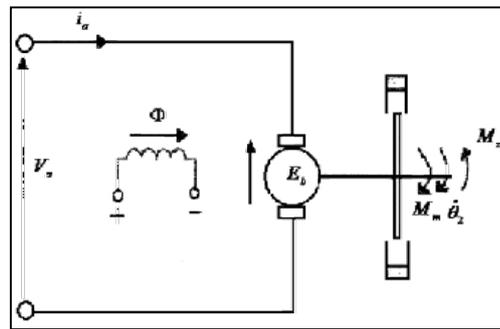
### 2.8.1 As Equações Governantes do Movimento de um Motor de Corrente Contínua (CC).

A Figura 18 mostra a representação esquemática do circuito do motor CC. As equações de movimento que representam o motor CC são tipicamente descritas pelas Equações (2.10) e (2.11).

$$J \frac{d^2 f}{dt^2} = M_m(t) - M_z(t) - H(t), \quad (2.10)$$

$$U(t) = R_t I(t) + L_t \frac{dI(t)}{dt} + E(t), \quad (2.11)$$

Figura 18- Representação Esquemática do Circuito do Motor C.C.



onde  $U(t)$  é a tensão aplicada aos terminais do motor, ou seja, tensão de armadura.  $I(t)$  é a corrente da armadura,  $R_t$  e  $L_t$  é a resistência da armadura e indutância do motor respectivamente.  $E(t)$  é a força contra eletromotriz,  $M_z(t)$  é o torque externo aplicado no eixo de transmissão do motor,  $H(t)$  é o torque por atrito e  $M_m(t)$  o torque gerado pelo motor. O torque  $M_m(t)$  e a força contra eletromotriz  $E(t)$  pode ser expressa pelas Equações (2.12) (2.13) (Warminski, et al., 2003).

$$M_m(t) = c_M \Phi I(t), \quad (2.12)$$

$$E(t) = c_e \Phi W(t), \quad (2.13)$$

sendo  $c_e$  e  $c_M$  são constantes elétricas e mecânicas e  $\Phi$  é o fluxo magnético. Assume-se que as constantes da corrente e da tensão de excitação externa são  $I_m$  e  $U_m$ , respectivamente. Assim a equação diferencial completa do sistema eletromecânico é apresentada na Equação (2.14).

$$\frac{d\tilde{I}(t)}{dt} = -\frac{R_t}{L_t} \tilde{I}(t) - \frac{c_e \Phi}{L_t} f' + \frac{\tilde{U}(t)}{L_t}. \quad (2.14)$$

Na literatura atual, é muito frequente a simplificação do modelo do motor CC (Kononenko, 1969). A equação generalizada do motor pode ser expressa por:

$$M_m = \frac{p_2}{p_1} U - \frac{p_2 p_3}{p_1} W, \quad (2.15)$$

sendo  $\Gamma(\dot{f}) = M_m(\dot{f}) - H(\dot{f})$  a diferença entre o torque gerado pelo motor e a resistência do torque. Essa função pode ser aproximada linearmente por  $\Gamma(\dot{f}) = a - b\dot{f}$ , onde  $a$  é o parâmetro de controle que pode ser alterado de acordo com a voltagem do sistema e  $b$  é o parâmetro de controle característico do modelo do motor CC.

### 3 DINÂMICA E CONTROLE DO SISTEMA VIBRATÓRIO

Neste capítulo aborda-se a modelagem geométrica, física e matemática adotada para a solução do problema. Consideram-se os problemas de oscilações em torres eólicas, representando esse por um sistema de pêndulo invertido (torre) e motor de corrente contínua como fonte de excitação (gerador).

#### 3.1 Introdução

Neste capítulo foram desenvolvidas as equações de movimento para diferentes modelos de sistemas.

Devido a expressões algébricas de um conjunto de equações diferenciais ordinárias não lineares e para transformar para um sistema de primeira ordem foi necessário utilizar o MAPLE™ e o MATLAB®.

#### 3.2 Obtenção das Equações de Movimento

As equações do movimento do sistema são obtidas através das equações de Lagrange. Assim é necessário determinar a energia cinética total e a energia potencial total do sistema.

#### 3.3 Descrição do Caso 1:

##### 3.3.1 Equações de Movimento do Sistema Sem Controle

O modelo geométrico para o sistema não ideal é estabelecido de acordo com a representação esquemática mostrada na Figura 19.

##### 3.3.1.1 Posição da Torre

A Figura 20 apresenta o deslocamento da torre e do motor. As coordenadas da massa da torre são dadas na Equação (3.1) sendo  $l$  é a altura e  $\theta_1$  o deslocamento angular da torre.

$$x_1 = l \sin \theta_1 \text{ e } y_1 = l \cos \theta_1, \quad (3.1)$$

suas derivadas  $\dot{x}_1$  e  $\dot{y}_1$  são representadas por:

$$\dot{x}_1 = \dot{\theta}_1 l \cos \theta_1 \text{ e } \dot{y}_1 = -\dot{\theta}_1 l \sin \theta_1. \quad (3.2)$$

Figura 19- Modelo Geométrico do Sistema sem Controle

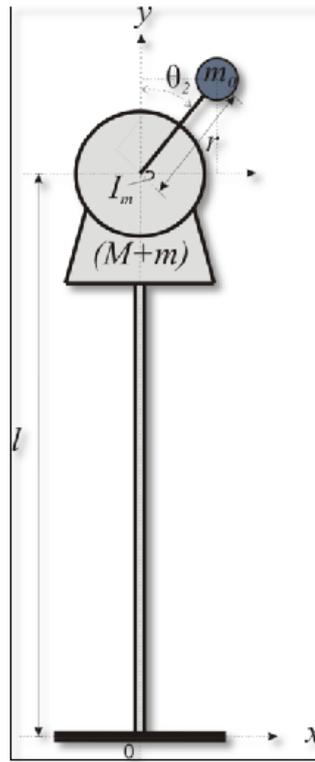
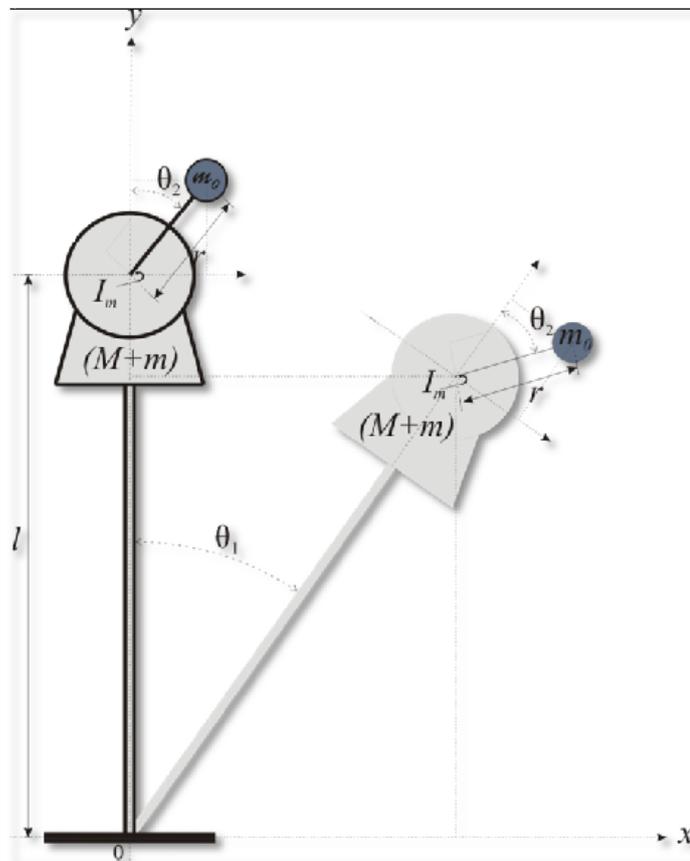


Figura 20- Modelo Representativo do Deslocamento da Estrutura



### 3.3.1.2 Energia Cinética da Torre

A energia cinética da torre é descrita pela Equação (3.3), onde  $M$  é a massa da torre,  $m$  a massa do motor e  $m_o$  a massa desbalanceada do motor,

$$T_1 = \frac{1}{2}(M + m)(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2). \quad (3.3)$$

Realizam-se as devidas substituições e simplificações e obtém-se a energia cinética da torre sendo:

$$T_1 = \frac{\dot{\theta}_1^2 l^2}{2}(M + m). \quad (3.4)$$

### 3.3.1.3 Energia Potencial da Torre

$$V_1 = (M + m)gl \cos \theta_1 + \frac{1}{2}k\theta_1^2, \quad (3.5)$$

onde  $g$  é a aceleração gravitacional,  $k$  a constante de rigidez à flexão da torre. Sabe-se que a constante da rigidez pode ser determinada por:

$$k = \frac{3EI_c}{l^3}, \quad (3.6)$$

onde  $E$  representa o módulo de elasticidade do material utilizado para construção da torre e  $I_c$  o momento de inércia da torre. Para determinar o momento de inércia da torre supõe-se que esta seja uma barra delgada, então  $I_c$  será:

$$I_c = \frac{d_t l^3}{12}. \quad (3.7)$$

### 3.3.1.4 Posição da Massa Desbalanceada

A coordenada da massa desbalanceada é expressa por:

$$x_2 = l \sin \theta_1 + r \cos \theta_2 \quad e \quad y_2 = l \cos \theta_1 + r \sin \theta_2, \quad (3.8)$$

sendo  $r$  a distância entre a massa desbalanceada e o eixo do motor e  $\theta_2$  o deslocamento angular do motor. As derivadas  $\dot{x}_2$  e  $\dot{y}_2$  representam a velocidade angular da massa desbalanceada, representadas por:

$$\dot{x}_2 = \dot{\theta}_1 l \cos \theta_1 + \dot{\theta}_2 r \cos \theta_2 \quad e \quad \dot{y}_2 = -\dot{\theta}_1 l \sin \theta_1 - \dot{\theta}_2 r \sin \theta_2. \quad (3.9)$$

### 3.3.1.5 Energia Cinética da Massa Desbalanceada

A energia cinética da massa desbalanceada é definida pela seguinte equação:

$$T_2 = \frac{m_0}{2}(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) + \frac{I_m \dot{\theta}_2^2}{2}, \quad (3.10)$$

$I_m$  é o momento de inércia do motor. Realizando as devidas substituições e simplificações, obtém-se a energia cinética da massa desbalanceada como sendo:

$$T_2 = \frac{\dot{\theta}_1^2}{2} l^2 m_0 + \frac{\dot{\theta}_2^2}{2} (I_m + r^2 m_0) + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 l r m_0 \cos(\theta_1 - \theta_2). \quad (3.11)$$

### 3.3.1.6 Energia Potencial da Massa Desbalanceada

A energia cinética do motor é expressa através da Equação (3.12).

$$V_2 = m_0 g (l \cos \theta_1 + r \cos \theta_2). \quad (3.12)$$

### 3.3.1.7 Energia Cinética e Energia Potencial Total

Com as energias cinéticas obtidas nas Equações (3.4) e (3.11), alcança-se a energia cinética total do sistema não ideal,

$$T = \frac{\dot{\theta}_1^2 l^2}{2} (M + m + m_0) + \frac{\dot{\theta}_2^2}{2} (I_m + r^2 m_0) + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 l r m_0 \cos(\theta_1 - \theta_2), \quad (3.13)$$

e com as energias potenciais obtidas nas Equações (3.5), e (3.12), obtém-se a energia potencial total do sistema sem controle, Equação (3.14).

$$V = \cos \theta_1 g l (M + m + m_0) + \frac{1}{2} \theta_1^2 k + \cos \theta_2 g r m_0. \quad (3.14)$$

### 3.3.1.8 Equações de Euler-Lagrange

O Lagrangeano de um sistema é calculado pela diferença entre a energia cinética total e a energia potencial total do sistema, isto é,  $L=T-V$ . O sistema deve ser expresso em coordenadas generalizadas para aplicação do teorema. Sendo  $i=1,2,\dots$ , onde  $Q$  representa as forças não conservativas de cada parte do sistema, se esta existir, tem-se:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_i} = Q_i. \quad (3.15)$$

O sistema em estudo apresenta um Lagrangeano que é obtido através da diferença entre as Equações (3.13) e (3.14),

$$L = \frac{\dot{\theta}_1^2 l^2}{2} (M + m + m_0) + \frac{\dot{\theta}_2^2}{2} (I_m + r^2 m_0) + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 l r m_0 \cos(\theta_1 - \theta_2) - \frac{\theta_1^2 k}{2} - \cos \theta_2 g r m_0 - \cos \theta_1 g l (M + m + m_0). \quad (3.16)$$

### 3.3.1.9 Equação de Euler-Lagrange para a Torre

Usando a equação de Euler-Lagrange com relação à torre:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = Q_1 \quad (3.17)$$

onde  $Q_1$  é a força não conservativa referente à torre, sendo  $c_1$  o amortecimento viscoso linear,

$$Q_1 = -\dot{\theta}_1 c_1. \quad (3.18)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = \dot{\theta}_1 l^2 (M + m + m_0) + \dot{\theta}_2 l r m_0 \cos(\theta_1 - \theta_2), \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) &= \ddot{\theta}_1 l^2 (M + m + m_0) + \ddot{\theta}_2 l r m_0 \cos(\theta_1 - \theta_2) + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 l m_0 r (\cos \theta_1 \sin \theta_2 - \sin \theta_1 \cos \theta_2) \\ &+ \dot{\theta}_2^2 l r m_0 (\sin \theta_1 \cos \theta_2 - \cos \theta_1 \sin \theta_2), \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_1} = \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 l r m_0 (\cos \theta_1 \sin \theta_2 - \sin \theta_1 \cos \theta_2) + \sin \theta_1 g l (M + m + m_0) - \theta_1 k. \quad (3.21)$$

Substituindo as Equações (3.18), (3.20) e (3.21) em (3.17), obtém-se:

$$\begin{aligned} \ddot{\theta}_1 l^2 (M + m + m_0) + \ddot{\theta}_2 l r m_0 \cos(\theta_1 - \theta_2) + \dot{\theta}_2^2 l r m_0 \sin(\theta_1 - \theta_2) - \sin \theta_1 g l (M + m + m_0) \\ + k \theta_1 = -c_1 \dot{\theta}_1. \end{aligned} \quad (3.22)$$

### 3.3.1.10 Equações de Euler-Lagrange da Massa Desbalanceada

Agora será considerada a ação do motor com a massa desbalanceada sobre o sistema torre. Portanto, a equação de Lagrange em relação ao motor e massa desbalanceada é dada pela Equação (3.23),

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = Q_2, \quad (3.23)$$

sendo  $Q_2$  a força não conservativa referente ao motor, assim,  $Q_2(\theta_2, t) = a V_a - b_2 \dot{\theta}_2$ , onde os parâmetros  $a$  e  $b$  estão relacionados ao motor de corrente contínua (Peruzzi, 2005).

$$a = \frac{k_m}{R_a} \text{ e } b_2 = \frac{k_m k_b}{R_a}, \quad (3.24)$$

onde  $R_a$  é a resistência elétrica do motor,  $k_b$  a constante da tensão elétrica do motor,  $V_a$  a tensão de entrada aplicada na armadura do motor e  $k_m$  a constante de torque do motor.

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} = \dot{\theta}_2 (r^2 m_0 + I_m) - \dot{\theta}_1 l r m_0 \sin(\theta_1 + \theta_2), \quad (3.25)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) = \ddot{\theta}_2 (r^2 m_0 + I_m) - \ddot{\theta}_1 l r m_0 \sin(\theta_1 + \theta_2) - \dot{\theta}_1^2 l r m_0 (\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2) \quad (3.26)$$

$$- \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 l r m_0 (\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2),$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_2} = - \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 l r m_0 (\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2) - g r m_0 \cos \theta_2. \quad (3.27)$$

Substituindo as Equações (3.26) e (3.27) em (3.23), encontra-se:

$$\ddot{\theta}_1 l r m_0 \cos(\theta_1 + \theta_2) + \ddot{\theta}_2 (r^2 m_0 + I_m) - \dot{\theta}_1^2 l r m_0 \sin(\theta_1 - \theta_2) - g r m_0 \sin \theta_2 = a V_a - b_2 \dot{\theta}_2. \quad (3.28)$$

Desta forma, as equações do movimento para o sistema sem amortecimento, torre e motor, são dadas pelo sistema de equações (3.29) e (3.30):

$$\ddot{\theta}_1 l^2 (M + m + m_0) + \ddot{\theta}_2 l r m_0 \cos(\theta_1 - \theta_2) = - \dot{\theta}_2^2 l r m_0 \sin(\theta_1 - \theta_2) + \sin \theta_1 g l (M + m + m_0) - c_1 \dot{\theta}_1 - k \theta_1, \quad (3.29)$$

$$\ddot{\theta}_1 l r m_0 \cos(\theta_1 + \theta_2) + \ddot{\theta}_2 (r^2 m_0 + I_m) = \dot{\theta}_1^2 l r m_0 \sin(\theta_1 - \theta_2) + g r m_0 \sin \theta_2 + a V_a - b_2 \dot{\theta}_2. \quad (3.30)$$

Para facilitar a programação e implementação computacional, no MATLAB<sup>®</sup>, das equações do sistema, simplificam-se os termos e se consideram novas variáveis.

$$\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \frac{l r m_0}{l^2 (M + m + m_0)} = - \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \frac{l r m_0}{l^2 (M + m + m_0)} - \sin \theta_1 \frac{g}{l} - \theta_1 \frac{k}{l^2 (M + m + m_0)} - \dot{\theta}_1 \frac{c_1}{l^2 (M + m + m_0)}, \quad (3.31)$$

$$\ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) \frac{l r m_0}{(r^2 m_0 + I_m)} + \ddot{\theta}_2 = \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \frac{l r m_0}{(r^2 m_0 + I_m)} + \sin \theta_2 \frac{g r m_0}{(r^2 m_0 + I_m)} + V_a \frac{a}{(r^2 m_0 + I_m)} - \dot{\theta}_2 \frac{b_2}{(r^2 m_0 + I_m)}. \quad (3.32)$$

$$\boxed{\begin{aligned} \gamma_{1,1} &= \frac{l r m_0}{l^2 (M + m + m_0)}; \gamma_{1,2} = \frac{g}{l}; \gamma_{1,3} = \frac{c_1}{l^2 (M + m + m_0)}; \gamma_{1,4} = \frac{k}{l^2 (M + m + m_0)}; \\ \gamma_{1,5} &= \frac{l r m_0}{(r^2 m_0 + I_m)}; \gamma_{1,6} = \frac{g r m_0}{(r^2 m_0 + I_m)}; a' = \frac{a}{(r^2 m_0 + I_m)}; b' = \frac{b_2}{(r^2 m_0 + I_m)}. \end{aligned}} \quad (3.33)$$

Assim o sistema com as novas simplificações será:

$$\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \gamma_{1,1} = - \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \gamma_{1,1} + \sin \theta_1 \gamma_{1,2} - \dot{\theta}_1 \gamma_{1,3} - \theta_1 \gamma_{1,4}, \quad (3.34)$$

$$\ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) \gamma_{1,5} + \ddot{\theta}_2 = \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \gamma_{1,5} + \sin \theta_2 \gamma_{1,6} + V_a a' - \dot{\theta}_2 b'. \quad (3.35)$$

Reescreve-se o sistema de forma matricial, a fim de se obter as equações finais do sistema.

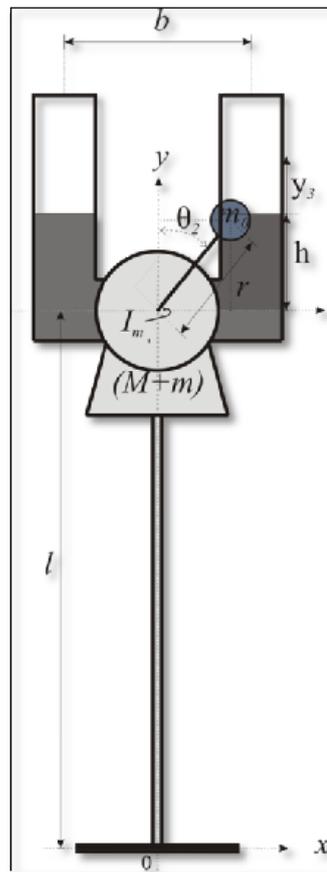
$$\begin{bmatrix} 1 & \cos(\theta_1 - \theta_2)\gamma_{1,1} \\ \cos(\theta_1 - \theta_2)\gamma_{1,5} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2)\gamma_{1,1} + \sin\theta_1\gamma_{1,2} - \dot{\theta}_1\gamma_{1,3} - \theta_1\gamma_{1,4} \\ \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2)\gamma_{1,5} + \sin\theta_2\gamma_{1,6} + V_a a' - \dot{\theta}_2 b' \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

### 3.3.2 Equações do Movimento do Sistema com Controle

Para descrever as equações do movimento do sistema com amortecedor, será acrescentado às equações de energia cinética, potencial e força não conservativa referente ao amortecedor MR-TLCD.

O modelo geométrico para o sistema ideal é estabelecido de acordo com a representação esquemática mostra na Figura 21. Para descrever o movimento utiliza-se o sistema de referência XOY.

Figura 21- Modelo Geométrico do Sistema com Controle



#### 3.3.2.1 Posição do Fluido

$$x_3 = l \sin \theta_1 \quad e \quad y_3 = y_3 + l \cos \theta_1, \quad (3.37)$$

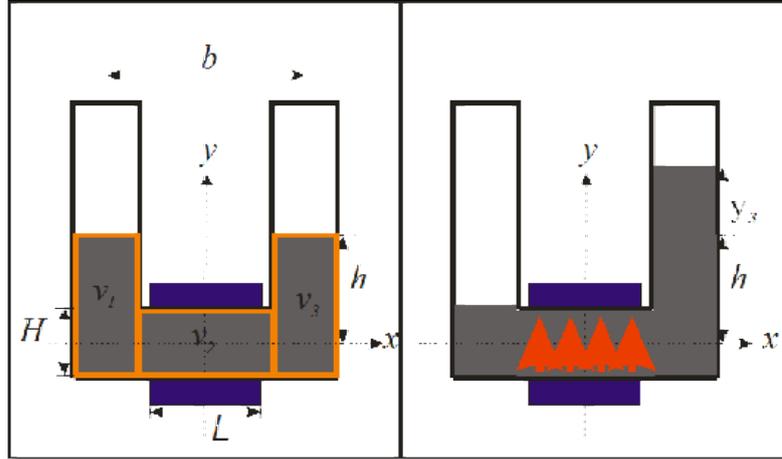
$x_3$  é o deslocamento do fluido no sentido de  $x$ ,  $y_3$  é o deslocamento do fluido na direção de  $y$ .

A derivada  $\dot{x}_3$  e  $\dot{y}_3$  representa a velocidade do fluido no sistema e são representadas pela Equação (3.38),

$$\dot{x}_3 = \dot{\theta}_1 l \cos \theta_1 \quad e \quad \dot{y}_3 = \dot{y}_3 - \dot{\theta}_1 l \sin \theta_1. \quad (3.38)$$

Na Figura 22. é observado o deslocamento do fluido no interior do tubo e os volumes que são referência para o cálculo da energia cinética do MR-TLCD.

Figura 22- Deslocamento do Fluido no Tubo



### 3.3.2.2 Energia cinética do fluido

A equação da energia cinética do fluido segundo K.A., *et al.* (2011), pode ser obtida através da Equação (3.39),

$$T_3 = \frac{1}{2} \int_{v_1} \rho (\dot{y}_3^2 + \dot{x}_3^2) dV + \frac{1}{2} \int_{v_2} \rho (\dot{y}_3 + \dot{x}_3)^2 dV + \frac{1}{2} \int_{v_3} \rho (\dot{y}_3^2 + \dot{x}_3^2) dV. \quad (3.39)$$

Sabendo que  $v_1 = hA$ ,  $v_2 = bA$  e  $v_3 = hA$ , integrando e realizando as devidas substituições na Equação (3.39), obtém-se:

$$T_3 = \frac{1}{2} A \rho h (\dot{y}_3^2 + \dot{x}_3^2) + \frac{1}{2} A \rho b (\dot{y}_3 + \dot{x}_3)^2 + \frac{1}{2} A \rho h (\dot{y}_3^2 + \dot{x}_3^2), \quad (3.40)$$

sendo que a velocidade de escoamento do fluido de acordo com suas coordenadas será:

$$(\dot{x}_3 + \dot{y}_3)^2 = \dot{\theta}_1^2 l^2 (1 - \sin 2\theta_1) + \dot{y}_3^2 + 2\dot{\theta}_1 \dot{y}_3 l (\cos \theta_1 - \sin \theta_1), \quad (3.41)$$

$$(\dot{x}_3^2 + \dot{y}_3^2) = \dot{\theta}_1^2 l^2 - 2\dot{\theta}_1 \dot{y}_3 l \sin \theta_1 + \dot{y}_3^2. \quad (3.42)$$

A equação que representa a energia cinética do fluido será:

$$T_3 = \dot{\theta}_1^2 l^2 A \rho [2h + b(1 - \sin 2\theta_1)] + \dot{y}_3 \dot{\theta}_1 l A \rho (b \cos \theta_1 - \sin \theta_1 (4h + 2b)) + \dot{y}_3^2 A \rho (2h + b). \quad (3.45)$$

### 3.3.2.3 Energia Potencial do Fluido

A energia potencial do fluido pode ser expressa por:

$$V = \int_{V_1} gz\rho dV + \int_{V_3} gz\rho dV. \quad (3.46)$$

Após a integração obtém-se:

$$V = gA\rho(h^2 + y_3^2). \quad (3.47)$$

### 3.3.2.4 Equações de Euler-Lagrange para o Sistema com Controle

Para determinar a energia cinética total do sistema com MR-TLCD é somado a Equação (3.13), do sistema sem controle, a energia cinética do fluido, Equação (3.45). Assim, obtém-se a energia cinética total do sistema com controle,

$$T = \frac{\dot{\theta}_1^2 l^2}{2}(M + m + m_0) + \frac{\dot{\theta}_2^2}{2}(I_m + r^2 m_0) + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 l r m_0 \cos(\theta_1 - \theta_2) + \dot{y}_3^2 A\rho(2h + b) + \dot{\theta}_1^2 l^2 A\rho[2h + b(1 - \sin 2\theta_1)] + \dot{y}_3 \dot{\theta}_1 l A\rho(b \cos \theta_1 - \sin \theta_1(4h + 2b)). \quad (3.48)$$

Com a Equação (3.14), energia potencial total do sistema sem controle, adiciona-se a energia potencial do fluido, Equação (3.47), para obter a energia potencial total do sistema com controle,

$$V = \cos \theta_1 gl(M + m + m_0) + \frac{1}{2} \theta_1^2 k + \cos \theta_2 gr m_0 + gA\rho(h^2 + y_3^2). \quad (3.49)$$

Para o sistema com controle o Lagrangeano é obtido através da diferença entre as Equações (3.38) e (3.39),

$$L = \frac{\dot{\theta}_1^2 l^2}{2}(M + m + m_0) + \frac{\dot{\theta}_2^2}{2}(I_m + r^2 m_0) + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 l r m_0 \cos(\theta_1 - \theta_2) + \dot{y}_3^2 A\rho(2h + b) + \dot{\theta}_1^2 l^2 A\rho[2h + b(1 - \sin 2\theta_1)] + \dot{y}_3 \dot{\theta}_1 l A\rho(b \cos \theta_1 - \sin \theta_1(4h + 2b)) - \cos \theta_1 gl(M + m + m_0) - \frac{1}{2} \theta_1^2 k - \cos \theta_2 gr m_0 - gA\rho(h^2 + y_3^2). \quad (3.50)$$

### 3.3.2.5 Equação Euler-Lagrange para a Torre

A equação de Euler-Lagrange com relação à torre é:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = \dot{\theta}_1 l^2 (A\rho(2h + b) + M + m + m_0) - \dot{\theta}_1 l^2 A\rho b \sin 2\theta_1 + \dot{\theta}_2 l r m_0 \cos(\theta_1 - \theta_2) + \dot{y}_3 l A\rho (b \cos \theta_1 - \sin \theta_1(2h + b)), \quad (3.51)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) = \ddot{\theta}_1 l^2 (A\rho(2h + b) - b \sin 2\theta_1) + M + m + m_0 - 2\dot{\theta}_1^2 l^2 A\rho b \cos 2\theta_1 + \ddot{\theta}_2 l m_0 r \cos(\theta_1 - \theta_2) - \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 l m_0 r \sin(\theta_1 - \theta_2) + \dot{\theta}_2^2 l m_0 r \sin(\theta_1 - \theta_2) + \ddot{y}_3 l A\rho (b \cos \theta_1 - \sin \theta_1(2h + b)) - \dot{\theta}_1 \dot{y}_3 l A\rho (b \sin \theta_1 + \cos \theta_1(2h + b)), \quad (3.52)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = & \dot{\theta}_1^2 l^2 A \rho b \cos 2\theta_1 - \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 l m_0 r \sin(\theta_1 - \theta_2) - \theta_1 k + \sin \theta_1 g l (M + m + m_0) \\ & - \dot{\theta}_1 \dot{y}_3 l A \rho (b \sin \theta_1 - \cos \theta_1 (2h + b)). \end{aligned} \quad (3.53)$$

A equação final da torre obtida será:

$$\begin{aligned} \ddot{\theta}_1 l^2 (A \rho (2h + b - b \sin 2\theta_1) + M + m + m_0) + \ddot{\theta}_2 l m_0 r \cos(\theta_1 + \theta_2) + \dot{\theta}_2^2 l m_0 r \sin(\theta_1 - \theta_2) \\ + \theta_1 k + \ddot{y}_3 l A \rho (b \cos \theta_1 - \sin \theta_1 (2h + b)) - \dot{\theta}_1^2 l^2 A \rho b \cos 2\theta_1 - \sin \theta_1 g l (M + m + m_0) = -\dot{\theta}_1 c_1. \end{aligned} \quad (3.54)$$

### 3.3.2.6 Equação Euler-Lagrange para o Fluido

Considera-se a ação do MR-TLCD sobre o sistema do motor e torre. Portanto, a equação de Lagrange em relação ao MR-TLCD é dada pela Equação (3.55).

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_3} \right) - \frac{\partial L}{\partial y_3} = Q_3, \quad (3.55)$$

sendo  $Q_3$  a força não conservativa do fluido. A modelagem do sistema do MR em placas paralelas é amplamente difundida na literatura e é utilizada no trabalho. Então a força não conservativa referente ao fluido será:

$$Q_3 = -\frac{1}{2} \rho A \delta |\dot{y}_3| \dot{y}_3 - \frac{\dot{y}_3}{|\dot{y}_3|} \frac{c \tau_3 A L}{H}, \quad (3.56)$$

onde  $\rho$  é a massa específica do magneto reológico,  $A$  é área do tubo do amortecedor TLCD,  $\delta$  o coeficiente de perda de carga global,  $c$  o coeficiente baseado na velocidade do escoamento,  $\tau$  a tensão de escoamento,  $H$  distância entre os polos fixos e  $L$  a distância que percorre o fluido entre os polos.

