UNIVERSIDADE FEDERAL DO PAMPA
CURSO DE MATEMÁTICA - LICENCIATURA

LORENZO SCHNEIDER MORALES

UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA SOBRE RETAS NO ESPAÇO A PARTIR DA COORDENAÇÃO DE REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO

Bagé
2022

LORENZO SCHNEIDER MORALES

UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA SOBRE RETAS NO ESPAÇO A PARTIR DA COORDENAÇÃO DE REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Matemática-Licenciatura da Universidade Federal do Pampa, como requisito parcial para obtenção do Título de Licenciado em Matemática.

Orientadora: Claudia Laus Angelo

Bagé
2022

Ficha catalográfica elaborada automaticamente com os dados fornecidos pelo(a) autor(a) através do Módulo de Biblioteca do Sistema GURI (Gestão Unificada de Recursos Institucionais).

M828s Morales, Lorenzo Schneider
Uma sequência didática sobre retas no espaço a partir da coordenação de registros de representação / Lorenzo Schneider Morales.
101 p.

Trabalho de Conclusão de Curso(Graduação)-- Universidade Federal do Pampa, MATEMÁTICA, 2022.
"Orientação: Claudia Laus Angelo".

1. Registros de representação. 2. Retas no espaço. 3. Geometria analítica. 4. Software GeoGebra. 5. Sequência didática. I. Título.

SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
Universidade Federal do Pampa

LORENZO SCHNEIDER MORALES

UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA SOBRE RETAS NO ESPAÇO A PARTIR DA COORDENAÇÃO DE REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Matemática-Licenciatura da Universidade Federal do Pampa, como requisito parcial para obtenção do Título de Licenciado em Matemática.

Trabalho de Conclusão de Curso defendido e aprovado em: 22 de março de 2022.

Banca examinadora:

____

Prof.ª Dr.ª Claudia Laus Angelo
Orientadora
UNIPAMPA

____

Prof. Dr. Cristiano Peres Oliveira
UNIPAMPA

Prof.ª Dr.ª Vera Lucia Duarte Ferreira

UNIPAMPA

Assinado eletronicamente por **CLAUDIA LAUS ANGELO, PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR**, em 24/03/2022, às 07:44, conforme horário oficial de Brasília, de acordo com as normativas legais aplicáveis.

Assinado eletronicamente por **CRISTIANO PERES OLIVEIRA, PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR**, em 24/03/2022, às 12:09, conforme horário oficial de Brasília, de acordo com as normativas legais aplicáveis.

Assinado eletronicamente por **VERA LUCIA DUARTE FERREIRA, PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR**, em 24/03/2022, às 13:27, conforme horário oficial de Brasília, de acordo com as normativas legais aplicáveis.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.unipampa.edu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **0763541** e o código CRC **A5B5ED70**.

Referência: Processo nº 23100.005154/2022-89 SEI nº 0763541

AGRADECIMENTO

À Profª. Drª. Claudia Laus Angelo pela sua orientação, paciência e confiança dedicada a mim durante o desenvolvimento deste trabalho.

Ao Prof. Dr. Cristiano Peres Oliveira e à Profª. Vera Lúcia Duarte Ferreira por se disponibilizarem a participar da banca e oferecerem contribuições e sugestões.

Aos acadêmicos que aceitaram participar da pesquisa possibilitando a realização deste trabalho.

Aos professores que me acompanharam e contribuíram nessa caminhada que trilhei até esse momento.

Aos meus pais pelo apoio e dedicação a mim e a minha educação.

RESUMO

O desenvolvimento desta pesquisa, fundamentada na teoria de Raymond Duval, teve como objetivo verificar as contribuições de uma sequência didática baseada na Teoria dos Registros de Representação Semiótica, para a aprendizagem de retas no espaço por estudantes do ensino superior. Para tanto, foi elaborada uma sequência didática contemplando atividades sobre as equações vetorial e paramétricas de retas no espaço, bem como sobre retas paralelas aos eixos coordenados, com a utilização do *software* GeoGebra. Tal sequência foi aplicada em duas interações síncronas a acadêmicos participantes de um projeto de ensino ofertado em 2021 na Universidade Federal do Pampa. Trata-se de uma pesquisa qualitativa na modalidade estudo de caso cujos sujeitos foram seis acadêmicos de diferentes cursos dessa universidade. A análise das produções desses acadêmicos mostrou que a sequência elaborada permitiu a eles a conversão de diferentes registros de representação de retas, como algébricos, gráficos e em língua natural, favorecendo a aprendizagem dos conteúdos trabalhados.

Palavras-chave: Registros de representação. Retas no espaço. Geometria analítica. *Software* GeoGebra. Sequência didática.

ABSTRACT

The development of this research, based on the theory of Raymond Duval, aimed to verify the contributions of a didactic sequence based on the Theory of Registers of Semiotic Representation, for the learning of lines in space by higher education students. For that, a didactic sequence was elaborated, contemplating activities on vector and parametric equations of lines in space, as well as on lines parallel to the coordinate axes, using the GeoGebra software. This sequence was applied in two synchronous interactions to academics participating in a teaching project offered in 2021 at the Federal University of Pampa. This is a qualitative research in the case study modality, whose subjects were six academics from different courses at this university. The analysis of the productions of these academics showed that the elaborate sequence allowed them to convert different registers of representation of lines, such as algebraic, graphic and in natural language, favoring the learning of the contents worked.

Keywords: Registers of representation. Lines in space. Analytical geometry. GeoGebra software. Didactic sequence.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A motivação pelo estudo da Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS) ocorreu a partir de estudos realizados durante a participação do pesquisador no Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID), no período de 2018 a 2020. Naquela época, procurou-se compreender como ocorre a aprendizagem de conceitos relacionados aos objetos matemáticos e esse interesse levou à linha teórica desenvolvida por Raymond Duval.

Duval desenvolveu a sua teoria considerando aspectos da atividade cognitiva que permitam o aprendizado da matemática, baseado no estudo dos registros de representação semiótica. Ele considerou a importância do desenvolvimento das capacidades de raciocínio, análise e visualização como forma do estudante desenvolver autonomamente a diversidade de processos matemáticos conduzidos em uma situação de ensino a partir do uso de uma diversidade de registros (DUVAL, 2003).

Nesse sentido, observam-se as formas como o estudante poderá internalizar um determinando conhecimento matemático. Um aspecto fundamental para essa teoria está em distinguir o objeto matemático de suas distintas formas de representação.

A atividade de representação é entendida como o desenvolvimento de registros capazes de evocar um objeto. Outras áreas do conhecimento possuem processos de representação, mas na matemática é uma atividade necessária para representar ideias e conceitos, visto que os objetos matemáticos são acessíveis por meio de suas representações (BRASIL, 2018).

O interesse de trabalhar com as representações semióticas na Geometria Analítica deve-se ao fato dessa utilizar distintos registros de representação, relacionando a linguagem algébrica com a geométrica ou gráfica e vice-versa, necessitando que o aprendiz realize as conversões e conexões de forma adequada.

Devido à necessidade de delimitação do conteúdo de Geometria Analítica a ser explorado neste trabalho, procurou-se por pesquisas com interesses similares. Foram encontrados alguns trabalhos que tratavam sobre o estudo da reta com o uso da Teoria dos Registros de Representação

Semiótica. O fato de poucos trabalhos abordarem esse conteúdo no contexto de três dimensões motivou a escolha por elaborar uma sequência didática sobre retas no espaço, orientada pela Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval.

A partir da definição do conteúdo de retas no espaço, procurou-se por um grupo de indivíduos para a realização da parte prática da pesquisa. A Universidade Federal do Pampa (UNIPAMPA) estava ofertando no semestre 2021/1 o projeto de ensino "Geometria Analítica com o GeoGebra" de forma remota, com o objetivo de reduzir os índices de retenção e de evasão do componente curricular Geometria Analítica presente nos cursos de exatas da referida universidade. Com o apoio da coordenadora do projeto, que cedeu dois encontros para a aplicação de uma sequência didática sobre retas no espaço, e do aceite de seis acadêmicos, foi possível a realização da pesquisa.

Esse fato também proporcionou a abordagem do conteúdo de retas no espaço utilizando o *software* matemático GeoGebra. Tal ferramenta contribui na visualização de registros gráficos a partir da escrita de comandos sobre informações de registros simbólicos ou algébricos, permitindo a elaboração e manipulação dos objetos matemáticos presentes na tela.

Essas decisões levaram à elaboração da seguinte questão de pesquisa: Uma sequência didática sobre retas no espaço que favoreça a coordenação de diferentes registros de representação pode contribuir na aprendizagem desse conteúdo por estudantes de graduação?

Com o propósito de responder essa questão, este trabalho tem como objetivo geral verificar as contribuições de uma sequência didática baseada na Teoria dos Registros de Representação Semiótica, para a aprendizagem de retas no espaço por estudantes do ensino superior. Também foram estabelecidos os seguintes objetivos específicos: elaborar uma sequência didática sobre o conteúdo de retas no espaço, a partir do uso do *software* GeoGebra; analisar em livros de Geometria Analítica para o ensino superior, como é abordado o estudo de retas no espaço; destacar pesquisas que trataram sobre o uso de registros de representação no estudo de Retas.

Para realizar esses objetivos, foi necessário o estudo dos conceitos da Teoria dos Registros de Representação Semiótica, assim como trabalhos relacionados com essa temática de pesquisa, e a elaboração e o desenvolvimento de uma sequência didática sobre o conteúdo de retas no espaço. Para esse último, o pesquisador contou com o apoio e a supervisão da coordenadora do projeto de ensino.

Sendo assim, o presente estudo foi organizado em capítulos, conforme descrito a seguir.

O capítulo 2 traz os principais conceitos da Teoria dos Registros de Representação Semiótica, que foram fundamentais para a elaboração desse trabalho. Também foi realizada uma análise da abordagem do conteúdo de retas no espaço em três livros de Geometria Analítica. Ao final desse capítulo consta uma revisão de trabalhos que trataram sobre retas utilizando a Teoria dos Registros de Representação Semiótica.

O capítulo 3 esclarece a metodologia utilizada para elaboração dessa pesquisa, assim com as suas características e o modo como a produção de dados foi realizada.

O capítulo 4 descreve as interações síncronas com os participantes do projeto, realizadas em dois encontros no mês de agosto de 2021.

No capítulo 5 consta a análise das três produções dos sujeitos investigados durante a realização da pesquisa e os resultados da pesquisa.

No capítulo 6 são apresentadas as considerações finais.

2 CONCEITOS GERAIS E REVISÃO DE LITERATURA

Neste capítulo são apresentados os principais conceitos da Teoria dos Registros de Representação Semiótica, seguido do estudo sobre retas no espaço em três livros didáticos de Geometria Analítica e a revisão de pesquisas que envolvem o estudo desse objeto matemático a partir do contexto da referida teoria.

2.1 A teoria dos registros de representação semiótica

A Teoria dos Registros de Representação Semiótica foi desenvolvida pelo filósofo e psicólogo francês Raymond Duval. Para ele "A aprendizagem das matemáticas constitui, em evidência, um campo de estudos privilegiado para a análise de atividades cognitivas fundamentais [...]" (DUVAL, 2009, p. 13). Entre essas atividades, estão incluídas a conceitualização, o raciocínio e, até mesmo, a compreensão de textos. Duval (2009) observa o uso de variados sistemas de expressão e representação para a aprendizagem matemática e reconhece a necessidade do indivíduo ser capaz de realizar a coordenação entre diferentes registros.

Essa coordenação entre os diferentes registros irá permitir ao indivíduo compreender o objeto matemático em suas diferentes representações, visto que, um mesmo objeto pode ser representado por mais de uma forma. Em Matemática, representar um objeto matemático é uma atividade necessária para acessar tal objeto. Inclusive, a capacidade de representar é destacada como uma das competências da Área da Matemática para o Ensino Médio na Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Conforme o documento:

> As competências que estão diretamente associadas a **representar** pressupõem a elaboração de registros para evocar um objeto matemático. Apesar de essa ação não ser exclusiva da Matemática, [...] em especial nessa área é possível verificar de forma inequívoca a importância das representações para a compreensão de fatos, ideias e conceitos, uma vez que o acesso aos objetos matemáticos se dá por meio delas [...] (BRASIL, 2018, p. 529, grifo do autor).

A representação de um objeto matemático é uma atividade muito ligada à própria Matemática. Esse destaque é dado por Duval no livro *Aprendizagem em Matemática - Registros de Representação Semiótica*. Nessa obra o autor constata o seguinte: “[...] É suficiente observar a história do desenvolvimento da Matemática para ver que o desenvolvimento das representações semióticas foi uma condição essencial para a evolução do pensamento matemático [...]” (DUVAL, 2003, p. 13).

No texto *Registros de representação semiótica em matemática: história, epistemologia, aprendizagem*, a autora Cláudia Regina Flores realiza reflexões do desenvolvimento histórico da Matemática. Na Antiguidade e na Idade Média, a Matemática era trabalhada mesclando geometria e retórica, sendo o processo geométrico a única maneira de resolução. Os símbolos utilizados eram apenas representações momentâneas, sendo compreendidos apenas por quem os utilizava (FLORES, 2006, p. 4).

Esse modelo dificulta o entendimento e a possibilidade de reaproveitar o uso desses símbolos, visto que cada autor poderia usar um modelo próprio. Assim, via-se que a Matemática, como era trabalhada, não possuía uma padronização de registros, de modo que essas estruturas simbólicas não poderiam ser reutilizadas. Esses métodos mudaram à medida que surgiu a necessidade de organizar o pensamento diante de um conjunto de signos, permitindo uma representatividade de objetos.

De acordo com Henriques e Almouloud (2016), amparados nas ideias de Peirce e de Duval, um signo é aquilo que representa algo para alguém. Representa alguma coisa do seu objeto. "Um signo é um sinal mobilizado por alguém (sujeito) capaz de permitir-lhe identificar um sistema ou registro de representação semiótico" (HENRIQUES; ALMOULOUD, 2016, p. 468). Esses autores colocam como exemplo que escritas algébricas constituem signos para o registro algébrico.

Na Idade Clássica, a escrita simbólica estabeleceu-se como uma forma de linguagem matemática, permitindo o início de um pensamento considerado racional, organizado e moderno (FLORES, 2006, p. 14). Nesse sentido, a representação é entendida como uma importante tarefa da Matemática, possibilitando a formalização do conhecimento.

As retas no espaço, por exemplo, possuem formas distintas de representação. Sejam as suas formas algébricas, como a equação vetorial, as equações paramétricas, as equações simétricas e as equações reduzidas ou por meio da representação gráfica esboçando a reta no espaço, ou ainda descrevendo características da reta em questão. Assim, entende-se que existirá mais de uma maneira de representá-las. Para essa diversidade de representações deverá ser observado que não se tratam de diferentes maneiras de comunicar um objeto matemático, mas diferentes formas para acessar um mesmo objeto, e de como o indivíduo apreende cada uma delas.

2.1.1 As representações semióticas

Para Duval (2012), existe um paradoxo cognitivo do pensamento matemático, sendo este associado a dois fatores: primeiro, a confusão do objeto com a sua representação semiótica, visto que é impossível acessar os objetos matemáticos diretamente; segundo, questiona-se como os sujeitos adquirem domínio no tratamento matemático, ligado às representações semióticas, sem ter a apreensão conceitual dos objetos representados. Devido à importância das representações mentais tal paradoxo é despercebido no ensino (DUVAL, 2012, p. 269).

Destaca-se que as representações mentais “[...] recobrem o conjunto de imagens e, mais globalmente, as conceitualizações que um indivíduo pode ter sobre um objeto, sobre uma situação e sobre o que lhe é associado” (DUVAL, 2012, p. 269). Nesse sentido, recorre-se ao entendimento de que as representações mentais estão associadas às crenças próprias do indivíduo e refletem os valores que o indivíduo compartilha com seu meio, ou com desejos próprios.

As representações semióticas, por outro lado, “[...] são produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representações que tem inconvenientes próprios de significação e de funcionamento” (DUVAL, 2012, p. 269). As representações semióticas incluem uma variedade de representações, com regras de tratamento e sistemas semióticos distintos, como uma fórmula algébrica e um enunciado em língua natural.