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_3} = \dot{y}_3 A \rho (2h + b) + \dot{\theta}_1 A l \rho (b \cos \theta_1 - \sin \theta_1 (2h + b)), \quad (3.57)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_3} \right) = & \ddot{\theta}_1 A l \rho (b \cos \theta_1 - \sin \theta_1 (2h + b)) - \dot{\theta}_1^2 A l \rho (b \sin \theta_1 + \cos \theta_1 (2h + b)) \\ & + \ddot{y}_3 A \rho (2h + b), \end{aligned} \quad (3.58)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y_3} = -y_3 2A \rho g. \quad (3.59)$$

A equação de movimento governante do MR-TLCD pode ser obtida considerando o efeito da tensão de escoamento na equação de movimento do líquido no tubo. A equação final do MR-TLCD, substituindo as Equações (3.56), (3.58) e (3.59) em (3.60), obtêm-se.

$$\ddot{y}_3 A \rho (2h + b) + \ddot{\theta}_1 A l \rho (b \cos \theta_1 - \sin \theta_1 (2h + b)) - \dot{\theta}_1^2 A l \rho (b \sin \theta_1 + \cos \theta_1 (2h + b)) + y_3 2 A \rho g = -\frac{1}{2} \rho A \delta |\dot{y}_3| \dot{y}_3 - \frac{\dot{y}_3}{|\dot{y}_3|} \frac{c \tau_3 A L}{H}. \quad (3.60)$$

Finalmente, obtêm-se as equações de movimento da torre, massa desbalanceada e do fluido:

$$\begin{aligned} \ddot{\theta}_1 + \frac{\ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) l m_0 r}{l^2 A \rho (2h/b + 1 - \sin 2\theta_1) + l^2 (M + m + m_0)} + \frac{\ddot{y}_3 l A \rho b (\cos \theta_1 - \sin \theta_1 (2h/b + 1))}{l^2 A \rho (2h/b + 1 - \sin 2\theta_1) + l^2 (M + m + m_0)} = \\ - \frac{\dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) l m_0 r}{l^2 A \rho (2h/b + 1 - \sin 2\theta_1) + l^2 (M + m + m_0)} + \frac{\dot{\theta}_1^2 \cos 2\theta_1 l^2 A \rho b}{l^2 A \rho (2h/b + 1 - \sin 2\theta_1) + l^2 (M + m + m_0)} \\ - \frac{\theta_1 k}{l^2 A \rho (2h/b + 1 - \sin 2\theta_1) + l^2 (M + m + m_0)} + \frac{\sin \theta_1 g l (M + m + m_0)}{l^2 A \rho (2h/b + 1 - \sin 2\theta_1) + l^2 (M + m + m_0)} \\ - \frac{\dot{\theta}_1 c_1}{l^2 A \rho (2h/b + 1 - \sin 2\theta_1) + l^2 (M + m + m_0)} \end{aligned} \quad (3.61)$$

$$\frac{\ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) l r m_0}{(r^2 m_0 + I_m)} + \ddot{\theta}_2 = \frac{\dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) l r m_0}{(r^2 m_0 + I_m)} - \frac{\sin \theta_2 g r m_0}{(r^2 m_0 + I_m)} + V_a \frac{a}{(r^2 m_0 + I_m)} - \dot{\theta}_2 \frac{b_2}{(r^2 m_0 + I_m)} \quad (3.62)$$

$$\begin{aligned} \frac{\ddot{\theta}_1 l b (\cos \theta_1 - \sin \theta_1 (2h/b + 1))}{(2h + b)} + \ddot{y}_3 = \frac{\dot{\theta}_1^2 l b (\sin \theta_1 + \cos \theta_1 (2h/b + 1))}{(2h + b)} - y_3 \frac{2g}{(2h + b)} \\ - \frac{\delta}{2(2h + b)} |\dot{y}_3| \dot{y}_3 - \frac{\dot{y}_3}{|\dot{y}_3|} \frac{c \tau_3 L}{\rho H (2h + b)} \end{aligned} \quad (3.63)$$

Definindo os seguintes parâmetros:

$$\begin{aligned} \alpha_{1,1} = l m_0 r; \alpha_{1,2} = l^2 A \rho b; \alpha_{1,3} = \frac{2h}{b} + 1; \alpha_{1,4} = l^2 (M + m + m_0); \alpha_{1,5} = g l (M + m + m_0) \\ \alpha_{1,6} = c_1; \alpha_{1,7} = k; \alpha_{1,8} = \frac{l m_0 r}{I_m + m_0 r^2}; \alpha_{1,9} = \frac{g r m_0}{I_m + m_0 r^2}; \alpha_{1,10} = \frac{l b}{2h + b}; \alpha_{1,11} = \frac{2g}{2h + b}; \\ \alpha_{1,12} = \frac{\delta}{4h + 2b}; \alpha_{1,13} = \frac{c \tau_3 L}{\rho H (2h + b)}; a' = \frac{a}{(r^2 m_0 + I_m)}; b' = \frac{b_2}{(r^2 m_0 + I_m)}. \end{aligned} \quad (3.64)$$

E após as simplificações, com o intuito de reduzir o número de variáveis, as equações de movimento do sistema são:

$$\begin{aligned} \ddot{\theta}_1 + \frac{\ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \alpha_{1,1}}{\alpha_{1,2} (\alpha_{1,3} - \sin 2\theta_1) + \alpha_{1,4}} + \frac{\ddot{y}_3 \alpha_{1,2} (\cos \theta_1 - \sin \theta_1 \alpha_{1,3})}{\alpha_{1,2} (\alpha_{1,3} - \sin 2\theta_1) + \alpha_{1,4}} = \frac{\dot{\theta}_1^2 \cos 2\theta_1 \alpha_{1,2}}{\alpha_{1,2} (\alpha_{1,3} - \sin 2\theta_1) + \alpha_{1,4}} \\ - \frac{\dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \alpha_{1,1}}{\alpha_{1,2} (\alpha_{1,3} - \sin 2\theta_1) + \alpha_{1,4}} - \frac{\dot{\theta}_1 \alpha_{1,6}}{\alpha_{1,2} (\alpha_{1,3} - \sin 2\theta_1) + \alpha_{1,4}} - \frac{\theta_1 \alpha_{1,7}}{\alpha_{1,2} (\alpha_{1,3} - \sin 2\theta_1) + \alpha_{1,4}} \\ + \frac{\sin \theta_1 \alpha_{1,5}}{\alpha_{1,2} (\alpha_{1,3} - \sin 2\theta_1) + \alpha_{1,4}}, \end{aligned} \quad (3.65)$$

$$\ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) \alpha_{1,8} + \ddot{\theta}_2 = \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \alpha_{1,8} - \sin \theta_2 \alpha_{1,9} + V_a a' - \dot{\theta}_2 b', \quad (3.66)$$

$$\ddot{\theta}_1 \alpha_{1,10} (\cos \theta_1 - \sin \theta_1 \alpha_{1,3}) + \ddot{y}_3 = \dot{\theta}_1^2 \alpha_{1,10} (\sin \theta_1 + \cos \theta_1 \alpha_{1,3}) - y_3 \alpha_{1,11} - \alpha_{1,12} |\dot{y}_3| \dot{y}_3 - \frac{\dot{y}_3}{|\dot{y}_3|} \alpha_{1,13}. \quad (3.67)$$

Reescreve-se o sistema de forma matricial a fim de se obter as equações finais do sistema.

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{\cos(\theta_1 - \theta_2) \alpha_{1,1}}{\alpha_{1,2} (\alpha_{1,3} - \sin 2\theta_1) + \alpha_{1,4}} & \frac{\alpha_{1,2} (\cos \theta_1 - \sin \theta_1 \alpha_{1,3})}{\alpha_{1,2} (\alpha_{1,3} - \sin 2\theta_1) + \alpha_{1,4}} \\ \cos(\theta_1 - \theta_2) \alpha_{1,8} & 1 & 0 \\ \alpha_{1,10} (\cos \theta_1 - \sin \theta_1 \alpha_{1,3}) & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{y}_3 \end{bmatrix} = \quad (3.68)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\dot{\theta}_1^2 \cos 2\theta_1 \alpha_{1,2}}{\alpha_{1,2} (\alpha_{1,3} - \sin 2\theta_1) + \alpha_{1,4}} - \frac{\dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \alpha_{1,1}}{\alpha_{1,2} (\alpha_{1,3} - \sin 2\theta_1) + \alpha_{1,4}} - \frac{\dot{\theta}_1 \alpha_{1,6}}{\alpha_{1,2} (\alpha_{1,3} - \sin 2\theta_1) + \alpha_{1,4}} \\ - \frac{\theta_1 \alpha_{1,7}}{\alpha_{1,2} (\alpha_{1,3} - \sin 2\theta_1) + \alpha_{1,4}} + \frac{\sin \theta_1 \alpha_{1,5}}{\alpha_{1,2} (\alpha_{1,3} - \sin 2\theta_1) + \alpha_{1,4}}, \\ \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \alpha_{1,8} - \sin \theta_2 \alpha_{1,9} + V_a a' - \dot{\theta}_2 b', \\ \dot{\theta}_1^2 \alpha_{1,10} (\sin \theta_1 + \cos \theta_1 \alpha_{1,3}) - y_3 \alpha_{1,11} - \alpha_{1,12} |\dot{y}_3| \dot{y}_3 - \frac{\dot{y}_3}{|\dot{y}_3|} \alpha_{1,13}. \end{bmatrix}$$

### 3.4 Descrição do Caso 2:

A formulação que será apresentada a seguir está baseada no trabalho de (Brasil, et al., 2006), porém será usado como amortecedor o MR-TLCD. A Figura 23(b) representa o modelo da torre eólica e o amortecedor. A massa  $M$ , antes designada como apenas a massa da torre, agora é definida como a massa da torre mais a massa do motor. Considera-se também que a massa da estrutura (torre + motor) não afeta a altura da mesma, muito menos a flexão lateral. A rigidez  $k$  da estrutura está relacionada ao movimento horizontal. A Figura 23(a) representa a torre com acoplamento do motor sem o amortecedor

Para a simulação o desbalanceamento do motor CC, foi incluído uma massa desbalanceada  $m_0$  a uma distância  $r$  do eixo de rotação do motor, onde o momento de inércia do motor é dado por  $I_m$ .

### 3.4.1 Equação de Movimento do Sistema Sem Controle.

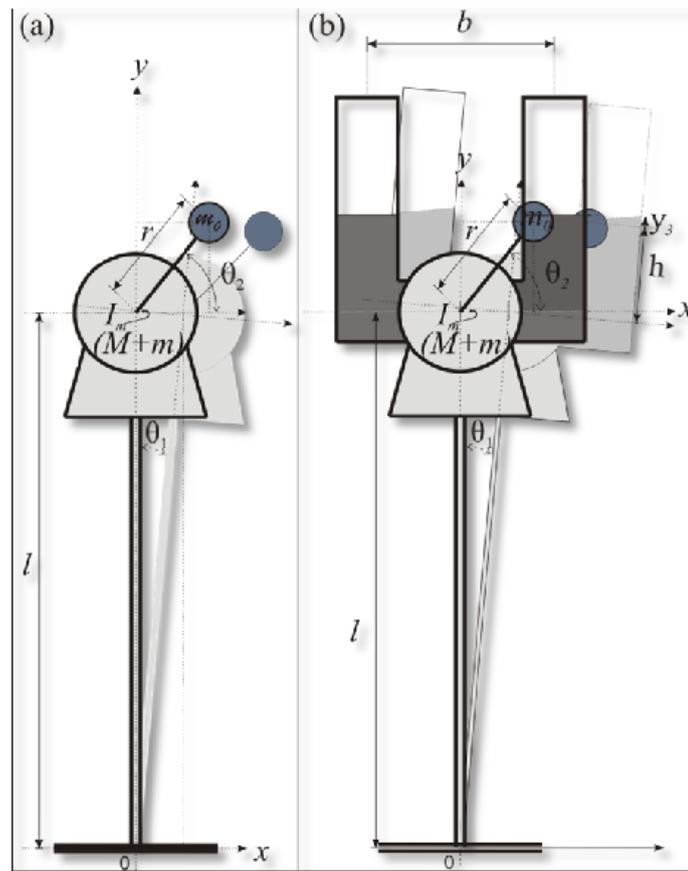
A metodologia de análise para a obtenção das equações de movimento é semelhante à adotada no Caso 1.

#### 3.4.1.1 Posição da Torre

A posição da massa da torre é dada pela Equação (3.69), onde  $X_1$  é o deslocamento horizontal,

$$X_1 = x_1 \text{ e } Y_1 = 0. \quad (3.69)$$

Figura 23- Modelo Geométrico e Físico da Torre. (a) sem Controle (b) com MR-TLCD



#### 3.4.1.2 Posição da massa desbalanceada

A posição da massa desbalanceada é expressa por:

$$x_2 = x_1 + r \cos \theta_2 \text{ e } y_2 = r \sin \theta_2, \quad (3.70)$$

sendo  $r$  a distância entre a massa desbalanceada e o eixo do motor. A derivada  $\dot{x}_2$  e  $\dot{y}_2$  representa a velocidade angular do sistema da massa desbalanceada, onde  $\dot{x}_2$  e  $\dot{y}_2$  são representadas por:

$$\dot{x}_2 = \dot{x}_1 - \dot{\theta}_2 r \sin \theta_2 \quad e \quad \dot{y}_2 = \dot{\theta}_2 r \cos \theta_2. \quad (3.71)$$

O deslocamento horizontal da torre é representado por  $x_1$  e o deslocamento angular da massa desbalanceada por  $\theta_2$ .

A Equação (3.72) descreve a energia cinética do sistema e a Equação (3.73) a energia potencial total para o sistema sem MR-TLCD, isto é,

$$T = \frac{\dot{x}_1^2}{2}(m + m_0) + \frac{\dot{\theta}_2^2}{2}(I_m + r^2 m_0) - \dot{x}_1 \dot{\theta}_2 r m_0 \sin \theta_2, \quad (3.72)$$

$$V = \frac{1}{2} k x_1^2 + m_0 g r \sin \theta_2. \quad (3.73)$$

Considerando as mesmas energias não conservativas aplicadas no Caso 1, utilizando a equação de Lagrange, obtém-se as equações de movimento da estrutura e da massa desbalanceada que são apresentadas nas Equações (3.74) e (3.75), respectivamente,

$$\ddot{x}_1(m + m_0) - \ddot{\theta}_2 r m_0 \sin \theta_2 - \dot{\theta}_2^2 r m_0 \cos \theta_2 + x_1 k = -c_1 \dot{x}_1, \quad (3.74)$$

$$\ddot{\theta}_2(m_0 r^2 + I_m) - \ddot{x}_1 r m_0 \sin \theta_2 + m_0 g r \cos \theta_2 = a V_a - b_2 \dot{\theta}_2. \quad (3.75)$$

As equações adimensionais de movimento para o sistema sem controle são apresentadas a seguir.

$$\ddot{x}_1 - \ddot{\theta}_2 \sin \theta_2 \gamma_{2,1} = \dot{\theta}_2^2 \cos \theta_2 \gamma_{2,1} - \dot{x}_1 \gamma_{2,2} - x_1 \gamma_{2,3}, \quad (3.76)$$

$$-\ddot{x}_1 \sin \theta_2 \gamma_{2,4} + \ddot{\theta}_2 = -\cos \theta_2 \gamma_{2,5} + a' V_a - \dot{\theta}_2 b'. \quad (3.77)$$

Onde,

$$\boxed{\begin{aligned} \gamma_{2,1} &= \frac{m_0}{m + m_0}; \gamma_{2,2} = \frac{c_1}{\omega_1(m + m_0)}; \gamma_{2,3} = \frac{1}{\omega_1^2} \frac{k}{m + m_0}; \gamma_{2,4} = \frac{m_0}{(r^2 m_0 + I_m)}; \\ \gamma_{2,5} &= \frac{1}{\omega_1^2} \frac{m_0 r g}{(r^2 m_0 + I_m)}; a' = \frac{a}{\omega^2 (r^2 m_0 + I_m)}; b' = \frac{b_2}{\omega (r^2 m_0 + I_m)}. \end{aligned}} \quad (7.78)$$

É importante notar a presença de dois movimentos harmônicos nas Equações (3.76) e (3.77), a frequência natural  $\omega_1$  relacionada com a torre e a frequência natural  $\omega_2$  relacionada com massa desbalanceada, que será:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{(M + m_0)}} = \sqrt{\gamma_{2,3}} \quad (3.79)$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{g \cdot m_0 \cdot r}{(r^2 \cdot m_0 + I_m)}} = \sqrt{\gamma_{2,5}} \quad (3.80)$$

Devido as diferentes grandezas existentes no modelo do sistema, Equação (3.76) e (3.77), é conveniente torná-lo adimensional, isto é, as Equações (3.76) e (3.77) deverá ser reescrita em novas variáveis de tempo e deslocamento,  $\tau$  e  $x$ . Assim, as equações são chamadas de equações adimensionais.

Para que  $x_1$  seja coerente em termos de unidades em relação à  $\theta_2$ , é realizada uma mudança de variável. Assumindo que:

$$x_1 = x_1 r. \quad (3.81)$$

Deve-se tornar a nova variável do tempo  $\tau$  proporcional a  $t$ , cuja razão de proporção é a frequência natural de  $\omega_1$  da torre, ou seja,  $\tau = \omega_1 t$ . Denotando a primeira e a segunda derivada de uma função  $x_i$ , em relação a variável  $\tau$ , por  $x_i' = \frac{dx_i}{d\tau}$  e  $x_i'' = \frac{d^2 x_i}{d\tau^2}$  e dividindo as equações dos sistemas pelos respectivos coeficientes dos termos de segunda ordem, obtém-se:

$$\begin{bmatrix} 1 & -\sin \theta_2 \gamma_{2,1} \\ -\sin \theta_2 \gamma_{2,4} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1'' \\ \theta_2'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_2'^2 \cos \theta_2 \gamma_{2,1} - x_1' \gamma_{2,2} - x_1 \\ -\cos \theta_2 \frac{\omega_2^2}{\omega_1^2} + a' V_a - \dot{\theta}_2 b' \end{bmatrix}. \quad (3.82)$$

### 3.4.2 Equação de Movimento do Sistema Com Controle.

O deslocamento horizontal da torre é representado por  $x_1$ , o deslocamento angular da massa desbalanceada por  $\theta_2$  e o deslocamento vertical do fluido por  $y_3$ .

A Equação (3.83) descreve a energia cinética do sistema e a Equação (3.84) a energia potencial total para o sistema sem MR-TLCD, isto é,

$$T = \frac{\dot{x}_1^2}{2} (m + m_0) + \frac{\dot{\theta}_2^2}{2} (I_m + r^2 m_0) - \dot{x}_1 \dot{\theta}_2 r m_0 \sin \theta_2 + \frac{\dot{x}_1^2}{2} A \rho (2h + b) + \dot{x}_1 \dot{y}_3 A \rho b + \frac{\dot{y}_3^2}{2} A \rho (2h + b), \quad (3.83)$$

$$V = \frac{1}{2} k x_1^2 + m_0 g r \sin \theta_2 + A \rho g (h^2 + y_3^2). \quad (3.84)$$

Após todos os procedimentos e ajustes algébricos, as equações de movimento do sistema com controle são dadas por:

$$\ddot{x}_1 - \frac{\ddot{\theta}_2 \sin \theta_2 m_0 r}{[A\rho(2h+b) + m + m_0]} + \frac{\ddot{y}_3 A\rho b}{[A\rho(2h+b) + m + m_0]} = \frac{\dot{\theta}_2^2 \cos \theta_2 m_0 r}{[A\rho(2h+b) + m + m_0]} - \frac{\dot{x}_1 c_1}{[A\rho(2h+b) + m + m_0]} - \frac{x_1 k}{[A\rho(2h+b) + m + m_0]}, \quad (3.85)$$

$$\ddot{\theta}_2 - \frac{\ddot{x} \sin \theta_2 r m_0}{(r^2 m_0 + I_m)} = -\frac{\cos \theta_2 g r m_0}{(r^2 m_0 + I_m)} + V_a \frac{a}{(r^2 m_0 + I_m)} - \dot{\theta}_2 \frac{b_2}{(r^2 m_0 + I_m)}, \quad (3.86)$$

$$\ddot{y}_3 + \frac{\ddot{x}_1 b}{(2h+b)} = -\frac{y_3 2g}{(2h+b)} - \frac{\delta}{(4h+2b)} |\dot{y}_3| \dot{y}_3 - \frac{\dot{y}_3}{|\dot{y}_3|} \frac{c\tau L}{H\rho(2h+b)}. \quad (3.87)$$

Para que  $x_1$  e  $y_3$  sejam coerentes em termos de unidades em relação à  $\theta_2$ , é realizada uma mudança de variável. Assumindo que:

$$x_1 = x_1 r, \quad (3.88)$$

$$y_3 = y_3 b. \quad (3.89)$$

Nota-se a presença de três movimentos harmônicos nas Equações (3.85), (3.86) e (3.87). A frequência natural  $\omega_1$  relacionada com a torre, a frequência natural  $\omega_2$  relacionada com massa desbalanceada e a frequência natural  $\omega_3$  do fluido dadas por:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{[A\rho(2h+b) + m + m_0]}} = \sqrt{\gamma_{2,4}}, \quad (3.90)$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{g m_0 r}{(r^2 m_0 + I_m)}} = \sqrt{\gamma_{2,10}}, \quad (3.91)$$

$$\omega_3 = \sqrt{\frac{2g}{(2h+b)}} = \sqrt{\gamma_{2,7}}. \quad (3.92)$$

Tomando,

$$\alpha_{2,1} = \frac{m_0}{[A\rho(2h+b) + m + m_0]}; \alpha_{2,2} = \frac{A\rho b^2}{[A\rho(2h+b) + m + m_0]};$$

$$\alpha_{2,3} = \frac{c_1}{\omega_3 [A\rho(2h+b) + m + m_0]}; \alpha_{2,4} = \frac{1}{\omega_3^2} \frac{k}{[A\rho(2h+b) + m + m_0]};$$

$$\alpha_{2,5} = \frac{m_0 r^2}{(r^2 m_0 + I_m)}; \alpha_{2,6} = \frac{r}{(2h+b)}; \alpha_{2,7} = \frac{2g}{(2h+b)}; \alpha_{2,8} = \frac{\delta b}{(4h+2b)};$$

$$\alpha_{2,9} = \frac{c\tau L}{\omega_3^2 H\rho(2h+b)}; \alpha_{2,11} = \frac{1}{\omega_3^2} \frac{g m_0 r}{(r^2 m_0 + I_m)}; a' = \frac{a}{\omega_3^2 (r^2 m_0 + I_m)}; b' = \frac{b_2}{\omega_3^2 (r^2 m_0 + I_m)}, \quad (3.93)$$

as equações de movimento adimensionais do sistema são:

$$x_1'' - \theta_2'' \sin \theta_2 \alpha_{2,1} + y_3'' \alpha_{2,2} = \theta_2'^2 \cos \theta_2 \alpha_{2,1} - x_1' \alpha_{2,3} - x_1 \frac{\omega_1^2}{\omega_3^2}, \quad (3.94)$$

$$-x_1'' \sin \theta_2 \alpha_{2,5} + \theta_2'' = -\cos \theta_2 \frac{\omega_2^2}{\omega_3^2} + V_a a' - \dot{\theta}_2 b', \quad (3.95)$$

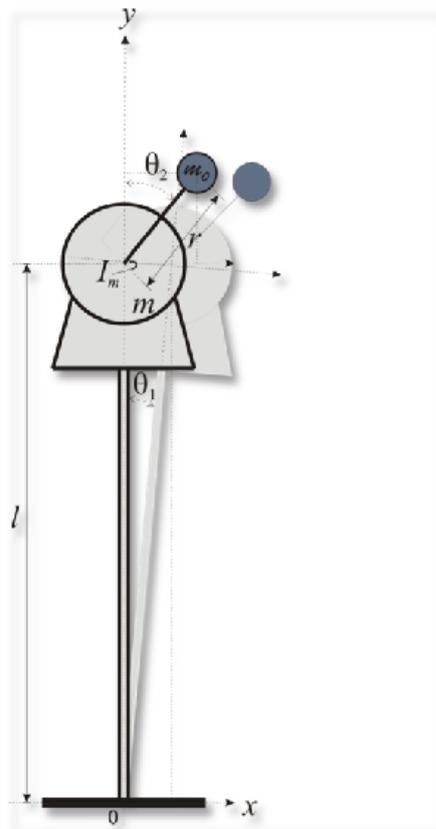
$$x_1'' \alpha_{2,6} + y_3'' = -y_3 - \left| y_3' \right| y_3' \alpha_{2,8} - \frac{y_3'}{\left| y_3' \right|} \alpha_{2,9}. \quad (3.96)$$

### 3.5 Descrição do Caso 3:

O Caso 3 é uma mescla das condições atribuídas para os Casos 1 e 2, onde o deslocamento no eixo  $y$  é desprezível e o deslocamento angular no eixo  $x$  pequeno o suficiente para ser simplificado.

A Figura 24 mostra o modelo geométrico e físico da estrutura. É possível observar o deslocamento lateral que a estrutura fixa no ponto  $O$  sofre, tanto para a direita como para esquerda. Neste caso se considera um pequeno deslocamento angular.

Figura 24- Modelo Geométrico e Físico da Torre.



Considerando a estrutura, motor mais a haste, como um pêndulo invertido, pode-se afirmar que se a amplitude do movimento da haste não é muito menor do que o comprimento

de  $l$ , o pêndulo não pode ser descrito como um oscilador harmônico porque a força restauradora deixa de ter módulo proporcional à distância da partícula a um ponto fixo. Nesse caso, o período do movimento depende da amplitude do movimento de oscilação.

Se a amplitude do movimento é muito menor do que o comprimento  $l$ , qualquer que seja o ângulo  $\theta_l$ , considera-se o ângulo  $\theta_l$  pequeno e o arco de circunferência que forma a trajetória da partícula pode ser aproximado por um segmento de reta horizontal.

$$\sin \theta_l \approx \theta_l, \quad (3.97)$$

$$\cos \theta_l \approx 1, \quad (3.98)$$

onde o ângulo  $\theta_l$  é dado em radianos. Desse modo, podemos dizer que o período do pêndulo simples independe da amplitude do movimento, porque a força de restituição que atua sobre a partícula pode ser considerada proporcional a  $\theta_l$ , que é o ângulo entre o haste e a vertical.

No caso em que a amplitude não é tão pequena, devemos levar em conta que a força de restituição não é proporcional ao ângulo  $\theta_l$ , mas, sim, a  $\text{sen } \theta_l$ . Além disso, como  $\sin \theta_l < \theta_l$  (se  $\theta_l \neq 0$ ), a força de restituição, nesse caso, é menor do que no caso anterior, qualquer que seja a posição da partícula. Portanto, também o módulo da aceleração da partícula é menor e demora mais tempo para completar uma oscilação e o período do movimento é maior.

Se o ângulo  $\theta_l$  entre o haste e a vertical é dado em radianos, então quanto menor for a amplitude do movimento da partícula comparada ao comprimento da haste, menor é o erro desta aproximação.

### **3.5.1 Equações de Movimento do Sistema Sem Controle**

#### **3.5.1.1 Posição da Torre**

A posição da massa da torre é dada pela Equação (3.99) e onde  $l$  é a altura da torre e  $\theta_l$  o deslocamento angular,

$$x_1 = l\theta_l \text{ e } y_1 = l, \quad (3.99)$$

onde  $x_1$  e  $y_1$  descrevem a posição da massa no sistema. As derivadas  $\dot{x}_1$  e  $\dot{y}_1$  representam a velocidade angular da Torre.

$$\dot{x}_1 = \dot{\theta}_l l \text{ e } \dot{y}_1 = 0. \quad (3.100)$$

#### **3.5.1.2 Energia Cinética da Torre**

A energia cinética da torre é descrita pela Equação (3.74), onde  $M$  é a massa motor,  $m$  a massa para desbalancear o motor,

$$T_1 = \frac{\dot{\theta}_1^2 l^2}{2} (M + m). \quad (3.101)$$

### 3.5.1.3 Energia Potencial da Torre

$$V_1 = (M + m)gl + \frac{1}{2}k\theta_1^2, \quad (3.102)$$

$g$  é a aceleração gravitacional,  $k$  a constante de rigidez à flexão da torre.

### 3.5.1.4 Posição da Massa Desbalanceada

A posição da massa desbalanceada é expressa por:

$$x_2 = l\theta_1 + r\sin\theta_2, \quad (3.103)$$

$$y_2 = l + r\cos\theta_2, \quad (3.104)$$

sendo  $r$  a distância entre a massa desbalanceada e o eixo do motor e  $\theta_2$  o deslocamento angular do motor. As derivadas  $\dot{x}_2$  e  $\dot{y}_2$  representam a velocidade angular do sistema da massa desbalanceada. Onde  $\dot{x}_2$  e  $\dot{y}_2$  são representadas por:

$$\dot{x}_2 = \dot{\theta}_1 l + \dot{\theta}_2 r \cos\theta_2, \quad (3.105)$$

$$\dot{y}_2 = -\dot{\theta}_2 r \sin\theta_2. \quad (3.106)$$

### 3.5.1.5 Energia cinética da massa desbalanceada

A energia cinética da massa desbalanceada é definida pela seguinte equação:

$$T_2 = \frac{m_0}{2}(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) + \frac{I_m \dot{\theta}_2^2}{2}, \quad (3.107)$$

onde  $I_m$  é o momento de inércia do motor. Realizando as devidas substituições e simplificações, obtém-se a energia cinética da massa desbalanceada como sendo:

$$T_2 = \frac{\dot{\theta}_1^2}{2} l^2 m_0 + \frac{\dot{\theta}_2^2}{2} (I_m + r^2 m_0) + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 l r m_0 \cos\theta_2. \quad (3.108)$$

### 3.5.1.6 Energia Potencial da Massa Desbalanceada

A energia cinética da massa desbalanceada é expressa através da Equação (3.80),

$$V_2 = m_0 g (l + r \cos\theta_2). \quad (3.109)$$

### 3.5.1.7 Equações de Euler-Lagrange

O Lagrangeano do sistema em estudo é expresso por:

$$L = \frac{\dot{\theta}_1^2 l^2}{2} (M + m + m_0) + \frac{\dot{\theta}_2^2}{2} (I_m + r^2 m_0) + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 l r m_0 \cos \theta_2 - \frac{\theta_1^2 k}{2} - g l (M + m + m_0) - \cos \theta_2 g r m_0. \quad (3.110)$$

### 3.5.1.8 Equação de Euler-Lagrange para a torre

A equação de Euler-Lagrange com relação à torre é dada pela equação:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = Q_1, \quad (3.111)$$

onde  $Q_1$  é a força não conservativa referente à torre, Equação (3.82), sendo  $c_1$  o amortecedor visco linear.

$$Q_1 = -\dot{\theta}_1 c_1, \quad (3.112)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = \dot{\theta}_1 l^2 (M + m + m_0) + \dot{\theta}_2 l r m_0 \cos \theta_2, \quad (3.113)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) = \ddot{\theta}_1 l^2 (M + m + m_0) + \ddot{\theta}_2 l r m_0 \cos \theta_2 - \dot{\theta}_2^2 l r m_0 \sin \theta_2, \quad (3.114)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_1} = -\theta_1 k. \quad (3.115)$$

Substituindo as Equações (3.112), (3.114) e (3.115) em (3.111):

$$\ddot{\theta}_1 l^2 (M + m + m_0) + \ddot{\theta}_2 l r m_0 \cos \theta_2 - \dot{\theta}_2^2 l r m_0 \sin \theta_2 + k \theta_1 = -c_1 \dot{\theta}_1. \quad (3.116)$$

### 3.5.1.9 Equações de Euler-Lagrange da Massa Desbalanceada

Agora será considerada a ação do motor com a massa desbalanceada sobre o sistema torre.

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = Q_2. \quad (3.117)$$

sendo  $Q_2$  a força não conservativa referente ao motor, assim,  $Q_2(\theta_2, t) = a V_a - b_2 \dot{\theta}_2$ , onde os parâmetros  $a$  e  $b_2$  estão relacionados ao motor de corrente contínua.

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} = \dot{\theta}_2 (r^2 m_0 + I_m) + \dot{\theta}_1 l r m_0 \cos \theta_2, \quad (3.118)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) = \ddot{\theta}_2 (r^2 m_0 + I_m) + \ddot{\theta}_1 l r m_0 \cos \theta_2 - \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 l r m_0 \sin \theta_2, \quad (3.119)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_2} = -\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 l r m_0 \sin \theta_2 + g r m_0 \sin \theta_2. \quad (3.120)$$

Portanto, a equação de Lagrange em relação ao motor e à massa desbalanceada é dada pela Equação (3.121), Substituindo as Equações (3.119) e (3.120) em (3.117),

$$\ddot{\theta}_1 l r m_0 \cos \theta_2 + \ddot{\theta}_2 (r^2 m_0 + I_m) - g r m_0 \sin \theta_2 = a V_a - b_2 \dot{\theta}_2. \quad (3.121)$$

Desta forma, as equações do movimento para o sistema sem controle, torre e motor, são dadas pelo sistema de Equações (3.122) e (3.123),

$$\ddot{\theta}_1 l^2 (M + m + m_0) + \ddot{\theta}_2 l r m_0 \cos \theta_2 = \dot{\theta}_2^2 l r m_0 \sin \theta_2 - k \theta_1 - c_1 \dot{\theta}_1, \quad (3.122)$$

$$\ddot{\theta}_1 l r m_0 \cos \theta_2 + \ddot{\theta}_2 (r^2 m_0 + I_m) = g r m_0 \sin \theta_2 + a V_a - b_2 \dot{\theta}_2. \quad (3.123)$$

Para facilitar a programação e implementação computacional no MATLAB<sup>®</sup>, das equações do sistema, simplificam-se os termos e se considera novas variáveis.

$$\ddot{\theta}_1 + \frac{\ddot{\theta}_2 \cos \theta_2 l r m_0}{l^2 (M + m + m_0)} = \frac{\dot{\theta}_2^2 \sin \theta_2 l r m_0}{l^2 (M + m + m_0)} \sin \theta_2 - \frac{\theta_1 k}{l^2 (M + m + m_0)} - \frac{\dot{\theta}_1 c_1}{l^2 (M + m + m_0)}, \quad (3.124)$$

$$\ddot{\theta}_2 + \frac{\ddot{\theta}_1 \cos \theta_2 l r m_0}{(r^2 m_0 + I_m)} = \frac{\sin \theta_2 g r m_0}{(r^2 m_0 + I_m)} + V_a \frac{a}{(r^2 m_0 + I_m)} - \dot{\theta}_2 \frac{b_2}{(r^2 m_0 + I_m)}. \quad (3.125)$$

Fazendo,

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_{3,1} = \frac{l r m_0}{l^2 (M + m + m_0)}; \gamma_{3,2} = \frac{c_1}{l^2 (M + m + m_0)}; \gamma_{3,3} = \frac{k}{l^2 (M + m + m_0)}; \\ \gamma_{3,4} = \frac{l r m_0}{(r^2 m_0 + I_m)}; \gamma_{3,5} = \frac{g r m_0}{(r^2 m_0 + I_m)}; a' = \frac{a}{(r^2 m_0 + I_m)}; b' = \frac{b_2}{(r^2 m_0 + I_m)}. \end{array} \right. \quad (3.126)$$

Assim o sistema com as novas simplificações será:

$$\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 \cos \theta_2 \gamma_{3,1} = \dot{\theta}_2^2 \sin \theta_2 \gamma_{3,1} - \dot{\theta}_1 \gamma_{3,2} - \theta_1 \gamma_{3,3}, \quad (3.127)$$

$$\ddot{\theta}_2 + \ddot{\theta}_1 \cos \theta_2 \gamma_{3,4} = \sin \theta_2 \gamma_{3,5} + V_a a' - \dot{\theta}_2 b'. \quad (3.128)$$

Reescreve-se o sistema de forma matricial, a fim de se obter as equações finais do sistema.

$$\begin{bmatrix} 1 & \cos \theta_2 \gamma_{3,1} \\ \cos \theta_2 \gamma_{3,4} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_2^2 \sin \theta_2 \gamma_{3,1} - \dot{\theta}_1 \gamma_{3,2} - \theta_1 \gamma_{3,3} \\ \sin \theta_2 \gamma_{3,5} + V_a a' - \dot{\theta}_2 b' \end{bmatrix}. \quad (3.129)$$

### 3.5.2 Equações de Movimento do Sistema Com Controle

#### 3.5.2.1 Posição do fluido

$$x_3 = x_1 = \theta_1 l \text{ e } y_3 = y_1 + y_3 = y_3. \quad (3.130)$$

As derivadas  $\dot{x}_3$  e  $\dot{y}_3$ , representa a velocidade do fluido no sistema e são representadas pela Equação (3.131),

$$\dot{x}_3 = \dot{\theta}_1 l \quad e \quad \dot{y}_3 = \dot{y}_3. \quad (3.131)$$

### 3.5.2.2 Energia Cinética do Fluido

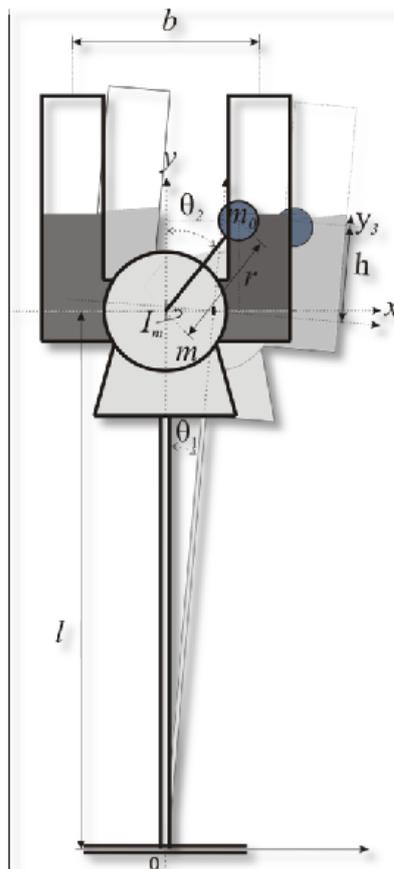
$$T_3 = \frac{1}{2} A \rho h (\dot{y}_3^2 + \dot{x}_3^2) + \frac{1}{2} A \rho b (\dot{y}_3 + \dot{x}_3)^2 + \frac{1}{2} A \rho h (\dot{y}_3^2 + \dot{x}_3^2). \quad (3.132)$$

A equação que representa a energia cinética do fluido será:

$$T_3 = \frac{\dot{\theta}_1^2 l^2 A \rho (2h + b)}{2} + \frac{\dot{y}_3^2 A \rho (2h + b)}{2} + \dot{\theta}_1 \dot{y}_3 l A b \rho. \quad (3.133)$$

O modelo geométrico para o sistema com controle é estabelecido de acordo com a representação esquemática mostrada na Figura 25.

Figura 25- Modelo Geométrico do Sistema com Controle



### 3.5.2.3 Energia Potencial do Fluido

A equação que representa a energia potencial do fluido será:

$$V = g A \rho (h^2 + y_3^2). \quad (3.134)$$

### 3.5.2.4 Equações de Euler-Lagrange para o Sistema Com Controle

Para determinar a energia cinética total do sistema se soma a Equação (3.101) e (3.108), do sistema sem controle, a energia cinética do fluido, Equação (3.133) e assim, obtém-se a energia cinética total do sistema com controle.

$$T = \frac{\dot{\theta}_1^2 l^2}{2} (M + m + m_0) + \frac{\dot{\theta}_2^2}{2} (I_m + r^2 m_0) + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 l r m_0 \cos \theta_2 + \frac{\dot{\theta}_1^2 l^2 A \rho (2h + b)}{2} + \dot{\theta}_1 \dot{y}_3 l A b \rho + \frac{\dot{y}_3^2 A \rho (2h + b)}{2}. \quad (3.135)$$

E com a soma das Equações (3.102) e (3.109), que representa a energia potencial total do sistema sem controle, adiciona-se a energia potencial do fluido, Equação (3.134), para obter a energia potencial total do sistema com controle,

$$V = gl(M + m + m_0) + \frac{1}{2} \theta_1^2 k + \cos \theta_2 g r m_0 + g A \rho (h^2 + y_3^2). \quad (3.136)$$

Para o sistema com controle, o Lagrangeano é obtido através da diferença entre as Equações (3.135) e (3.136).

$$L = \frac{\dot{\theta}_1^2 l^2}{2} (M + m + m_0) + \frac{\dot{\theta}_2^2}{2} (I_m + r^2 m_0) + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 l r m_0 \cos \theta_2 + \frac{\dot{\theta}_1^2 l^2 A \rho (2h + b)}{2} + \frac{\dot{y}_3^2 A \rho (2h + b)}{2} + \dot{\theta}_1 \dot{y}_3 l A b \rho - gl(M + m + m_0) - \frac{1}{2} \theta_1^2 k - \cos \theta_2 g r m_0 - g A \rho (h^2 + y_3^2). \quad (3.137)$$

### 3.5.2.5 Equação Euler-Lagrange para a torre

A equação de Euler-Lagrange com relação à torre será:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} = \dot{\theta}_1 l^2 (A \rho (2h + b) + M + m + m_0) + \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 l r m_0 + \dot{y}_3 l b A \rho, \quad (3.138)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) = \ddot{\theta}_1 [l^2 A \rho (2h + b) + l^2 (M + m + m_0)] + \ddot{\theta}_2 \cos \theta_2 l r m_0 + \ddot{y}_3 l b A \rho - \dot{\theta}_2^2 l r m_0 \sin \theta_2, \quad (3.139)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_1} = -\theta_1 k. \quad (3.140)$$

A equação final da torre será:

$$\ddot{\theta}_1 [l^2 A \rho (2h + b) + l^2 (M + m + m_0)] + \ddot{\theta}_2 \cos \theta_2 l r m_0 + \ddot{y}_3 l b A \rho - \dot{\theta}_2^2 l r m_0 \sin \theta_2 + \theta_1 k = -\dot{\theta}_1 c_1. \quad (3.141)$$

Já equação referente ao motor e massa desbalanceada é igual à apresentada no sistema sem controle, Equação (3.133).

### 3.5.2.6 Equação Euler-Lagrange para o Fluido

Considera-se a ação do MR-TLCD sobre o sistema do motor e torre. Portanto, a equação de Lagrange em relação ao MR-TLCD é dada pela Equação (3.123),

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_3} \right) - \frac{\partial L}{\partial y_3} = Q_3. \quad (3.142)$$

Sendo  $Q_3$  a força não conservativa do fluido. A modelagem do sistema do MR em placas paralelas é amplamente difundida na literatura e é utilizado no trabalho. Então a força não conservativa referente ao fluido será:

$$Q_3 = -\frac{1}{2} \rho A \delta |\dot{y}_3| \dot{y}_3 - \frac{\dot{y}_3}{|\dot{y}_3|} \frac{c \tau_3 A L}{H}, \quad (3.143)$$

onde  $\rho$  é a massa específica do magneto reológico,  $A$  é área do tubo do amortecedor TLCD,  $\delta$  o coeficiente de perda de carga global,  $c$  o coeficiente baseado na velocidade do escoamento,  $\tau$  a tensão de escoamento,  $H$  distância entre os polos fixos e  $L$  a distância que percorre o fluido entre os polos,

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_3} = \dot{y}_3 A \rho (2h + b) + \dot{\theta}_1 A l b \rho, \quad (3.144)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_3} \right) = \ddot{y}_3 A \rho (2h + b) + \ddot{\theta}_1 A l b \rho, \quad (3.145)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y_3} = -y_3 2 A \rho g. \quad (3.146)$$

A equação de movimento governante do MR-TLCD pode ser obtida considerando o efeito da tensão de escoamento na equação de movimento do líquido no tubo. A equação final do MR-TLCD é apresentada na Equação (3.147),

$$\ddot{y}_3 A \rho (2h + b) + \ddot{\theta}_1 A l b \rho + y_3 2 A \rho g = -\frac{1}{2} \rho A \delta |\dot{y}_3| \dot{y}_3 - \frac{\dot{y}_3}{|\dot{y}_3|} \frac{c \tau_3 A L}{H}. \quad (3.147)$$

O sistema de Equações (3.148), (3.149) e (3.150) apresenta as equações de movimento da torre, massa desbalanceada e do fluido, respectivamente.

$$\ddot{\theta}_1 [I^2 A \rho (2h + b) + I^2 (M + m + m_0)] + \ddot{\theta}_2 \cos \theta_2 l r m_0 + \ddot{y}_3 l b A \rho = \dot{\theta}_2^2 l r m_0 \sin \theta_2 - \theta_1 k - \dot{\theta}_1 c_1, \quad (3.148)$$

$$\ddot{\theta}_1 l r m_0 \cos \theta_2 + \ddot{\theta}_2 (r^2 m_0 + I_m) = g r m_0 \sin \theta_2 + a V_a - b_2 \dot{\theta}_2, \quad (3.149)$$

$$\ddot{y}_3 A \rho (2h + b) + \ddot{\theta}_1 A l b \rho = -y_3 2 A \rho g - \frac{1}{2} \rho A \delta |\dot{y}_3| \dot{y}_3 - \frac{\dot{y}_3}{|\dot{y}_3|} \frac{c \tau_3 A L}{H}. \quad (3.150)$$

Para facilitar a programação e implementação computacional no MATLAB<sup>®</sup>, das equações do sistema, simplificam-se os termos e se considera novas variáveis.

$$\ddot{\theta}_1 + \frac{\ddot{\theta}_2 \cos \theta_2 l m_0}{l^2 [A\rho(2h+b) + M + m + m_0]} + \frac{\ddot{y}_3 b A l \rho}{l^2 [A\rho(2h+b) + M + m + m_0]} = \frac{\ddot{\theta}_2^2 \sin \theta_2 l r m_0}{l^2 [A\rho(2h+b) + M + m + m_0]} - \frac{\dot{\theta}_1 k}{l^2 [A\rho(2h+b) + M + m + m_0]} - \frac{\dot{\theta}_1 c_1}{l^2 [A\rho(2h+b) + M + m + m_0]}, \quad (3.151)$$

$$\frac{\ddot{\theta}_1 l r m_0 \cos \theta_2}{(r^2 m_0 + I_m)} + \ddot{\theta}_2 = \frac{g r m_0 \sin \theta_2}{(r^2 m_0 + I_m)} + \frac{a V_a}{(r^2 m_0 + I_m)} - \frac{b_2 \dot{\theta}_2}{(r^2 m_0 + I_m)}, \quad (3.152)$$

$$\ddot{y}_3 + \frac{\dot{\theta}_1 l b}{(2h+b)} = -y_3 \frac{2g}{(2h+b)} - \frac{\delta |\dot{y}_3| \dot{y}_3}{(4h+2b)} - \frac{\dot{y}_3}{|\dot{y}_3|} \frac{c \tau_3 L}{\rho H (2h+b)}. \quad (3.153)$$

Fazendo,

$$\boxed{\begin{aligned} \alpha_{3,1} &= \frac{l r m_0}{l^2 [A\rho(2h+b) + M + m + m_0]}; \alpha_{3,2} = \frac{l b A \rho}{l^2 [A\rho(2h+b) + M + m + m_0]}; \\ \alpha_{3,3} &= \frac{c_1}{l^2 [A\rho(2h+b) + M + m + m_0]}; \alpha_{3,4} = \frac{k}{l^2 [A\rho(2h+b) + M + m + m_0]}; \\ \alpha_{3,5} &= \frac{l r m_0}{(r^2 m_0 + I_m)}; \alpha_{3,6} = \frac{g r m_0}{(r^2 m_0 + I_m)}; \alpha_{3,7} = \frac{l b}{(2h+b)}; \alpha_{3,8} = \frac{2g}{(2h+b)}; \\ \alpha_{3,9} &= \frac{\delta}{(4h+2b)}; \alpha_{3,10} = \frac{c \tau_3 L}{\rho H (2h+b)}; a' = \frac{a}{(r^2 m_0 + I_m)}; b' = \frac{b_2}{(r^2 m_0 + I_m)}. \end{aligned}} \quad (3.154)$$

obtem-se:

$$\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 \cos \theta_2 \alpha_{3,1} + \ddot{y}_3 \alpha_{3,2} = \dot{\theta}_2^2 \sin \theta_2 \alpha_{3,1} - \dot{\theta}_1 \alpha_{3,3} - \theta_1 \alpha_{3,4}, \quad (3.155)$$

$$\dot{\theta}_1 \cos \theta_2 \alpha_{3,5} + \ddot{\theta}_2 = \sin \theta_2 \alpha_{3,6} + a' - \dot{\theta}_2 b', \quad (3.156)$$

$$\ddot{\theta}_1 \alpha_{3,7} + \ddot{y}_3 = -y_3 \alpha_{3,8} - |\dot{y}_3| \dot{y}_3 \alpha_{3,9} - \frac{\dot{y}_3}{|\dot{y}_3|} \alpha_{3,10}. \quad (3.157)$$

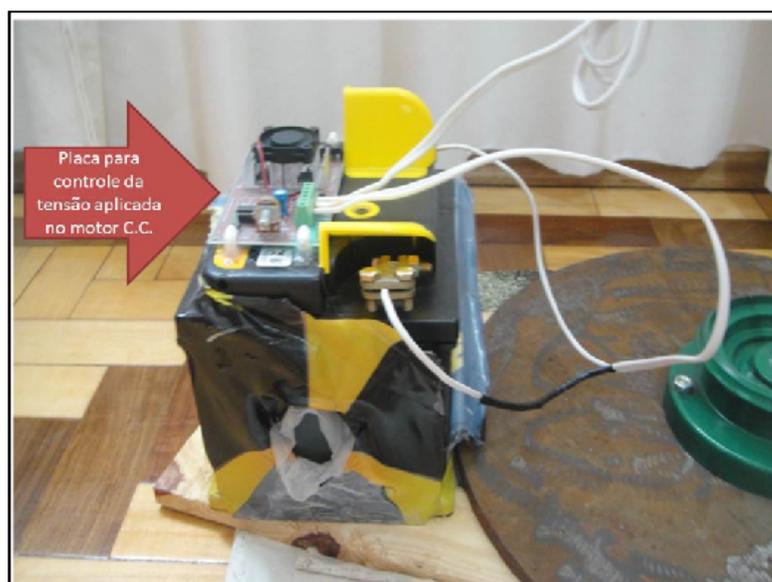
Reescrevendo o sistema de forma matricial,

$$\begin{bmatrix} 1 & \cos \theta_2 \alpha_{3,1} & \alpha_{3,2} \\ \cos \theta_2 \alpha_{3,5} & 1 & 0 \\ \alpha_{3,7} & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{y}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_2^2 \sin \theta_2 \alpha_{3,1} - \dot{\theta}_1 \alpha_{3,3} - \theta_1 \alpha_{3,4} \\ \sin \theta_2 \alpha_{3,6} + a' V_a - \dot{\theta}_2 b' \\ -y_3 \alpha_{3,8} - |\dot{y}_3| \dot{y}_3 \alpha_{3,9} - \frac{\dot{y}_3}{|\dot{y}_3|} \alpha_{3,10} \end{bmatrix}. \quad (3.158)$$

## 4 ANÁLISE EXPERIMENTAL DO MOTOR DE CORRENTE CONTÍNUA

A razão principal de utilizar um motor de corrente contínua (CC) neste trabalho é devido à facilidade com que se pode controlar a velocidade de rotação, caracterização dos parâmetros e da simplicidade da modelagem matemática do motor. O controle da rotação do eixo do motor pode ser obtido variando-se a tensão elétrica em seus terminais. A Figura 26 mostra a bateria de 45A e 12V e a placa controladora de tensão de alimentação do motor.

Figura 26- Bateria de Alimentação do Motor e a Placa de Controle de Tensão



O motor CC utilizado no ensaio foi obtido no depósito de sucata, onde esse equipamento era utilizado originalmente para ventilação interna de automóvel. A tensão e a rotação máxima suportada é de 12V à 3500 rpm. A maior dificuldade obtida na modelagem foi determinação dos coeficientes ou parâmetros de controle, já que não existiam as informações de projeto do motor.

Para a caracterização do motor CC, foram realizados ensaios com o objetivo de identificar os seguintes parâmetros: resistência da armadura ( $R_a$ ), constante de força contra eletromotriz ( $K_b$ ), constante de torque ( $k_t$ ) e atrito interno do motor ( $C_m$ ). Neste capítulo, são estudadas as identificações dos coeficientes através de um modelo matemático para motores de corrente contínua apresentado por (Fenili, 2000).

### 4.1 Aquisição de Dados

O deslocamento angular foi obtido através das medições realizadas com um tacômetro, Tabela 1. Foram realizados quatro ensaios com diferentes tensões de alimentação, onde foi

medido o deslocamento angular no tempo máximo de 120s com diferentes intervalos de tempo.

O critério de divisão da tensão ( $\Delta V$ ) foi determinado de acordo com a Equação (4.1), onde o valor mínimo da tensão a qual o eixo do motor rotaciona é  $V_{min} = 3,3V$  e ao valor máximo da tensão informada na etiqueta de identificação,  $V_{max} = 12V$ .

Deve ser destacado que o valor máximo da tensão de 11,65V, apresentada da Tabela 1, ocorreu devido a uma limitação da bateria utilizada, sendo que as medições foram realizadas com o motor em vazio.

$$\Delta V = \frac{V_{max} - V_{min}}{3} \quad (4.1)$$

Tabela 1- Registro de Dados Obtidos com o Tacômetro. Para Cada Valor de Tensão Aplicado ao Motor se Atinge um Valor de Rotação para Cada Instante de Tempo.

Tensão (V)	Deslocamento Angular (Rad)								
3,3	0	523,59	1047,19	1570,79	2094,39	2617,99	3141,59	6283,18	
6,2	0	1685,98	3371,97	5057,96	6743,95	8429,94	10115,92	20231,85	
9,1	0	2696,53	5393,06	8089,6	10786,13	13482,66	16179,2	32358,4	
11,65	0	3631,68	7263,36	10895,04	14526,72	18158,4	21790,08	43580,17	
Tempo (s)	0	10	20	30	40	50	60	120	

Na Figura 27 é apresentado um desenho esquemático da instalação dos equipamentos utilizados nas medições de tensão, corrente e rotação. Observa-se a bateria de 12V ligada no controlador de tensão a qual tem a função de regular a tensão de saída da fonte de alimentação, por consequência controlar a rotação no eixo do Motor CC. O Multímetro 1 ligado em série mede a corrente elétrica exigida pelo motor e o Multímetro 2 ligado em paralelo com o motor mede o valor da tensão elétrica fornecida para o motor. A Figura 28 mostra os equipamentos utilizados no experimento. O tacômetro utilizado foi conectado no eixo do motor.

Figura 27- Desenho Esquemático da Instalação dos Equipamentos Utilizados nas Medições de Tensão, Corrente e Rotação.

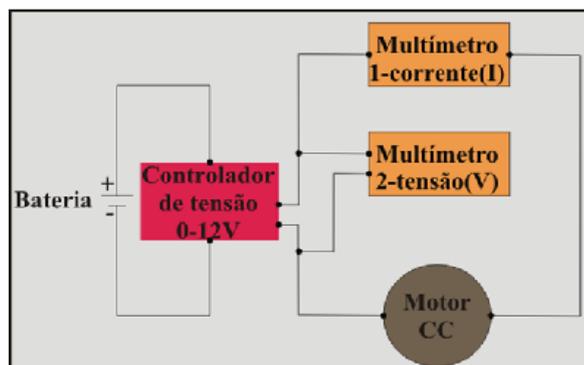
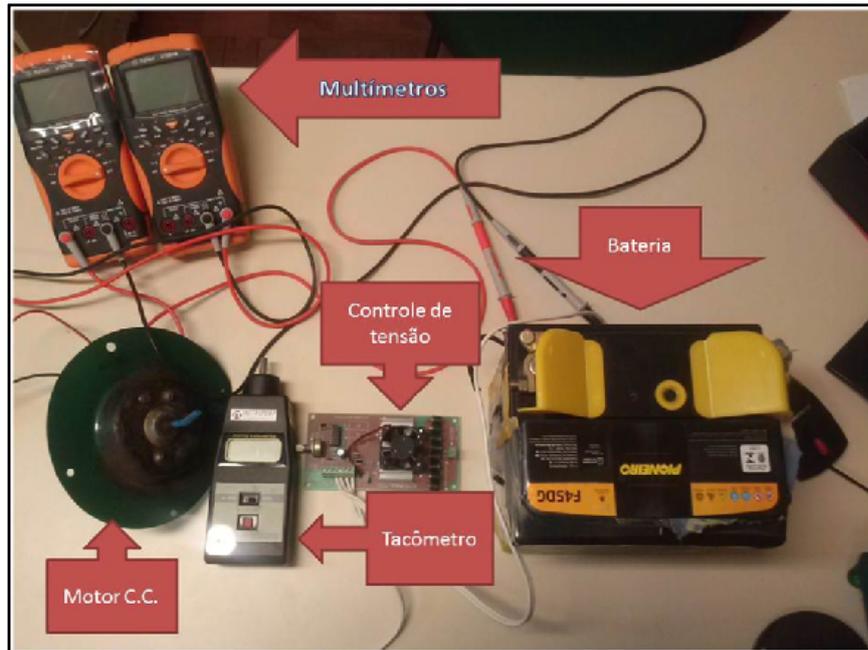


Figura 28- Equipamentos Utilizados para Medir Tensão, Corrente e Rotação.



## 4.2 Equações Governantes do Movimento

Os parâmetros a serem identificados são os coeficientes das equações governantes de movimento do motor, Equações (4.2) e (4.3),

$$L_m \dot{i}_a + R_a i_a + k_b \dot{\theta} = U, \quad (4.2)$$

$$I_{motor} \ddot{\theta} + C_m \dot{\theta} - k_t i_a = 0, \quad (4.3)$$

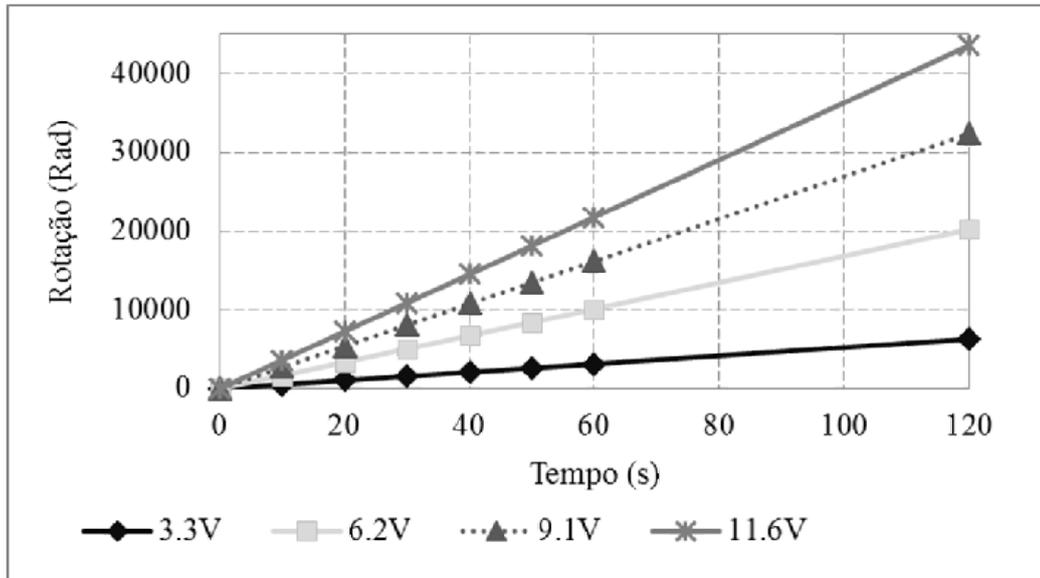
onde  $L_m$  é a indutância da armadura,  $i_a$  é a corrente elétrica no motor,  $R_a$  a resistência da armadura,  $k_b$  é a constante de força contra eletromotriz,  $\theta$  o deslocamento angular do eixo do motor,  $I_{motor}$  a inércia do motor,  $C_m$  o coeficiente de atrito interno do motor e  $k_t$  é a constante de torque do motor.

Segundo Fenili, 2000, a Equação (4.2) representa a equação governante da armadura e a Equação (4.3) o deslocamento angular do eixo do motor. Para o funcionamento do motor, considera-se que a tensão elétrica,  $U(t)$ , aplicada aos terminais do motor que representa a excitação sobre o mesmo. Já a variação da corrente de armadura com o tempo,  $i_a$ , é um efeito imediato de tensão e, assim, a corrente de armadura gera o torque no eixo do motor,  $T_m = k_t i_a$ , o que causa o deslocamento angular  $\theta$ .

#### 4.2.1 Modelo 1: Linear

De acordo com o apresentado por Fenili, 2000, após excitar o motor com diferentes valores de tensão (3,3V, 6,2V, 9,1V e 11,6V) durante 120s e realizar a aquisição dos dados conforme descrito anteriormente, obtêm-se as curvas de deslocamento angular em relação ao tempo. As curvas de excitação são apresentadas na Figura 29.

Figura 29- Curvas de Deslocamento Angular para 3,3V, 6,2V, 9,1V e 11,6V.



As curvas de deslocamento angular do eixo do motor são representadas por uma função de primeiro grau. Assim, é possível calcular a velocidade angular como derivada em relação ao tempo, Equação (4.4),

$$\omega = \dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}. \quad (4.4)$$

A Tabela 2 apresenta os valores calculados da velocidade angular e os valores de corrente e tensão obtidos através do experimento.

Tabela 2- Dado Experimental Referente ao Motor de Corrente Contínua e o Modelo 1.

Experimental		Modelo 1	
$\dot{\theta}$ (rad/s)	$i_a$ (A)	$i_a$ (A)	$\dot{\theta}$ (rad/s)
0,000	2,340	0,000	0,000
52,360	2,370	0,870	52,360
168,599	2,700	2,800	168,599
269,653	2,900	4,479	269,653
363,168	3,870	6,032	363,168

Para o modelo linear as equações governantes são definidas pela Equação (4.5) e Equação (4.6),

$$R_a i_a + k_b \dot{\theta} = U, \quad (4.5)$$

$$C_m \dot{\theta} - k_t i_a = 0. \quad (4.6)$$

As Equações (4.5) e (4.6) são referentes ao motor em regime permanente, onde os termos que envolvem a variação temporal da corrente  $i_a$  e da velocidade  $\dot{\theta}$  são omitidos.

Reorganizando os valores experimentais em forma de matrizes e utilizando o método dos mínimos quadrados, encontram-se os valores das variáveis que são desconhecidas, assim:

$$Ax = b. \quad (4.7)$$

A Matriz (4.8) é apresentada em termos da corrente  $i_a$ , primeira coluna, e da velocidade angular  $\dot{\theta}$ , segunda coluna. Os valores do vetor  $b$ , Matriz (4.10), são referentes à tensão medida no motor,  $A = \begin{bmatrix} i_a & \dot{\theta} \end{bmatrix}$ .

$$A = \begin{bmatrix} 2,370 & 52,359 \\ 2,700 & 168,598 \\ 2,900 & 269,653 \\ 3,870 & 363,1681 \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

$$x = \begin{bmatrix} R_a \\ k_b \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

$$b = \begin{bmatrix} 3,3 \\ 6,2 \\ 9,1 \\ 11,6 \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

O método de mínimos quadrados é utilizado para resolver a Equação (4.7) da seguinte forma:

$$[A]^T [A]x = [A]^T b \quad (4.11)$$

Pode-se, também, fazer  $B = [A]^T [A]$ ,  $C = [A]^T b$  e então obter através de:

$$Bx = C \quad (4.12)$$

Então substituindo as Equações (4.8), (4.9) e (4.10) em (4.11), encontra-se os valores da resistência da armadura,  $R_a$  e a constante da força eletromotriz,  $k_b$ , que são respectivamente  $0,983\Omega$  e  $0,022$  Vs/rad.

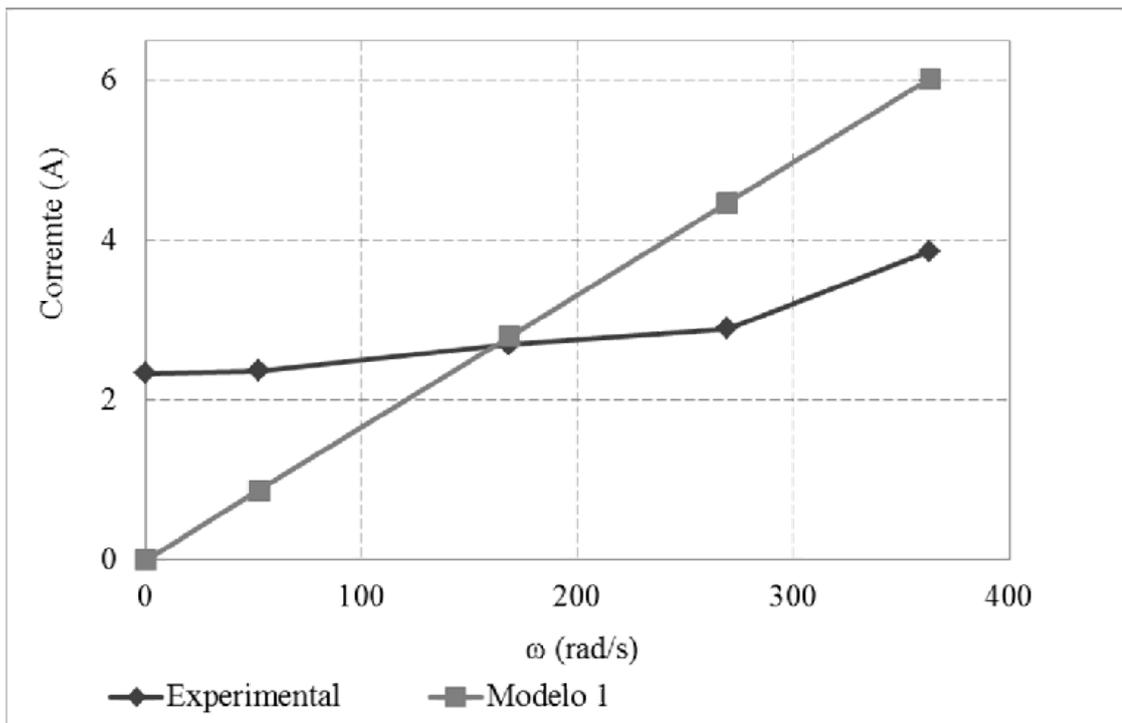
Apesar de  $k_b$  e  $k_t$  serem parâmetros distintos, seus valores são, geralmente, muito próximos, assim pode-se dizer que  $k_b = k_t$ . O parâmetro  $C_m$  é obtido através da Equação (4.6).

Com os parâmetros  $k_b$  e  $C_m$  determinados é possível calcular os valores teóricos de  $i_a$  e comparar com os valores experimentais.

Na Figura 30, observa-se curva que representa o experimento não corta o eixo y no ponto zero, mostrando a situação real de acionamento do motor, ou seja, o motor necessita de uma corrente mínima para dar partida e vencer os atritos internos, assim, conclui-se que o Modelo 1 não representa a fase de partida do motor, pois este retrata a corrente inicial no motor como zero.

No Modelo 2 é estudado uma nova relação entre a corrente elétrica do motor e a sua velocidade angular, levando em conta o atrito interno do motor.

Figura 30- Comparação entre as Curvas Teórica Modelo 1 e Experimental



#### 4.2.2 Modelo 2: Linear

Em busca de um modelo matemático, que represente de forma mais fiel o motor de corrente contínua, utiliza-se a mesma relação linear entre corrente e velocidade angular, porém fazendo com que a curva teórica não passe pela origem do sistema de coordenadas adotado. Portanto, o valor mínimo exigido para a corrente elétrica vencer os atritos internos do motor será considerado no novo modelo.

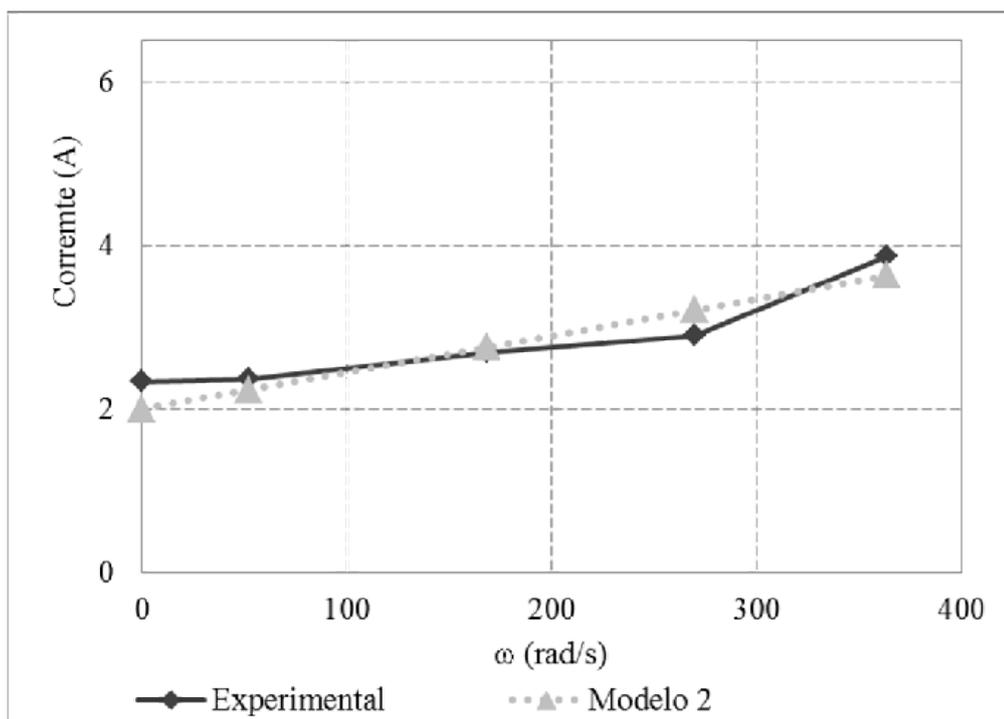
No Modelo 2, a corrente inicial do motor não parte de zero e este é representado pela Equação (4.13). Para a solução da Equação (4.13), utiliza-se o método de mínimos quadrados que foi apresentado anteriormente.

$$C_1 + C_2\dot{\theta} - K_i i_a = 0 \quad (4.13)$$

Os resultados são de  $C_1 = 0,044106 \text{ Nm}$  e  $C_2 = 0,000098 \text{ Nms/rad}$ .

A Figura 31 mostra que a curva do Modelo 2 tem a melhor representação do experimento. A corrente inicial  $i_a$  do experimento é 2,34A e do Modelo 2 é 2,005A, valores próximos, o que mostra que o Modelo 2 considera os atritos internos do motor. Portanto, o modelo matemático representado pela Equação (4.13) é mais apurado que o modelo da Equação (4.6).