As representações possuem funções necessárias para o pensamento, não meramente objetivando a comunicação. O desenvolvimento das representações mentais ocorre a partir da interiorização das representações semióticas, sendo essa última, necessária para algumas funções cognitivas. Duval (2012) comenta que o “[...] funcionamento cognitivo do pensamento humano se revela inseparável da existência de uma diversidade de registros semióticos de representação" (DUVAL, 2012, p. 270). Na Matemática um objeto pode ser representado por mais de uma maneira e, por isso, o estudo dessas diferentes representações de um mesmo objeto matemático contribui para o aprendizado do estudante, visto que, o objeto não é a sua representação.

A partir disso, Duval (2009, 2012) introduz dois conceitos importantes para o entendimento de sua teoria. O primeiro deles é denominado *semiósis*, termo de origem grega que significa ação de marcar um signo (DUVAL, 2009, 15). Segundo, o autor trata da "[...] apreensão ou a produção de uma representação semiótica [...]" (DUVAL, 2009, p. 15). Associado a esse termo está a *noésis*, também de origem grega, que significa intelecção (DUVAL, 2009, p. 15). Conforme Duval (2009), *noésis* são: "[...] os atos cognitivos como a apreensão conceitual de um objeto, a discriminação de uma diferença ou a compreensão de uma inferência [...]" (DUVAL, 2009, p. 15).

Segundo o autor, esses dois conceitos estão diretamente ligados ao funcionamento cognitivo, visto que: "[...] Não há *noésis* sem *semiósis*, quer dizer, não há *noésis* sem o recurso a uma pluralidade ao menos potencial de sistemas semióticos, recurso que implica sua coordenação para o próprio sujeito [...]" (DUVAL, 2009, p. 18).

Duval (2009) considera relevante para o sujeito compreender o objeto em todas as suas representações. Para isso é necessário utilizar uma diversidade de registros permitindo ao indivíduo analisar e reconhecer esse objeto em cada um deles. O autor também destaca três atividades cognitivas associadas à *semiósis*: formação, tratamento e conversão. As duas últimas são também consideradas transformações de representações semióticas.

A **formação** de uma representação semiótica é o desenvolvimento de uma representação que permita a identificação de um determinado signo dentro do sistema semiótico utilizado. Assim, será possível acessar o objeto matemático seguindo as regras do sistema utilizado de forma que somente a representação é capaz de fazê-la (DUVAL, 2009).

O **tratamento** é a transformação que ocorre internamente a um mesmo registro de representação (DUVAL, 2009). Como exemplo, pode-se citar a resolução de uma equação utilizando-se somente o registro de representação algébrico.

A **conversão** é a transformação de uma representação de um determinado objeto matemático para uma representação em outro registro, entendendo-se como uma transformação externa à representação utilizada inicialmente (DUVAL, 2009). Por exemplo, passar da escrita algébrica de uma função de 1º grau para a sua representação gráfica.

2.1.2 A coordenação dos registros de representação

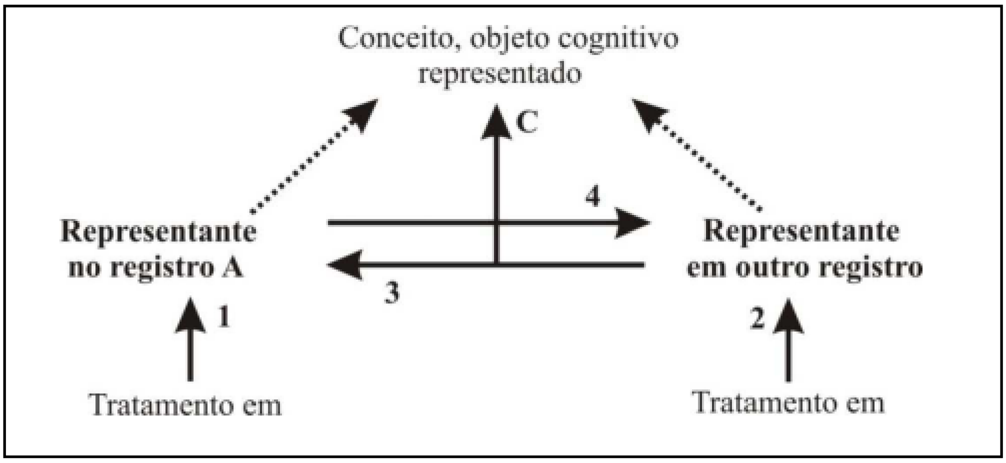
Quando se trata do pensamento humano, uma característica que parece ser pertencente a esse é a utilização de muitos registros de representação. Ou seja, o recurso a muitos sistemas semióticos, com a intenção de comunicar e representar ideias e conceitos, a partir de diferentes representações.

Existem três respostas que justificam a necessidade de utilizar uma diversidade de registros para o funcionamento cognitivo. Uma delas tem como centro a economia de tratamento, ou seja, a utilização de símbolos e/ou expressões que descrevem um fenômeno de forma suscinta (DUVAL, 2012). A outra resposta tem como ponto central as limitações representativas específicas em cada registro, pois uma linguagem não fornece as mesmas possibilidades de representação quando comparada a uma figura, por exemplo. Sendo assim, Duval (2012) conclui que: “[...] toda representação é cognitivamente parcial em relação ao que ela representa [...]” (DUVAL, 2012, p. 280).

A terceira resposta conduz à necessidade de uma multiplicidade de registros, tratando-se da conceitualização e sua implicação na coordenação de distintas formas de representação. De acordo com Duval (2012) há duas hipóteses para essa terceira resposta.

A primeira hipótese confere que se o registro é bem escolhido, as representações serão suficientes para compreender conceitualmente o conteúdo representado. Na segunda hipótese entende-se que a compreensão de um conteúdo depende da coordenação de ao menos dois registros de representação e ela se manifesta mais espontânea por meio da atividade de conversão (DUVAL, 2012). A Figura 1 procura esquematizar a estrutura de representações semióticas e seu funcionamento:

Figura 1 - Estrutura da representação em função da conceitualização



Fonte: Duval (2012, p. 282).

Conforme o esquema apresentado, as flechas 1 e 2 correspondem às transformações internas a um registro, enquanto as flechas 3 e 4 correspondem às transformações externas, ou seja, a mudança de registro por conversões. A flecha C é a compreensão integral de uma representação e ela supõe uma coordenação de dois registros. Essas flechas têm o objetivo de distinguir o representante e o representado (DUVAL, 2012).

A coordenação não é natural, principalmente quando se observa no ensino, utilizando conteúdos conceituais. Ao analisar os diferentes níveis de ensino, o uso de registros de representação ocorre de forma isolada para a maioria dos estudantes. E, por isso, eles não reconhecem o objeto em distintos registros de representação. Embora a ausência da coordenação não impeça completamente a compreensão, quando está limitada a apenas um registro, ela conduz a um trabalho sem o controle do sentido ao que é produzido (DUVAL, 2012).

A Teoria dos Registros de Representação Semiótica estudada neste trabalho inspirou a elaboração de uma sequência didática sobre retas no espaço, procurando privilegiar a coordenação de diferentes registros, com a intenção de que os participantes desta pesquisa possam compreender esse objeto matemático a partir de distintas representações.

Assume-se como sequência didática um conjunto formado "[...] por um certo número de aulas planejadas e analisadas previamente com a finalidade de observar situações de aprendizagem, envolvendo os conceitos previstos na pesquisa didática [...]” (PAIS, 2001, p. 102).

A seguir serão apresentados alguns tópicos dos conteúdos sobre retas em três livros didáticos que foram analisados para compor a sequência didática aplicada nesta pesquisa.

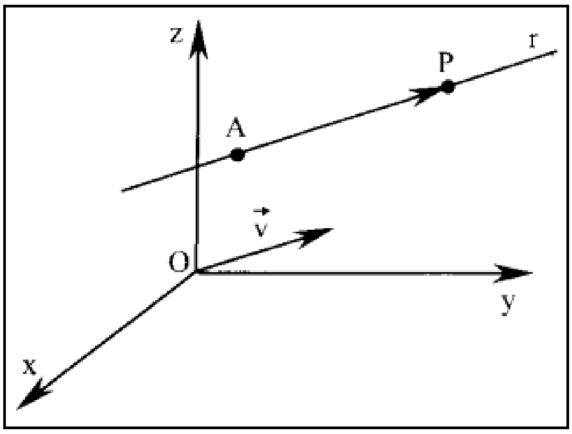
2.2 Uma análise de retas no espaço em livros didáticos

A partir da definição do conteúdo de retas no espaço como tema de estudo deste trabalho e tendo em vista que foram disponibilizados apenas dois encontros do projeto de ensino “Geometria Analítica com o GeoGebra” para realizar a parte prática da pesquisa, foi necessário delimitar ainda mais o tema, dando enfoque ao estudo das equações vetoriais e paramétricas das retas no espaço e de equações de retas paralelas aos eixos coordenados.

Sendo assim, a necessidade de elaborar uma sequência didática para ser desenvolvida pelos participantes do projeto utilizando o *software* GeoGebra e que oportunizasse o acesso a diferentes registros de representação, requereu um estudo de equações vetoriais e paramétricas de retas no espaço, além de equações de retas paralelas aos eixos coordenados em livros didáticos de Geometria Analítica. Para tal estudo foram selecionados os livros de Winterle (2000), Boulos e Camargo (2005) e Santos e Ferreira (2009).

A introdução do estudo da reta no livro de Winterle (2000) dá-se com o desenvolvimento da equação vetorial da reta. Assim, inicia-se da seguinte forma: “Consideremos um ponto $\mathbf{A}(\mathbf{x_1}, \mathbf{y_1}, \mathbf{z_1})$ e um vetor não-nulo $\vec{\mathbf{v}} = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$. Só existe uma reta r que passa por A e tem a direção de $\vec{\mathbf{v}}$. Um ponto $\mathbf{P}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ pertence a r se, e somente se, o vetor $\overrightarrow{\mathbf{AP}}$ é paralelo a $\vec{\mathbf{v}}$ [...]” (WINTERLE, 2000, p. 103). A seguir o autor apresenta uma figura (Figura 2) conforme as informações anteriores:

Figura 2 - Reta definida pelos pontos A e P, paralela ao vetor $\vec{v}$



Fonte: Winterle (2000, p. 103).

O autor apresenta a equação vetorial da reta, iniciando com a igualdade entre o vetor $\overrightarrow{\mathbf{AP}}$ e o produto entre o valor numérico t e o vetor $\vec{\mathbf{v}}$ paralelo à reta r e, a partir disso, realiza o desenvolvimento para chegar na equação vetorial da reta, conforme está abaixo:

$$\overrightarrow{\mathbf{AP}} = \mathbf{t}\vec{\mathbf{v}} \quad (1)$$

Para algum real t.

De (1), vem

$$\mathbf{P} - \mathbf{A} = \mathbf{t}\vec{\mathbf{v}}$$

Ou

$$\mathbf{P} = \mathbf{A} + \mathbf{t}\vec{\mathbf{v}} \quad (2)$$

Ou, em coordenadas

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = (\mathbf{x_1}, \mathbf{y_1}, \mathbf{z_1}) + \mathbf{t}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) \quad (3)$$

(WINTERLE, 2000, p. 103)

Ao final, o autor conclui afirmando que quaisquer uma das equações (1), (2), e (3) será denominada equação vetorial de r. Além disso, definiu o vetor $\vec{\mathbf{v}}$ como o vetor diretor da reta r e a variável t como o parâmetro.

No livro de Camargo e Boulos (2005), os autores também abordam a equação vetorial. Inicialmente, eles apresentam uma reta denominada r contida no espaço (representado por $\mathbf{E}^3$). A partir de um dado ponto A ∈ r pertencente à r e um vetor $\vec{\mathbf{v}} \neq \vec{\mathbf{0}}$ que é paralelo à reta, os autores afirmam:

> [...] Então é fácil ver que um ponto $\mathbf{X} \in \mathbf{E}^3$ pertence a r se e somente se $\overrightarrow{\mathbf{AX}}$ e $\vec{\mathbf{v}}$ são linearmente dependentes [...], isto é, se e somente se existe $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}$ tal que $\overrightarrow{\mathbf{AX}} = \boldsymbol{\lambda}\vec{\mathbf{v}}$ ou seja
>
> $$\mathbf{X} = \mathbf{A} + \boldsymbol{\lambda}\vec{\mathbf{v}} \qquad (1)$$
>
> (CAMARGO; BOULOS, 2005, p. 126)

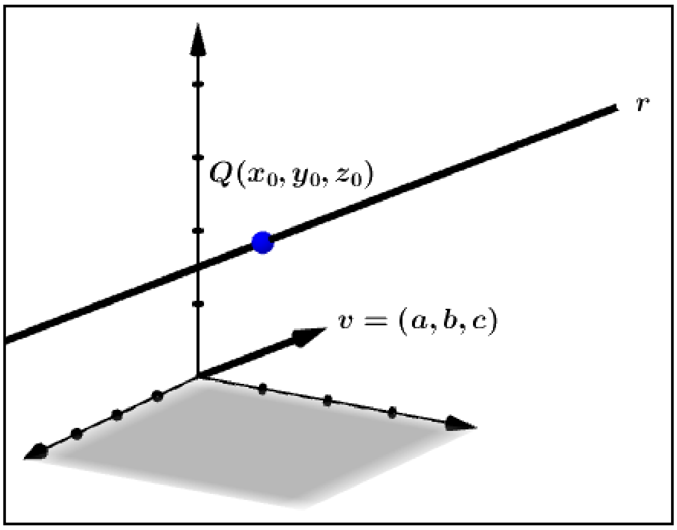
Eles comentam a questão de dependência linear, ao contrário de Winterle (2000) que não traz essa abordagem. Ainda, conforme os autores: “[...] dado $\boldsymbol{\lambda}$ real, (1) nos dá um ponto X de r, e dado $\mathbf{X} \in \mathbf{r}$, existe $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}$ tal que (1) se verifica” (CAMARGO; BOULOS, 2005, p. 126). Assim, os autores concluem partindo dos aspectos apresentados: “A reta r é, pois, o lugar geométrico dos pontos X de $\mathbf{E^3}$ tais que vale (1)” (BOULOS; CAMARGO, 2005, p. 126). O conceito de lugar geométrico é tratado em um capítulo no livro *Geometria Analítica*, de Fabiano José dos Santos e Silvimar Fábio Ferreira. Nele, os autores conceituam:

> Um lugar geométrico é um conjunto de pontos que satisfazem uma ou mais propriedades geométricas. Conceitualmente, a geometria analítica lida com o estudo de lugares geométricos (pontos, retas, circunferências, parábolas, regiões etc.) por meio de suas representações algébricas (pares ordenados, equações, sistemas de equações etc.) por meio de suas representações algébricas (pares ordenados, equações, sistemas de equações etc.) [...] (SANTOS; FERREIRA, 2009, p. 56).

Assim, entende-se que a reta possui propriedades e pode ser acessada por meio de suas representações. No entanto, a reta possui outras formas de representação além das algébricas, como a representação geométrica e a representação gráfica.

No livro de Santos e Ferreira (2009), os autores introduzem o assunto das retas no $\mathbb{R}^3$ pela equação vetorial da reta. Apesar de ser o mesmo conteúdo, a abordagem utilizada por esses autores é mais direta em comparação aos dois anteriores. Eles consideram uma reta r que passa por um ponto $\mathbf{Q}(\mathbf{x_0}, \mathbf{y_0}, \mathbf{z_0})$ e possui uma direção determinada pelo vetor $\mathbf{v} = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$. Assim como Winterle (2000), os autores representam geometricamente esse contexto como mostrado a seguir (Figura 3):

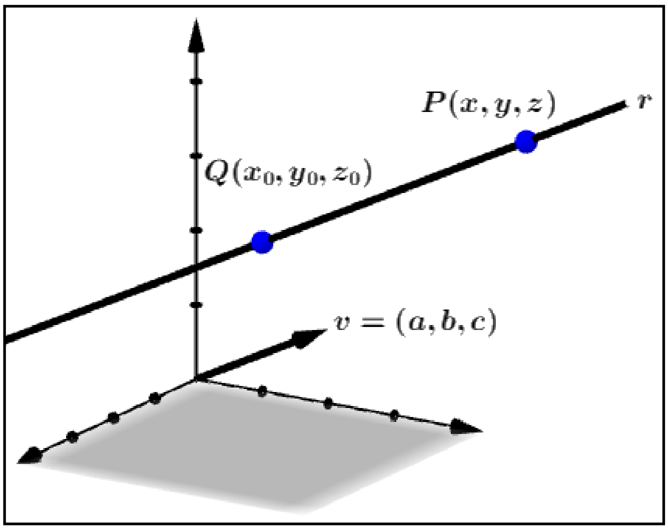
Figura 3 - Reta pelo ponto Q na direção do vetor v



Fonte: Adaptado de Santos e Ferreira (2009, p. 177).