Figura 31- Comparação entre as Curvas Teórica Modelo 2 e Experimental



#### 4.2.3 Modelo 3: Não Linear

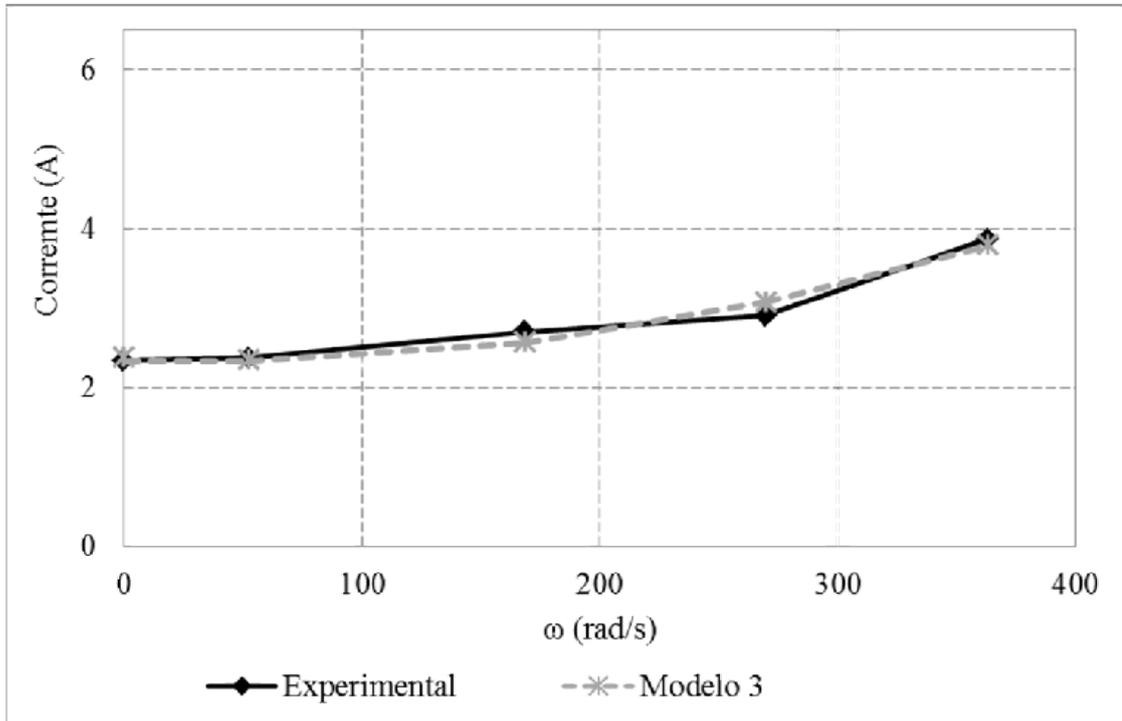
Devido ao aspecto não linear da curva experimental, é proposto o Modelo 3, assim a equação que representa o modelo matemático não linear será:

$$C_1 + C_2\dot{\theta} + C_3\dot{\theta}^2 - k_i i_a = 0 \quad (4.14)$$

Realizando uma interpolação dos valores da Tabela 2 por meio de uma equação de segunda ordem em  $\dot{\theta}$ , determinam-se os valores dos coeficientes, que são:  $C_1 = 0,05231 \text{ Nm}$ ,  $C_2 = -0,000027 \text{ Nms/rad}$  e  $C_3 = -0,000000311 \text{ Nms}^2 / \text{rad}^2$ .

Na Figura 32, são apresentados os valores teóricos obtidos com a Equação (4.14) e os valores experimentais. Verifica-se que entre os modelos matemáticos apresentados, este é o mais próximo da curva experimental.

Figura 32- Comparação entre as Curvas Teórica Modelo 3 e Experimental



Como o experimento realizado teve aquisição direta dos dados através do multímetro, não foi possível determinar a variação da corrente através do tempo.

A Tabela 3 mostra os valores experimentais e do Modelo 3 para a corrente. Observe-se que o valor da corrente apresenta uma variação média 2,9% entre os valores experimentais e do Modelo 3, isso ocorre devido à dificuldade para aquisição dos dados de corrente, já que esse não é um valor fixo e sim uma faixa de valores onde a corrente oscila durante o tempo.

Tabela 3- Comparação dos Dados Experimentais e o Modelo 3 para a Velocidade Angular e a Corrente.

Experimental		Modelo 3	
$\dot{\theta}$ (rad/s)	$i_a$ (A)	$i_a$ (A)	$\dot{\theta}$ (rad/s)
0,000	2,340	2,378	0,000
52,360	2,370	2,352	52,360
168,599	2,700	2,573	168,599
269,653	2,900	3,077	269,653
363,168	3,870	3,800	363,168

A Figura 33 e a Figura 34 mostra o deslocamento angular do motor para uma corrente de 3,3A e 9,1A, respectivamente. Visualiza-se que o Modelo 3 representa corretamente o experimento.

Figura 33- Comparação do Modelo 3 e os Dados Experimentais para uma Corrente de 3,3A

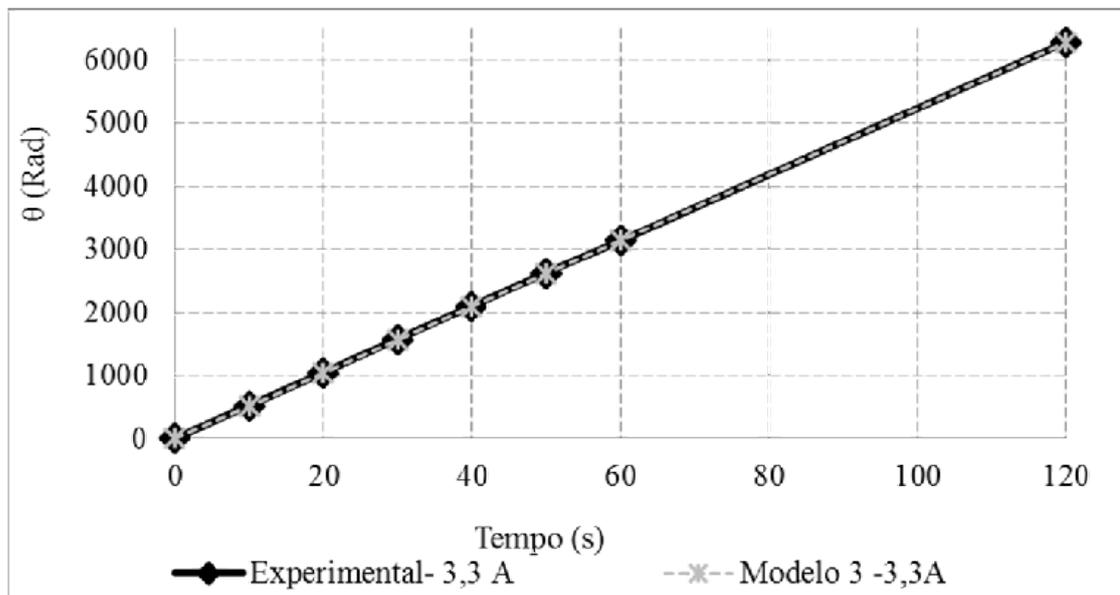
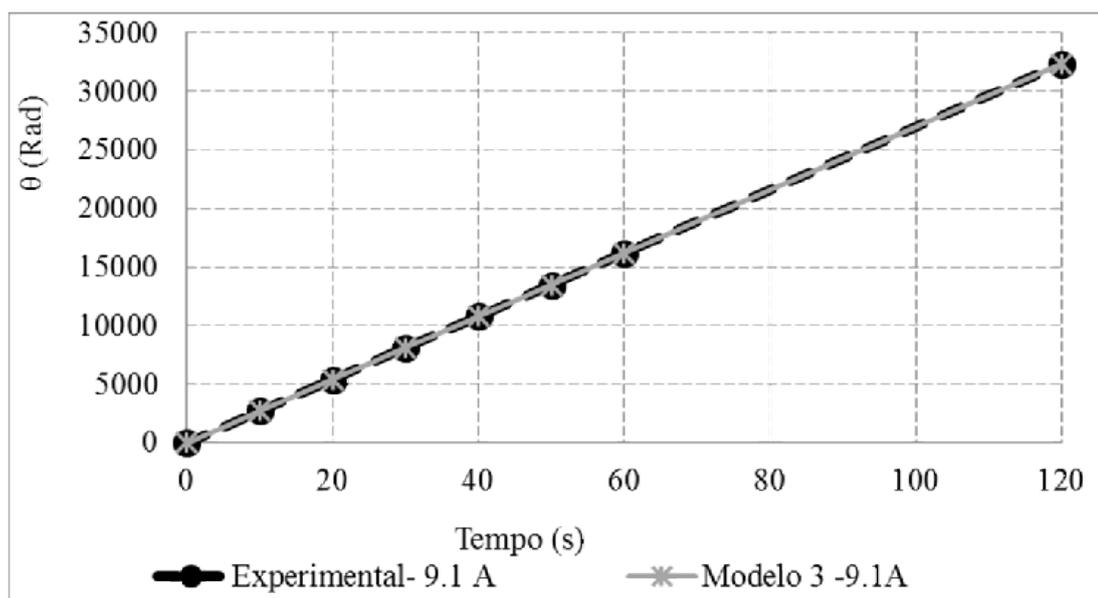


Figura 34- Comparação do Modelo 3 e os Dados Experimentais para uma Corrente de 9,1A



Com os valores dos parâmetros determinados, resistência da armadura  $R_a$  e a constante da força eletromotriz  $k_b$ , é possível aplicar os mesmos nas equações governamentais das simulações e, assim, comprar os resultados da resposta dinâmica da estrutura experimental e numérica.

## 5 ANÁLISE EXPERIMENTAL DA RESPOSTA DO SISTEMA

Este capítulo trata da determinação das características estruturais e determinação da resposta do sistema a partir dos dados experimentais.

### 5.1 Características do Sistema

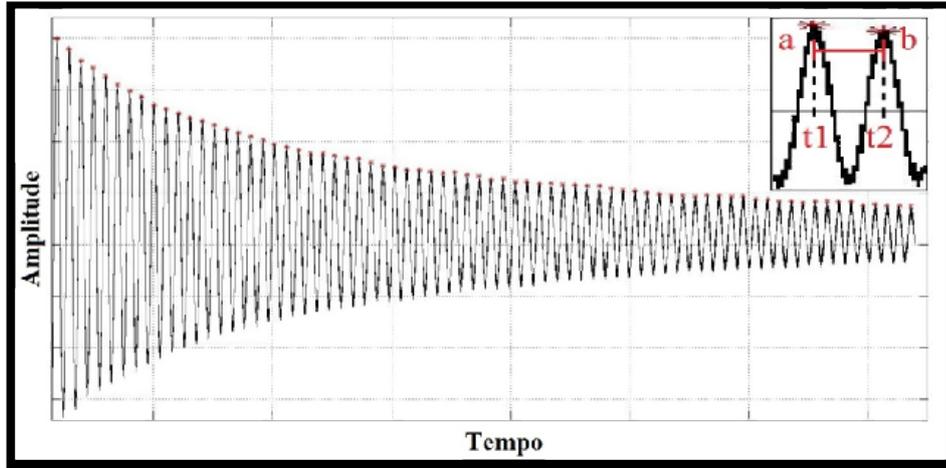
Com a análise da resposta de vibração livre, é possível definir as características como: período de vibração, frequência de vibração amortecida (rad/s), decremento logarítmico, fator de amortecimento adimensional, frequência natural não amortecida (rad/s), frequência natural (Hertz), constante de amortecimento crítico (N.s/m), constante de amortecedor (N.s/m) e rigidez (N/m).

Diz-se que um corpo está em vibração livre quando este é deslocado da sua posição de equilíbrio estático e logo após liberado, entrando em movimento oscilatório sem que exista nenhuma carga atuando durante o movimento do corpo. O sistema mecânico então irá vibrar em uma ou mais frequências naturais.

Dois casos de vibração livre podem ocorrer: os não amortecidos e os amortecidos. Os sistemas não amortecidos são sistemas hipotéticos e podem ser analisados como um caso particular dos sistemas subamortecidos para os quais o coeficiente de amortecedor é nulo. A vibração livre amortecida ocorre quando o sistema apresenta amortecedor, ou seja, seu declínio oscilatório não ocorre de forma abrupta. Esse caso pode ser subdividido em mais três tipos: o amortecedor crítico, subamortecido e superamortecido. A Figura 35 mostra a resposta de um sistema em vibração livre amortecido. Os pontos *a* e *b* representam os picos em um período de tempo  $t_1$  e  $t_2$ , instante inicial e final, respectivamente.

Segundo Groehs (2005), deve-se observar que as características de amortecedor de um sistema estrutural são muito complexas e difíceis de serem determinadas, porém, é prática comum expressar o amortecedor de sistemas reais atribuindo valores equivalentes para a relação de amortecedor  $\zeta$ . Outra informação importante segundo Groehs (2005), o amortecedor crítico corresponde ao menor valor de amortecedor para o qual nenhuma oscilação ocorre durante a resposta livre. A maior importância do amortecedor crítico,  $c_c$ , está no fato que o amortecedor de um sistema pode ser definido de forma relativa e adimensional em relação ao fator  $c$ .

Figura 35- Resposta de um Sistema em Vibração Livre Amortecido



$$c_c = 2m\omega = 2m\sqrt{\frac{k}{m}} = 2\sqrt{km} = \frac{2k}{\omega} \quad (5.1)$$

Onde  $k$  é a constante de rigidez,  $m$  a massa da estrutura e  $\omega$  a frequência natural.

A relação de amortecedor pode ser expressa pela Equação (5.2), onde  $c$  é o coeficiente de amortecedor.

$$\zeta = \frac{c}{c_c} = \frac{c}{2m\omega} \quad (5.2)$$

Através da razão de amortecedor é possível determinar o tipo de vibração. Se  $\zeta > 1$  o amortecedor é supercrítico, para  $\zeta = 1$  o amortecedor é crítico, e para  $\zeta < 1$  o amortecedor é subcrítico e se  $\zeta = 0$  o sistema não tem amortecedor.

Tomando o logaritmo natural da razão entre o ponto  $a$  e  $b$ , Figura 35, obtém-se o decremento logarítmico da amplitude. O decremento logarítmico representa a taxa na qual a amplitude de vibração de um sistema livre amortecido decai e é definido como o logaritmo natural da relação de quaisquer das duas amplitudes sucessivas,

$$\delta = \ln \frac{x_n}{x_{n+1}} = 2\pi\zeta \left( \frac{\omega}{\omega_d} \right), \quad (5.3)$$

ou

$$\delta = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}. \quad (5.4)$$

Para os casos em que o amortecedor onde  $\zeta \leq 0,2$  pode ser aproximado por:

$$\delta \cong 2\pi\zeta. \quad (5.5)$$

A Equação (5.4) pode ser utilizada para determinar o valor da relação de amortecedor e após os ajustes matemáticos a equação para determinar a razão de amortecedor,

$$\zeta = \frac{\delta}{\sqrt{4\pi^2 + \delta^2}}. \quad (5.6)$$

Para os casos em que o amortecedor  $\zeta \leq 0,2$ , o denominador da Equação (5.6) vale aproximadamente  $2\pi$  e para sistemas com o valor da razão de amortecedor menores que 0,005, podem-se obter uma precisão maior estabelecendo a relação apresentada na Equação (5.7) e considerando a razão entre os picos  $x_n$  e  $x_{n+q}$ .

$$\frac{x_n}{x_{n+q}} = e^{-\zeta\omega(2\pi n/\omega_d) + \zeta\omega[2\pi(n+q)/\omega_d]} = e^{2\pi q\zeta(\omega/\omega_d)}, \quad (5.7)$$

onde  $\omega$  é a frequência natural e  $\omega_d$  a frequência amortecida.

Tomando o logaritmo natural da Equação (5.7) e considerando a definição de decremento logarítmico da amplitude ( $\delta$ ) apresentado na Equação (5.3), pode-se escrever:

$$\ln \frac{x_n}{x_{n+q}} = 2\pi q\zeta \left( \frac{\omega}{\omega_d} \right) = q\delta, \quad (5.8)$$

e portanto,

$$\delta = \frac{1}{q} \ln \frac{x_n}{x_{n+q}}. \quad (5.9)$$

Também para sistemas com o valor de  $\zeta \leq 0,05$ , quando se observa um registro experimental, que é o caso deste trabalho, de vibração livre, um método conveniente para estimar a relação de amortecedor é contar o número de ciclos necessários para reduzir a amplitude em 50%. Assim a relação de  $\frac{x_n}{x_{n+q}}$  é igual a 2. Substituindo este valor na Equação (5.9) obtém-se:

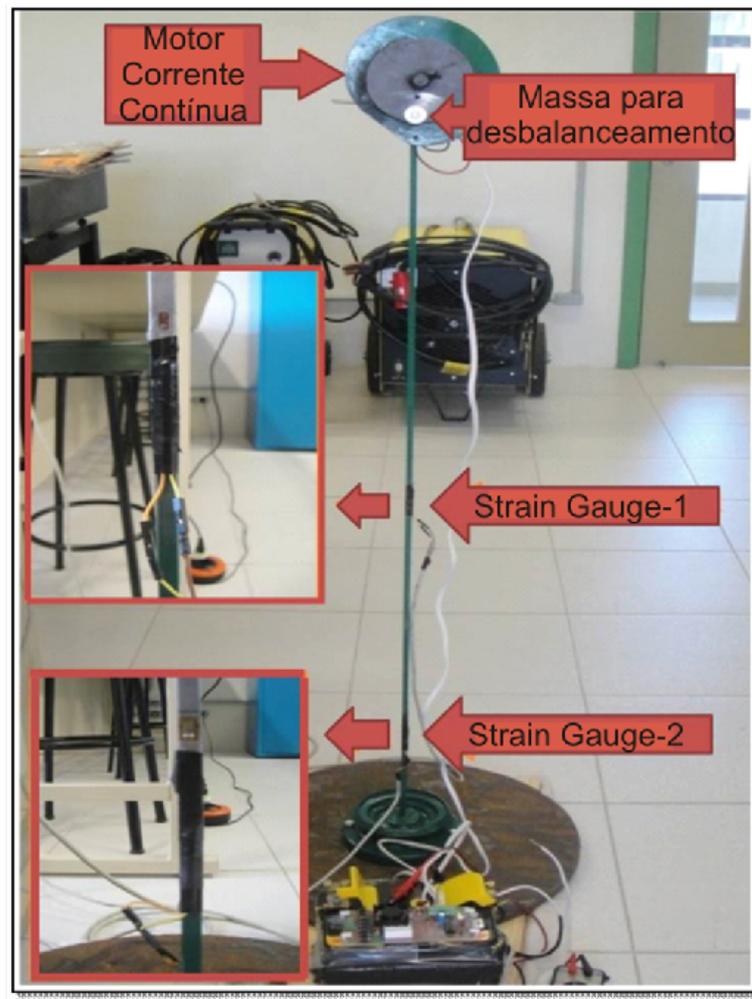
$$\delta = \frac{1}{q} \ln 2 = \frac{0,693}{q}. \quad (5.10)$$

A razão de amortecedor também pode ser determinada da seguinte forma:

$$\zeta \cong \frac{\delta}{2\pi} = \frac{0,693}{2\pi q}. \quad (5.11)$$

A Figura 36 mostra o modelo experimental e os equipamentos utilizados para medir as amplitudes de oscilação e a partir das medições do sistema em vibração livre determinar os parâmetros referentes à estrutura. Para medir a deformação do material foi empregado dois extensômetros (*Strain Gauge*).

Figura 36- Modelo Experimental com as Posições dos *Strain Gauge*

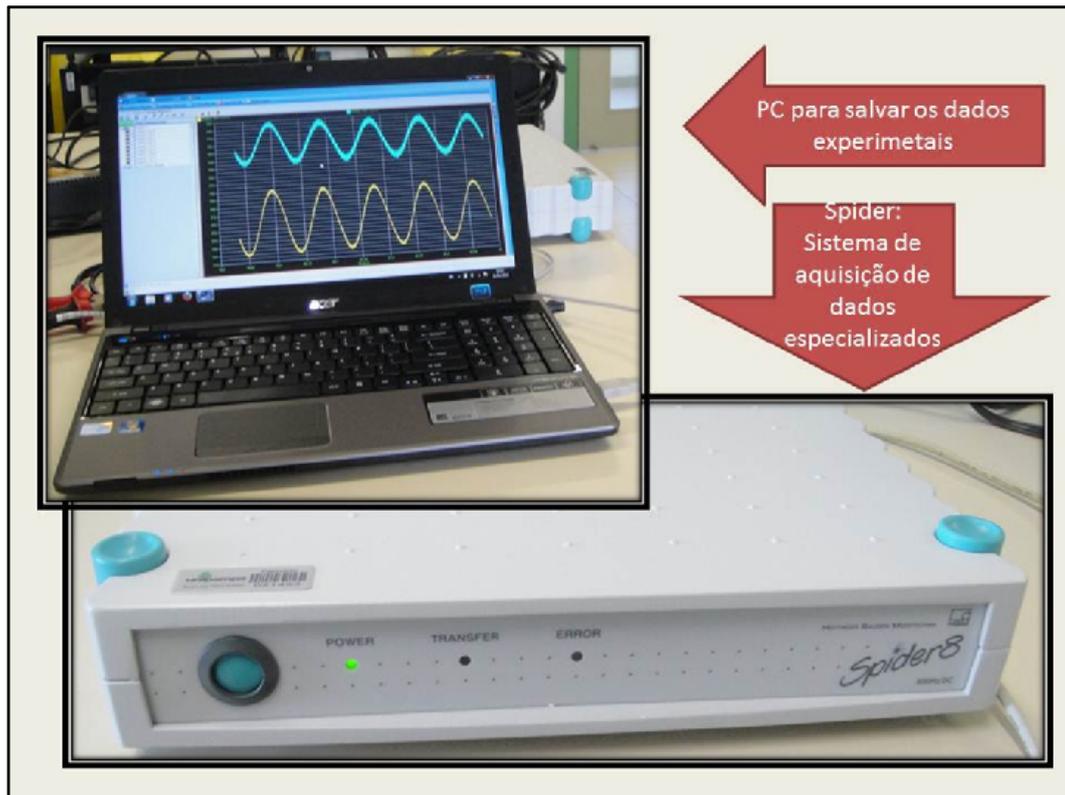


O *Strain Gauge* é um sensor de deformação que pode ser usado diretamente em equipamentos para a avaliação de deformações. O extensômetro é colado na superfície do material de forma que ocorre mesma deformação no material e no extensômetro.

Ao se deformar longitudinalmente, o valor da resistência varia de forma conhecida, indicando assim a deformação da superfície. O resultado se refere a uma deformação média sob a área do extensômetro. Existem valores de resistência do *Strain Gauge*. O utilizado no experimento é de  $120\Omega$ .

A Figura 37 mostra os equipamentos utilizados para aquisição e gravação dos dados experimentais do sistema obtidos através do *Strain Gauge*.

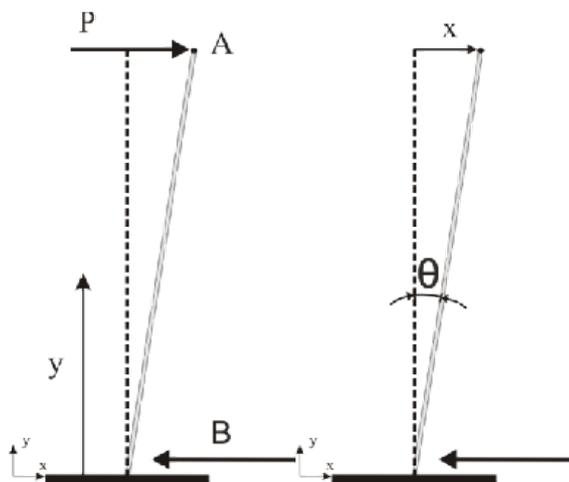
Figura 37- Sistema de Aquisição e Gravação dos Dados Experimentais



A posição escolhida seguiu o critério de deformação da viga elástica, onde para uma viga em balanço as maiores deformações ocorrem perto da base.

A Figura 38 é a representação esquemática da deformação de uma viga elástica em flexão pura.

Figura 38- Representação Esquemática



A teoria de deformação de uma viga elástica pode ser definida como a relação entre o momento fletor e o raio de curvatura para flexão pura. No caso de uma viga em flexão sujeita a força transversal:

$$\frac{1}{B} = \frac{Py}{EI}. \quad (5.12)$$

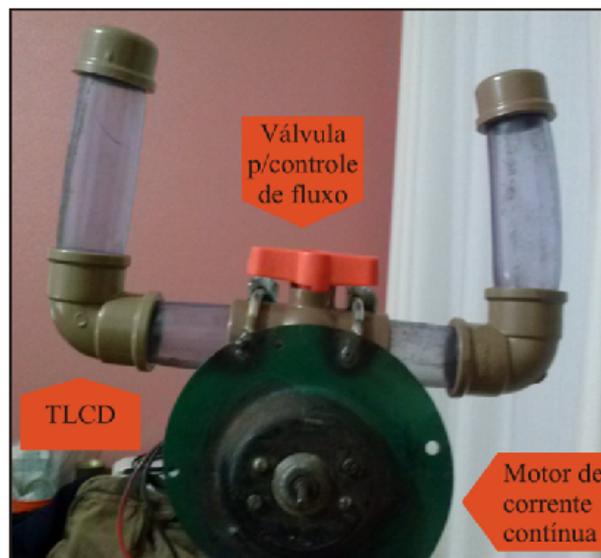
A deformação longitudinal específica  $\varepsilon_y$  nos elementos que constituem a viga é obtida dividindo-se  $\delta$  pelo comprimento original  $L$ .

$$\varepsilon_y = \frac{\delta}{L} = \frac{x\theta}{B\theta}, \quad (5.13)$$

onde  $B$  é o raio de curvatura,  $P$  a carga aplicada,  $E$  o módulo de elasticidade,  $I$  o momento de inercia e  $\varepsilon_y$  a deformação longitudinal na direção  $y$ .

A Figura 39 mostra o TLCD fixo ao motor CC da estrutura. Nos ensaios realizados utilizou-se água como fluido do TLCD, a válvula se manteve totalmente aberta e assim não influenciando na passagem do líquido.

Figura 39- TLCD Acoplado a Estrutura.



O período de vibração amortecido pode ser definido como  $t_b = t_a + \tau_d$  onde  $\tau_d = 2\pi/\omega_d$ . Assim para análise dos dados experimentais criou-se um programa em Matlab que identifica os picos da oscilação da vibração livre da estrutura,

$$\tau_d = t_b - t_a. \quad (5.14)$$

Após obter o valor de  $\tau_d$ , é possível então determinar a frequência natural amortecida através das Equações (5.15) e (5.16).

$$\omega_d = 2\pi/\tau_d \quad (5.15)$$

e

$$\omega_d = \sqrt{1 - \zeta^2} \omega_n, \quad (5.16)$$

onde  $\omega_n$  é a frequência natural não amortecida. Pode-se afirmar que  $\omega_d$  será sempre menor que  $\omega_n$ . Com o valor de  $\omega_n$  é possível calcular o fator de amortecedor, que será:

$$c = \omega_n \zeta 2m, \quad (5.17)$$

sendo  $m$  a massa da estrutura. A constante de amortecedor crítico será determinada através da Equação (5.18).

$$c_c = 2m\omega_n. \quad (5.18)$$

A constante de Rigidez ( $k$ ) pode ser obtida por:

$$k = m\omega_n^2. \quad (5.19)$$

A Tabela 4 e a Tabela 5 apresentam os parâmetros obtidos nos ensaios de vibração livre, os quais foram utilizados para caracterização do modelo numérico. Nas tabelas é possível verificar os valores de frequência amortecida, frequência natural, coeficiente de amortecedor, rigidez e entre outros.

No modelo numérico foi utilizado os valores médios dos parâmetros obtidos através dos ensaios de vibração livre. Realizaram-se três repetições dos ensaios sendo que a estrutura possui dois extensômetros para captação das deformações.

Tabela 4- Parâmetros Referentes ao Ensaio de Vibração Livre Amortecida da Estrutura.

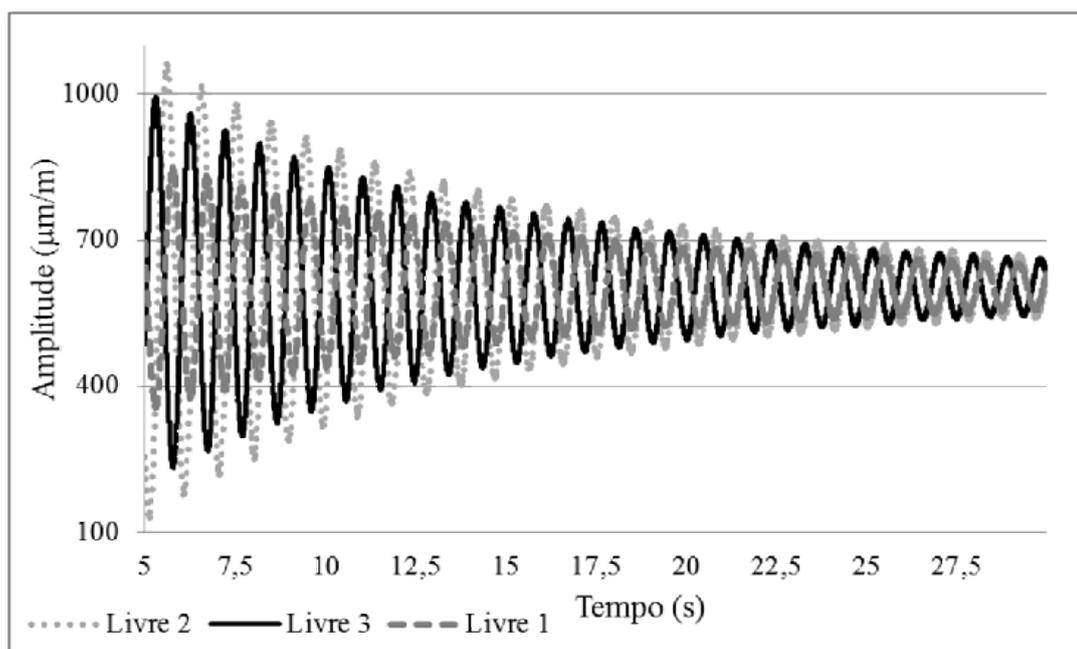
		Período de Vibração Amortecida	Período T (s)	Decremento Logarítmico $\delta$	Razão de Amortecimento $\zeta$
Ensaio		$\tau_d$			
Strain	1	0,963	0,963	0,032	0,005
Gauge 1	2	0,970	0,970	0,042	0,007
	3	0,967	0,967	0,045	0,007
Strain	1	0,950	0,950	0,017	0,003
Gauge 2	2	0,973	0,973	0,029	0,005
	3	0,967	0,967	0,025	0,004
Média		0,965	0,965	0,032	0,005

Tabela 5- Parâmetros Referentes ao Ensaio de Vibração Livre Amortecida da Estrutura.

		Frequência Natural não Amortecida	Frequência Natural	Rigidez	Constante de Amortecimento	Constante de Amortecimento Crítico
Ensaio		$\omega_n$ (rad/s)	$\omega_d$ (Hz)	$k$ (N/m)	$c$ (N.s/m)	$c_c$ (N.s/m)
Strain	1	6,528	1,039	118,011	0,184	36,155
Gauge 1	2	6,478	1,031	116,196	0,239	35,876
	3	6,500	1,035	117,001	0,255	36,000
Strain	1	6,614	1,053	121,135	0,098	36,630
Gauge 2	2	6,461	1,028	115,596	0,164	35,783
	3	6,500	1,035	116,994	0,146	35,999
Média		6,513	1,037	117,489	0,181	36,074

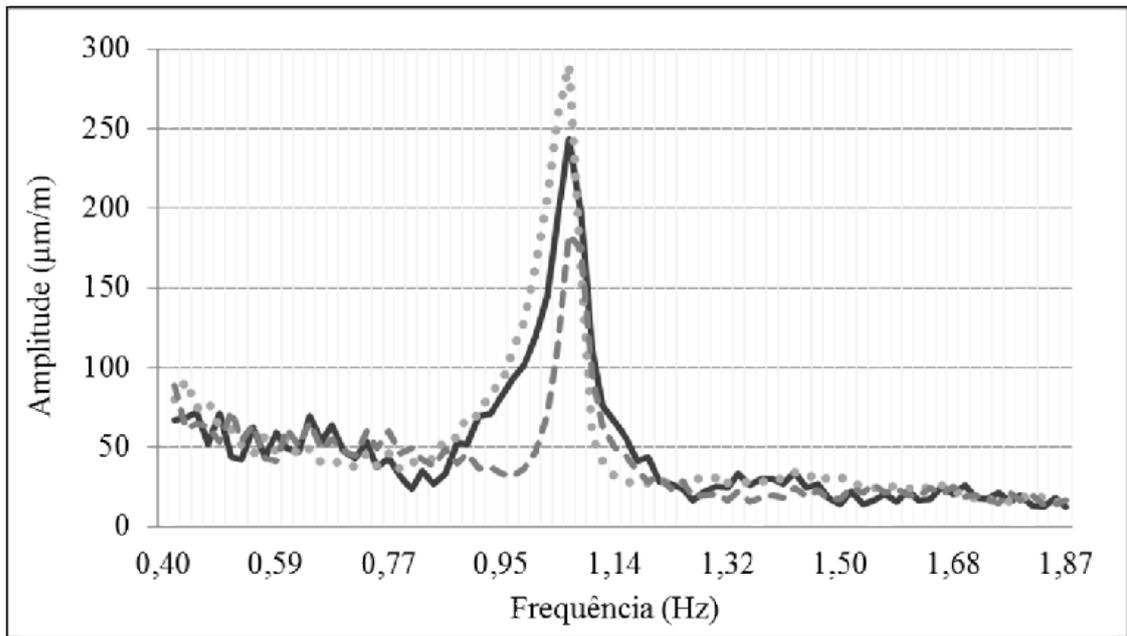
Na **Erro! Fonte de referência não encontrada.**, são apresentados os ensaios realizados do sistema em vibração livre amortecido da estrutura. Com base nessas informações foram determinados todos os parâmetros apresentados na Tabela 4 e Tabela 5.

Figura 40- Vibração Livre Amortecida do Sistema



Na Figura 41, é apresentado o espectro de frequência, FFT, do sistema em vibração livre. Observa-se que a frequência natural amortecida obtida foi de aproximadamente 1Hz. Os valores de frequência natural apresentado na Tabela 5 foram determinados através da Equação (5.16). A FFT apresentada na Figura 41 foi determinada através de métodos numéricos desenvolvidos no Matlab. Os diferentes métodos de determinação da frequência natural amortecida apresentaram valores em torno de 1Hz.

Figura 41- Espectro de Frequência



## 5.2 Determinação da Resposta do Sistema

Neste item é discutida a resposta do sistema quando excitado por um motor de corrente contínua. A resposta da estrutura é analisada sob o aspecto de diferentes tensões de alimentação do motor. O sistema apresenta dois conjuntos de elementos, o primeiro torre mais motor e o segundo torre, motor e TLCD.

Na Figura 42, são observados os valores máximos e mínimos das deformações obtidas para cada tensão aplicada ao motor da estrutura na posição do *Strain Gauge 1*.

O *Strain Gauge 1* está alocado na região onde as amplitudes de deformação são menores que as obtidas pelo *Strain Gauge 2*.

Analisando a Figura 42, supõem-se que a estrutura passa por uma região de ressonância perto dos 4V, pois ocorre a expansão dos valores de deformação e na sequência uma decréscimo das mesmas. Esse fenômeno é repetido a partir dos 8V.

Figura 42- Vibração da Estrutura- Strain Gauge 1.

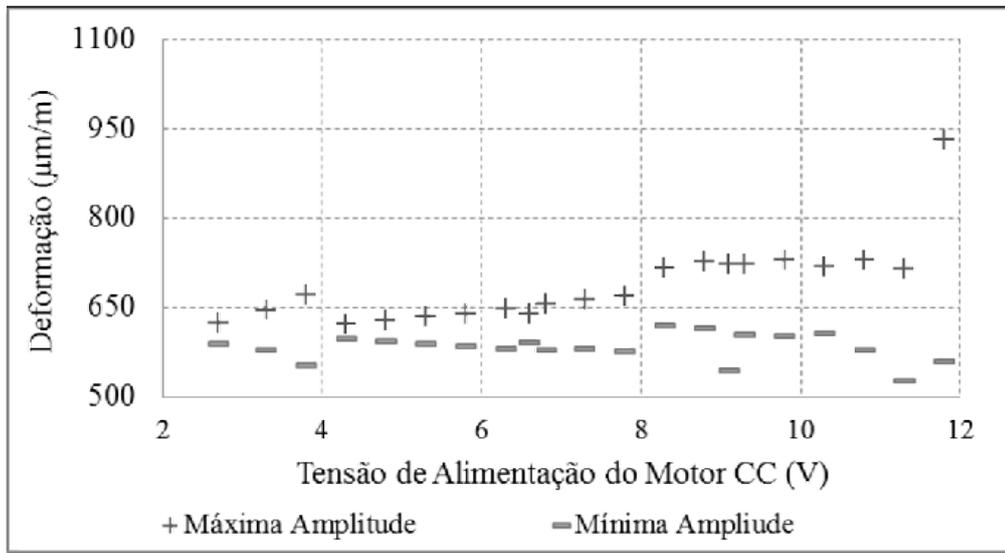
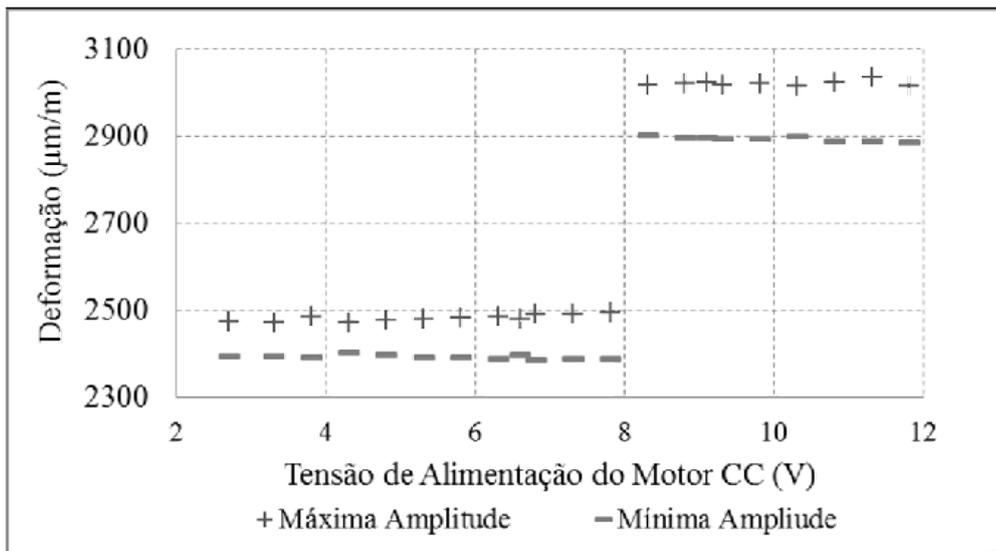
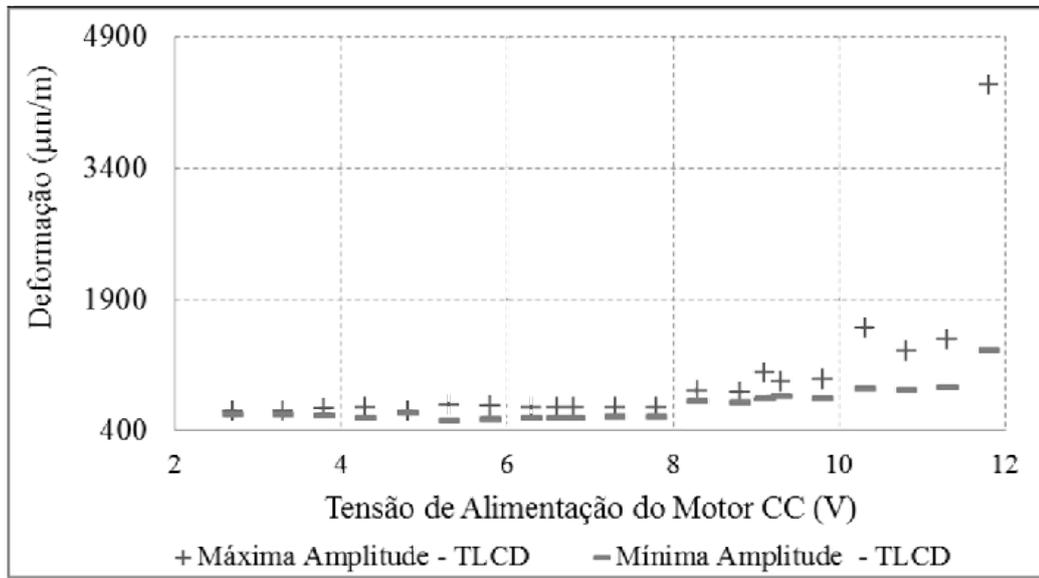


Figura 43- Vibração da Estrutura- Strain Gauge 2.



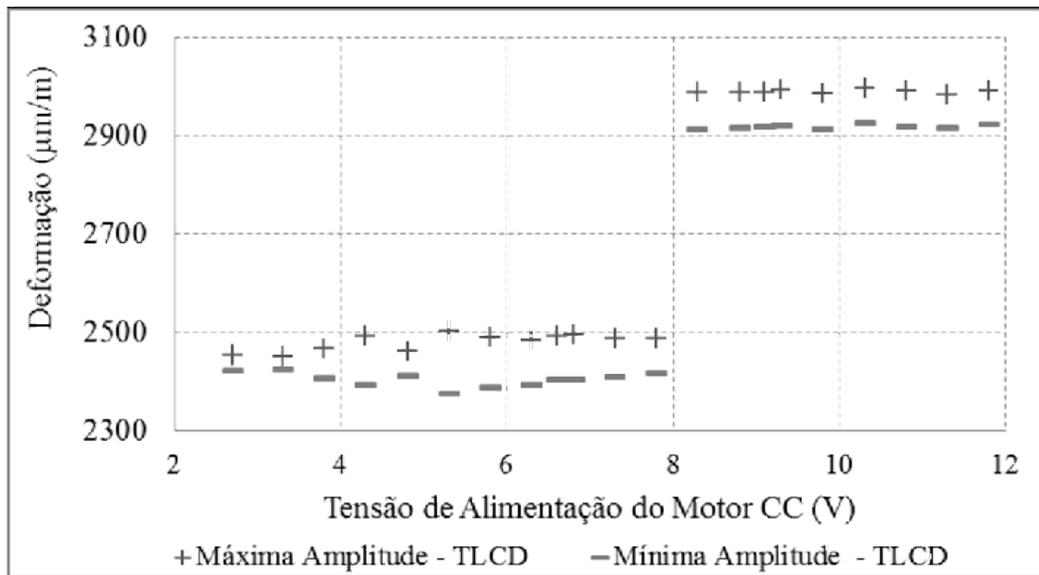
Na Figura 44, é observada uma mudança nas regiões onde ocorre uma possível ressonância, ou seja, a cima de 4V as amplitudes de deformação são modificadas. O mesmo fato é encontrado acima dos 8 e 10V. Na região de 10V, a Figura 44, apresenta uma significativa mudança nas amplitudes de deformação, fato esse que não ocorre na mesma região da Figura 42.

Figura 44- Vibração da Estrutura com TLCD- Strain Gauge 1.



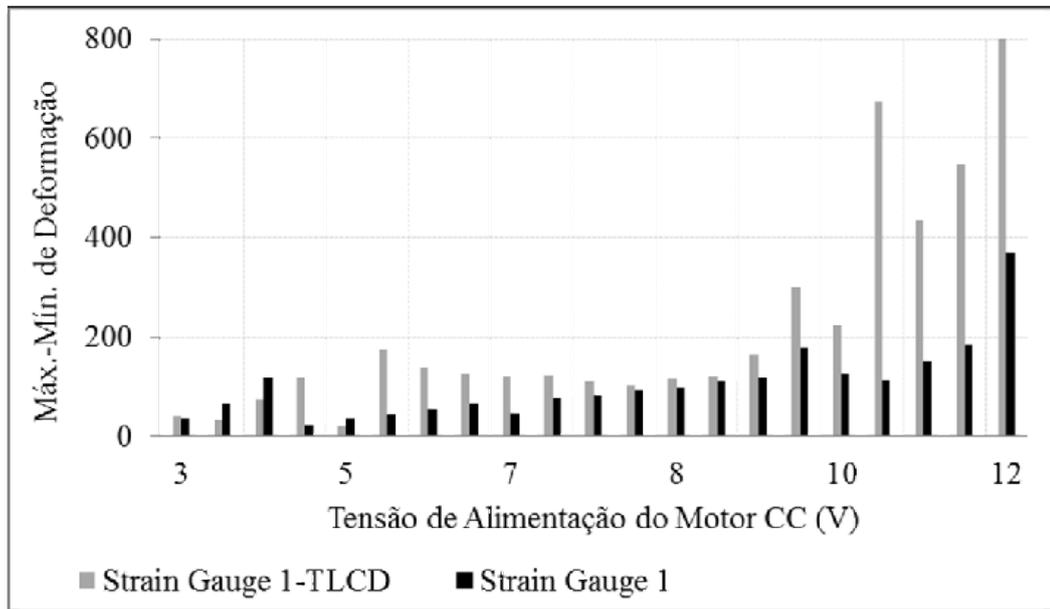
Na Figura 45, é observada uma mudança nas regiões onde ocorre uma possível ressonância, ou seja, a entre 4V e 6V as amplitudes de deformação são modificadas. O mesmo fato é encontrado acima dos 8V.

Figura 45- Vibração da Estrutura com TLCD- Strain Gauge 2.



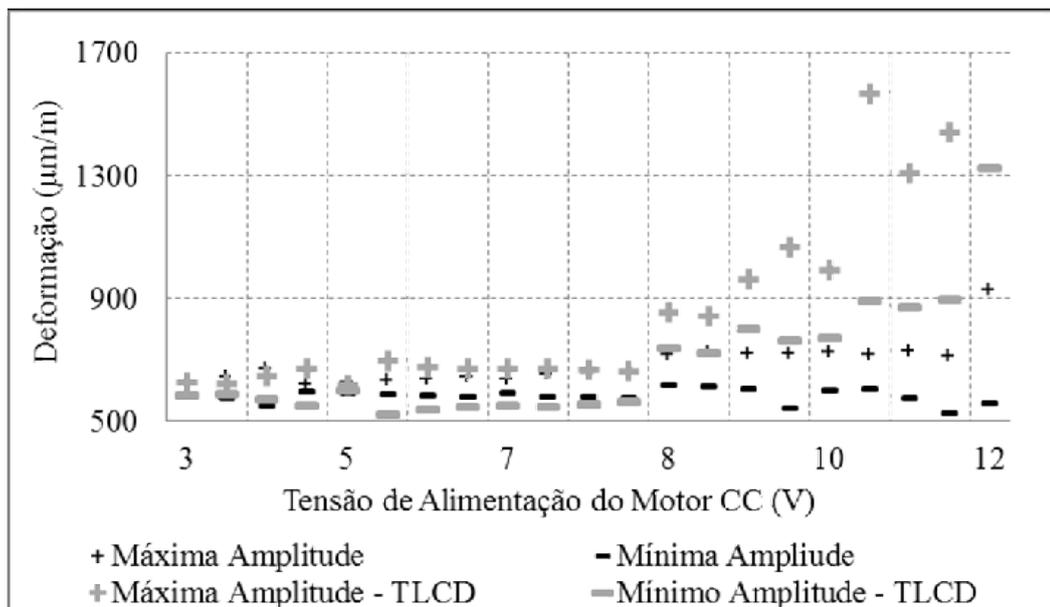
A Figura 46 mostra que a utilização do TLCD modifica as posições onde ocorre a ressonância, porém não diminui as amplitudes de oscilação.

Figura 46- Diferença entre as Máximas e Mínimas Deformações.



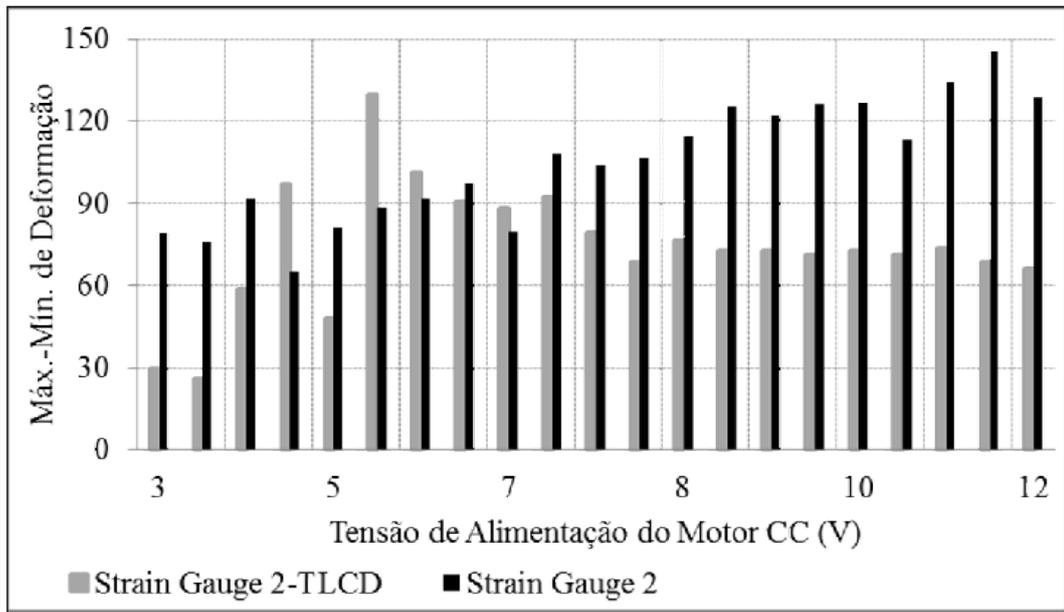
Na Figura 47, é realizada a comparação do sistema sem amortecedor e com o TLCD. Nesse caso o TLCD amplificou as amplitudes de deformação e modificou as regiões de ressonância do sistema. Visualiza-se mudanças abruptas na amplitude do sistema a partir de 8V.

Figura 47- Comparação do Sistema sem Amortecedor e com o TLCD. Strain Gauge 1.



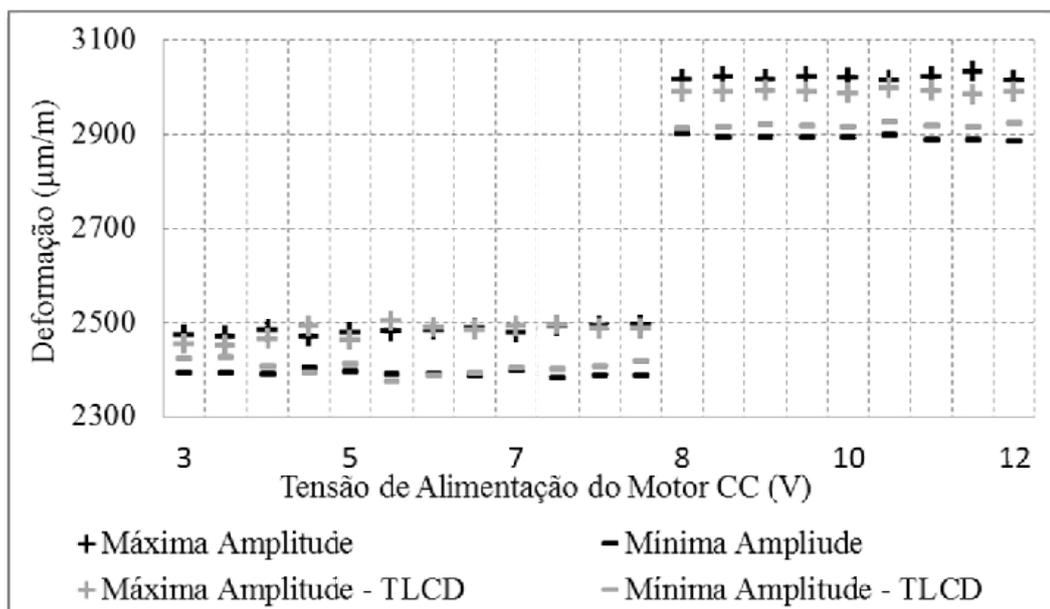
Na Figura 48, mostra que a utilização do TLCD modifica as posições onde ocorre a ressonância, porém as amplitudes de oscilação são reduzidas acima de 8V.

Figura 48- Comparação do Sistema sem Amortecedor e com o TLCD. Strain Gauge 2.



Na Figura 49, é realizada a comparação do sistema sem amortecedor e com o TLCD. Nesse caso o TLCD auxiliou na redução das amplitudes de deformação acima de 8V e modificou as regiões de ressonância do sistema.

Figura 49- Comparação do Sistema sem Amortecedor e com o TLCD. Strain Gauge 2.



A Figura 50 e a Figura 51 mostram os valores da deformação, para um determinado intervalo de tempo, do ensaio experimental, quando aplicado uma tensão de 4,8V. A oscilação em azul representa o sistema da torre, motor e TLCD, já sinal em vermelho representa o

sistema motor e torre. Observa-se que tanto no extensômetro 1 como no extensômetro 2 o TLCD não apresenta resultados de redução das amplitudes de vibração.

Figura 50- Amplitudes de Oscilação  $x$  Tempo. Strain Gauge 1.

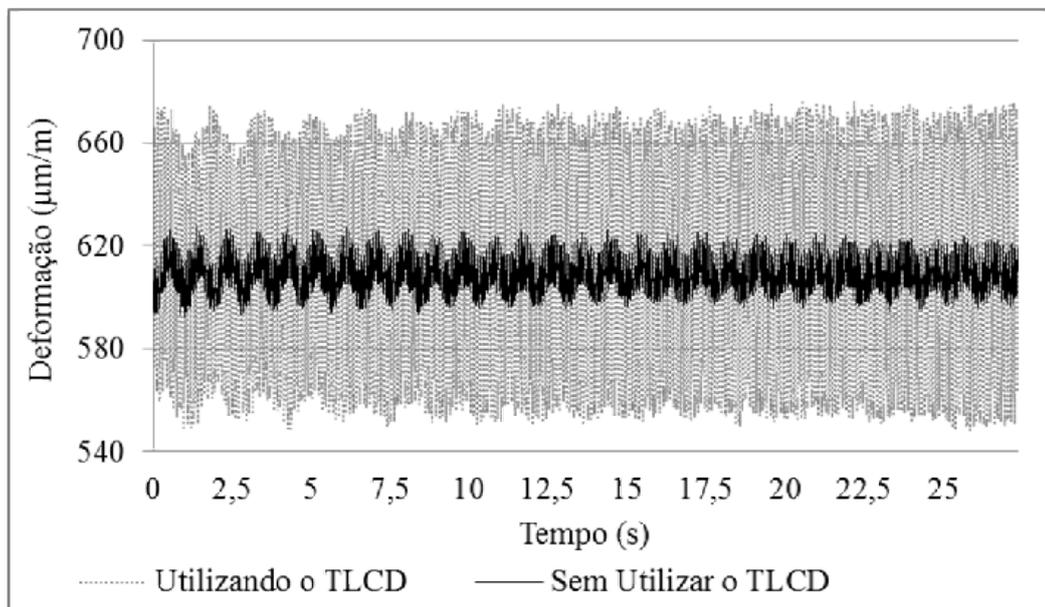
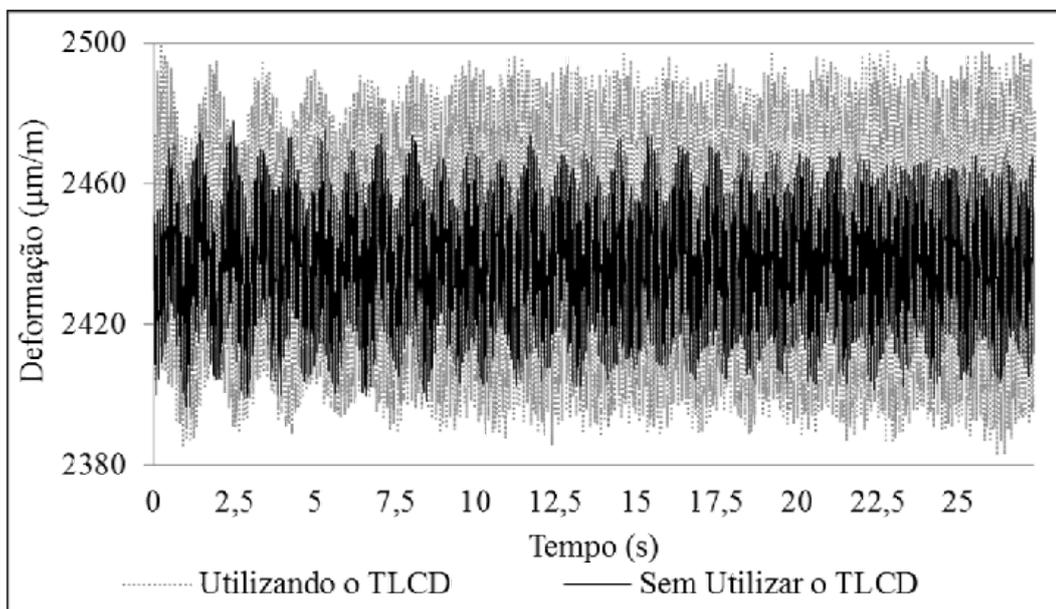


Figura 51- Amplitudes de Oscilação  $x$  Tempo. Strain Gauge 2.



A Figura 52 e a Figura 53 apresentam os valores da deformação, para um determinado intervalo de tempo, do ensaio experimental quando aplicado uma tensão de 11,8V. A oscilação em azul representa o sistema da torre, motor e TLCD, o sinal em vermelho representa o sistema motor e torre. Observa-se que na localização do extensômetro

1 o TLCD não apresenta resultados de redução das amplitudes de vibração. No local do *strain gauge* 2, o TLCD atua como amortecedor, ou seja, as oscilações do sistemas são reduzidas.

Figura 52- Amplitudes de Oscilação  $x$  Tempo. Strain Gauge 1.

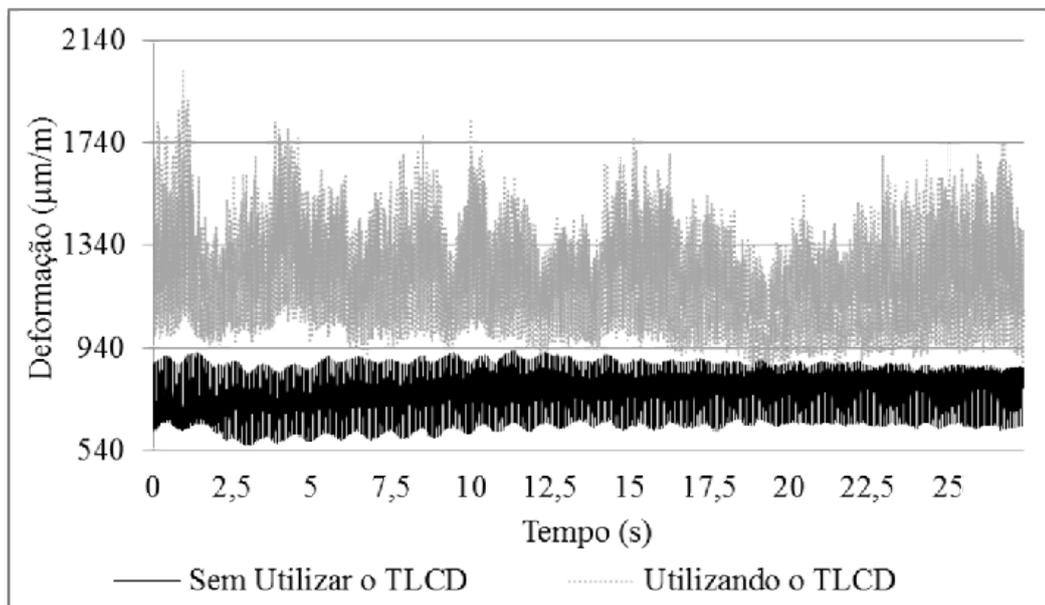
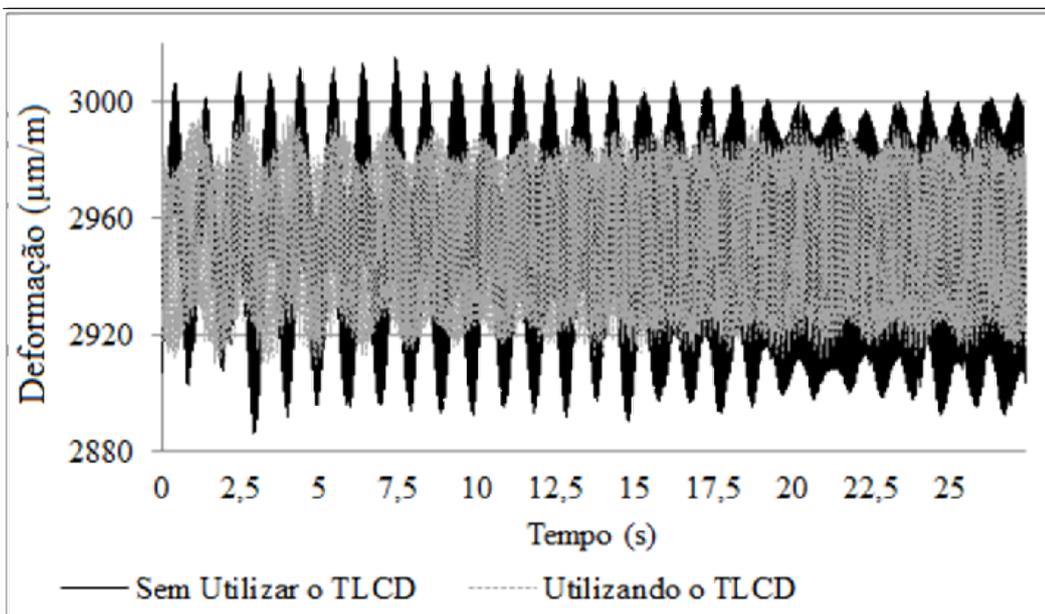


Figura 53- Amplitudes de Oscilação  $x$  Tempo. Strain Gauge 2.



## 6 INTERPRETAÇÃO DOS RESULTADOS NUMÉRICOS

Neste capítulo apresentam-se os resultados dos três casos das simulações. Na Tabela 6, são apresentados os valores dos parâmetros com relação à estrutura da torre, motor de corrente contínua e MR-TLCD. Vale salientar que as dimensões utilizadas no MR-TLCD são as do TLCDD experimental e que as características do Magneto Reológico foram retiradas de trabalhos citados anteriormente (Yang, et al., 2002 e Lima, 2011).

Tabela 6- Valores dos Parâmetros.

Definição dos parâmetros	Nomenclatura	Valores	Unidades
Lateral da torre	$d_c$	0,01	m
Altura da torre	$l$	1,1	m
Momento de inércia de barra delgada (torre)	$I_c$	8,3E-10	m <sup>4</sup>
Constante de rigidez linear da torre	$k$	117,489	N/m
Massa da torre	$M$	0,8646	kg
Massa específica do material da torre	$\rho_1$	7860	kg/m <sup>3</sup>
Aceleração da gravidade	$g$	9,80665	m/s <sup>2</sup>
Coefficiente de amortecedor	$C_1$	0,18085	N.s/m
Massa desbalanceada	$m_0$	0,326	kg
Distância do centro do motor até a $m_0$	$r$	0,065	m
Parâmetro de controle do motor	$a$	0,02237	N.m
Constante positiva para um modelo de motor	$b_2$	0,00049	N.m/s
Resistência elétrica do motor	$R_a$	0,9834	$\Omega$
Tensão de entrada aplicada na armadura do motor	$V_a$	12	V
Momento de inércia do rotor	$I_m$	0,0163	kg.m <sup>2</sup>
Constante da tensão elétrica do motor	$k_b$	0,022	Wb/rad
Constante de torque do motor	$k_m$	0,022	N.m/A
Corrente elétrica do motor	$i$	1,8	A
Massa do motor	$m$	1,5	kg
Área do tubo para o TLCDD	$A$	0,01013	m <sup>2</sup>
Comprimento horizontal do TLCDD	$b$	0,15	m
Altura da coluna do fluido do TLCDD	$h$	0,075	m
Distância entre os polos fixos	$H$	0,045	m
Distância percorrida pelo fluido entre os polos fixos	$L$	0,025	m
Coefficiente baseado na velocidade do escoamento	$c$	2,1	
Coefficiente de perda de carga global	$\delta$	30	
Massa específica do fluido	$\rho$	2490	kg/m <sup>3</sup>
Tensão de escoamento	$\tau$	1000	N/m <sup>2</sup>

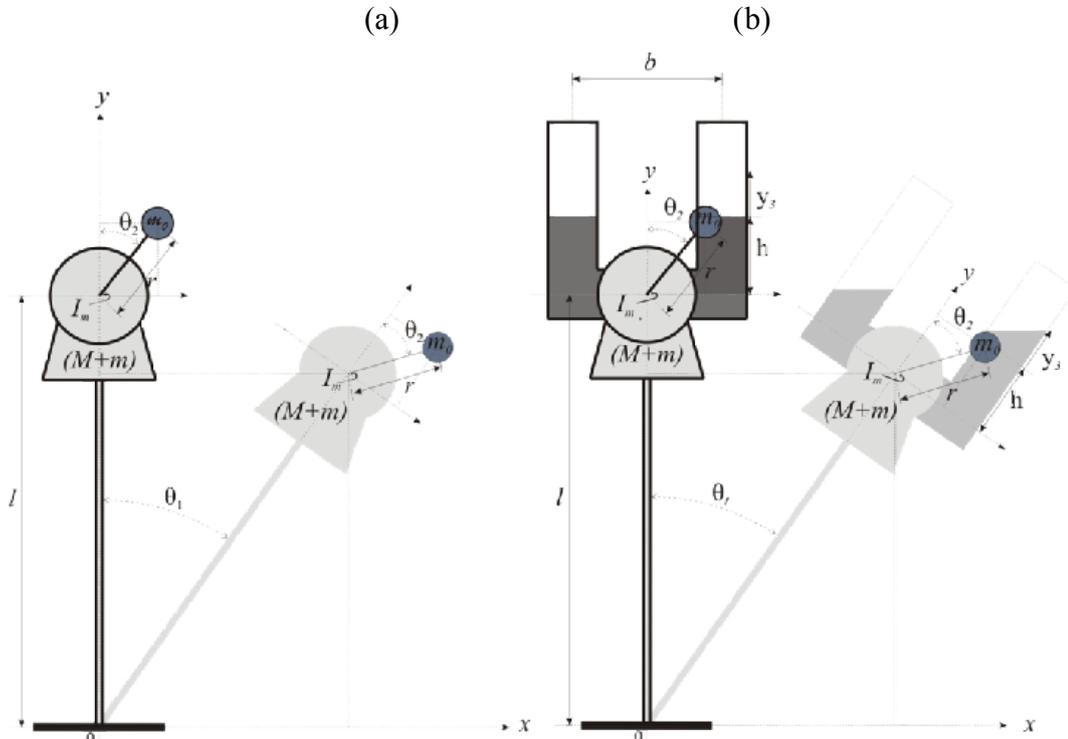
## 6.1 Caso 1:

A seguir são apresentadas as respostas obtidas do motor e torre. Também é apresentada a resposta do conjunto torre, motor e MR-TLCD. Os resultados são mostrados com diferentes tensões (parâmetro  $V_a$ ). Os outros parâmetros foram determinados com base nas características estruturais determinada no modelo experimental.

As condições iniciais provocam significativas mudanças na resposta dinâmica e como ferramenta de análise serão obtidos os planos de fases, série temporal e curvas de ressonância para os casos em estudo. De modo geral, é possível afirmar que, os planos de fase e séries temporais se completam e demonstram de melhor maneira o comportamento da resposta dinâmica.

A Figura 54 apresenta o modelo esquemático físico e geométrico que foi simulado. Sendo que a mesma figura e as Equações (6.1), (6.2), (6.3), (6.4) e (6.5) abaixo, já foram descritas em detalhes no item 3.1 deste trabalho. As Equações (6.1) e (6.2) são referentes ao sistema sem amortecimento e as Equações (6.3), (6.4) e (6.5) representam o sistema com o MR-TLCD.

Figura 54- Modelo Geométrico e Físico da Torre. (a) Sem Controle (b) Com MR-TLCD



$$\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \gamma_{1,1} = -\dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \gamma_{1,1} + \sin \theta_1 \gamma_{1,2} - \dot{\theta}_1 \gamma_{1,3} - \theta_1 \gamma_{1,4}, \quad (6.1)$$

$$\ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) \gamma_{1,5} + \ddot{\theta}_2 = \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \gamma_{1,5} + \sin \theta_2 \gamma_{1,6} + V_a a' - \dot{\theta}_2 b', \quad (6.2)$$

$$\ddot{\theta}_1 + \frac{\ddot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \alpha_{1,1}}{\alpha_{1,2}(\alpha_{1,3} - \sin 2\theta_1) + \alpha_{1,4}} + \frac{\ddot{y}_3 \alpha_{1,2}(\cos \theta_1 - \sin \theta_1 \alpha_{1,3})}{\alpha_{1,2}(\alpha_{1,3} - \sin 2\theta_1) + \alpha_{1,4}} = \frac{\dot{\theta}_1^2 \cos 2\theta_1 \alpha_{1,2}}{\alpha_{1,2}(\alpha_{1,3} - \sin 2\theta_1) + \alpha_{1,4}} - \frac{\dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \alpha_{1,1}}{\alpha_{1,2}(\alpha_{1,3} - \sin 2\theta_1) + \alpha_{1,4}} - \frac{\dot{\theta}_1 \alpha_{1,6}}{\alpha_{1,2}(\alpha_{1,3} - \sin 2\theta_1) + \alpha_{1,4}} - \frac{\dot{\theta}_1 \alpha_{1,7}}{\alpha_{1,2}(\alpha_{1,3} - \sin 2\theta_1) + \alpha_{1,4}} + \frac{\sin \theta_1 \alpha_{1,5}}{\alpha_{1,2}(\alpha_{1,3} - \sin 2\theta_1) + \alpha_{1,4}}, \quad (6.3)$$

$$\ddot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2) \alpha_{1,8} + \ddot{\theta}_2 = \dot{\theta}_1^2 \sin(\theta_1 - \theta_2) \alpha_{1,8} - \sin \theta_2 \alpha_{1,9} + V_a a' - \dot{\theta}_2 b', \quad (6.4)$$

$$\ddot{\theta}_1 \alpha_{1,10} (\cos \theta_1 - \sin \theta_1 \alpha_{1,3}) + \ddot{y}_3 = \dot{\theta}_1^2 \alpha_{1,10} (\sin \theta_1 + \cos \theta_1 \alpha_{1,3}) - y_3 \alpha_{1,11} - \alpha_{1,12} |\dot{y}_3| \dot{y}_3 - \frac{\dot{y}_3}{|\dot{y}_3|} \alpha_{1,13}. \quad (6.5)$$

A Tabela 7 mostra os valores dos coeficientes das equações do Caso 1. O significado desses coeficientes já foi demonstrado no capítulo 3, Caso 1.