Conforme foi representado, a reta r está no espaço, com um ponto Q pertencente a essa reta, que é paralela ao vetor $\vec{\mathbf{v}}$. Além disso, os autores introduzem outro ponto genérico $\mathbf{P(x, y, z)}$ pertencente à reta r, conforme a imagem (Figura 4) abaixo:

Figura 4 - Ponto P qualquer da reta



Fonte: Adaptado de Santos e Ferreira (2009, p. 177).

Como condição para que esse ponto P pertença à reta, Santos e Ferreira (2009) afirmam que os vetores $\overrightarrow{\mathbf{PQ}}$ e $\mathbf{v}$ devem ser múltiplos escalares. Assim, os autores concluem a equação vetorial $\overrightarrow{\mathbf{PQ}} = \mathbf{tv}$ e, a partir dessa equação, eles introduzem as equações paramétricas. Ao reescreverem a equação em termos das coordenadas dos pontos da reta e do vetor, Santos e Ferreira (2009) apresentam o seguinte desenvolvimento:

$$(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y}-\boldsymbol{y_0}, \boldsymbol{z}-\boldsymbol{z_0}) = \boldsymbol{t}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}), \qquad -\infty < \boldsymbol{t} < \infty$$

E, pela igualdade dos vetores, obtemos:

$$\boldsymbol{r}: \begin{cases} \boldsymbol{x}-\boldsymbol{x_0} = \boldsymbol{at} \\ \boldsymbol{y}-\boldsymbol{y_0} = \boldsymbol{bt} \\ \boldsymbol{z}-\boldsymbol{z_0} = \boldsymbol{ct} \end{cases} \therefore \ \boldsymbol{r}: \begin{cases} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x_0} + \boldsymbol{at} \\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y_0} + \boldsymbol{bt} \\ \boldsymbol{z} = \boldsymbol{z_0} + \boldsymbol{ct} \end{cases}, \qquad -\infty < \boldsymbol{t} < \infty$$

(SANTOS; FERREIRA, 2009, p. 178)

Conforme foi comentado, os autores concluem a equação vetorial e, em seguida, apresentam as equações paramétricas. Santos e Ferreira (2009) ainda justificam o nome dado às equações paramétricas, devido ao fato das coordenadas de cada ponto da reta serem definidas em função de uma variável denominada parâmetro.

Em Camargo e Boulos (2005) ocorre também a substituição dos termos como as coordenadas do ponto que se deseja encontrar, as coordenadas do ponto conhecido e os elementos do vetor diretor, utilizando a equação vetorial apresentada anteriormente, chegando às seguintes equações paramétricas:

$$\begin{cases} \mathbf{x} = \mathbf{x_0} + \boldsymbol{\lambda}\mathbf{a} \\ \mathbf{y} = \mathbf{y_0} + \boldsymbol{\lambda}\mathbf{b} \\ \mathbf{z} = \mathbf{z_0} + \boldsymbol{\lambda}\mathbf{c} \end{cases} \qquad (\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R})$$

(CAMARGO; BOULOS, 2005, p. 128)

Referente às equações paramétricas da reta, Winterle (2000) desenvolve essas equações a partir da equação vetorial da reta no espaço:

Da equação vetorial da reta

$$(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}) = (\mathbf{x_1},\mathbf{y_1},\mathbf{z_1}) + \mathbf{t}(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})$$

Ou ainda

$$(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}) = (\mathbf{x_1}+\mathbf{at},\mathbf{y_1}+\mathbf{bt},\mathbf{z_1}+\mathbf{ct})$$

Pela condição de igualdade, obtém-se

$$\begin{cases} \mathbf{x} = \mathbf{x_1} + \mathbf{at} \\ \mathbf{y} = \mathbf{y_1} + \mathbf{bt} \\ \mathbf{z} = \mathbf{z_1} + \mathbf{ct} \end{cases} \qquad (\mathbf{5})$$

As equações (5) são chamadas *equações paramétricas* da reta.

(WINTERLE, 2000, p. 105)

Como pode ser observado, esses três autores trazem abordagens semelhantes para o estudo das equações vetoriais e das equações paramétricas das retas. As diferenças principais estão nas notações escolhidas. Podemos destacar a notação do parâmetro como t em Winterle (2000) e em Santos e Ferreira (2009) e como $\boldsymbol{\lambda}$ (lambda) em Camargo e Boulos (2005). Winterle (2000) denota um ponto conhecido da reta por $\mathbf{A}(\mathbf{x_1}, \mathbf{y_1}, \mathbf{z_1})$. Camargo e Boulos (2005) preferem $\mathbf{A}(\mathbf{x_0}, \mathbf{y_0}, \mathbf{z_0})$ e Santos e Ferreira (2009) escolhem a notação $\mathbf{Q}(\mathbf{x_0}, \mathbf{y_0}, \mathbf{z_0})$.

Para o ponto genérico da reta, Winterle (2000) e Santos e Ferreira (2009) utilizam a notação $\mathbf{P}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ e Camargo e Boulos (2005) optam por $\mathbf{X}$. Mas, os três livros trazem o vetor diretor da reta como $\mathbf{v} = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$.

Convém salientar ainda que Winterle (2000) apresenta o parâmetro como um valor numérico real, mas não o representa simbolicamente, como fazem Camargo e Boulos (2005) e Santos e Ferreira (2009), que utilizam formas diferentes de representação ($\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}$ e $-\infty < \boldsymbol{t} < +\infty$, respectivamente).

Em relação ao assunto Retas Paralelas aos Eixos Coordenados, Winterle (2000) comenta que: “Uma reta é paralela a um dos eixos Ox, Oy ou Oz se seus vetores diretores forem paralelos a $\vec{\mathbf{i}} = (\mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{0})$ ou a $\vec{\mathbf{j}} = (\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{0})$ ou a $\vec{\mathbf{k}} = (\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{1})$. Neste caso, duas das componentes do vetor são nulas [...]” (WINTERLE, 2000, p. 112). O autor explica mais detalhadamente alguns casos envolvendo retas paralelas aos eixos, apresentando três figuras que mostram retas paralelas a cada um dos eixos.

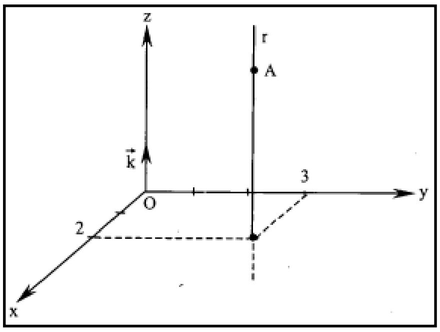
As retas paralelas aos eixos não têm destaque em Camargo e Boulos (2005), que apenas apresentam alguns exemplos de retas paralelas ao $\overrightarrow{\mathbf{e_3}}$, equivalente ao eixo z. Em Santos e Ferreira (2009) esse assunto não é tratado. Sendo assim, esse tema será apresentado a partir da abordagem de Winterle (2000).

O primeiro exemplo que Winterle (2000) apresenta é uma reta r paralela ao eixo Oz. O ponto dado é $\mathbf{A}(\mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4})$, com o vetor diretor $\vec{\mathbf{v}} = (\mathbf{0}, \mathbf{0}, \mathbf{3})$. O autor utiliza as equações paramétricas para a representação algébrica da reta, representando-a conforme abaixo:

$$\begin{cases} \mathbf{x = 2} \\ \mathbf{y = 3} \\ \mathbf{z = 4 + 3t} \end{cases}$$

Também inclui a representação gráfica (Figura 5) da reta r paralela ao eixo Oz:

Figura 5 - Reta definida pelo ponto A, paralela ao vetor $\vec{v}$ e ao eixo Oz



Fonte: Winterle (2000, p. 113).

Winterle (2000) ainda destaca que “Para o caso particular da reta ser paralela a um eixo coordenado, costuma-se fazer uma simplificação, expressando as equações só pelas constantes” (WINTERLE, 2000, p. 113). E, escreve como ficam as equações paramétricas para o exemplo dado:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x = 2} \\ \boldsymbol{y = 3} \end{cases}$$

Em seguida apresenta como ficariam as representações algébricas e geométricas de retas genéricas paralelas aos eixos Oy e Ox. Alguns exercícios do capítulo foram elaborados com referência a essas retas.

Embora Winterle (2000) traga representações gráficas e em língua natural, como os enunciados, o autor foca no uso da representação algébrica e na realização de tratamento dentro desse sistema semiótico. Apesar disso, ele aborda todos os assuntos que foram selecionados para esta pesquisa, explicando-os de forma simples e completa e, por isso, Winterle (2000) foi tomado como base principal para a elaboração da sequência didática que foi utilizada na parte prática deste trabalho.

2.3 Pesquisas sobre retas e registros de representação

Ao estabelecer o estudo da reta com o aporte teórico da Teoria dos Registros de Representação Semiótica como tema para esta pesquisa, procurou-se por trabalhos similares, utilizando a teoria de Raymond Duval, com o intuito de destacar os seus procedimentos e resultados de modo a contribuir com esta pesquisa.

Numa busca nas plataformas *Google Acadêmico*, Catálogo de Teses e Dissertações da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (Capes) e Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD) utilizando os termos “retas”, “estudo de retas e registros de representação” e “Geometria Analítica e registros de representação”, foram encontrados diversos trabalhos. A partir da leitura dos títulos e de alguns resumos desses trabalhos, selecionou-se as pesquisas de Silva (2014), Lemke (2011) e Cardoso (2014) por trabalharem o conteúdo de retas e por utilizarem a Teoria dos Registros de Representação Semiótica.

A dissertação de mestrado de Raquel Santos Silva (SILVA, 2014) trabalhou com uma proposta de atividades sobre estudo da reta para estudantes do Ensino Médio.

Maria de Fátima dos Santos Monteiro Lemke (LEMKE, 2011) elaborou atividades sobre retas e planos no espaço, com o uso do *Cabri 3D* para estudantes de Ensino Superior.

A autora Franciele Catelan Cardoso (CARDOSO, 2014) acompanhou uma professora ao trabalhar conteúdos de Geometria Analítica no plano com estudantes de um curso de licenciatura em matemática.

A seguir são apresentadas breves revisões dessas três pesquisas, trazendo aspectos que possam contribuir com as reflexões deste trabalho.

Na dissertação de mestrado de Silva (2014), a autora realizou uma sequência de atividades sobre o estudo da reta no contexto da Geometria Analítica para estudantes da 3ª série do Ensino Médio, com o uso do *software* GeoGebra. Ela trouxe como questão de pesquisa:

> Qual a contribuição que a utilização do *software* GeoGebra pode trazer para a apreensão do objeto matemático reta sob os pontos de vista cognitivo e matemático no sentido da teoria dos Registros de Representação Semiótica, para alunos da terceira série do Ensino

> Médio (EM) tendo em vista que já estudaram no ano de 2013 a equação da reta em geometria analítica? (SILVA, 2014, p. 24)

A autora realizou uma revisão bibliográfica de quatro trabalhos, por terem maior relação com sua temática de pesquisa, e analisou documentos oficiais, tendo em vista compreender o que se espera com o estudo da reta para alunos do Ensino Médio.

Com relação à revisão bibliográfica Silva (2014) percebeu que há dificuldades no trabalho com a Geometria Analítica, tanto por parte dos alunos quanto por parte dos professores. Mas, ela destaca os bons resultados que os *softwares* de geometria dinâmica possibilitam:

> Outro aspecto importante do emprego desse tipo de *software* é a possibilidade de observar e perceber situações não perceptíveis em figuras construídas com o uso de lápis e papel, e isto pode levar à melhor compreensão dos objetos matemáticos estudados, no caso específico, a reta (SILVA, 2014, p. 33).

Referente aos documentos oficiais analisados pela autora, Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM), Orientações Curriculares Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais – Ensino Médio (PCNEM+) e materiais desenvolvidos pela Secretaria de Estado da Educação de São Paulo (SEE-SP), Silva (2014) constatou que o estudo da Geometria Analítica permite estabelecer relações entre a álgebra e a geometria. E essas relações colaboram para o estudo de outras áreas do conhecimento:

> Analisar os três documentos oficiais trouxe alguns apontamentos sobre a importância do trabalho com a geometria analítica. Este é um assunto interessante para o desenvolvimento de certas habilidades necessárias à formação dos alunos, não só em matemática mas em outras áreas também (SILVA, 2014, p. 46).

Para o embasamento teórico, Silva (2014) fundamenta-se na Teoria dos Registros de Representação Semiótica, de Raymond Duval, apresentando de forma detalhada as principais características dessa teoria. Além disso, a autora faz referência aos conteúdos sobre retas geralmente trabalhados no Ensino Médio fazendo relação desses conteúdos com a Teoria dos Registros de Representação. Para finalizar o referencial teórico, Silva (2014) discorre sobre o uso de tecnologias no ensino da Matemática, destacando o *software* GeoGebra.

Como metodologia da pesquisa, a autora adota a Engenharia Didática desenvolvida por Michèle Artigue, que compreende quatro etapas: Análise preliminar; Concepção e análise *a priori* das situações didáticas; Experimentação; Análise *a posteriori* e validação. Nessa metodologia, a validação da pesquisa ocorre a partir da confrontação entre a fundamentação teórica da análise *a priori* e os resultados obtidos a partir da aplicação das atividades na análise *a posteriori*.

A autora elaborou uma sequência de quatro atividades compreendendo a condição de alinhamento de três pontos, os tipos de equação da reta e a análise de seus coeficientes, a posição relativa entre duas retas e uma situação prática. Essas atividades foram realizadas com seis estudantes da 3ª série do Ensino Médio de uma escola da zona sul de São Paulo, durante o período da manhã, em uma única sessão com duração de 5 horas. Com base nessa experiência, Silva (2014) afirma que: “A coordenação entre os diferentes registros é um aspecto ainda não dominado pelos alunos, assim ainda não conseguem realizá-la de maneira rápida e eficiente” (SILVA, 2014, p. 164).

Como os alunos foram organizados em duplas, a pesquisadora avaliou as três duplas e a forma como eles resolveram as atividades. Verificou que a dupla 2 apresentou maior dificuldade para a coordenação dos registros, não conseguindo responder algumas questões. Nas duplas 1 e 3, apesar de apresentarem maior facilidade, Silva (2014) notou na primeira dupla problemas com a escrita da língua portuguesa e com a linguagem matemática, e a dupla 3 apresentou dificuldades em relação à linguagem matemática.

Ao concluir, a autora reflete sobre a sua questão de pesquisa e o uso do computador:

> [...] pode-se afirmar sobre o uso do computador que grandes contribuições para a apreensão do objeto matemático podem ser verificadas, seu uso acelera as conversões e tratamentos a serem realizados e permite ao aluno manipular o objeto matemático como se fosse real, fato impossível com lápis e papel (SILVA, 2014, p. 166).

Desse modo, a autora entende que o computador pode colaborar na aprendizagem, além de facilitar o acesso às representações do objeto matemático, sendo possível a sua manipulação com o uso do *software*. Contudo, Silva (2014) também afirma que o computador não substitui o trabalho do professor, entendendo que a eficácia do uso desses recursos se dará com o apoio de uma sequência bem planejada.

Por outro lado, na dissertação de mestrado de Lemke (2011) a autora elaborou e aplicou atividades sobre retas e planos no R^3, para estudantes do Ensino Superior, com o intuito de explorar os seus diferentes registros de representação, principalmente o registro gráfico, utilizando um *software* de geometria dinâmica. A autora mencionou que a pesquisa realizada fez parte de um projeto que procurava desenvolver conteúdos de Geometria Analítica utilizando o *software Cabri 3D*. A sua entrada nesse projeto foi motivada pela sua experiência como professora do Ensino Superior, ao verificar as dificuldades dos estudantes compreenderem a Geometria Analítica no espaço.

Como fundamentação teórica para as situações de aprendizagem desenvolvidas, a autora utilizou a Teoria dos Registros de Representação Semiótica. Inicialmente ela mencionou o uso de uma diversidade de registros de representação para o estudo da Matemática. Em seguida, Lemke (2011) apresentou as concepções de Raymond Duval sobre a aprendizagem matemática e as características de sua teoria. Destacou as atividades cognitivas de tratamento e conversão, relacionadas às transformações dos registros, pertinentes para a análise das atividades elaboradas na pesquisa.