Tabela 7- Valores dos Coeficientes das Equações sem Controle e com MR-TLCD do Caso 1.

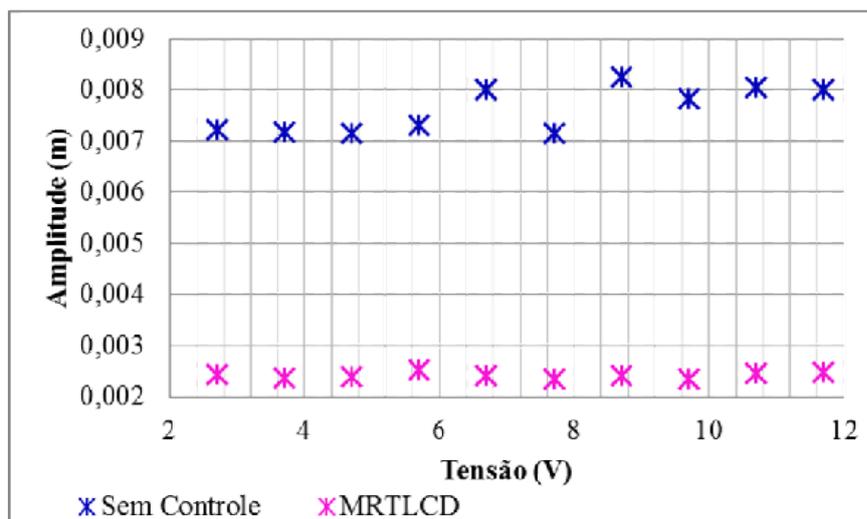
Valores dos Coeficientes das Equação do Caso 1	
Sem Controle	MR-TLCD
$\gamma_{1,1} = 0,007$	$\alpha_{1,1} = 0,023$
$\gamma_{1,2} = 8,915$	$\alpha_{1,2} = 4,576$
$\gamma_{1,3} = 0,056$	$\alpha_{1,3} = 2,000$
$\gamma_{1,4} = 36,088$	$\alpha_{1,4} = 3,256$
$\gamma_{1,5} = 1,319$	$\alpha_{1,5} = 29,024$
$\gamma_{1,6} = 11,755$	$\alpha_{1,6} = 0,181$
	$\alpha_{1,7} = 117,489$
$a' = 0,020$	$\alpha_{1,8} = 1,319$
$b' = 0,003$	$\alpha_{1,9} = 11,755$
	$\alpha_{1,10} = 0,550$
	$\alpha_{1,11} = 65,378$
	$\alpha_{1,12} = 50,000$
	$\alpha_{1,13} = 1,562$

Através dos gráficos de ressonância é possível verificar onde o motor e/ou a torre sofrem máximas amplitudes. As curvas de ressonância consistem de pontos de amplitude máxima no domínio da frequência ou de algum parâmetro de controle, no caso deste trabalho a tensão de alimentação do motor. Quando ocorre uma amplitude máxima e logo na sequência uma queda da mesma, pode se dizer que o sistema passou por um intervalo de ressonância. Na Figura 55, o gráfico de ressonância apresenta as amplitudes máximas da estrutura em relação à tensão aplicada no motor. A primeira análise é realizada com poucos pontos e, assim, pode-

se verificar uma faixa de tensão onde as amplitudes máximas ocorrem. Verifica-se que as amplitudes máximas estão localizadas entre 8 a 11 V.

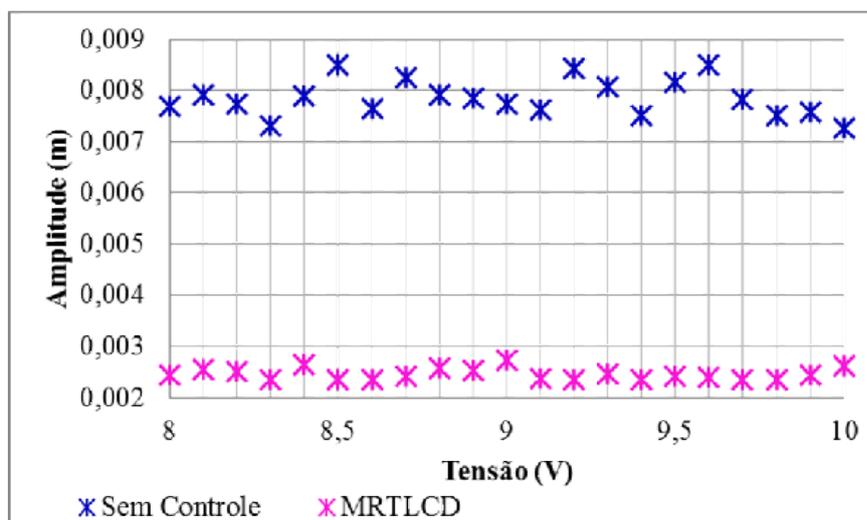
É possível analisar que as amplitudes de oscilação da estrutura, fazendo uso do MR-TLCD, foram reduzidas e apresentam um comportamento estável quando comparado com o sistema sem amortecedor.

Figura 55- Gráfico de Ressonância Torre de 2 a 12V



A Figura 56 apresenta o gráfico de ressonância onde a tensão aplicada varia entre 8 a 10V. As amplitudes máximas estão localizadas em 8,5V e 9,6V, com esses valores determinados, são realizadas as análises de retrato de fase e série temporal que serão apresentadas no decorrer deste capítulo.

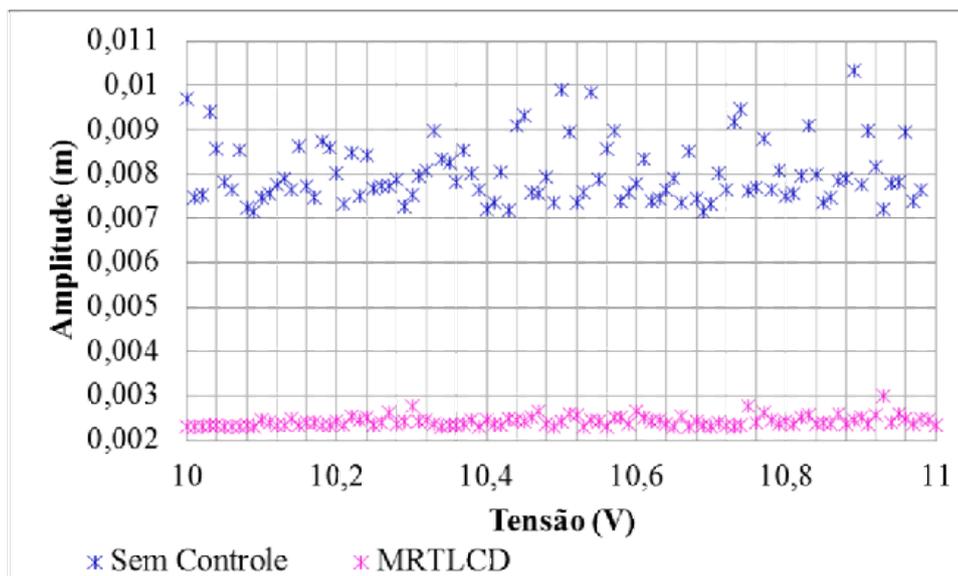
Figura 56- Gráfico de Ressonância Torre de 8 a 10V



A Figura 57 apresenta o gráfico de ressonância onde a tensão aplicada está no intervalo entre 10 a 11V, sendo que a amplitude máxima está localizada em 10,91V.

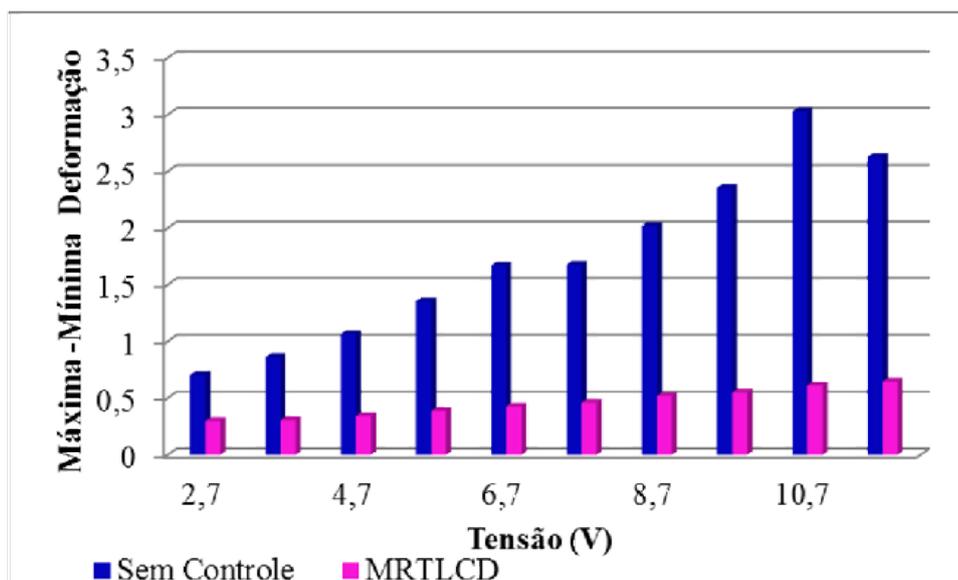
Visualiza-se que as amplitudes máximas de oscilação da torre foram reduzidas com o emprego do MR-TLCD.

Figura 57- Gráfico de Ressonância Torre de 10 a 11V



A Figura 58 mostra a diferença entre os valores máximos e mínimos da amplitude de oscilação do motor operando na faixa de 2 a 12V. Observa-se que as amplitudes sofrem redução com a utilização do MR-TLCD, também é visto que as amplitudes de oscilação do modelo sem controle são crescentes com o aumento da tensão. As amplitudes do modelo com MR-TLCD se mantêm praticamente constante com o aumento de tensão.

Figura 58- Gráfico de Diferença Entre Máxima e Mínima Amplitude do Motor de 2 a 12V



### 6.1.1 Análise Série Temporal e Plano de Fases Para Tensão de 8,5V

A Figura 59 apresenta a série temporal do motor para uma tensão de 8,5V. Observa-se que nos primeiros 100s a resposta do motor passou por uma região de transição e estabilizou-se dentro de uma faixa de velocidade angular. O sistema com MR-TLCD apresentou uma menor amplitude de oscilação, menor velocidade angular e uma maior estabilidade do deslocamento angular no domínio do tempo, quando comparada com o sistema sem controle. Pode ser analisada em detalhes, na Figura 60, a diferença de amplitude de oscilação entre o sistema com MR-TLCD e o sem controle.

Figura 59 - Série Temporal do Motor.

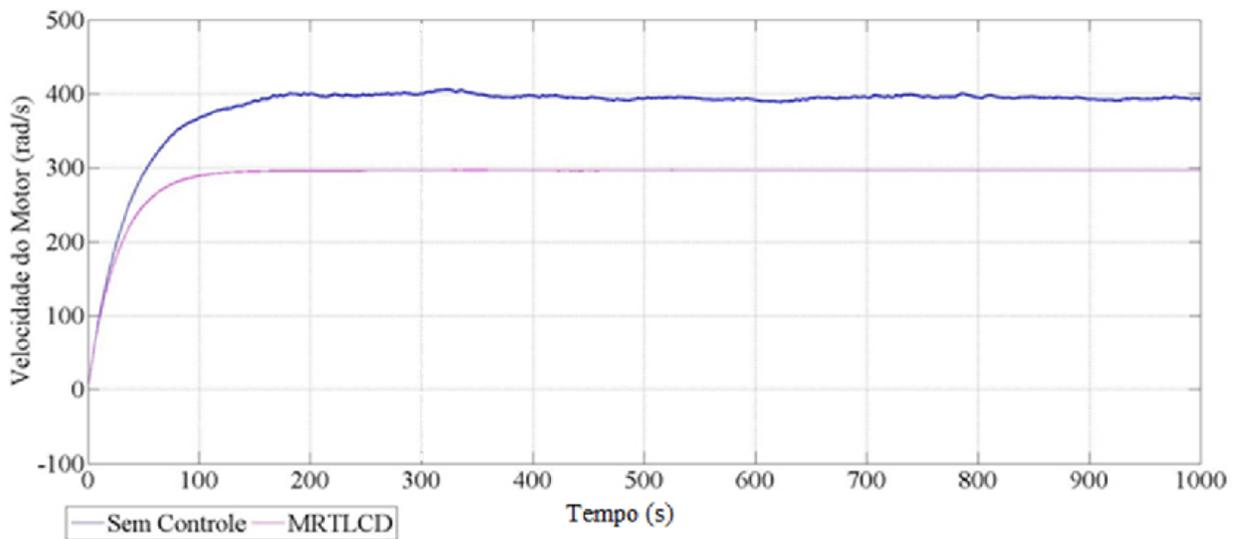
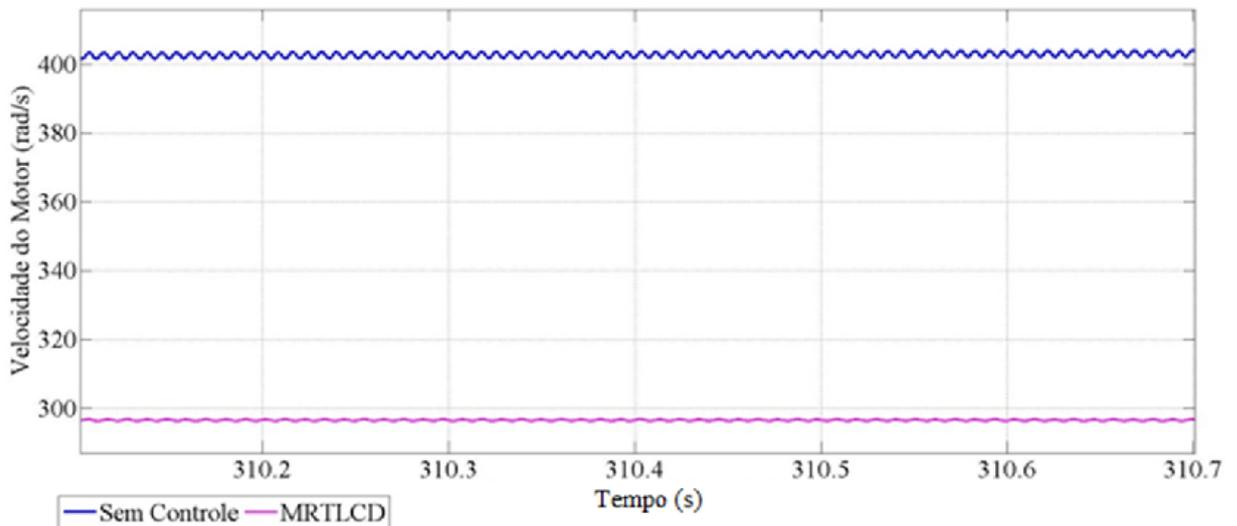


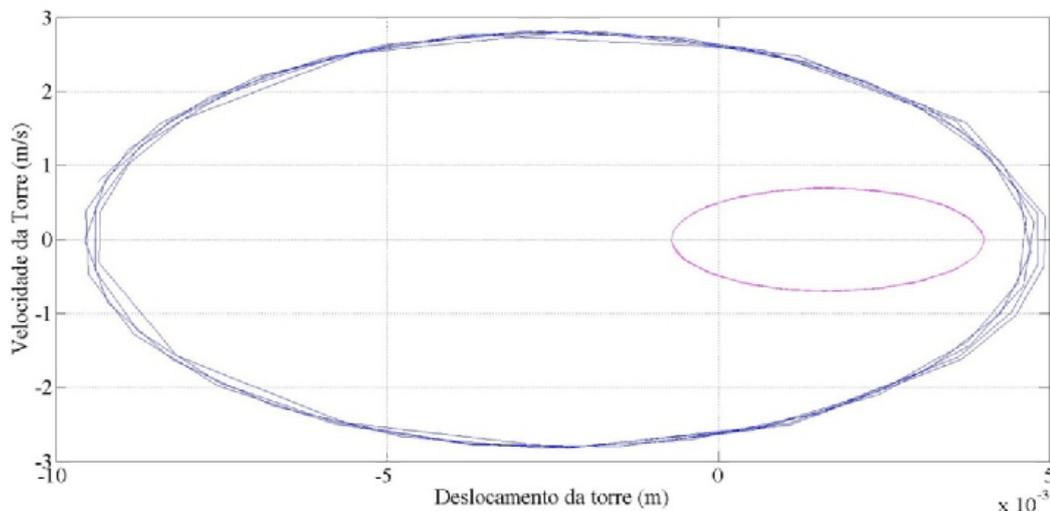
Figura 60- Detalhe no Intervalo de Tempo na Série Temporal, Figura 59.



Na Figura 61, é apresentado o retrato de fase da torre para os dois sistemas simulados. É possível verificar que as respostas dos sistemas apresentam curvas fechadas, o que indica

uma resposta periódica, ou seja, os estados representados se repetem no domínio do tempo. A diferença entre o sistema com MR-TLCD e o sem controle está nas amplitudes de oscilação.

Figura 61- Retrato de Fase da Torre com Amortecedor e sem Amortecedor.



A Figura 62 apresenta a série temporal da torre para uma tensão de 8,5V. Observa-se que nos primeiros 200s a resposta da torre passou por uma região de transição e estabilizando o seu deslocamento em torno de zero. O sistema com MR-TLCD apresentou uma menor amplitude de oscilação e uma maior estabilidade do deslocamento no domínio do tempo, quando comparada com o sistema sem controle. Pode ser analisada em detalhes, na Figura 63, a diferença de amplitude de oscilação entre o sistema com MR-TLCD e o sem controle.

Figura 62- Série Temporal da Torre.

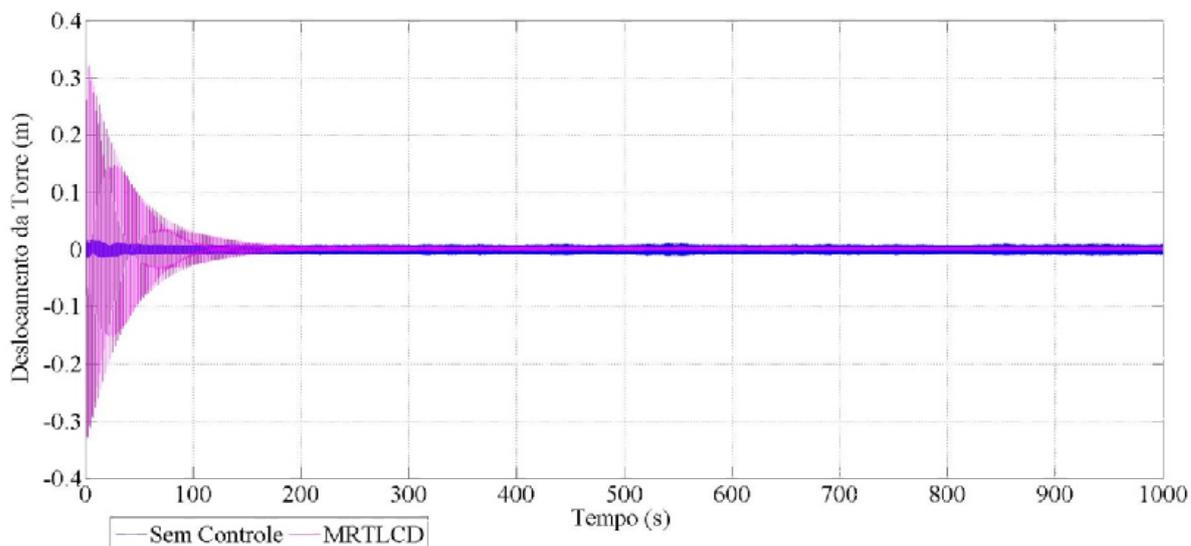
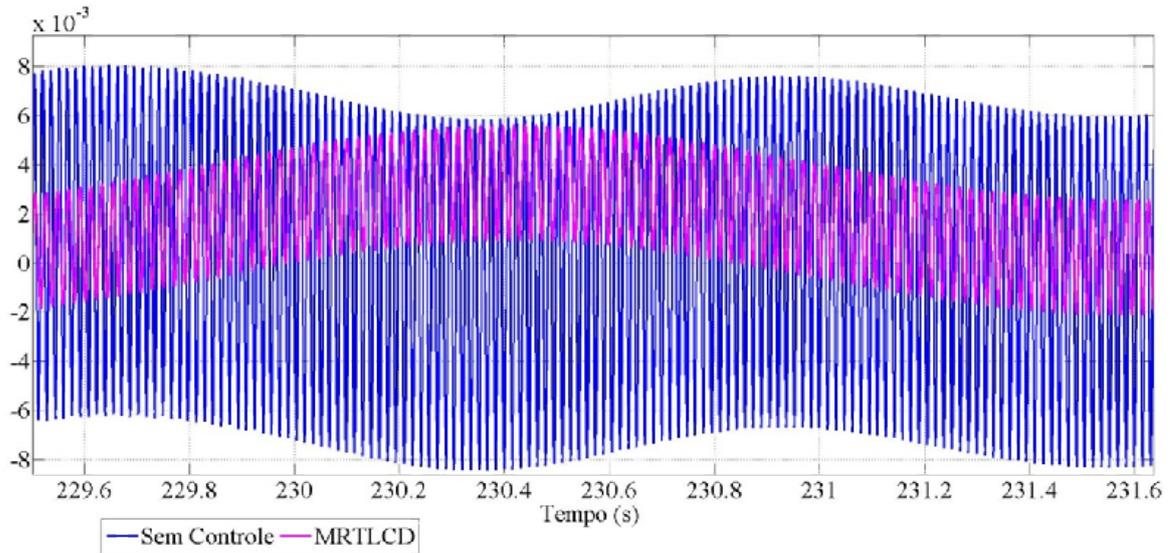


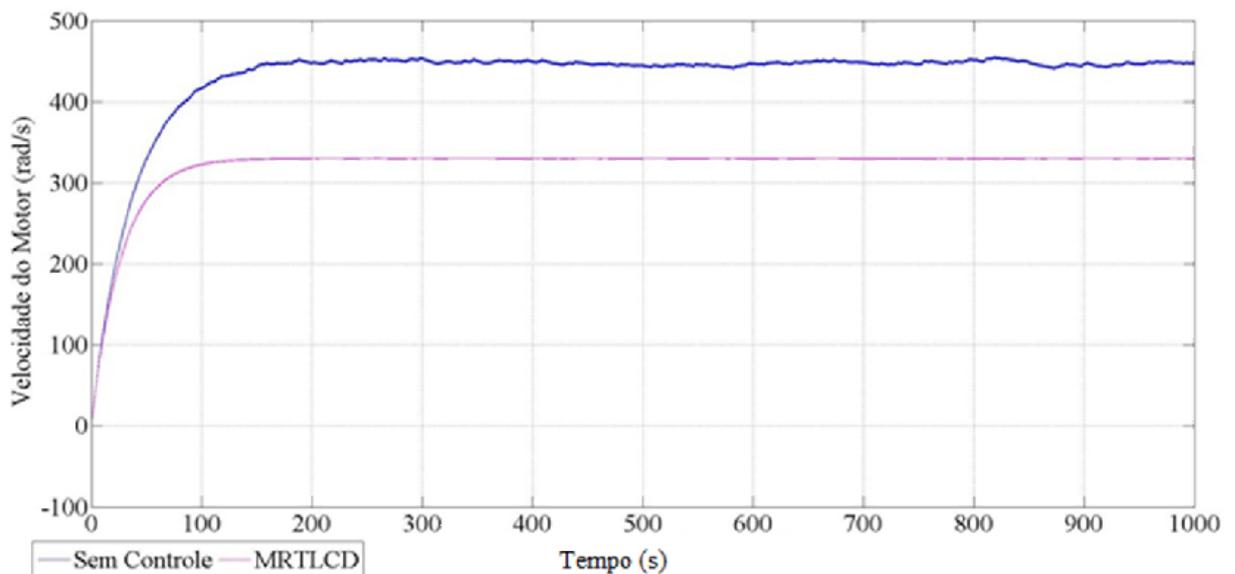
Figura 63- Detalhe no Intervalo de Tempo na Série Temporal, Figura 62.



### 6.1.2 Análise Série Temporal e Plano de Fases para Tensão de 9,6V

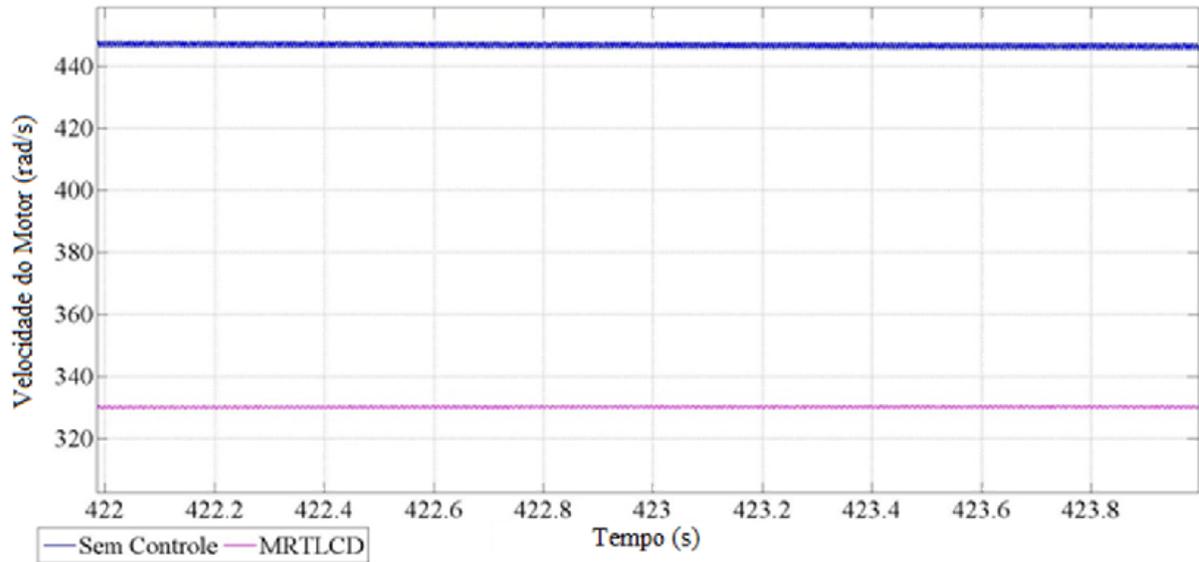
A Figura 64 apresenta a série temporal do motor para uma tensão de 9,6V. Observa-se que nos primeiros 100s a resposta do motor passou por uma região de transição e se estabilizou dentro de uma faixa de velocidade angular de 450 rad/s referente ao sistema sem controle e de 330 rad/s no sistema com amortecedor. O sistema com MR-TLCD apresentou uma menor amplitude de oscilação, menor velocidade angular e uma maior estabilidade do deslocamento angular no domínio do tempo, quando comparada com o sistema sem controle.

Figura 64- Série Temporal do Motor.



A Figura 65 mostra que as frequências aumentaram com o aumento da tensão.

Figura 65- Detalhe no Intervalo de Tempo na Série Temporal, Figura 64.



A Figura 66 apresenta a série temporal da torre para uma tensão de 9,6V. O sistema com MR-TLCD apresentou uma menor amplitude de oscilação e uma maior estabilidade do deslocamento no domínio do tempo, quando comparado com o sistema sem controle. Pode ser analisada em detalhes, na Figura 67, a diferença de amplitude de oscilação entre o sistema com MR-TLCD e o sem controle.

Figura 66- Série Temporal da Torre.

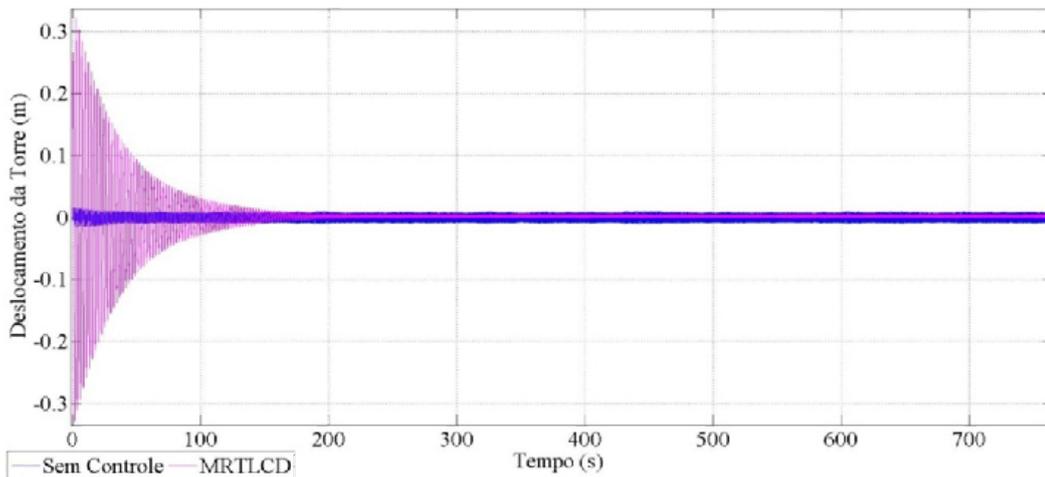
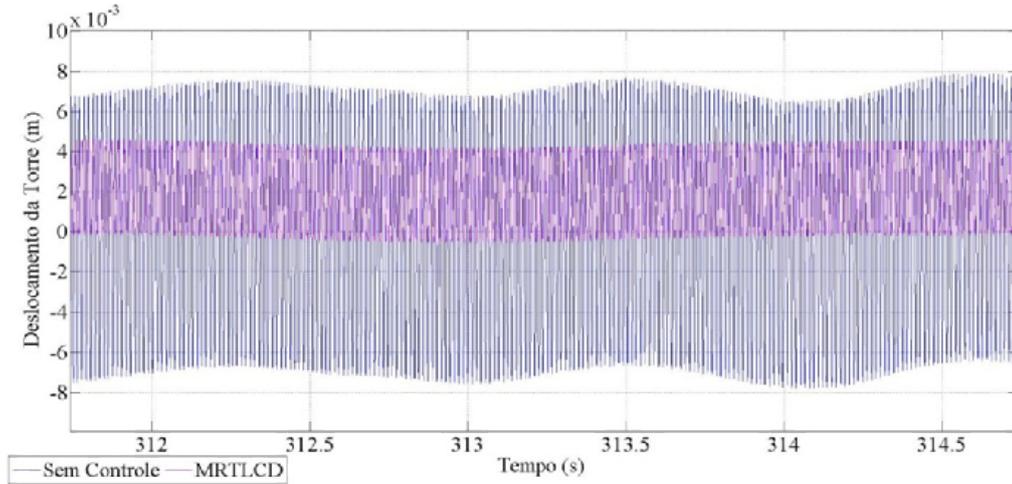


Figura 67- Detalhe no Intervalo de Tempo na Série Temporal, Figura 66.



## 6.2 Caso 2:

No Caso 2 as equações são desenvolvidas de forma adimensional, a principal vantagem está relacionada com a redução do tempo de simulação. Para esse caso foram adotados parâmetros que apresentassem respostas características de comportamento não linear, utilizando como fonte de excitação o motor de corrente contínua.

Nota-se características importantes deste tipo de modelo matemático de sistema dinâmico proveniente da iteração da estrutura com a fonte de excitação, tais como:

- Presença de saltos que são variações bruscas da amplitude de deslocamento da estrutura e da frequência de excitação;
- Descontinuidade da curva amplitude vs frequência;
- Modificação da mesma quando alterada a velocidade angular do motor;
- Dependência destes efeitos com as características do motor.

A Figura 68 e as Equações (6.6), (6.7), (6.8), (6.9) e (6.10) já foram descritas em detalhes no item 3.2 deste trabalho. As Equações (6.6) e (6.7) são referentes ao sistema sem amortecimento e as Equações (6.8), (6.9) e (6.10) representam o sistema com o MR-TLCD.

$$x_1'' - \theta_2'' \sin \theta_2 \gamma_{2,1} = \theta_2'^2 \cos \theta_2 \gamma_{2,1} - x_1' \gamma_{2,2} - x_1, \quad (6.6)$$

$$-x_1'' \sin \theta_2 \gamma_{2,4} + \theta_2'' = -\cos \theta_2 \frac{\omega_2^2}{\omega_1^2} + a' V_a - \dot{\theta}_2 b'. \quad (6.7)$$

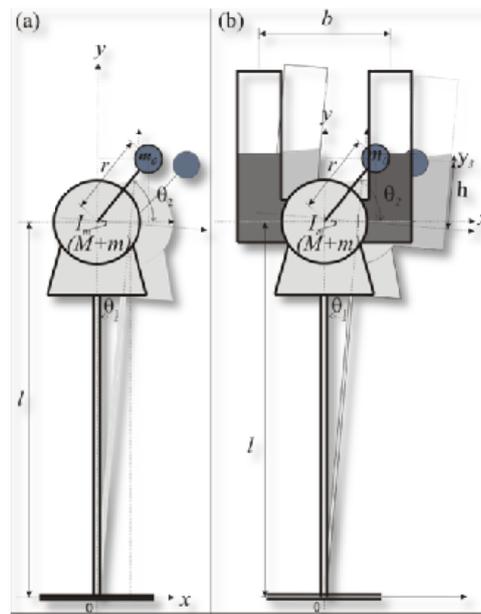
$$x_1'' - \theta_2'' \sin \theta_2 \alpha_{2,1} + y_3'' \alpha_{2,2} = \theta_2'^2 \cos \theta_2 \alpha_{2,1} - x_1' \alpha_{2,3} - x_1 \frac{\omega_1^2}{\omega_3^2}, \quad (6.8)$$

$$-x_1'' \sin \theta_2 \alpha_{2,5} + \theta_2'' = -\cos \theta_2 \frac{\omega_2^2}{\omega_3^2} + V_a a' - \dot{\theta}_2 b', \quad (6.9)$$

$$x_1'' \alpha_{2,6} + y_3'' = -y_3 - |y_3'| y_3' \alpha_{2,8} - \frac{y_3'}{|y_3'|} \alpha_{2,9}. \quad (6.10)$$

Na Figura 68, é mostrado o modelo geométrico e físico da torre, sem e com amortecedor, respectivamente.