Para a revisão bibliográfica, Lemke (2011) fez uma exposição de estudos relacionados para a exploração de conteúdos com o uso da Teoria dos Registros de Representação Semiótica. Das pesquisas relacionadas à Geometria Analítica, foram constatadas as dificuldades dos alunos para a conversão dos registros e a predominância na utilização dos registros algébrico e numérico em livros didáticos, com pouca utilização do registro gráfico nos exercícios.

Em seguida, Lemke (2011) abordou a inserção do computador para o ensino da Matemática, corroborando com Balacheff e Kaput (1996 *apud* LEMKE, 2011) que, segundo a autora, afirmam o seu uso para evidenciar aspectos que podem não ser vistos sem esse recurso. Ampliou a discussão do uso das tecnologias, ao apresentar o *software Cabri 3D*, recurso utilizado pela autora para elaborar e realizar as atividades dos conteúdos de retas e planos no espaço. Ela justificou sua escolha para o uso dessa ferramenta, por possibilitar as conversões de registros, além de oferecer comandos que permitem estudar retas e planos com registros gráficos:

> O Cabri 3D possui recursos que favorecem a atividade de conversão pelos estudantes, em especial as conversões do registro gráfico para o algébrico e do gráfico para o numérico. O dinamismo do *software* e a existência de comandos para retas e planos no registro gráfico constituíram outro motivo considerado no ato da escolha (LEMKE, 2011, p. 53).

Sendo assim, além de papel e lápis, a autora utilizou o *Cabri 3D* para a realização das atividades propostas pelos participantes da pesquisa.

No capítulo seguinte, intitulado "Descrição do Objeto Matemático", Lemke (2011) mostrou o desenvolvimento da Geometria Analítica por meio de uma breve contextualização histórica baseada em Boyer (1974) e sobre o surgimento de vetor conforme Venturi (2009). Nesse capítulo, a autora apresentou as abordagens de três livros didáticos de Geometria Analítica para os conteúdos de retas e planos. Para ambos os conteúdos, a autora constatou que ocorre uma valorização do uso dos registros simbólico e algébrico, sendo o registro gráfico utilizado apenas para ilustrar os objetos matemáticos de estudo.

Com esse contexto, as atividades foram elaboradas e aplicadas para seis estudantes do primeiro ano do curso de Engenharia Básica de uma instituição particular de Ensino Superior de São José dos Campos-SP, sendo organizados em três duplas, visando um ambiente que propiciasse interações entre os participantes. Foram realizados nove encontros com duração máxima de uma hora e meia.

Lemke (2011) utilizou a metodologia dos *Design Experiments* baseada em Cobb et al. (2003 *apud* LEMKE, 2011) que tem o propósito de desenvolver teorias durante e a partir da aplicação de um experimento. Também oferece condições que podem modificar as hipóteses iniciais conforme o andamento do experimento. Segundo a autora, essa metodologia pode apresentar uma diversidade de experimentos. Na sua pesquisa, ela utilizou um experimento que torna o professor o condutor da prática para uma reduzida quantidade de alunos, sendo o responsável pelo experimento e pela pesquisa.

A metodologia utilizando o *Design* foi estabelecida em três fases. A primeira fase consistiu na revisão dos conceitos sobre vetores e uma introdução para retas e planos. A segunda fase compreendeu as atividades de adaptação ao *software*. E na última fase foi realizado o experimento sobre retas e planos, utilizando tanto papel e lápis quanto o *Cabri 3D*.

O experimento dispunha de cinco atividades envolvendo os objetos matemáticos retas e planos, sobretudo o estudo de posições relativas entre duas retas, entre reta e plano e entre dois planos.

Nas considerações finais, Lemke (2011) avaliou cinco hipóteses para o experimento realizado. A primeira era referente à percepção do aluno para as características dos objetos matemáticos na especificidade do registro utilizado. A segunda verificava se o aluno conseguiu determinar as relações entre representações de diversos registros do conteúdo estudado. A terceira referia-se ao aluno estabelecer análises partindo do registro gráfico. A quarta tratava do desenvolvimento de compreensões distintas das comumente obtidas nas intervenções tradicionais, por parte dos alunos, utilizando um *software* que proporcionasse um trabalho com conversões pouco utilizadas. E a quinta verificou se os alunos fizeram conjecturas com a utilização do *Cabri – 3D*.

Para a primeira hipótese, a autora constatou que os estudantes apresentaram algumas dificuldades com os registros da língua natural e simbólicos durante o experimento e assim considerou essa hipótese parcialmente confirmada. Porém, a autora constatou que as demais hipóteses foram confirmadas, à medida que os estudantes apresentaram êxito na realização das atividades.

Quanto ao *software Cabri 3D*, a autora afirmou como fundamental para o experimento, pois possibilitou a autonomia e a elaboração de conjecturas a partir das observações dos alunos, constatando que a abordagem promoveu ganhos de aprendizagem.

Dentre as sugestões para trabalhos futuros, Lemke (2011) mencionou a realização de pesquisas sobre equações incompletas de retas e planos para complementar o estudo desses conteúdos.

Na dissertação de mestrado de Cardoso (2014), a autora elaborou uma pesquisa sobre a maneira como o planejamento e os encaminhamentos de ensino realizados por uma professora de um curso de licenciatura em matemática, explorando conceitos de Geometria Analítica, conduzem à coordenação de diferentes registros de representação semiótica. Diferentemente de Lemke (2011) e Silva (2014), a pesquisadora não realizou o planejamento e a aplicação das atividades, apenas acompanhou os procedimentos adotados por uma professora colaboradora da pesquisa. A escolha por essa colaboradora foi justificada pelo fato da mesma conhecer e trabalhar utilizando a Teoria dos Registros de Representação Semiótica.

Na introdução, Cardoso (2014) apontou as dificuldades dos alunos da Educação Básica para resolverem atividades de Geometria Analítica, utilizando como base a Matriz de Referência da Prova Brasil de 2009. A partir disso a autora decidiu verificar a abordagem de ensino da Geometria Analítica em um curso de Licenciatura em Matemática, pois: "[...] são nesses cursos que se formam a maioria dos professores que ensinam a geometria analítica nas escolas de Educação Básica e nas universidades nos mais diversos cursos" (CARDOSO, 2014, p. 13).

No primeiro capítulo, a autora apresentou a sua constituição profissional, bem como sua trajetória como acadêmica do curso de Licenciatura em Matemática. Ao final de sua graduação, Cardoso (2014) realizou leituras e participou de eventos de Educação Matemática que propiciaram delimitar uma questão de pesquisa. Ao analisar os materiais da Educação Básica, a pesquisadora notou que a geometria ensinada baseava-se em decorar fórmulas. Quando observou a apostila do terceiro ano do Ensino Médio, percebeu o enfoque algébrico quando o assunto se tratava de Geometria Analítica, situação similar à que ela observou no Ensino Superior.

Cardoso (2014) também verificou autores e pesquisadores que possuíam preocupações relacionadas à forma como os conceitos de Geometria e de Geometria Analítica são explorados no ensino. A autora constatou que um aspecto em comum abordado por eles, está no fato do ensino dessas áreas da Matemática ser relegado desde a Educação Básica.

Ao citar Goulart (2009, *apud* CARDOSO, 2014), retoma ao fato da Geometria Analítica ser estudada no Ensino Médio apenas com a exposição de fórmulas. Ainda em Goulart (2009, *apud* CARDOSO, 2014), a autora observou que uma abordagem tradicional com exercícios que exigem a repetição de procedimentos, dá ênfase à forma de fazer em prejuízo do motivo por fazer.

Nesse capítulo, a autora também trouxe pesquisas sobre Geometria Analítica relacionadas ao uso de *softwares* na Teoria dos Registros de Representação Semiótica. Nesses estudos Cardoso (2014) verificou a existência de dificuldades para atribuir significados para os conceitos da Geometria Analítica, tanto por alunos da Educação Básica quanto por acadêmicos de cursos de licenciatura. A autora percebeu também a contribuição do uso de *softwares* matemáticos para a aprendizagem, assim como o uso da Teoria dos Registros de Representação Semiótica para "[...] mobilizar e construir os conceitos da geometria analítica" (CARDOSO, 2014, p. 27).

Cardoso (2014) observou nas pesquisas analisadas que os autores não verificaram os percursos do planejamento do professor para o ensino da Geometria Analítica e apontaram para as dificuldades dos acadêmicos de licenciatura em "[...] explorar os conceitos e mobilizar os diferentes registros de representação para acessar um mesmo objeto da geometria analítica" (CARDOSO, 2014, p. 28).

Sendo assim, Cardoso (2014) direcionou seu estudo para a formação inicial do professor de Matemática. Dessa forma, a autora elaborou a questão norteadora para a sua pesquisa:

> [...] de que maneira o planejamento e os encaminhamentos de ensino desenvolvidos por uma professora para explorar conceitos da geometria analítica encaminham a coordenação dos diferentes registros de representação semiótica e quais são os limites e potencialidades desse processo na perspectiva da formação de professores para Educação Básica? (CARDOSO, 2014, p. 33).

O estudo desenvolvido por Cardoso (2014) visou analisar e descrever o planejamento e as práticas de ensino de Geometria Analítica por uma docente para uma turma de último semestre do curso de Licenciatura em Matemática. Também procurou verificar o uso das representações semióticas no planejamento e nas ações em sala de aula.

Como o propósito de sua investigação incluía descrever as práticas de uma docente, a autora caracterizou a sua investigação como uma pesquisa qualitativa da modalidade estudo de caso. Para isso, a pesquisadora incluiu os recortes do planejamento da professora colaboradora, assistiu e filmou as aulas, com o intuito de verificar as ações desenvolvidas.

No segundo capítulo, foram descritas quatro etapas referentes à produção de dados da pesquisa de Cardoso (2014). A primeira foi constituída por uma entrevista semiestruturada com a professora colaboradora. A entrevista propunha à professora comunicar sua relação com a Geometria Analítica, sua ação docente e sua visão sobre a contribuição das representações semióticas para a apreensão desses conceitos. A entrevista teve duas horas de duração e foi respondida oralmente pela professora colaboradora e registrada por meio de gravações.

A segunda etapa teve como objetivo identificar as perspectivas da docente colaboradora sobre o planejamento. Entre os conteúdos planejados pela professora estavam incluídos: localização de pontos, distância entre dois pontos, ponto médio, equação da reta, equação da circunferência e inequações. Para a produção de dados nessa etapa, foram realizadas gravações de vídeos na residência da professora colaboradora, sendo três encontros, e na universidade, um encontro.

A terceira etapa deu-se a partir de filmagens do desenvolvimento dos planejamentos em sala de aula. As filmagens de 11 aulas tinham o propósito de verificar a ação docente em sala de aula, procurando compreender como a professora utilizava a Teoria dos Registros de Representação Semiótica em situações de ensino. As atividades propostas pela professora colaboradora sugeriam que os alunos utilizassem o *software* GeoGebra.

Na última etapa ocorreu a produção de dados das gravações de vídeo sobre as reflexões da prática da professora colaboradora. Nessas reflexões, a professora expunha sobre o planejamento, dificuldades encontradas, o desenvolvimento da aula e os procedimentos dos estudantes frente às situações propostas. Essa etapa ocorreu em 11 sessões.

Sobre a parte do planejamento que envolvia o conteúdo de reta, a professora colaboradora da pesquisa de Cardoso (2014) abordou esse objeto matemático explorando-o em R^2. Entre os assuntos tratados nas atividades, constavam os conteúdos de equação da reta, coeficiente linear, sistemas de equações, coeficientes angulares e solução de sistemas lineares.

No terceiro capítulo, a autora apresentou a Teoria dos Registros de Representação Semiótica. Ainda nesse capítulo, Cardoso (2014) verificou que nas atividades propostas pela professora colaboradora, são utilizados diversos registros de representação dos objetos matemáticos estudados. A autora destacou também as conversões propostas nas atividades. Cardoso (2014) concordou com a visão de Duval (2009) a respeito da conversão ser uma atividade fundamental, assim como o tratamento. Ela complementou afirmando que individualmente, a conversão pode proporcionar a coordenação dos registros. Ao tratar sobre o uso da atividade de conversão na Geometria Analítica, Cardoso (2014) comentou:

> No contexto da geometria analítica, essa tarefa torna-se fundamental, pois os conceitos envolvem apreensão, interpretação e entendimento de figuras geométricas via representações algébricas e entendimento de equações via registro gráfico ou figural. Nesse sentido, substituir uma expressão ou uma representação por outra que seja referencialmente equivalente acaba sendo central na exploração desses conceitos (CARDOSO, 2014, p. 83).

Na perspectiva na formação de professores, a autora afirmou que para haver aprendizado na geometria é necessário explorar os processos cognitivos, tais como a visualização, a construção e o raciocínio (CARDOSO, 2014).

Ao final do terceiro capítulo, a pesquisadora tratou do uso do *software* GeoGebra para a mobilização de registros de representação no contexto da Geometria Analítica. Ela constatou que o GeoGebra, nas aulas da professora colaboradora, permitiu ampliar a percepção para os conceitos da Geometria Analítica por meio da utilização de diferentes representações dos objetos matemáticos estudados.

No quarto capítulo, a autora apresentou as análises sobre o planejamento e as reflexões da professora colaboradora. Nas análises dos relatos reflexivos dessa professora, Cardoso (2014) notou dificuldades por parte dos licenciandos para perceber a correspondência entre diferentes registros. Também comentou que, para fazer a transição entre os registros, a professora colaboradora precisava interferir para que os estudantes fizessem a mobilização dos registros.

Nas constatações de Cardoso (2014) desse capítulo, a docente que realizou as práticas apresentou preocupação com os licenciandos, visto que ela percebeu neles dificuldades para mobilizar conceitos fundamentais. Ainda, conforme a professora colaboradora relatou, houve avanços e retrocessos durante a construção dos conceitos.

Ao concluir, Cardoso (2014) destacou as análises fundamentadas na Teoria dos Registros de Representação Semiótica e na prática desenvolvida pela professora pesquisadora. A autora verificou no planejamento um potencial para a realização de conversões dos registros, bem como o uso do *software* como fundamental para essa proposta.

Conforme consta nas considerações, Cardoso (2014) percebeu uma resistência por parte dos licenciandos para fazer as conversões nas atividades, sendo que, a maioria procurou utilizar apenas um registro. A professora colaboradora precisou intervir para que ocorressem as conversões e as discussões entre o grupo. Ao final, a autora afirmou a expectativa dos alunos compreenderem a importância de um trabalho de análise, construção e desconstrução do planejamento e de perceberem a importância de buscar conhecimentos para o desenvolvimento profissional.

Diante da análise desses trabalhos foi possível observar a forma como as pesquisadoras Lemke (2011) e Silva (2014) abordaram os conteúdos da Geometria Analítica, fundamentados na Teoria dos Registros de Representação Semiótica. A pesquisa de Cardoso (2014) trouxe outra perspectiva, constatando que as atividades planejadas para mobilizar diferentes registros dependeram das intervenções da professora para que os licenciandos percebessem a correspondência entre distintas representações da Geometria Analítica.

No capítulo seguinte são expostas as escolhas metodológicas para a produção dos dados desta pesquisa.

3 METODOLOGIA

Neste capítulo será descrita a metodologia que conduziu esta pesquisa, apresentando as características, os participantes, os procedimentos e os instrumentos utilizados no decorrer da mesma.

3.1 Características da pesquisa

O propósito desta pesquisa é verificar as contribuições de uma sequência didática baseada na Teoria dos Registros de Representação Semiótica, para a aprendizagem de retas no espaço por estudantes do ensino superior.

Para tanto, foi elaborada uma sequência didática composta por uma atividade preliminar desenvolvida no *Google Forms* (Apêndice B), contendo questões relacionadas ao conteúdo de retas no espaço, uma atividade sobre o Estudo de Retas (Apêndice C) e uma atividade de encerramento desenvolvida também no *Google Forms* (Apêndice D). Essas atividades foram elaboradas procurando privilegiar a coordenação de diferentes registros de representação, conforme a Teoria dos Registros de Representação Semiótica, e aplicadas a um grupo de participantes do projeto de ensino “Geometria Analítica com o GeoGebra”. Essa aplicação aconteceu via *Google Meet* em dois encontros síncronos conduzidos pelo pesquisador.