Figura 68- Modelo Geométrico e Físico da Torre. (a) sem controle (b) com MR-TLCD



A Tabela 8 mostra os valores dos coeficientes das equações do Caso 2.

Tabela 8- Valores dos Coeficientes das Equações sem Controle e com MR-TLCD do Caso 2.

Valores dos Coeficientes das Equação do Caso 2	
Sem Controle	MR-TLCD
$\gamma_{2,1} = 0,500$	$\alpha_{2,1} = 0,400$
$\gamma_{2,2} = 0,120$	$\alpha_{2,2} = 0,500$
$\gamma_{2,3} = 1,000$	$\alpha_{2,3} = 0,450$
$\gamma_{2,4} = 0,500$	$\alpha_{2,4} = 0,300$
$\gamma_{2,5} = 0,050$	$\alpha_{2,5} = 0,500$
	$\alpha_{2,6} = 0,160$
$a' = 2,000$	$\alpha_{2,7} = 1,000$
$b' = 1,500$	$\alpha_{2,8} = 0,300$
	$\alpha_{2,9} = 0,050$
	$\alpha_{2,10} = 0,010$

Na Figura 69, o gráfico de ressonância apresenta as amplitudes máximas da estrutura vs a tensão aplicada no motor. Os parâmetros relacionados ao motor assumem valores de  $b' = 1,5$ ,  $a' = 2,0$  e variando  $V_a$  no intervalo de 0,5 a 12V. Verifica-se que as máximas amplitudes estão localizadas entre 1 a 5 V. O parâmetro  $V_a$  é considerado como o controle do motor na passagem de ressonância entre a torre e o motor.

A Figura 70 mostram as curvas de ressonância das amplitudes de oscilação da torre vs parâmetro de controle para o sistema sem controle e com MR-TLCD. Pode ser observado que as grandes amplitudes de oscilação estão próximas à região de ressonância, posteriormente é apresentado o fenômeno de salto e ao final o movimento é estabilizado. Também se observa que o sistema com controle apresenta uma redução drástica nas amplitudes de oscilação.

Figura 69- Gráfico de Ressonância Torre de 0,5 a 12V

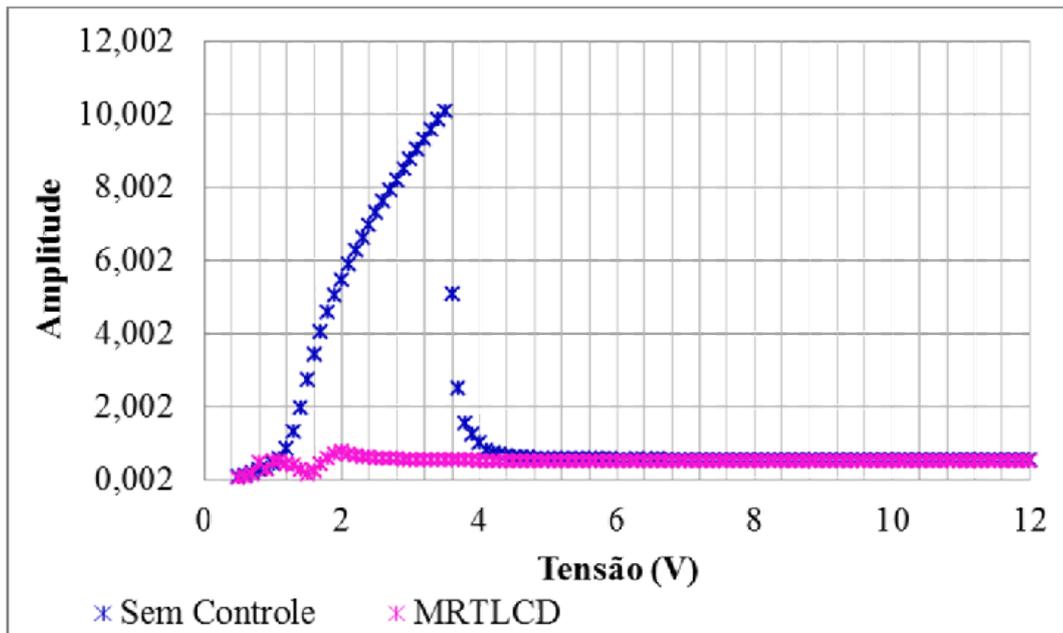
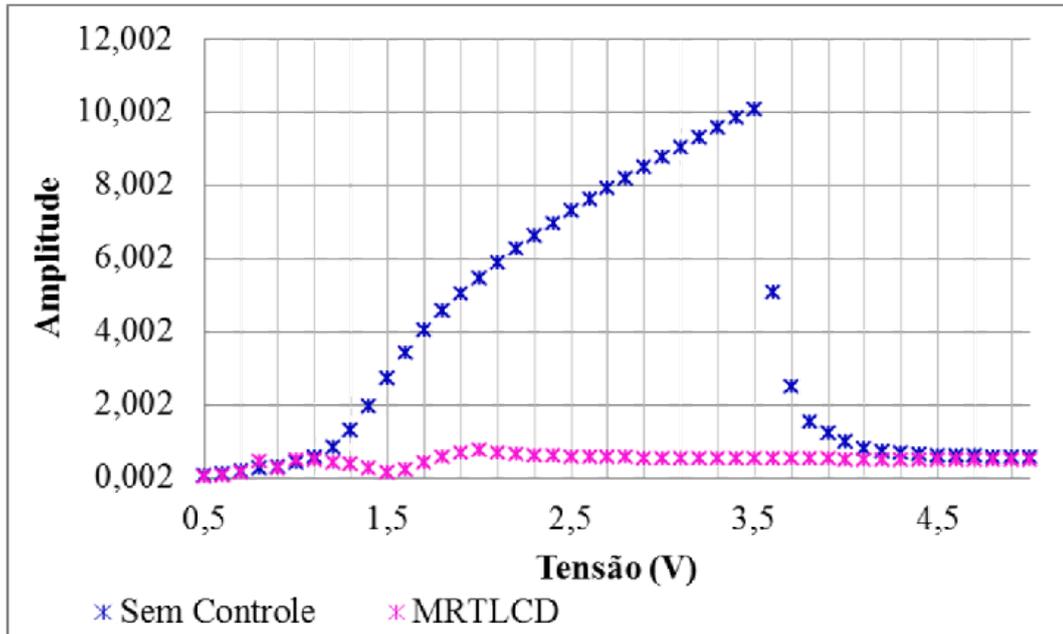
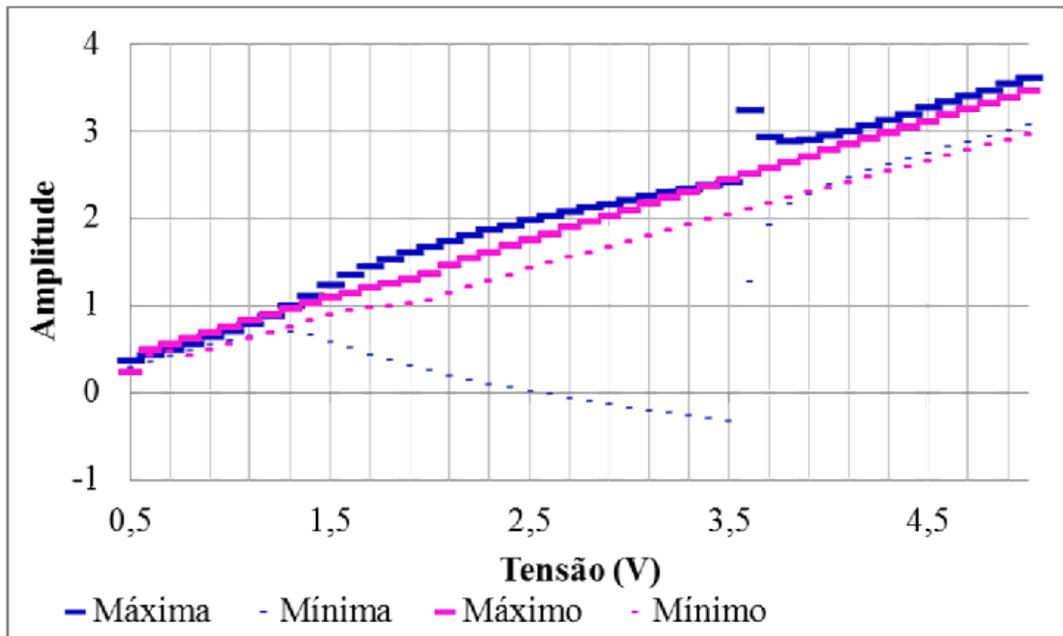


Figura 70- Gráfico de Ressonância Torre de 0,5 a 5V



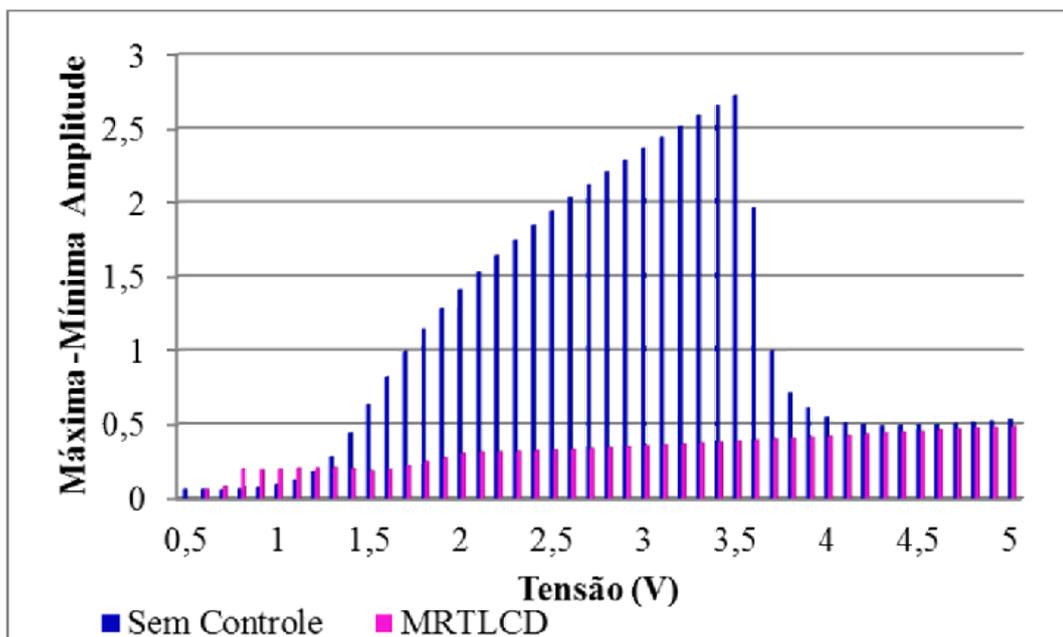
A velocidade do motor permanece, por um longo período de tempo, na região de ressonância simultaneamente com o acréscimo das amplitudes de oscilação da torre. Esse fenômeno ocorre devido à influência das respostas da torre como pode ser mostrado na Figura 71. A transição do período da captura de ressonância e a estabilização da estrutura são observadas através do fenômeno de salto, também conhecido com efeito de *Sommerfeld*. Quando se ativa o MR-TLCD, a velocidade angular do motor atravessa rapidamente da região de ressonância, assim é eliminado o efeito de *Sommerfeld* e a influência da interação entre a torre e o motor. No gráfico de ressonância do motor, são apresentados as máximas mínimas amplitudes vs tensão de alimentação do motor.

Figura 71- Gráfico de Ressonância do Motor



Na Figura 72, é mostrada a diferença entre a amplitude máxima e a amplitude mínima do motor. Destaca-se, que após a passagem pela ressonância, as amplitudes do motor sem controle se aproximam das amplitudes do sistema amortecido (MR-TLCD).

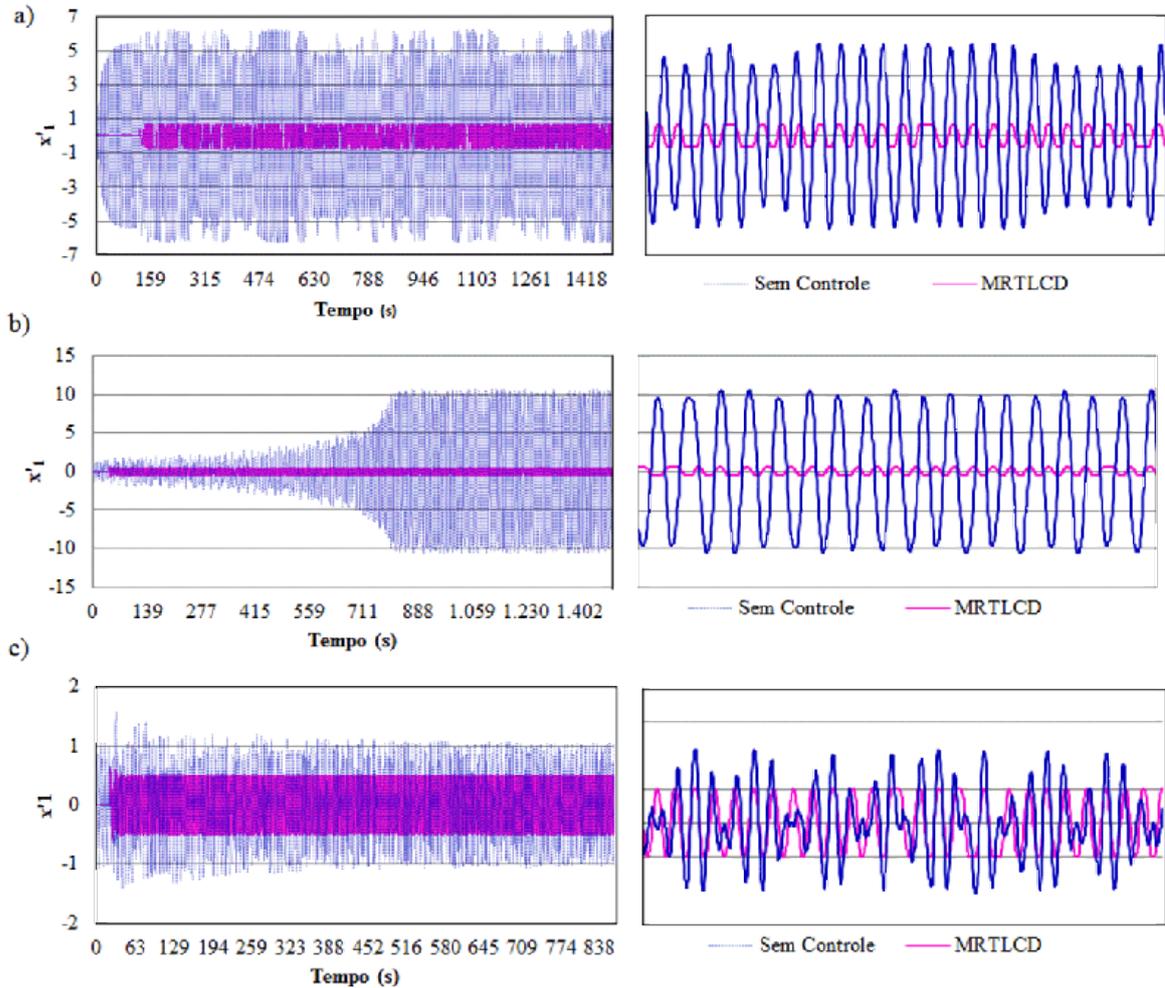
Figura 72- Diferença Entre a Máxima e a Mínima amplitude.



A Figura 73 apresenta os gráficos de série temporal da torre para diferentes valores de tensão, as Figura 73a, Figura 73b e Figura 73c mostram a série temporal para a tensão de 2V, 3,5V e 4V, respectivamente. Observa-se, nas Figura 73a e Figura 73b, que a amplitude da série temporal com MR-TLCD sofreu uma considerável redução. Enquanto, na Figura 73c, a redução da amplitude com MR-TLCD não foi expressiva. Na Figura 73b, é averiguado o

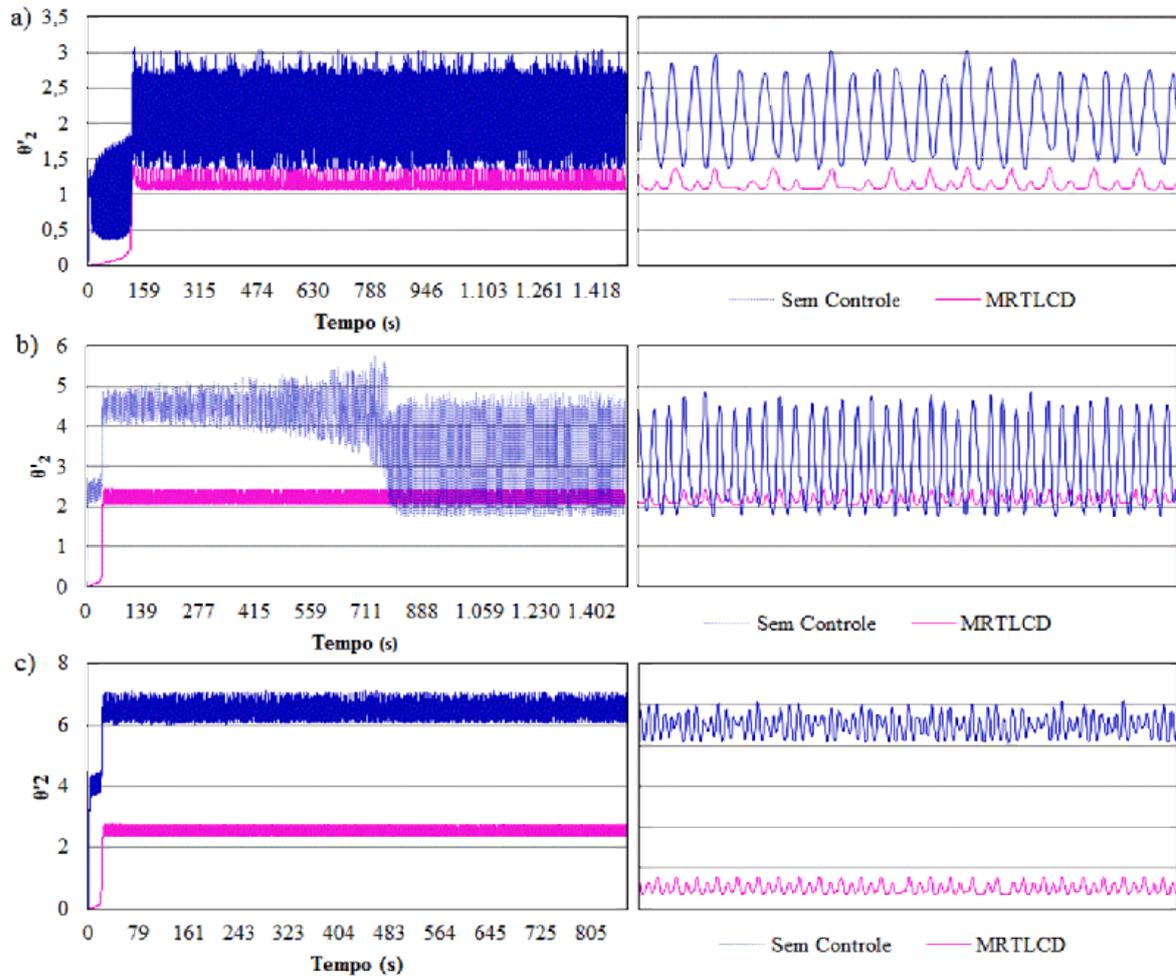
aumento no tempo de transição até atingir o movimento de estado permanente, isto é devido ao sistema estar dentro da faixa de ressonância.

Figura 73- Série Temporada Torre para Diferentes Tensões Aplicada



Nas Figura 74a, 74b e 74c, são apresentados os gráficos de série temporal do motor para as tensões de operação de 2V, 3,5V e 4V, respectivamente. Nas Figura 74a e Figura 74c são observados uma região de transição inicial, após este intervalo o motor entra em regime de movimento de estado permanente. Quando aplicado o MR-TLCD nas situações de 2V e 4V, ocorre uma redução do deslocamento angular do motor, porém a região de transição permanece com a aplicação do MR-TLCD. A Figura 74c apresenta uma maior região de transição e logo após um aumento significativo das amplitudes, o que significa a entrada do motor em ressonância.

Figura 74- Série Temporada Torre para Diferentes Tensões Aplicada



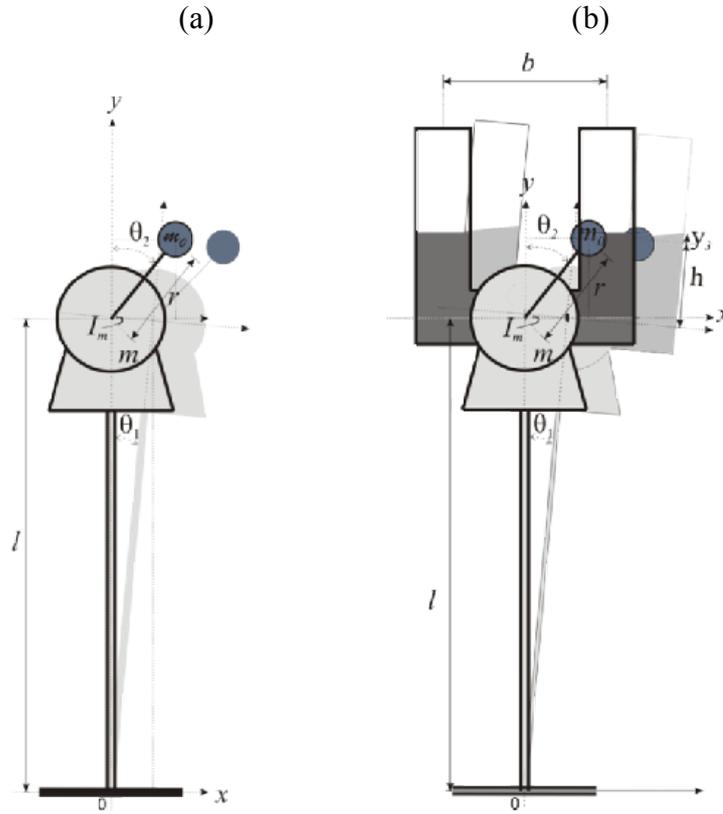
### 6.3 Caso 3:

No caso 3, são apresentadas as respostas obtidas do motor e torre. Também é apresentada a resposta do conjunto torre, motor e MR-TLCD. Os resultados são mostrados com diferentes tensões (parâmetro  $V_a$ ). Os outros parâmetros foram determinados com base nas características estruturais determinada no modelo experimental.

A e as Equações (6.11), (6.12), (6.13), (6.14) e (6.15) já foram descritas em detalhes no item 3.2 deste trabalho. As Equações (6.11) e (6.12) são referentes ao sistema sem amortecimento e as Equações (6.13), (6.14) e (6.15) representam o sistema com o MR-TLCD.

Figura 75 apresenta o modelo esquemático físico e geométrico que foi simulado. Sendo que a mesma figura e as Equações (6.11), (6.12), (6.13), (6.14) e (6.15) já foram descritas em detalhes no item 3.2 deste trabalho. As Equações (6.11) e (6.12) são referentes ao sistema sem amortecimento e as Equações (6.13), (6.14) e (6.15) representam o sistema com o MR-TLCD.

Figura 75- Modelo Geométrico e Físico da Torre. (a) sem Controle (b) com MR-TLCD



$$\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 \cos \theta_2 \gamma_{3,1} = \dot{\theta}_2^2 \sin \theta_2 \gamma_{3,1} - \dot{\theta}_1 \gamma_{3,2} - \theta_1 \gamma_{3,3}, \quad (6.11)$$

$$\ddot{\theta}_1 \cos \theta_2 \gamma_{3,4} + \ddot{\theta}_2 = \sin \theta_2 \gamma_{3,5} + V_a a' - \dot{\theta}_2 b', \quad (6.12)$$

$$\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 \cos \theta_2 \alpha_{3,1} + \ddot{y}_3 \alpha_{3,2} = \dot{\theta}_2^2 \sin \theta_2 \alpha_{3,1} - \dot{\theta}_1 \alpha_{3,3} - \theta_1 \alpha_{3,4}, \quad (6.13)$$

$$\ddot{\theta}_1 \cos \theta_2 \alpha_{3,5} + \ddot{\theta}_2 = \sin \theta_2 \alpha_{3,6} + a' - \dot{\theta}_2 b', \quad (6.14)$$

$$\ddot{\theta}_1 \alpha_{3,7} + \ddot{y}_3 = -y_3 \alpha_{3,8} - |\dot{y}_3| \dot{y}_3 \alpha_{3,9} - \frac{\dot{y}_3}{|\dot{y}_3|} \alpha_{3,10}. \quad (6.15)$$

A Tabela 9 mostra os valores dos coeficientes das equações do Caso 3. O significado desses coeficientes já foram demonstrados no capítulo 3, Caso 3.

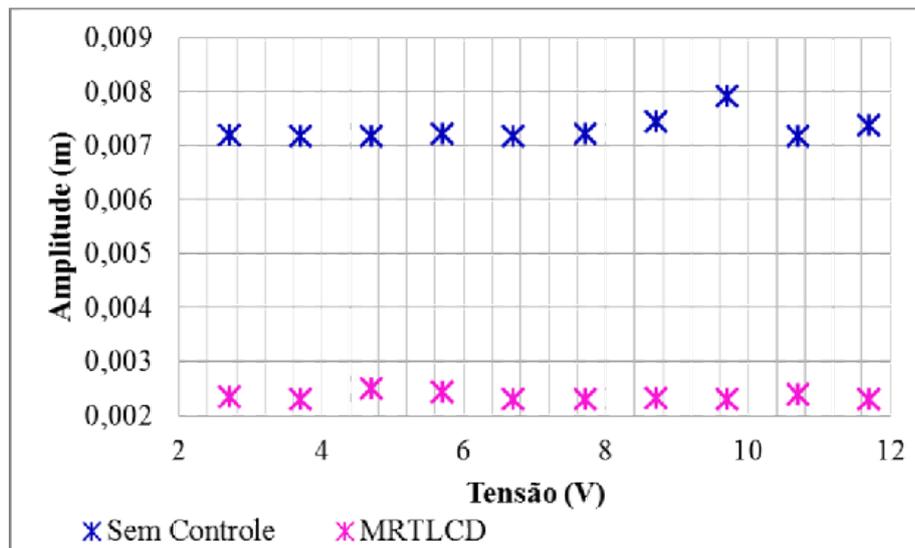
Na Figura 76, o gráfico de ressonância apresenta as amplitudes máximas da estrutura em relação à tensão aplicada no motor. A primeira análise é realizada com poucos pontos e, assim, pode-se verificar um faixa de tensão onde as amplitudes máximas ocorrem. Verifica-se que as máximas amplitudes estão localizadas entre 8,5 a 10 V.

Tabela 9- Valores dos Coeficientes das Equações sem Controle e com MR-TLCD do Caso 3.

Valores dos Coeficientes das Equação do Caso 3	
Sem Controle	MR-TLCD
$\gamma_{3,1} = 0,007$	$\alpha_{3,1} = 0,002$
$\gamma_{3,2} = 0,056$	$\alpha_{3,2} = 0,335$
$\gamma_{3,3} = 23,037$	$\alpha_{3,3} = 0,015$
$\gamma_{3,4} = 1,319$	$\alpha_{3,4} = 6,045$
$\gamma_{3,5} = 11,755$	$\alpha_{3,5} = 1,319$
	$\alpha_{3,6} = 11,755$
$a' = 0,020$	$\alpha_{3,7} = 0,550$
$b' = 0,003$	$\alpha_{3,8} = 65,378$
	$\alpha_{3,9} = 50,000$
	$\alpha_{3,10} = 1,562$

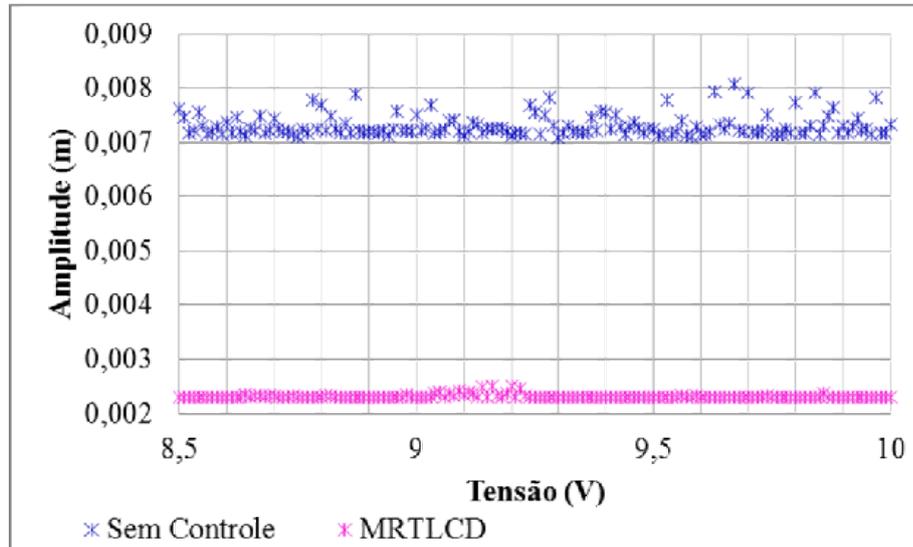
É possível analisar que as amplitudes de oscilação da estrutura, fazendo uso do MR-TLCD, foram reduzidas e apresentam um comportamento estável quando comparado com o sistema sem amortecedor.

Figura 76- Gráfico de Ressonância Torre de 2 a 12V



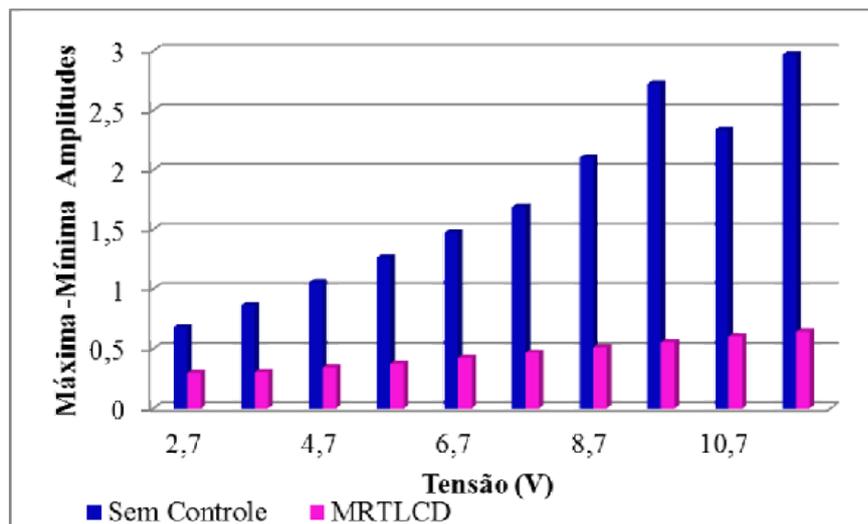
A Figura 77 apresenta o gráfico de ressonância onde a tensão aplicada varia entre 8,5 a 10V. A amplitude máxima está localizada em 9,67V, com esse valor determinado, é realizada a análise de retrato de fase e série temporal que é apresentado no decorrer deste capítulo.

Figura 77- Gráfico de Ressonância Torre de 8,5 a 10V



Na Figura 78, é mostrada a diferença entre os valores máximos e mínimos da amplitude de oscilação do motor operando na faixa de 2 a 12V. Observa-se que as amplitudes sofreram redução com a utilização do MR-TLCD, também é visto que as amplitudes de oscilação do modelo sem controle são crescentes com o aumento da tensão. As amplitudes do modelo com MR-TLCD se mantêm praticamente constante com o aumento de tensão.

Figura 78- Gráfico de Diferença entre Máxima e Mínima Amplitude do Motor de 2 a 12V

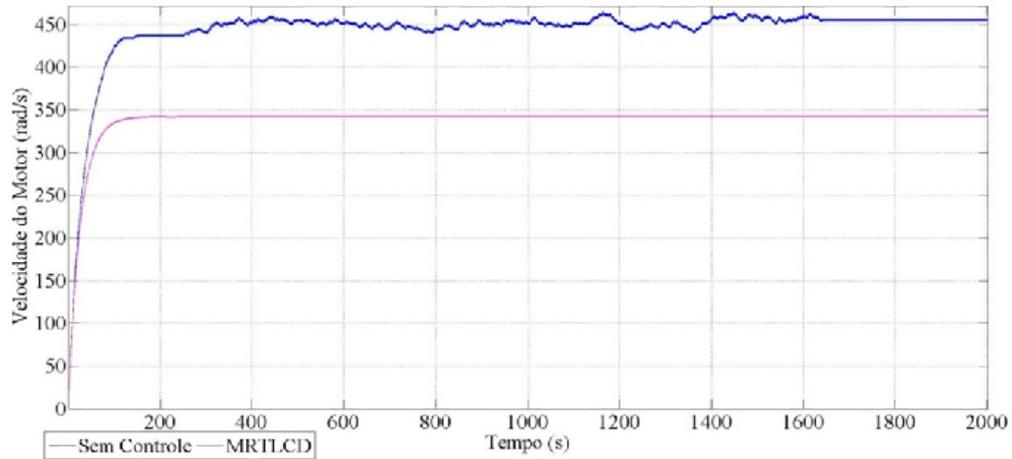


### 6.3.1 Análise Série Temporal e Plano de Fases para Tensão de 9,6V

A Figura 79 apresenta a série temporal do motor para uma tensão de 9,6V. Observa-se que nos primeiros 100s a resposta do motor passou por uma região de transição e se estabilizou dentro de uma faixa de velocidade angular de 450 rad/s referente ao sistema sem controle e de 330 rad/s no sistema com amortecedor.

O sistema com MR-TLCD apresentou uma menor amplitude de oscilação, menor velocidade angular e uma maior estabilidade do deslocamento angular no domínio do tempo, quando comparada com o sistema sem controle.

Figura 79- Série Temporal do Motor.



A Figura 80 apresenta a série temporal da torre para uma tensão de 9,67V. O sistema com MR-TLCD apresentou uma menor amplitude de oscilação e uma maior estabilidade do deslocamento no domínio do tempo, ao final intervalo de transição, quando comparado com o sistema sem controle. Pode ser analisada em detalhes, na Figura 81, a diferença de amplitude de oscilação entre o sistema com MR-TLCD e o sem controle.

Figura 80- Série Temporal da Torre.

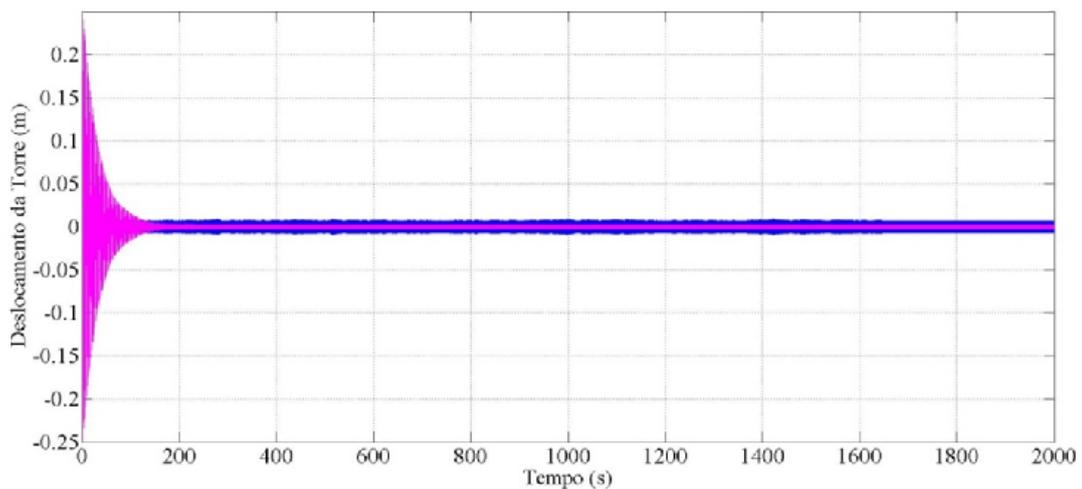
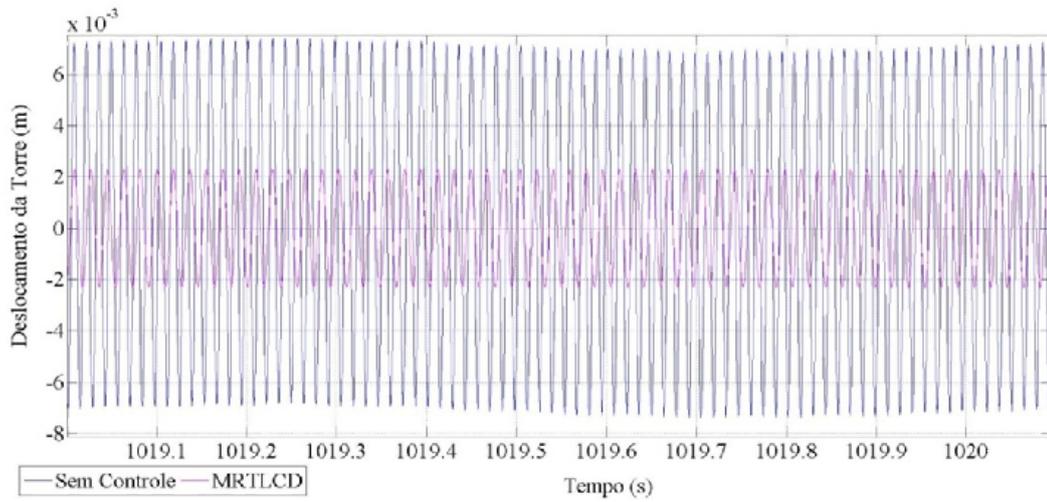
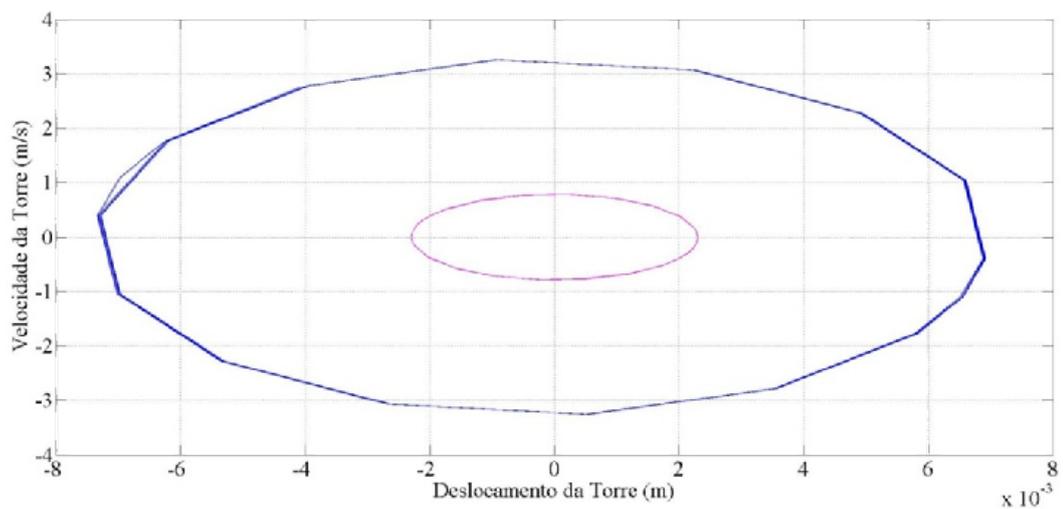


Figura 81- Detalhe no Intervalo de Tempo na Série Temporal, Figura 80



Na Figura 82, é apresentado o retrato de fase da torre para os dois sistemas simulados. É possível verificar que a resposta dos sistemas produzem curvas fechadas, o que indica uma resposta periódica, ou seja, os estados representados se repetem no domínio do tempo. A diferença entre o sistema com MR-TLCD e o sem controle está nas amplitudes de oscilação.

Figura 82- Retrato de Fase da Torre com Amortecedor e sem Amortecedor.



## 7 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

Este capítulo apresenta as conclusões obtidas através das simulações e ensaios realizados neste trabalho, bem como apresenta algumas sugestões de trabalho futuro.

### 7.1 Conclusões

Neste trabalho, foram desenvolvidas as equações de movimento que representassem uma estrutura esbelta, torre eólica, e a sua interação com o gerador. O gerador foi representado por um motor desbalanceado de corrente contínua e de potência limitada. No sistema amortecido foi empregado um amortecedor do tipo MR-TLCD.

Para a determinação das equações de movimento, foi utilizado as formulações de Lagrange. Também foram realizados ensaios numéricos de integração direta das equações de movimento, utilizando o integrador ODE113 (Adams-Bashforth-Moulton) do MATLAB.

Com base nas equações de movimento desenvolvidas foi elaborado um modelo experimental no qual suas características dimensionais foram utilizadas nas simulações. Apresentam-se dois grupos de estudo desenvolvidos neste trabalho cujas conclusões são apresentadas a seguir.

No primeiro grupo de estudo, foram caracterizados os parâmetros referente ao modelo experimental com as seguintes atividades:

- O procedimento para caracterização dos parâmetros do motor de corrente contínua foram de grande importância, pois proporcionaram resultados satisfatórios. Também expôs a não necessidade do uso de instrumentos de medição complexos;

- Através dos ensaios de vibração livre da estrutura foram determinados os valores das características do modelo, os quais foram aplicados nas simulações numéricas;

- Utilizando o TLCDC no modelo experimental, observou-se que as amplitudes de vibração do sistema foram reduzidas para alguns valores de tensão aplicados no motor.

No segundo grupo de estudo, foram realizadas as simulações numéricas. As conclusões referidas a esse grupo são enumeradas a seguir:

- No Caso 1, onde o sistema foi modelado com base em um pêndulo duplo invertido, obtiveram-se respostas significativas quanto à redução das amplitudes de oscilação do sistema quando utilizado o MR-TLCD;

- O parâmetro de rigidez do sistema é de grande influência nas equações de movimento no Caso 1, pois esse mantém o pêndulo na posição vertical;

-O Caso 3, quando comparado com o Caso 1, apresentou resultados semelhantes, mostrando que as simplificações realizadas nas equações não influenciam significativamente nos resultados da resposta da estrutura;

- Nos três casos, com o uso do amortecedor, as amplitudes de oscilação foram reduzidas quando comparado ao sistema não amortecido;

## **7.2 Trabalhos Futuros**

No decorrer do trabalho, foi possível observar pontos plausíveis de serem estudados como continuação desta pesquisa, os quais são apresentados a seguir:

- Novos ensaios experimentais utilizando acelerômetros como instrumento de medição das amplitudes de vibração;

- Utilização do magneto reológico (MR) como fluido do TLCD experimental;

- Comparação da resposta dinâmica utilizando MR-TLCD com outros tipos de amortecedores com materiais inteligentes;

- Comparação dos resultados utilizando outros métodos numéricos, como elementos finitos.

## 8 BIBLIOGRAFIA

- ABEEÓLICA. 2013. **Associação Brasileira de Energia Eólica**. Boletim Mensal de Dados do Setor Eólico Público. [Online] 11 de 29 de 2013. [Citado em: 29 de 11 de 2013.] <http://www.portalabeeolica.org.br/>.
- ACKERMANN, T. 2002. **An overview of wind energy-status 2002-** Renewable and Sustainable Energy Reviews. 2002. Vol. 6, n. 1-2. p. 67-127.
- ALIGOOD, Kathleen T, SAUER, Tim D. e YORKE, James A. 1996. **Chaos: An Introduction to Dynamical Systems** . s.l. : Springer, 1996.
- ALVARENGA, Elias Barbosa. 2012. **Uma Proposta Laboratorial para Estudos de Desempenho de Unidades Eólicas no Contexto da Qualidade de Energia**. Uberlândia : s.n., 2012. Dissertação .
- BALTHAZAR, J.M. and WARMINSKI, J. 2003. **Vibrations of a Parametrically and Self-Excited System with Ideal and Non-Ideal Energy Sources**. J. of the Braz. Soc. of Mech. Sci. & Eng. 2003, Vol. XXV, 4/413.
- BONELLI, Arthur Fernando. 2010. **Uma Proposta para Modelagem Laboratorial de Turbinas Eólicas por Motores de Corrente Contínua**. Dissertação de Mestrado. Uberlândia: Universidade Federal de Uberlândia, 2010.
- BRASIL, R.M.L.R.F., FEITOSA, L.C.S. and BALTHAZAR, J.M. 2006. **A Nonlinear and Non-Ideal Wind Generator Supporting Structure**. *Applied Mechanics and Materials*. 2006, Vols. 5-6, 5-6 (2006) pp. 433-442.
- CLOUGH, Ray w. 1993. **Dynamics of Structures**. 1993. 2.
- COMIM, Paulo Rogerio. 1995. **Ferramentas para Identificação Experimental Caos em Sistemas de Enegnharia** . **Dissertação Mestrado - UNICAMP**. 1995.
- COSSOLINO, L.C. e PEREIRA AHA, A.H.A. 2010. **Amortecimento: classificação e métodos de determinação**. Informativo Técnico-Científico ITC04-Amortecimento/ATCP. São Carlos : s.n., 2010.
- CUSTÓDIO, R. dos S. 2009. **Energia Eólica para produção de Energia Elétrica. Centrais Elétricas Brasileiras -Eletrobrás**. Rio deJaneiro : s.n., 2009.
- FELIX, Jorge L.P., BALTHAZAR, José M. and BRASIL, Reyolando M.L.R.F. 2005. **On Tuned Liquid Column Dampers Mounted on a Structural Frame**. *Journal of Sound and Vibration*. 282, 2005, p.1285-1292.
- FELIX, Jorge Luis Palacios. 2002. **Teoria de Sistemas Vibratórios Aporticados Não lieares e Não ideais**. **Campinas** : Tese de Doutorado, 2002.
- FENILI, André. 2000. **Modelagem Matemática e análise dos comportamentos ideal e não ideal de estruturas flexíveis de rastreamento**. Tese de Doutorado UNICAMP. Campinas : s.n., 2000.

- GENG., S. 2002. **Synthesis and Properties of Magnetorheological Fluids**. Tese de Doutorador, School of Engineering of University of Pittsburgh. Pittsburgh : s.n., 2002.
- GROEHS, Ademar Gilberto. 2005. **Mecânica Vibratória**. São Leopoldo: Editora UNISINOS, 2005. 2º Edição.
- GUCKENHEIMER, John e HOLMES, Philip. 2002. **Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcation of Vector Fields**. s.l. : 7th print, 2002.
- HALLIDAY, D., RESNICK, R. e WALKER, J. 2007. **Fundamentos de Física**. s.l. : LTC, 2007. vol.1-Mecânica.
- HANSEN, M. O. L., SORENSEN, J. N. e VOUTSINAS, S. SOR. 2006. A. **State of the art in wind turbine aerodynamics and aeroelasticity**. Progress in Aerospace Sciences. 2006. Vol. 42, 4. p. 285–330.
- HERBERT, Joselin, et al. **A review of wind energy technologies**. . Renewable and Sustainable Energy Reviews. Vol. 11, 6. p. 1117-1145.
- JOLLY, MR., BENDER, JW. e CLARSON, JD. 1999. **Properties and applications of commercial magneto rheological fluids**. J. Intell Mater Syst Struct. 10, 1999, Vols. 5-13.
- K.A., AL-SAIF, K.A., ALDAKKAN e M.A., Foda. 2011. **Modified Liquid Column Damper for Vibration Control of Structures**. International Journal of Mechanical Sciences. 53, 2011, Vols. 505-512.
- KONONENKO, V.O. 1969. **Vibrations of a Nonideal Electro-Mechanical System**. Journal of Solids and Structures . 38, 1969, 1699-1706.
- LIMA, Alexande Silva de. 2011. **Identificação Experimental de um Sistema Magneto Reológico**. Tese de Doutorado-COPPE-UFRJ. 2011.
- Mazzilli, C. E. N. e Soares, M. E. S. 2007. **Análise de Dinâmica de Estruturas com Comportamento Linear**. São Paulo : s.n., 2007.
- MEIROVITCH, Leonard. 1967. **Analytical Methods in Vibrations** . Macmillan : s.n., 1967.
- MONTEIRO, Luiz Henrique Alves. 2006. **Sistemas Dinâmicos** . São Paulo : Livraria da Física, 2006.
- NEWTON, Isaac. 2002. **Principia: Princípios Matemáticos de Filosofia Natural**. s.l. : Livro I. 2ed, 2002.
- PEREIRA, A. DE L. 1993. **Análise aeroelástica de turbinas de eixo horizontal**. Rio de Janeiro : s.n., 1993.
- PERUZZI, José Nelson. 2005. **Dinâmica não linear e controle de sistemas ideais e não ideais periódicos**. Tese de Doutorado . São Paulo : UNICAMP, 2005.

PHILLIPS, RW. 1969. **Engineering applications of fluids with variable yield stress**. PhD thesis, University of California at Berkeley. California : s.n., 1969.

PUGLIA, Vicente. 2009. **Análise de Alguns Aspectos no estudos de torres Estaiadas**. Dissertação de Mestado -UFRGS. Porto Alegre : s.n., 2009.

RAGHEB, Magdi e RAGHEB, Adam M. 2011. **Wind Turbines Theory - The Betz Equation and Optimal Rotor Tip Speed Ratio**. Fundamental and Advanced Topics in Wind Power. 2011, Hard Cover, 422 pages.

RAO, Singiresu. 2008. **Vibrações Mecânicas**. São Paulo : Pearson Prentice Hall, 2008. 4.

SILVA, Henrique Furia. 2012. **Análise do Comportamento Dinâmico Não Linear de Estruturas Sob a Excitação de Suportes Não Ideal**. São Paulo : Ed. Rev., 2012. 213p.

SPENCER, Jr BF, et al. 1999. **Smart dampers for seismic protection of structures: a full-scale study. Proceedings of the 2nd world conference on structural control**. s.l. : John Wiley & Sons, 1999. Vol. 1. 417-26.

TELLO, Jorge Manuel Sotomayor. 1979. **Ligões de Equações Diferenciais Ordinárias** . s.l. : Projeto Euclides, 1979.

WANG, J.Y, et al. 2005. **Magneto-rheological tuned liquid column dampers (MR-TLCD) for vibration mitigation of tall buildings modelling and analysis of open-loop control**. Computers & Structures. 83, 2005, 2023-2034.

WARMINSKI, J. e BALTHAZAR, J.M. 2003. **Vibrations od a Parametrically and Self-Excited System With Ideal and Non Ideal Energy Sources**. J.of the Braz. Soc. Of Mech. Sci. & Eng. . 2003, Vol. XXV, 4/413-120.

YANG, G., et al. 2002. **Large Scale MR Fluid Dampers: Modeling and Dynamic performance consideration**. Eng. Struct. 24, 2002, Vols. 309-23.

ZIENKIEWICZ, O.C. 1982. **El Método de los Elementos Finitos**. Barcelona Espanha : Editorial Reverte S.A., 1982. p. 903..

## APÊNDICE A

### Modelagem das equações de movimento do sistema utilizando Maple.

restart :

clear(all) :

with(plots) :

with(LinearAlgebra) :

with(VariationalCalculus) :

**-Torre:**

**\*Posição:**

$$X_1 := t \rightarrow l \cdot \sin(\theta_1(t)) :$$

$$Y_1 := t \rightarrow l \cdot \cos(\theta_1(t)) :$$

**\*Energia Cinética:**

$$T_1 := t \rightarrow \frac{1}{2} \cdot (M + m) \cdot \left( \left( \frac{d}{dt} X_1(t) \right)^2 + \left( \frac{d}{dt} Y_1(t) \right)^2 \right) :$$

simplify(combine(T[1](t), trig), size) :

**\*Energia Potencial:**

$$V_1 := t \rightarrow (M + m) \cdot g \cdot Y_1(t) + \frac{1}{2} \cdot k \cdot (\theta_1(t))^2 :$$

simplify(combine(V[1](t), trig), size) :

**-Massa Desbalanceada:**

**\*Posição:**

$$X_2 := t \rightarrow X_1(t) + r \cdot \sin(\theta_2(t)) :$$

$$Y_2 := t \rightarrow Y_1(t) + r \cdot \cos(\theta_2(t)) :$$

**\*Energia Cinética:**

$$T_2 := t \rightarrow \frac{1}{2} \cdot m_0 \cdot \left( \left( \frac{d}{dt} X_2(t) \right)^2 + \left( \frac{d}{dt} Y_2(t) \right)^2 \right) + \frac{1}{2} \cdot I_m \cdot \left( \frac{d}{dt} \theta_2(t) \right)^2 :$$

simplify(combine(T[2](t), trig), size) :

**\*Energia Potencial:**

$$V_2 := t \rightarrow m_0 \cdot g \cdot Y_2(t) :$$

simplify(combine(V[2](t), trig), size) :

**-Fluido:**

**\*Posição:**

$$X_3 := t \rightarrow X_1(t) :$$

$$Y_3 := t \rightarrow y_3(t) + Y_1(t) :$$

**\*Energia Cinética:**

$$T_3 := t \rightarrow \frac{1}{2} \left( \left( l^2 \left( (h \cdot A + b \cdot A + h \cdot A) \sin(\theta_1(t))^2 - 2 \cdot b \cdot A \cdot \sin(\theta_1(t)) \cos(\theta_1(t)) + \cos(\theta_1(t))^2 (h \cdot A + b \cdot A + h \cdot A) \right) \right. \right. \\ \left. \left. \dot{\theta}_1(t)^2 + 2 l \left( (-h \cdot A - b \cdot A - h \cdot A) \sin(\theta_1(t)) + b \cdot A \cdot \cos(\theta_1(t)) \right) \dot{y}_3(t) \dot{\theta}_1(t) + \dot{y}_3(t)^2 (h \cdot A + b \cdot A + h \cdot A) \right) \rho \right) :$$

simplify(combine(T[3](t), trig), size) :

$$T_{31} := t \rightarrow \frac{1}{2} \int \rho \cdot \left( \left( \frac{d}{dt} Y_3(t) \right)^2 + \left( \frac{d}{dt} X_3(t) \right)^2 \right) dv_1 + \frac{1}{2} \int \rho \cdot \left( \frac{d}{dt} Y_3(t) + \frac{d}{dt} X_3(t) \right)^2 dv_2 + \frac{1}{2} \int \rho \cdot \left( \left( \frac{d}{dt} Y_3(t) \right)^2 + \left( \frac{d}{dt} X_3(t) \right)^2 \right) dv_3 :$$

simplify(T[31](t), size) :

**\*Energia Potencial:**

$$V_3 := t \rightarrow \frac{A \cdot \rho \cdot g}{2} \cdot \left( (h - y_3(t))^2 + (h + y_3(t))^2 \right) :$$

simplify(V[3](t), size) :

**-Energia Cinética total do sistema:**

$$T_C := t \rightarrow T_1(t) + T_2(t) + T_3(t) :$$

simplify(combine(T[C](t), trig), size) :

**-Energia Potencial total do sistema:**

$$V_P := t \rightarrow V_1(t) + V_2(t) + V_3(t) :$$

simplify(combine(V[P](t), trig), size) :

**-Aplicação da Equação de Lagrange:**

$$L := t \rightarrow T_C(t) - V_P(t) :$$

simplify(combine(L(t), trig), size) :

**-Forças não conservativas:**

$$U_1 := t \rightarrow -c_1 \cdot \left( \frac{d}{dt} \theta_1(t) \right) :$$

$$U_2 := t \rightarrow a - b_2 \cdot \dot{\theta}_2(t) :$$

$$U_3 := t \rightarrow -\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot A \cdot \delta \cdot \left| \frac{d}{dt} y_3(t) \right| \cdot \frac{d}{dt} y_3(t) - \frac{c \cdot \tau \cdot A \cdot L \cdot \left( \frac{d}{dt} y_3(t) \right)}{H \cdot \left| \frac{d}{dt} y_3(t) \right|} :$$

**-Lagrangeana:**

$$EDO_1 := \text{convert}(-\text{EulerLagrange}(L(t), t, \theta_1(t))_1 = U_1(t), \text{diff}) :$$

simplify(combine(simplify(EDO\_1, size), trig), size) :

$$m_0 l r \cos(\theta_1(t) - \theta_2(t)) \ddot{\theta}_2(t) + m_0 l r \sin(\theta_1(t) - \theta_2(t)) \dot{\theta}_2(t)^2 - (\rho b A \sin(2 \theta_1(t)) - A(2h + b) \rho - m_0 - m - M) l^2 \ddot{\theta}_1(t) + ((-2h - b) \sin(\theta_1(t)) + b \cos(\theta_1(t))) A \rho l \ddot{y}_3(t) - A \rho l^2 \dot{\theta}_1(t)^2 b \cos(2 \theta_1(t)) - g l (M + m) + m_0 \sin(\theta_1(t)) + k \theta_1(t) = -c_1 \dot{\theta}_1(t)$$

$$EDO_2 := \text{convert}(-\text{EulerLagrange}(L(t), t, \theta_2(t))_1 = U_2(t), \text{diff}) :$$

simplify(combine(simplify(EDO\_2, size), trig), size) :

$$m_0 r l \cos(\theta_1(t) - \theta_2(t)) \ddot{\theta}_1(t) - m_0 r l \sin(\theta_1(t) - \theta_2(t)) \dot{\theta}_1(t)^2 + (m_0 r^2 + I_m) \ddot{\theta}_2(t) - m_0 g r \sin(\theta_2(t)) - a - b_2 \dot{\theta}_2(t)$$

$EDO_3 := \text{convert}(-\text{EulerLagrange}(L(t), t, y_3(t))_1 - U_3(t),$   
 $\text{diff}) : \text{simplify}(\text{combine}(\text{simplify}(EDO_3, \text{size}), \text{trig}), \text{size});$

$$\begin{aligned}
 -A \left( -\left( b \cos(\theta_1(t)) - \sin(\theta_1(t)) (2h + b) \right) l \ddot{\theta}_1(t) + (-2h \right. \\
 \left. - b) \ddot{y}_3(t) + l \left( (2h + b) \cos(\theta_1(t)) + \sin(\theta_1(t)) b \right) \dot{\theta}_1(t)^2 \right. \\
 \left. - 2g y_3(t) \right) \rho = - \frac{A \dot{y}_3(t) \left( \rho \delta |\dot{y}_3(t)|^2 H + 2c \tau L \right)}{2H |\dot{y}_3(t)|}
 \end{aligned}$$

## APÊNDICE B

### Modelagem das equações de movimento em MATLAB do sistema sem controle Caso

#### 2 e com MR-TLCD.

```
[t,x]=ode113('troceq2sem',[0 1000],[0 0 0 0]);%A função ode113 retorna duas  
variaveis:t(vetor de tempo[0 1000])e x(matriz com duas tres colunas)  
[tt,xx]=ode113('troceq2',[0 1000],[0 0 0 0 1 1]);
```

#### Sistema com MR-TLCD:

```
function theta=troceq2(t,x)  
global va  
alpha=[0.034720096  
0.060414365  
0.002382139  
17.3599272  
0.07791609  
0.216666667  
1  
7.5  
0.987409274  
664.9933629];  
% parametro de controle do motor  
a=0.01935735;%parametro de torque constante ou relativo a tensão de  
alimentação  
b=0.003443367; % parametro de controle do motor  
va=3;%tesão de alimentação do motor  
% A é matriz dos coeficientes theta(1)";theta(2)";theta(3) "  
mat(1,1)=1;  
mat(1,2)=-sin(x(3))*alpha(1);  
mat(1,3)=alpha(2);  
mat(2,1)=sin(x(3))*alpha(5);  
mat(2,2)=1;  
mat(2,3)=0;  
mat(3,1)=alpha(6);  
mat(3,2)=0;  
mat(3,3)=1;  
A=inv(mat);  
% F é o vetor correspondente as igualdades das equações  
theta(1)";theta(2)";theta(3) "  
F(1,1)=(x(4)^2)*cos(x(3))*alpha(1)-x(2)*alpha(3)-x(1)*alpha(4);  
F(2,1)=-cos(x(3))*alpha(10)+a*va-x(4)*b;  
F(3,1)=-x(5)*alpha(7)-abs(x(6))*x(6)*alpha(8)-sign(x(6))*alpha(9);  
K=A*F;  
theta(1)= x(2);  
theta(2)=K(1,1);  
theta(3)=x(4);  
theta(4)=K(2,1);  
theta(5)=x(6);  
theta(6)=K(3,1);  
theta= theta(:);
```

#### Sistema sem controle:

```
function theta=troceq2sem(t,x)  
global va  
gama=[0.178532311  
0.012347234
```

```

1
0.07791609
0.002839502];%vetor que contém os valores da variavel alfa
% motor parâmetro de controle do motor
a=0.01935735;%parâmetro de torque constante ou relativo a tensão de
alimentação
b=0.003443367; % parâmetro de controle do motor
va=3;%tesão de alimentação do motor
% A é matriz dos coeficientes theta(1)";theta(2)";theta(3) "
mat(1,1)=1;
mat(1,2)=-sin(x(3))*gama(1);
mat(2,1)=-sin(x(3))*gama(4);
mat(2,2)=1;
A=inv(mat);
% F é o vetor correspondente as igualdades das equações
theta(1)";theta(2)";theta(3) "
F(1,1)=(x(4)^2)*cos(x(3))*gama(1)-x(2)*gama(2)-x(1)*gama(3);
F(2,1)=-cos(x(3))*gama(5)+a*va-x(4)*b;
K=A*F;
theta(1)= x(2);
theta(2)=K(1,1);
theta(3)=x(4);
theta(4)=K(2,1);
theta= theta(:);

```

### Gráficos de Ressonância:

```

function [X11,Wwmax,Wwmin,param,X1,Wmax,Wmin]=resonan
global va tempo y0 y00
ww=[2:0.5:12];
y00=[0 0 0 0];
y0=[0 0 0 0 1 1];
for conta=1:length(ww);
    va=ww(conta);
    tempo=[0 1000];
    [t,sol]=ode113('troceq2sem',tempo,y00);
    [tt,ssol]=ode113('troceq2',tempo,y0);
    tam=length(sol);
    X1(conta)=(max(sol(tam-500:tam,1))-min(sol(tam-500:tam,1)))/2;
    Wmax(conta)=max(sol(tam-500:tam,4));
    Wmin(conta)=min(sol(tam-500:tam,4));
    param(conta)=va;

    ttam=length(ssol);
    X11(conta)=(max(ssol(ttam-500:ttam,1))-min(ssol(ttam-500:ttam,1)))/2;
    Wwmax(conta)=max(ssol(ttam-500:ttam,4));
    Wwmin(conta)=min(ssol(ttam-500:ttam,4));
    param(conta)=va;
end

```

### FFT do Sistema:

```

clc
close all
clear all
[tout,xout]=ode23('troceq2sem',[0 5000],[0 0 0 0]);
t=tout(end-450:end);
sinal=xout(end-450:end,1);
L=length(sinal);
dt=t(end)/L;
Fs=1./dt;
NFFT = 2^nextpow2(L); %

```

```

Y = fft(sinal,NFFT)/L;
f = Fs/2*linspace(0,1,NFFT/2+1); % calcula a frequência
figure (5), plot(f,2*abs(Y(1:NFFT/2+1)),'k')
grid

```

### Determinação das máximas amplitudes do sinal:

```

function [maxtab, mintab]=peakdet(v, delta, x)
%PEAKDET Detect peaks in a vector
% [MAXTAB, MINTAB] = PEAKDET(V, DELTA) finds the local
% maxima and minima ("peaks") in the vector V.
% MAXTAB and MINTAB consists of two columns. Column 1
% contains indices in V, and column 2 the found values.
%
% With [MAXTAB, MINTAB] = PEAKDET(V, DELTA, X) the indices
% in MAXTAB and MINTAB are replaced with the corresponding
% X-values.
%
% A point is considered a maximum peak if it has the maximal
% value, and was preceded (to the left) by a value lower by
% DELTA.
% Eli Billauer, 3.4.05 (Explicitly not copyrighted).
% This function is released to the public domain; Any use is allowed.
maxtab = [];
mintab = [];
v = v(:); % Just in case this wasn't a proper vector
if nargin < 3
    x = (1:length(v))';
else
    x = x(:);
    if length(v)~= length(x)
        error('Input vectors v and x must have same length');
    end
end
if (length(delta(:)))>1
    error('Input argument DELTA must be a scalar');
end
if delta <= 0
    error('Input argument DELTA must be positive');
end
mn = Inf; mx = -Inf;
mnpos = NaN; mxpos = NaN;
lookformax = 1;
for i=1:length(v)
    this = v(i);
    if this > mx, mx = this; mxpos = x(i); end
    if this < mn, mn = this; mnpos = x(i); end
    if lookformax
        if this < mx-delta
            maxtab = [maxtab ; mxpos mx];
            mn = this; mnpos = x(i);
            lookformax = 0;
        end
    else
        if this > mn+delta
            mintab = [mintab ; mnpos mn];
            mx = this; mxpos = x(i);
            lookformax = 1;
        end
    end
end
end
end

```

## Determinação dos parâmetros estruturais:

```

load livre5.asc; %CARREGA ARQUIVO EXTERNO COM AS ACELERAÇÕES
Y = livre5;
maximo =length(Y);
minimo =1;
yy=Y(minimo:maximo,3);
tempo=Y(minimo:maximo,1);
dt=tempo(2)-tempo(1);
k= 8.5/dt; %tempo inicial que retira os dados pois nesse estágio ocorre
% muito ruído no sistema.
y = Y(k:maximo,3); %vibração livre
t=Y(k:maximo,1);
% y = Y(minimo:maximo,3);%vibração forçada
% t=Y(minimo:maximo,1);
figure(1);plot(t,y)
[maxtab] = peakdet(y,30,t);
hold on;
plot(maxtab(:,1), maxtab(:,2), 'magenta*',t,y, 'b')
plot(t,y, 'b')
% title('Resposta do Sistema em Vibração Livre','FontName','Times New
Roman','FontSize',16,'Rotation',0)
xlabel('Tempo (s)','FontName','Times New
Roman','FontSize',20,'Rotation',0)
ylabel('Amplitude','FontName','Times New
Roman','FontSize',20,'Rotation',90)
grid
m=2.76920;%massa da estrutura
n=length(maxtab);
xx=(maxtab(2,2)/maxtab(3,2));
td=(maxtab(3,1)-maxtab(2,1))%Período de vibração amortecida (1
ciclo)t2=t1+td
Wd=(2*(pi))/td %Frequência de vibração amortecida (rad/s)
D=log(xx)%Decremento logarítmico = taxa na qual a amplitude de vibração de
um sistema livre amortecido cai
R=D/(sqrt(((2*(pi))^2)+(D^2)))%fator de amortecedor adimensional
R1=D/(2*(pi))%Razão de amortecedor Para valores de decremento logarítmico
D<=0,3
Wn=D/(R*td)% Frequência natural não amortecida (rad/s)
fn=Wn/(2*(pi))% Frequência natural(Hertz)
fn1=1/td% Frequência natural(Hertz)
T=1/fn%Período (s)
Cc=2*m*Wn % constante de amortecedor crítico (N.s/m)
c1=Cc*R %Constante de amortecedor (N.s/m)
K=m*(Wn^2)%Rigidez (N/m)
%FAZ A FFT DO SINAL
sinal=yy;
L=length(sinal);
dtt=tempo(end)/L;
Fs=1./dtt;
NFFT = 2^nextpow2(L); % Next power of 2 from length of y
Yx = fft(sinal,NFFT)/L;
f = Fs/2*linspace(0,1,NFFT/2+1); % calcula a frequência
r=2*abs(Yx(1:NFFT/2+1));
f53 = f;
r53 = r;
t53 = t;
y53 = y;
maxtab53 = maxtab;
save ('livre53', 'f53', 'r53', 't53', 'y53', 'maxtab53');

```