As atividades realizadas pelos participantes e postadas na plataforma *Google Classroom* do Projeto, as respostas deles às atividades preliminares e de encerramento no *Google Forms* e a gravação dos dois encontros síncronos que ocorreram através do *Google Meet* compreendem os dados que são analisados no capítulo 5 para constituir os resultados desta pesquisa.

Conforme as fontes de dados, a análise realizada e a especificidade desta pesquisa é possível reconhecê-la nos pressupostos da metodologia qualitativa utilizando o estudo de caso como estratégia de pesquisa.

De acordo com Godoy (1995), quando um estudo é descritivo e busca o entendimento do fenômeno, uma análise qualitativa é mais indicada. Essa autora destaca algumas características básicas da pesquisa qualitativa.

A primeira delas tem o ambiente natural como fonte direta dos dados, sendo o pesquisador o instrumento fundamental. Nesta pesquisa o ambiente natural constituiu-se dos encontros síncronos via *Google Meet* com os participantes do projeto de ensino “Geometria Analítica com o GeoGebra”, com a participação ativa do pesquisador.

A segunda característica refere-se à pesquisa qualitativa ser descritiva. No caso desta pesquisa os dados produzidos são eminentemente descritivos (transcrição das aulas gravadas, atividades realizadas pelos participantes e respostas aos formulários).

De acordo com a terceira característica, o investigador deve-se preocupar com o significado que as pessoas dão as coisas e a sua vida. O foco desta pesquisa está no processo de desenvolvimento das atividades e da compreensão dos acadêmicos acerca do conteúdo de retas no espaço. Durante a realização das atividades, procurou-se perguntar aos participantes suas constatações das atividades realizadas e, a partir das observações, destacar como os acadêmicos conseguiram realizar seus desenvolvimentos.

A última característica se refere ao processo indutivo de análise dos dados. Neste trabalho não se procura desenvolver evidências que neguem ou confirmem uma hipótese definida previamente. Pretende-se realizar uma análise cautelosa e descritiva dos dados aliada ao quadro teórico definido.

Observa-se também que a pesquisa está de acordo com a estratégia do estudo de caso, visto que o “O propósito do estudo de caso é reunir informações detalhadas e sistemáticas sobre um fenômeno” (PATTON, 2002 *apud* FREITAS; JABOUR, 2011, p. 10). Conforme o que foi explicitado anteriormente, a presente pesquisa se refere a um grupo de participantes do projeto de ensino “Geometria Analítica com o GeoGebra”, que participaram do desenvolvimento de uma sequência didática baseada na Teoria dos Registros de Representação Semiótica, sobre o estudo das equações vetoriais e paramétricas da reta no espaço, além de retas paralelas aos eixos coordenados, constituindo, assim, um caso (fenômeno) específico de estudo.

3.2 O desenvolvimento da pesquisa

Para a elaboração dos dados analisados nesta pesquisa, fez-se necessário o desenvolvimento e aplicação de uma sequência didática sobre o conteúdo de retas no espaço, com enfoque nas equações vetorial e paramétricas das retas e nas retas paralelas aos eixos coordenados, buscando trabalhar com uma diversidade de registros de representação conforme a Teoria dos Registros de Representação Semiótica.

Como foi previamente mencionado, decidiu-se trabalhar com um grupo de participantes do projeto de ensino “Geometria Analítica com o GeoGebra”, ofertado de forma remota por uma universidade do Rio Grande do Sul, no período de 28 de junho a 04 de outubro de 2021.

Esse projeto contou com onze participantes regulares nos encontros semanais de duas horas de duração, via *Google Meet.* A plataforma *Google Classroom* também foi utilizada pela equipe do projeto para postagem, devolução das atividades realizadas pelos participantes do projeto e revisão das atividades pela equipe, assim como a postagem das gravações dos encontros e recados aos participantes.

Para compreender a dinâmica das atividades e dos encontros, foram realizadas observações em três encontros ministrados pela equipe do projeto, anteriores à aplicação da sequência didática sobre retas no espaço.

Foi elaborado um Termo de Consentimento pelo *Google Forms* (Apêndice A) para ser preenchido por participantes interessados em contribuir com este estudo. O convite aos acadêmicos e a viabilização desse Termo aconteceu no encontro do dia 09 de agosto. Dos presentes, 8 responderam o Termo de Consentimento concordando em participar.

Para a aplicação das atividades da sequência didática, foram disponibilizados dois encontros síncronos com 2h de duração, pois a equipe havia previsto dispender apenas um encontro para o conteúdo de retas no espaço. Como já dito, devido ao tempo curto para desenvolver esses conteúdos, foi preciso delimitar os temas para: equação vetorial da reta, equações paramétricas da reta e retas paralelas em relação aos eixos coordenados.

No desenvolvimento das atividades da sequência didática considerando a Teoria dos Registros de Representação Semiótica, as práticas foram planejadas propondo a coordenação de diferentes registros de representação.

Antes da realização das atividades sobre retas no espaço, durante o primeiro encontro síncrono no dia 16 de agosto de 2021, foi solicitado que os participantes respondessem uma atividade preliminar em um formulário elaborado no *Google Forms* (Apêndice B), cujo link foi colocado no *chat* do

Google Meet. Essa atividade preliminar tinha como objetivo verificar os conhecimentos prévios dos participantes sobre retas. Dos participantes que aceitaram contribuir com a pesquisa, sete responderam essa atividade preliminar.

Para as práticas que foram desenvolvidas nos dois encontros síncronos, foi utilizado o arquivo (Apêndice C) contendo as atividades e uma apresentação resumida dos conteúdos que seriam trabalhados naqueles encontros. Esse arquivo foi disponibilizado no *Google Classroom*, uma hora antes do início do primeiro encontro. Para cada conteúdo, foram elaborados atividades e desafios, propondo aos participantes a utilização de representações algébricas e representações gráficas. Também foram propostas atividades com descrição em língua natural contendo informações sobre uma reta e os participantes deveriam converter essas informações para o registro algébrico.

Em cada um dos encontros, os conteúdos foram apresentados antes das atividades, conforme Winterle (2000). Durante a realização das atividades, era solicitada aos participantes a exposição dos resultados encontrados, via *chat* ou microfone, e possíveis dificuldades encontradas durante o desenvolvimento.

No encerramento do segundo encontro, realizado no dia 23 de agosto de 2021, foi solicitado aos acadêmicos que respondessem a atividade final elaborada em um formulário do *Google Forms* (Apêndice D), com link disponibilizado no *chat*, para identificar as contribuições das práticas realizadas durante os encontros síncronos realizados via *Google Meet*.

Os seis acadêmicos que participaram de todas as atividades da sequência didática elaborada e concordaram em colaborar com este trabalho foram tomados como sujeitos desta pesquisa.

4 A APLICAÇÃO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Neste capítulo são apresentados os dados obtidos no desenvolvimento das interações síncronas com os participantes do projeto de ensino “Geometria Analítica com o GeoGebra”, que aceitaram participar desta pesquisa. Os seis participantes são identificados por pseudônimos escolhidos pelos mesmos ao preencherem o Termo de Consentimento (Apêndice A).

Convêm destacar alguns dados fornecidos pela coordenadora do projeto de ensino em relação a esses seis participantes. Os acadêmicos cujos pseudônimos são Aluna QL, Borracha, João Matheus e Sthé estavam cursando Geometria Analítica no mesmo semestre em que o projeto foi desenvolvido. O acadêmico de pseudônimo Ólafur afirmou que ainda não havia cursado esse componente. Já a acadêmica de pseudônimo Olivia havia cursado Geometria Analítica duas vezes.

4.1 Primeira interação síncrona

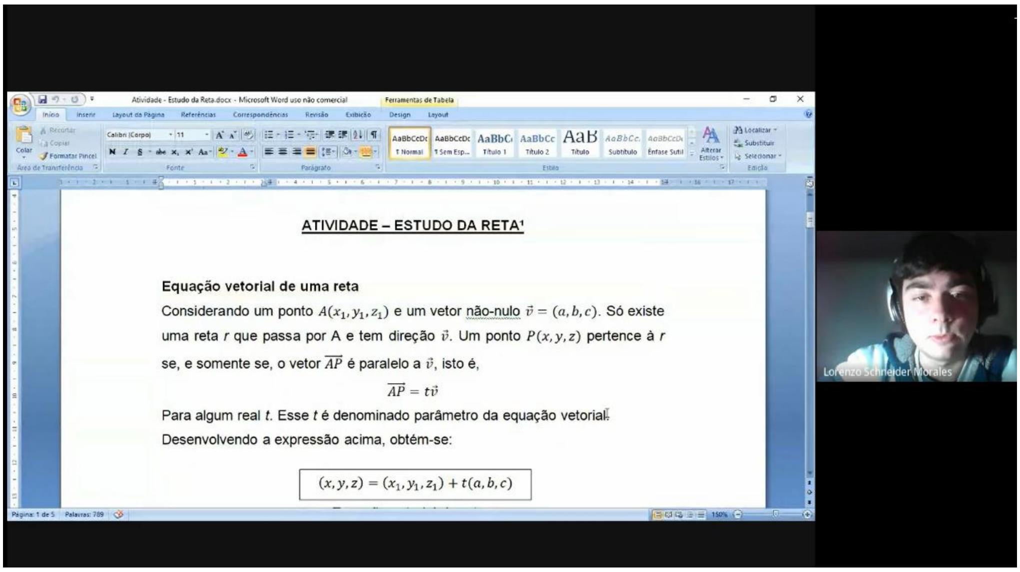
A primeira interação com os participantes do projeto de ensino “Geometria Analítica com o GeoGebra” foi realizada no *Google Meet* no dia 16 de agosto de 2021. Inicialmente, a professora responsável pelo projeto informou aos participantes que, a partir desse dia, a frequência e a participação dos acadêmicos estariam associadas à devolução na plataforma *Google Classroom* das atividades realizadas nos encontros síncronos. Em seguida, passou a condução das atividades para o pesquisador.

Como já dito, antes do início das atividades postadas na Plataforma *Google Classroom* (Apêndice C), o pesquisador enviou o *link* de uma atividade elaborada no *Google Forms*, denominada “Atividade Preliminar” (Apêndice B). Ela possuía quatro questões e foi realizada com o intuito de observar os conhecimentos prévios dos estudantes sobre retas. Nesse momento, os acadêmicos presentes foram convidados a responderem as questões dispostas nesse formulário.

A primeira questão solicitava que o participante descrevesse com as próprias palavras o que é uma reta. Nas segunda e terceira questões o acadêmico era convidado a responder se saberia as formas de se representar uma reta e quais formas seriam essas. A última questão trazia registros algébricos e descrições em língua natural de diferentes retas para serem associadas às representações gráficas ou algébricas das mesmas.

À medida que os participantes acessavam a sala no *Google Meet*, as informações referentes à atividade preliminar eram reiteradas. Também foi informado aos participantes que, caso eles concluíssem a atividade no formulário, poderiam trabalhar nas atividades disponíveis na plataforma *Google Classroom* e projetadas no *Google Meet* (Figura 6).

Figura 6 - Projeção da atividade sobre retas

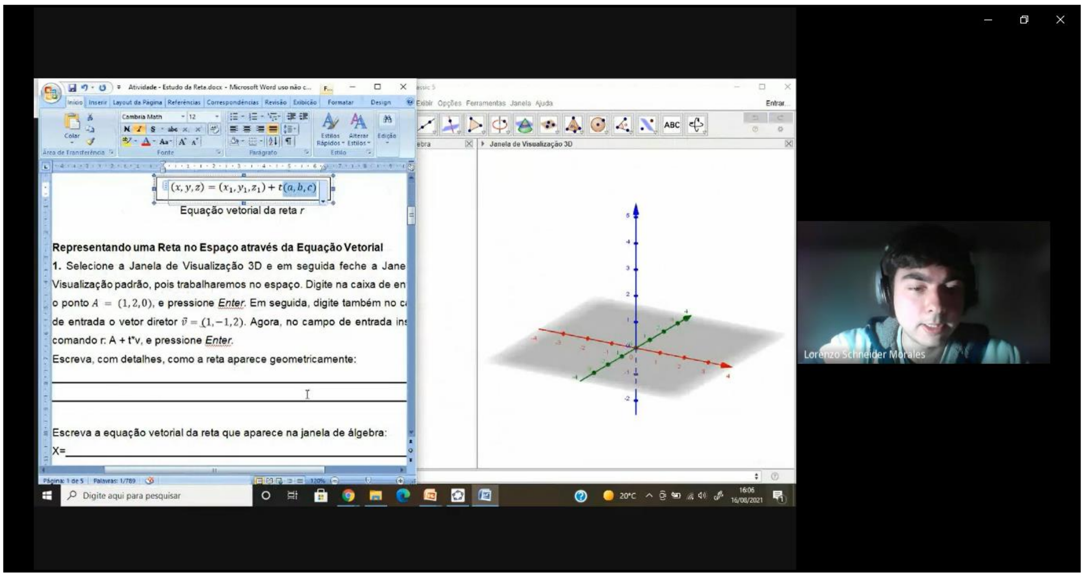


Fonte: Autor (2022).

Nesse momento, foi apresentada uma introdução sobre retas e algumas das suas formas de representação. O pesquisador fez uma breve explicação sobre o objeto matemático de interesse, no contexto do R^3 e imediatamente explicou sobre a primeira representação algébrica que seria tratada nessa atividade, a equação vetorial da reta. O pesquisador focou em apresentar as características e como as informações da reta estavam dispostas nessa equação. Durante a explicação sobre esse conteúdo os participantes interagiam pouco no *chat* e não realizavam perguntas e comentários via microfone.

Após a explicação inicial sobre a equação vetorial da reta, iniciou-se as tarefas que seriam realizadas no *software* GeoGebra. O pesquisador novamente compartilhou a tela de seu computador, na qual estava o GeoGebra aberto em uma janela ao lado do arquivo da atividade sobre retas (Figura 7).

Figura 7 - Projeção do GeoGebra ao lado da atividade sobre retas

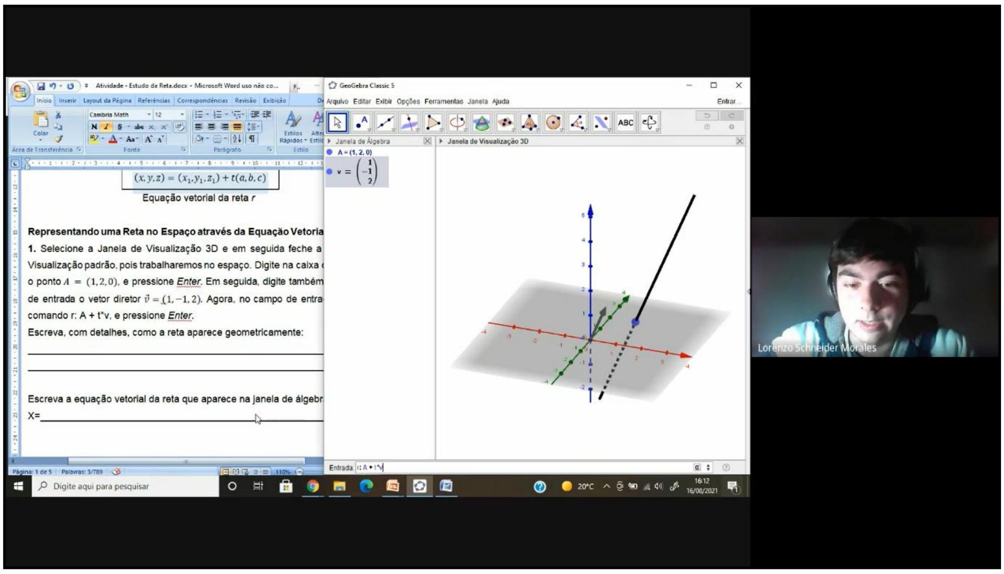


Fonte: Autor (2022).

Os participantes foram convidados a realizar a tarefa em conjunto com o pesquisador, de modo que pudessem acompanhar os procedimentos para esboçar a reta na janela de visualização 3D. Assim, foram inseridas no campo de entrada do *software* as informações referentes à reta, tal como um ponto pertencente à mesma, *A = (1, 2, 0)*, e o vetor diretor *v = (1, -1, 2)*. Na etapa seguinte, foi digitado o comando *r: A + t*v*, que permitia esboçar o objeto matemático imediatamente ao pressionar *Enter*.

Antes de prosseguir, como sugestão da professora responsável pelo projeto, os acadêmicos foram questionados quanto ao encaminhamento dado no primeiro item da atividade. Os participantes afirmaram estar no processo de desenvolvimento do mesmo. Então foi dada continuidade para essa atividade, sendo permitido aos acadêmicos acompanharem o desenvolvimento do esboço da reta no GeoGebra. O pesquisador retomou os procedimentos que foram realizados nessa etapa e pressionou a tecla *Enter*. A partir disso, apareceu o desenho da reta acompanhada de seu vetor diretor na janela de visualização 3D (Figura 8).

Figura 8 - Projeção da reta esboçada na janela de visualização



Fonte: Autor (2022).

Sendo assim, foi possível observar a representação gráfica na janela de visualização do *software* e a representação algébrica da reta trabalhada na janela de álgebra. O participante Ólafur perguntou no *chat* o que era o X representado na equação da reta. O pesquisador respondeu que se referia a um ponto dado na reta e comparou com a situação apresentada no exemplo da equação vetorial. O pesquisador perguntou se foi possível compreender a partir da explicação dada e Ólafur confirmou com insegurança no *chat* ao afirmar “Acho que sim”.

Em seguida, foi solicitado para os acadêmicos realizarem as demais tarefas do item 1. Na primeira, eles deveriam descrever, detalhadamente, as características da reta elaborada. Na seguinte, foi solicitada a equação vetorial fornecida pelo *software*. Na terceira, os participantes deveriam determinar pelo menos dois pontos pertencentes à reta, distintos do ponto A fornecido no enunciado, sendo possível utilizar a equação apresentada e/ou o GeoGebra. Na quarta tarefa, foi perguntada a maneira escolhida por eles para determinar os pontos encontrados.

No *chat*, Borracha afirmou, referente à última tarefa do item 1, que a forma mais fácil de determinar os pontos foi utilizando o GeoGebra e procurando os pontos na reta. Ólafur também comentou sobre a quarta tarefa no *chat*: “Lorenzo, eu não sei como eu posso descobrir os pontos sem o GeoGebra”.

O pesquisador solicitou que os acadêmicos o comunicassem sobre os pontos encontrados, para confirmar se esses pertenciam à reta estudada. O acadêmico Borracha escreveu no *chat* do *Google Meet* os pontos B = (2, 1, 2) e C = (3, 0, 4) que encontrou. Em seguida, o participante João Matheus colocou os pontos P1 = (2, 1, 3) e P2 = (3, 2, 5) no *chat*. Foi possível constatar imediatamente que os pontos escolhidos pelo João Matheus não pertenciam à reta estudada. Em seguida, esse acadêmico escreveu no *chat* pontos iguais aos de Borracha.

Para Ólafur, que comentara que não conseguia descobrir os pontos sem o auxílio do *software*, o pesquisador explicou que ele poderia utilizar a equação vetorial, apresentada no início da interação. Assim, poderia escolher diferentes valores para o parâmetro, na equação vetorial, utilizando as informações sobre o ponto e o vetor disponíveis no enunciado da atividade. A professora coordenadora, que estava acompanhando o desenvolvimento da prática, indicou no *chat* que ele poderia atribuir outro valor para t, apresentando a forma como o GeoGebra apresentava o registro algébrico na janela de álgebra.

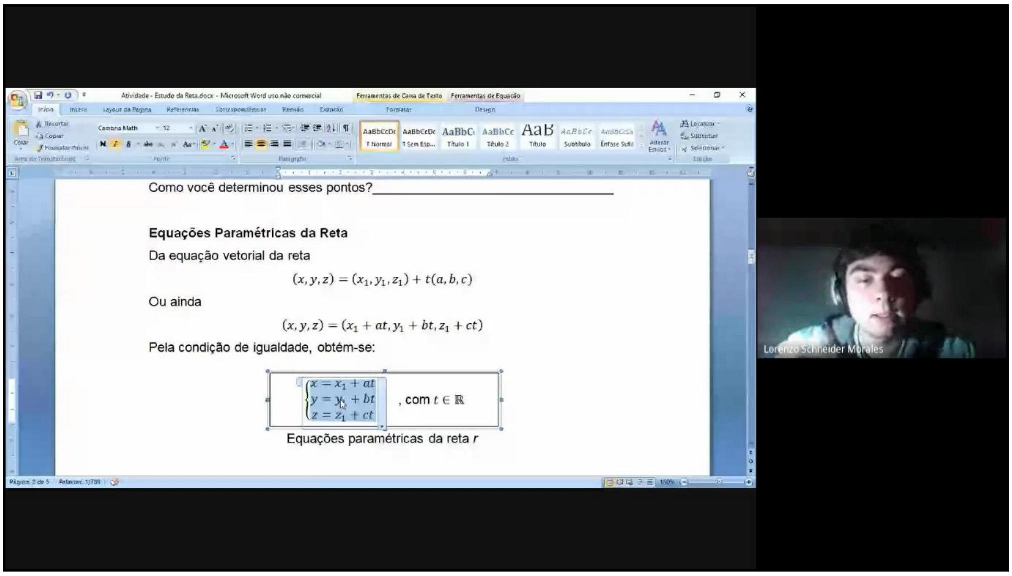
Após a sugestão indicada pelo pesquisador, Ólafur afirmou no *chat*: “Obrigado, eu fiz aqui, eu fiz uma variável n, e coloquei no lugar do t”. Agora ele estava modificando os valores para o parâmetro, utilizando essa nova variável, e confirmou o êxito nessa parte da atividade ao afirmar: “deu certinho”.

A Aluna QL também enviou os pontos que determinou, possivelmente pertencentes à reta, escrevendo-os no *chat* : (2, 3, 1) e (3, 1, 2). Foi sugerido para a participante verificar novamente os seus pontos, visto que o pesquisador, ao utilizar o GeoGebra, notou que tais pontos não pertenciam à reta.

Na etapa seguinte da interação, solicitou que os acadêmicos comunicassem o andamento do primeiro item da atividade. Como a maioria dos participantes do projeto indicaram o término, foi dada continuidade ao próximo conteúdo que trataria das equações paramétricas da reta.

Nesse momento, o pesquisador apresentou no *Google Meet* o item que tratava sobre equações paramétricas da reta (Figura 9). Esse conteúdo foi abordado a partir da equação vetorial da reta, sendo possível reescrever as equações de uma determinada reta, utilizando um ponto conhecido, o vetor diretor e um parâmetro. Por meio das equações paramétricas os acadêmicos poderiam descobrir as coordenadas de qualquer ponto da reta.

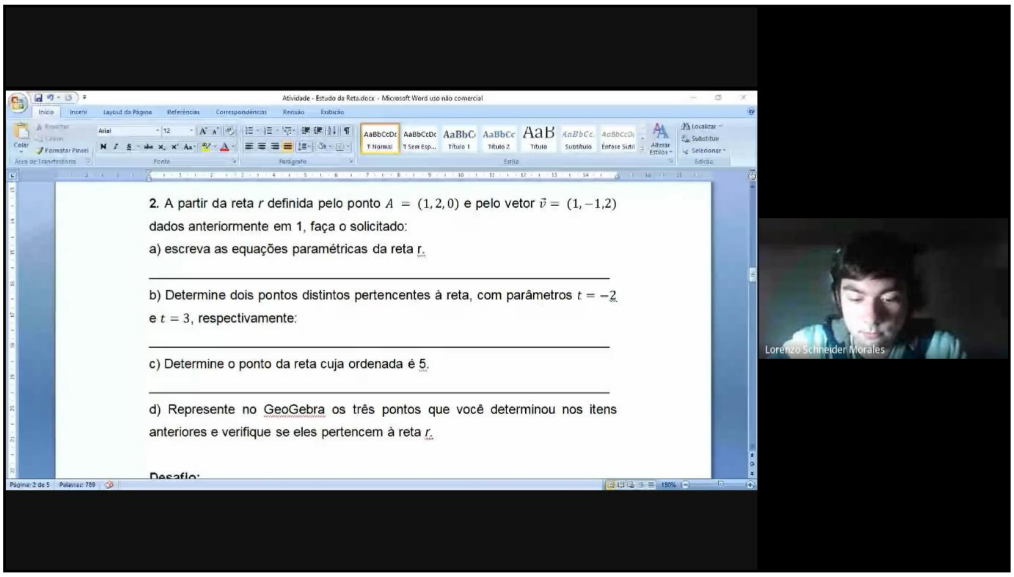
Figura 9 - Projeção das equações paramétricas da reta



Fonte: Autor (2022).

O segundo item da atividade (Figura 10) fornecia uma reta r definida pelo ponto e pelo vetor diretor dados no item anterior. Os participantes deveriam utilizar as equações paramétricas da reta para a resolução das tarefas posteriores e a última solicitava a imagem da representação gráfica do objeto matemático no GeoGebra. Durante a realização dessas tarefas o pesquisador reforçava a possibilidade de realização de perguntas referentes à atividade ou aos conteúdos estudados.

Figura 10 - Projeção do segundo item da atividade



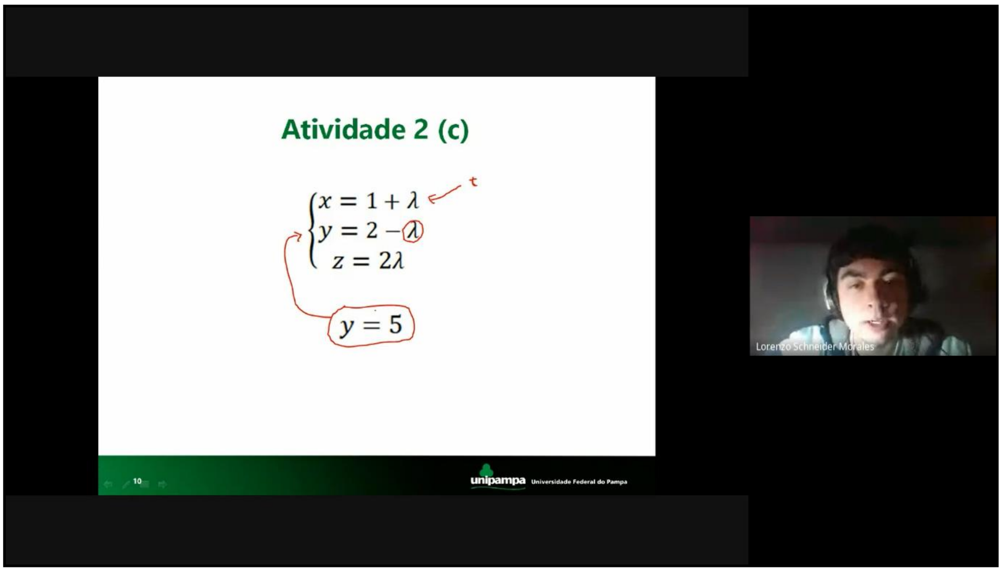
Fonte: Autor (2022).

Como a terceira tarefa do segundo item solicitava que determinassem o ponto da reta com ordenada igual a 5, o acadêmico Ólafur utilizou o *chat* para fazer o seguinte questionamento: “o que é ordenada?”. Essa dúvida foi imediatamente esclarecida pelo pesquisador com a colaboração da professora coordenadora.

Durante a realização desse item, a acadêmica Olivia escreveu no *chat*: “não entendi bem a letra a”. O pesquisador afirmou que as equações paramétricas permitem conhecer quaisquer pontos da reta a partir de informações de um ponto e de um vetor da reta. A coordenadora do projeto reforçou que x_1, y_1, z_1, são as coordenadas do ponto conhecido e as letras a, b, c são as componentes do vetor.

O acadêmico Ólafur comentou que tinha dúvida na terceira tarefa do segundo item. Inicialmente, o pesquisador sugeriu que ele poderia utilizar as equações paramétricas e, visto que ele conhecia um ponto e o vetor diretor da reta, substituiria o y pela ordenada fornecida na atividade. No momento seguinte, o pesquisador projetou na sua tela (Figura 11), os procedimentos preliminares para encontrar o ponto da reta cuja ordenada é 5.

Figura 11 - Projeção de parte da resolução da 3ª tarefa do 2º item



Fonte: Autor (2022).

Com a apresentação da explicação, Ólafur escreveu no *chat*: “entendi”.

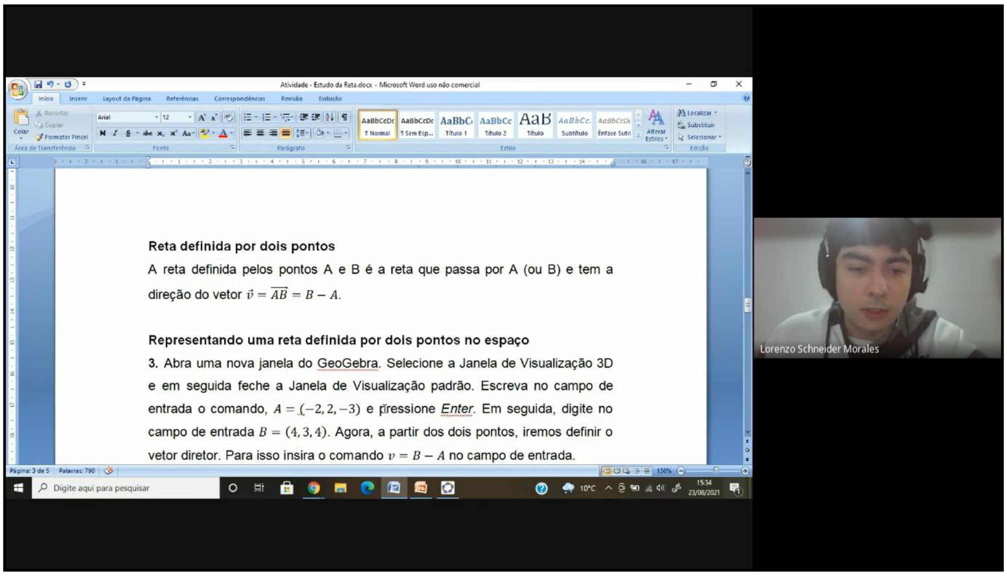
Como estava encerrando o período para a realização do encontro no *Google Meet*, o pesquisador, em conjunto com a professora coordenadora, combinou com os participantes que a interação encerraria no primeiro desafio proposto após o item dois. Desse modo, os acadêmicos que ainda estavam realizando as tarefas do segundo item poderiam ficar na sala, caso tivessem dúvidas, e os demais estavam dispensados para o próximo encontro.

4.2 Segunda interação síncrona

A segunda interação ocorreu no dia 23 de agosto de 2021, novamente em uma sala virtual do *Google Meet*. Inicialmente, o pesquisador verificou se os alunos haviam conseguido realizar os itens da atividade da interação anterior, incluindo o desafio proposto. Os acadêmicos Olivia e João Matheus deram respostas afirmativas para esse questionamento. Após receber algumas respostas, o pesquisador informou que poderia retomar os itens anteriores da atividade sobre retas, caso fosse necessário.

Para esse encontro, o conteúdo inicialmente apresentado foi sobre reta definida por dois pontos. A partir da projeção de parte do item 3 (Figura 12), o pesquisador comentou que é possível definir uma reta a partir de dois pontos dados no espaço. Essa reta apresentaria a direção do vetor v, dado por $\overrightarrow{AB}$, sendo recordado que esse símbolo indicaria a subtração de B por A, possibilitando encontrar o vetor diretor dessa reta.

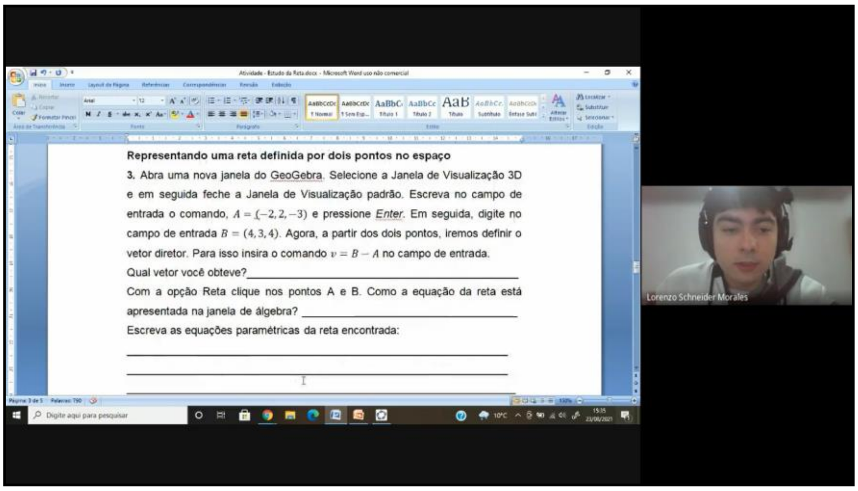
Figura 12 - Apresentação do item reta definida por dois pontos



Fonte: Autor (2022).

Esse terceiro item da atividade, mostrado de forma completa na figura a seguir (Figura 13), abordava o assunto iniciado nesse encontro. Eram fornecidos dois pontos distintos $A = (-2, 2, -3)$ e $B = (4, 3, 4)$ e em seguida eram dados os procedimentos para determinar o vetor a partir dos pontos A e B no GeoGebra. Os participantes deveriam informar o vetor encontrado em v = B – A. Ao selecionar a opção Reta no *software* e, em seguida, clicar nos dois pontos, era possível esboçar o registro gráfico dessa reta, além de verificar na janela de álgebra a equação vetorial da mesma.

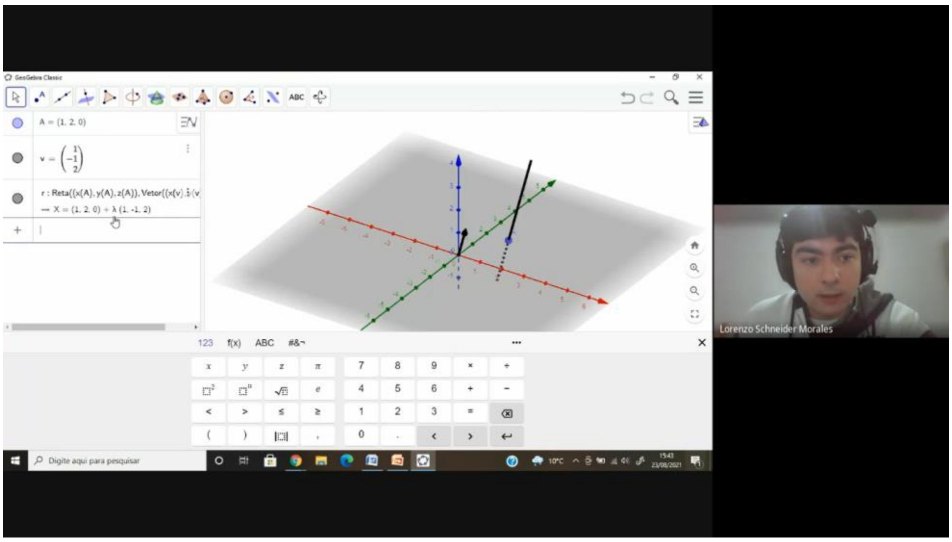
Figura 13 - Apresentação do item 3 sobre reta definida por dois pontos



Fonte: Autor (2022).

Antes de prosseguir no terceiro item, o pesquisador retomou ao item 2 da atividade sobre retas, apresentada e explicada na interação anterior. Primeiramente o pesquisador colocou as informações do ponto e do vetor diretor no GeoGebra e, utilizando o comando dado no item 1 dessa mesma atividade, realizou a construção do gráfico da reta no espaço. Durante a realização desses procedimentos, ele apresentou a tela de seu computador com a construção realizada como mostra a seguir (Figura 14):

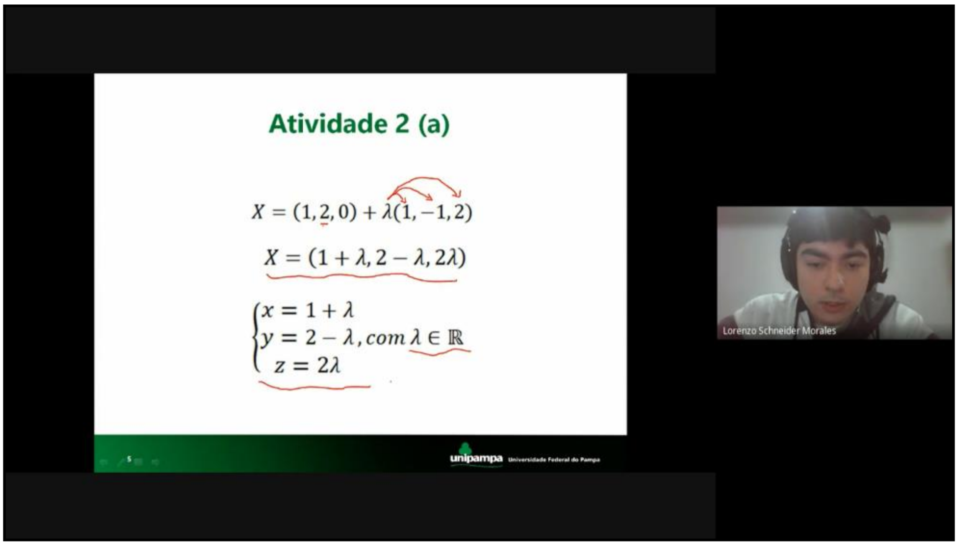
Figura 14 - Projeção da tela com a construção da reta no GeoGebra



Fonte: Autor (2022).

Também foram resolvidas as tarefas referentes ao item 2 para os participantes do projeto a partir do compartilhamento da tela por meio do *Google Meet*, conforme a figura a seguir (Figura 15):

Figura 15 - Projeção de um processo de resolução



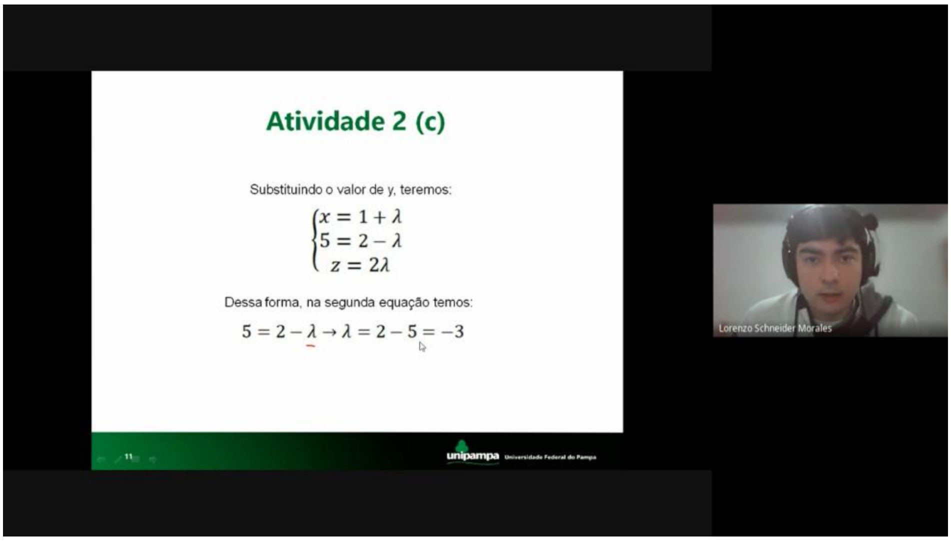
Fonte: Autor (2022).

Para a resolução da primeira tarefa desse item, que solicitava determinar as equações paramétricas, o pesquisador tomou como referência a equação vetorial da reta obtida a partir das informações do enunciado e com a utilização do *software*. Na sequência, organizou-as de modo a obter as equações paramétricas que também representassem essa reta. Durante esse momento, pode-se notar que ocorreu a transformação de um registro de representação algébrico para outro, identificando o uso de uma atividade de tratamento por parte do apresentador.

A segunda tarefa não foi resolvida, visto que, nenhum acadêmico demonstrou dificuldade para a sua resolução.

Deu-se prosseguimento para a terceira tarefa do item 2, na qual os participantes apresentaram dificuldades na interação anterior. Para a resolução, o pesquisador apresentou a sua tela como mostra a figura a seguir (Figura 16):

Figura 16 - Resolução parcial da terceira tarefa do item 2



Fonte: Autor (2022).

Nessa tarefa, o pesquisador apenas mostrou como poderiam fazer a substituição do valor atribuído a y para encontrar o parâmetro e, assim, determinar as coordenadas x e z do ponto de ordenada igual a 5.

Como na última tarefa bastava realizar a representação dessa reta no GeoGebra, os participantes poderiam seguir os procedimentos utilizados pelo pesquisador no início da explicação do segundo item da atividade sobre retas.

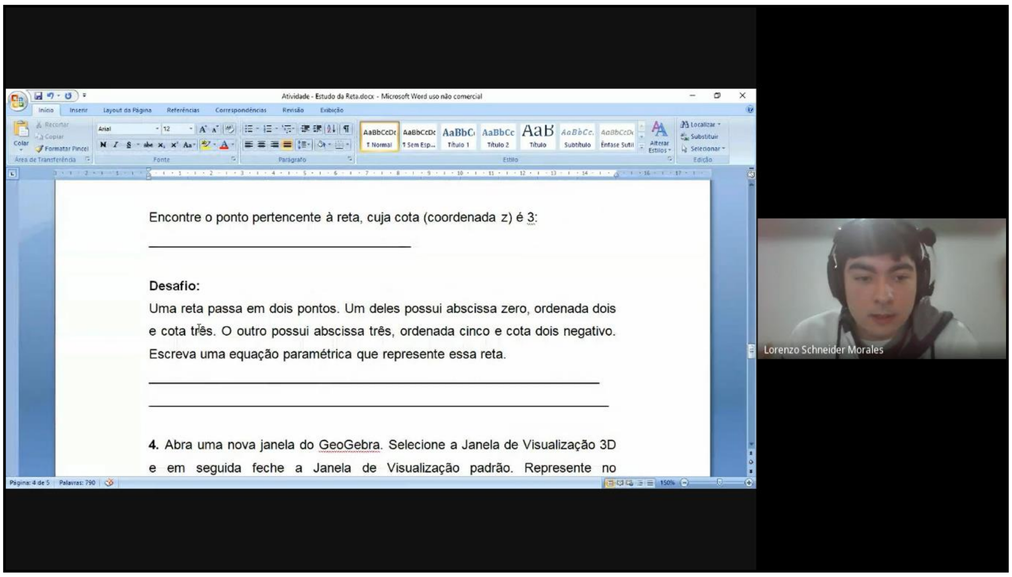
Assim, o pesquisador deu sequência para o terceiro item da atividade, no qual foram apresentadas algumas sugestões para a resolução. A partir da equação vetorial disponibilizada, o pesquisador sugeriu aos participantes da pesquisa determinar as equações paramétricas, conforme foi solicitado nessa atividade. E, para a última tarefa do item 3, os acadêmicos deveriam determinar o ponto cuja cota era igual a 3. Durante essa tarefa, o pesquisador perguntou se os participantes conseguiram encontrar o vetor. O acadêmico Ólafur colocou no *chat* da sala virtual as componentes do vetor, sendo esse definido por v = (6, 1, 7). Os acadêmicos Olivia e João Matheus também encontraram os mesmos vetores.

Em relação à equação vetorial encontrada, houve respostas distintas. Enquanto Olivia, João Matheus e Aluna QL encontraram as mesmas equações, Ólafur colocou no *chat* a equação $X = (4,3,4) + \lambda(-6,-1,-7)$. Nesse momento o pesquisador afirmou que embora Ólafur tenha encontrado uma equação diferente da sugerida na atividade, essa também representava a reta estudada. A coordenadora comentou sobre esse fato, afirmando que o acadêmico utilizou um múltiplo do vetor (6, 1, 7) e poderia utilizar outros múltiplos desse vetor, que também serviriam para essa reta.

Por consequência do ensino remoto, verificou-se que os participantes poderiam estar envolvidos em outras atividades durante a interação. No momento do compartilhamento das resoluções dos acadêmicos, a Aluna QL afirmou que, naquele momento, estava fazendo uma avaliação: “estou fazendo uma prova de probabilidade e estatística agora, já continuo aqui”.

No segundo desafio da atividade sobre retas, eram fornecidas informações de dois pontos pertencentes a uma mesma reta em um registro em língua natural como mostra a figura a seguir (Figura 17):

Figura 17 - Projeção do segundo desafio proposto



Fonte: Autor (2022).

Para orientar os acadêmicos sobre a forma como as respostas poderiam aparecer no *chat* ele indicou que poderiam escrever: {x = x_1 + t*a; y = y_1 + t*b; z = z_1 + t*c. Enquanto projetava esse desafio no *Google Meet*, o pesquisador acompanhava a resolução dos participantes nos itens anteriores, à medida que compartilhavam suas respostas e dúvidas no *chat*. O acadêmico João Matheus colocou as coordenadas do ponto da última tarefa do item 3 da seguinte forma: “em z=3, o ponto é (22/7,20/7,3)?”. Ao analisar a resposta, o pesquisador confirmou ao acadêmico que havia encontrado o ponto corretamente.

Após alguns instantes, os acadêmicos Olivia e Ólafur enviaram as equações paramétricas encontradas referentes à reta do item 3. Ólafur colocou a sua resposta no *chat* da seguinte forma: “{x = 4 - 6t; y = 3 - t; z = 4 - 7t }” . Olívia encontrou as seguintes equações paramétricas: “{x = -2+t*6; y = 2+t; z = -3+t*7}”. Ao perceber que as respostas de ambos estavam diferentes, porém corretas, o pesquisador apontou para esse fato, comentando que ambos utilizaram pontos distintos e vetores distintos, visto que o vetor utilizado por Ólafur era o oposto do utilizado por Olivia.

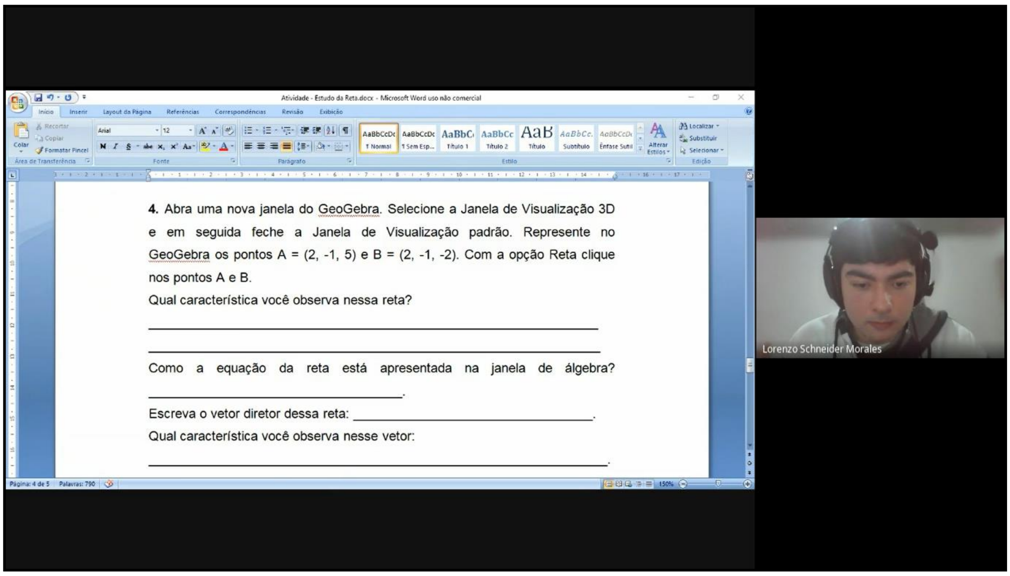
Retomando ao segundo desafio proposto, a acadêmica Olivia colocou no *chat* as equações paramétricas que desenvolveu. Ao analisar, o pesquisador encontrou um erro na resposta apresentada pela acadêmica e solicitou que ela revisasse a resposta. Quando o pesquisador foi informar à participante sobre o erro, imediatamente Olivia comentou por meio do microfone: “Eu vi aqui o que eu errei agora, eu olhei os números. Coloquei na ordem errada.”.

Na resposta seguinte, Olivia persistiu encontrando dificuldade para resolver esse segundo desafio, pois novamente ela enviou uma resposta com um erro como mostrado a seguir: “Lorenzo está correto agora? {x = 3*t; y = 2 + 5*t; z = 3 – 2*t}”. O pesquisador indicou que a acadêmica poderia ter cometido um equívoco na componente do vetor da equação da coordenada y e na equação da coordenada z.

Após a fala do pesquisador, a acadêmica escreveu no *chat*: “Lorenzo, poderia fazer o desafio da 3 por favor”. Assim, o segundo desafio foi projetado na tela do GeoGebra pelo pesquisador e este mostrou uma forma que facilitaria a resolução da atividade pela acadêmica, visualizando uma equação vetorial da reta obtida no *software* e comentando que ela poderia determinar as equações paramétricas a partir dessa equação vetorial. Após esse momento, a Olivia escreveu no *chat*: “ok, obrigada”.

Durante e depois da explicação realizada para a acadêmica Olivia, o pesquisador passou a orientar os participantes que estavam no item 4 da atividade sobre retas. Esse item solicitava que os acadêmicos fizessem a construção de uma reta no GeoGebra, a partir de dois pontos dados, e descrevessem as características da reta e do vetor diretor como mostra a figura a seguir (Figura 18):

Figura 18 - Projeção do item 4 da atividade sobre retas

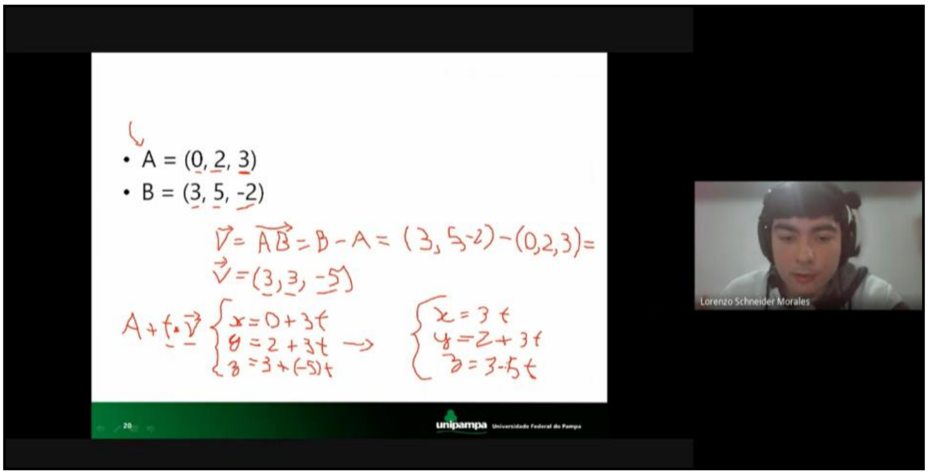


Fonte: Autor (2022).

O autor explicou cada uma das tarefas referentes ao item 4, inclusive apresentando rapidamente os procedimentos no GeoGebra, para facilitar a realização desse item.

Como sugestão da coordenadora do projeto, foi realizada a correção do terceiro item da atividade sobre retas, mostrando como encontrar a equação paramétrica sem a utilização do *software*, colaborando para a resolução do item 4, como está apresentado na figura a seguir (Figura 19):

Figura 19 - Projeção da correção do terceiro item



Fonte: Autor (2022).

Após a correção do terceiro item, o acadêmico Borracha afirmou no *chat*: “Entendi mais ou menos a parte do vetor diretor, não entendi como vou fazer ele no geogebra”. Respondendo ao participante, o pesquisador recordou como determinar o vetor diretor de forma algébrica e sugeriu utilizar o comando v = B – A, para determinar o vetor no GeoGebra. Em seguida, Borracha escreveu: “entendi, obrigado”

O item 4 solicitava também que os acadêmicos determinassem cinco pontos na reta, utilizando a ferramenta Ponto em Objeto do GeoGebra e, em seguida, escrevessem esses pontos e as equações paramétricas dessa reta. Com isso, a acadêmica Olivia escreveu no *chat*: “Ali na 4 que pede a equação paramétrica, seria com os pontos que encontrei ou aquele mesmo do início?”. O pesquisador respondeu que, por se tratar das equações paramétricas da reta, poderiam utilizar qualquer ponto pertencente à reta para determinar tais equações.

Com os participantes se encaminhando para o final da atividade sobre retas, o pesquisador enviou no *chat* o *link* do formulário com a atividade final. Alguns acadêmicos tiveram dúvidas quanto ao item 4 e ao último desafio proposto, mas foram respondidas rapidamente por parte do pesquisador e da coordenadora.

Durante a realização da segunda interação síncrona, foi possível perceber que os acadêmicos estavam mais participativos em comparação ao encontro anterior. Alguns deles manifestaram no *chat* as suas percepções para as interações. O acadêmico João Matheus comentou: “Foram muito proveitosas, aprendi bastante". Ólafur também escreveu ao se despedir: “Tchau pessoal, tô aprendendo muito, muito agradecido”. Isso pode indicar que pelo menos para esses acadêmicos a participação nesses encontros síncronos foi proveitosa.

5 ANÁLISE DAS RESOLUÇÕES DAS ATIVIDADES

Após a realização das duas interações, os participantes enviaram o desenvolvimento da atividade sobre retas para a plataforma *Google Classroom* utilizada no projeto de ensino. E, durante essas interações, enviaram as respostas solicitadas na atividade preliminar e na atividade final nos formulários elaborados no *Google Forms*. A seguir, serão apresentadas as análises dessas produções dos participantes da pesquisa.

5.1 Atividade preliminar

No início da primeira interação síncrona, os seis acadêmicos que aceitaram participar desta pesquisa foram convidados a responder um formulário (Apêndice B), elaborado no *Google Forms*, com o objetivo de verificar o que eles compreendiam sobre retas até aquele momento.

Na **primeira questão** os acadêmicos foram solicitados a escrever com suas palavras o que é uma reta e suas respostas[1] estão no Quadro 1:

Quadro 1 – Respostas dos acadêmicos para a questão 1

"é um vetor orientado no espaço, podendo ser paralela, concorrente..." (Aluna QL) "Uma reta tem 2 pontos, que dão um distância, tem apenas uma direção e não tem curva." (Borracha) "Um traço retilíneo formado a partir de um conjunto de pontos" (Olivia) "é uma equação cujo os pontos podem aumentar a posição deles de forma constante, podendo, diminuir o valor constantemente, ou aumentar o valor constantemente." (Ólafur) "Uma reta seria um conjunto infinitos de pontos" (João Matheus) "É um traço retilínio que segue uma única direção" (Sthé)

Fonte: Autor (2022).

[1] As respostas dos acadêmicos estão conforme constam no formulário, com erros de digitação e/ou de gramática.

A intenção com essa primeira questão foi verificar quais concepções sobre retas os acadêmicos lembravam de seu processo educativo, tendo em vista que reta é uma das noções primitivas da Geometria e, portanto, é aceita sem definição (DOLCE; POMPEO, 1993).

A Aluna QL, ao responder que reta é um vetor orientado no espaço, talvez já estivesse relacionando esse objeto matemático com a forma como aparece nos livros didáticos de Geometria Analítica, ou seja, uma reta pode ser definida por um ponto e um vetor diretor. O mesmo aparentemente acontece com o acadêmico Borracha, ao afirmar que uma reta possui dois pontos e tem apenas uma direção, pois reta definida por dois pontos é outra abordagem trazida em livros de Geometria Analítica, como o de Winterle (2000).

As respostas dos acadêmicos Olivia, João Matheus e Sthé se aproximam de tentativas de esclarecer o que é uma reta baseadas em expressões geralmente utilizadas quando se fala sobre esse ente primitivo: conjunto infinito de pontos, uma única direção, traço retilíneo.

O acadêmico Ólafur, que ainda não havia cursado Geometria Analítica, apresentou uma resposta que parece estar relacionada ao estudo da função afim, pois afirma que reta é uma equação cujos pontos podem aumentar e diminuir de forma constante.

A **segunda questão** do formulário perguntava se os acadêmicos saberiam dizer as formas de representação de uma reta. Os acadêmicos Aluna QL, Borracha, Olivia e Ólafur responderam apenas sim. Os acadêmicos Sthé e João Matheus responderam: “Através de pontos, por exemplos com dois pontos traçamos uma reta” (Sthé); “pontos em um plano cartesiano, fazendo a ligação entre os pontos será uma reta; uma função de primeiro grau é representado por retas” (João Matheus).

Percebe-se que a acadêmica Sthé descreveu um registro geométrico geralmente utilizado: desenha-se dois pontos e, com o auxílio de uma régua, traça-se uma reta. Já o acadêmico João Matheus se referiu a um registro gráfico relacionado à função de primeiro grau no plano cartesiano.

A **terceira questão**, sendo uma continuidade da questão anterior, solicitava que, em caso afirmativo, eles comunicassem as formas de representar retas por eles conhecidas. As respostas estão apresentadas no Quadro 2:

Quadro 2 – Respostas dos acadêmicos para a questão 3

“nos eixos do plano cartesiano, x, y, z“ (Aluna QL)
“Com pontos ou com setas” (Borracha)
“Reta horizontal, vertical, inclinada podendo ser elas, paralelas, concorrentes ou coincidentes” (Olivia)
“Linha, equação?” (Ólafur)
“vetores, função de primeiro grau” (João Matheus)
“Pode ser uma reta paralela, concorrente, coincidentes, perpendiculares e ortogonais dependendo como estão as retas” (Sthé)

Fonte: Autor (2022).

A intenção das questões 2 e 3 foi verificar a que tipos de registros os acadêmicos recorreriam para escrever como representar uma reta, por exemplo, com a descrição de registros gráficos, algébricos e/ou geométricos, já que essa questão admitia apenas respostas textuais.

As acadêmicas Olivia e Sthé deram respostas semelhantes, descrevendo posições relativas entre retas, e a primeira citando algumas direções de retas. As descrições de ambas parecem estar relacionadas a registros geométricos.

Quando a acadêmica Aluna QL responde: “nos eixos do plano cartesiano, x, y, z“, essa resposta leva a entender que ela se reporta para o registro gráfico de retas no espaço.

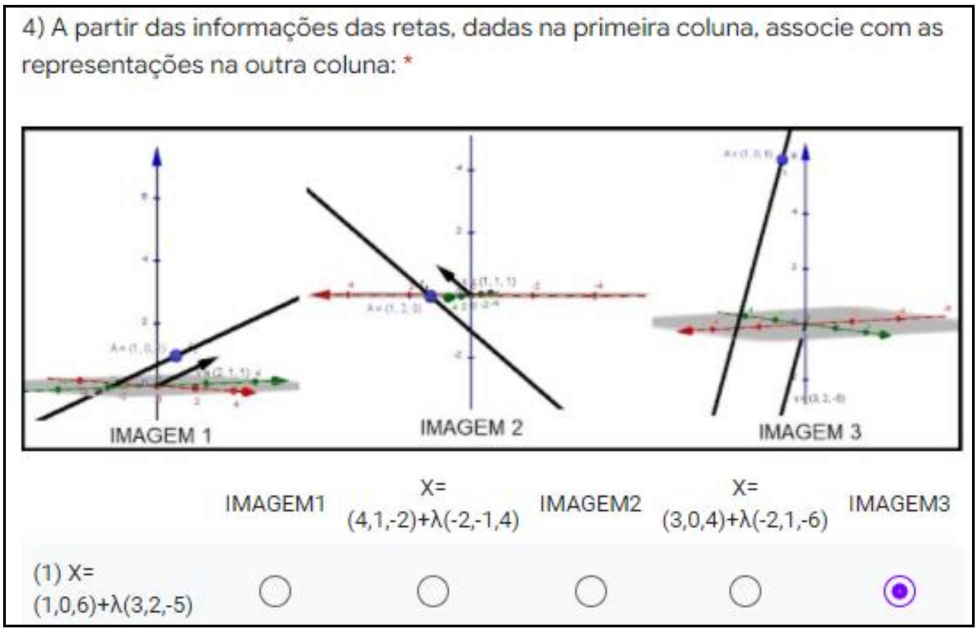
Por outro lado, Borracha afirma que retas podem ser representadas: “Com pontos ou com setas”. Essa resposta do acadêmico pode tanto estar relacionada a registros gráficos quanto a registros geométricos, visto que pontos e setas podem se referir a ambos.

Ao responder essa questão, o acadêmico Ólafur escreve da seguinte forma: “Linha, equação?”. Essa resposta apresenta duas palavras que podem estar relacionadas a diferentes representações da reta. A primeira palavra pode-se referir tanto a um registro gráfico quanto a um registro geométrico. Já a segunda palavra se refere a um registro algébrico. Ao concluir a sua resposta, Ólafur ainda inclui um ponto de interrogação que pode estar relacionado a uma expressão de dúvida ou pode simplesmente tratar-se de um equívoco na digitação.

Para finalizar a análise dessa questão, João Matheus, ao escrever sobre as formas de representar uma reta, responde do seguinte modo: “vetores, função de primeiro grau”. A palavra “vetores” pode corresponder a dois tipos de registros: gráfico e geométrico. Além disso, demonstra que o acadêmico está utilizando um termo relacionado ao estudo da reta na Geometria Analítica de ensino superior. Já a expressão “função de primeiro grau”, pode se referir tanto ao registro gráfico quanto ao registro algébrico, ambos referentes à reta como representação de uma função de primeiro grau.

O objetivo da **quarta questão** era verificar se os acadêmicos conseguiriam relacionar dois registros diferentes correspondentes à mesma reta. Alguns itens dessa questão forneciam a equação vetorial da reta, o que poderia ser difícil para o acadêmico Ólafur que ainda não havia cursado Geometria Analítica, nem estava cursando no semestre em que o projeto foi desenvolvido. Para a primeira linha dessa questão, esperava-se a associação representada na figura abaixo (Figura 20):

Figura 20 - Primeira linha da questão 4

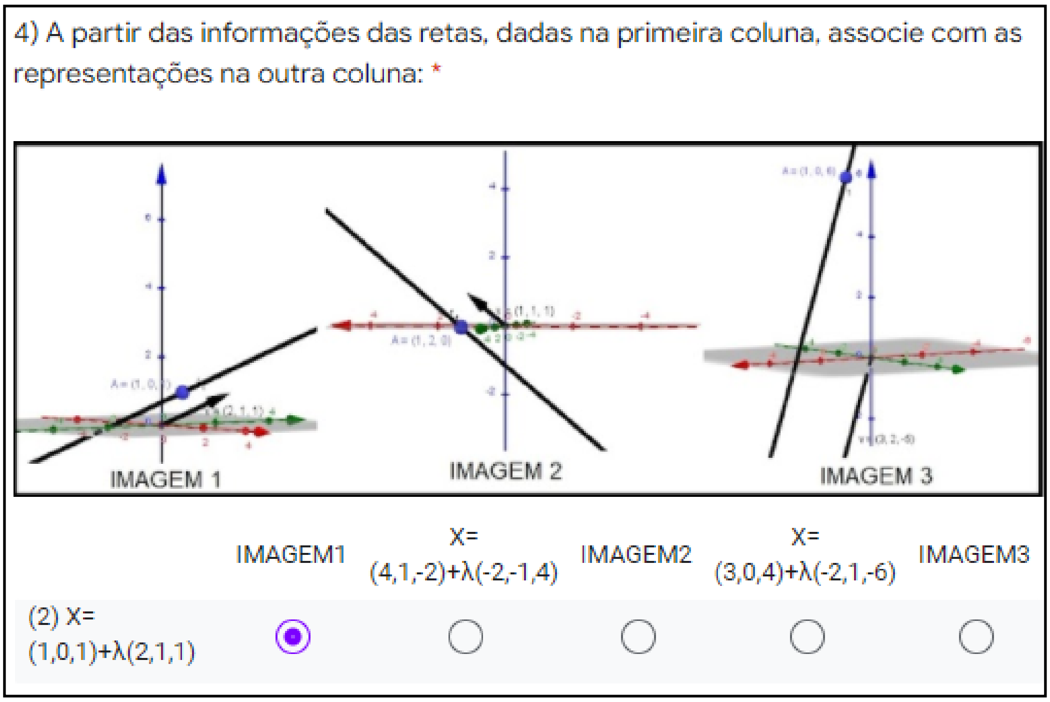


Fonte: Autor (2022).

Nessa primeira linha, a imagem 3 apresentava o registro gráfico da reta de equação vetorial dada por $X = (1, 0, 6) + \lambda(3, 2, -5)$. Os seis acadêmicos conseguiram relacionar o registro algébrico com o registro gráfico dessa reta.

A segunda linha apresentava uma situação similar a da linha anterior, sendo necessário associar as duas representações da reta fornecidas pelo exercício. A equação vetorial dada por $X = (1, 0, 1) + \lambda(2, 1, 1)$ está relacionada ao registro gráfico representado na imagem 1, conforme mostra a figura abaixo (Figura 21):

Figura 21 - Segunda linha da questão 4

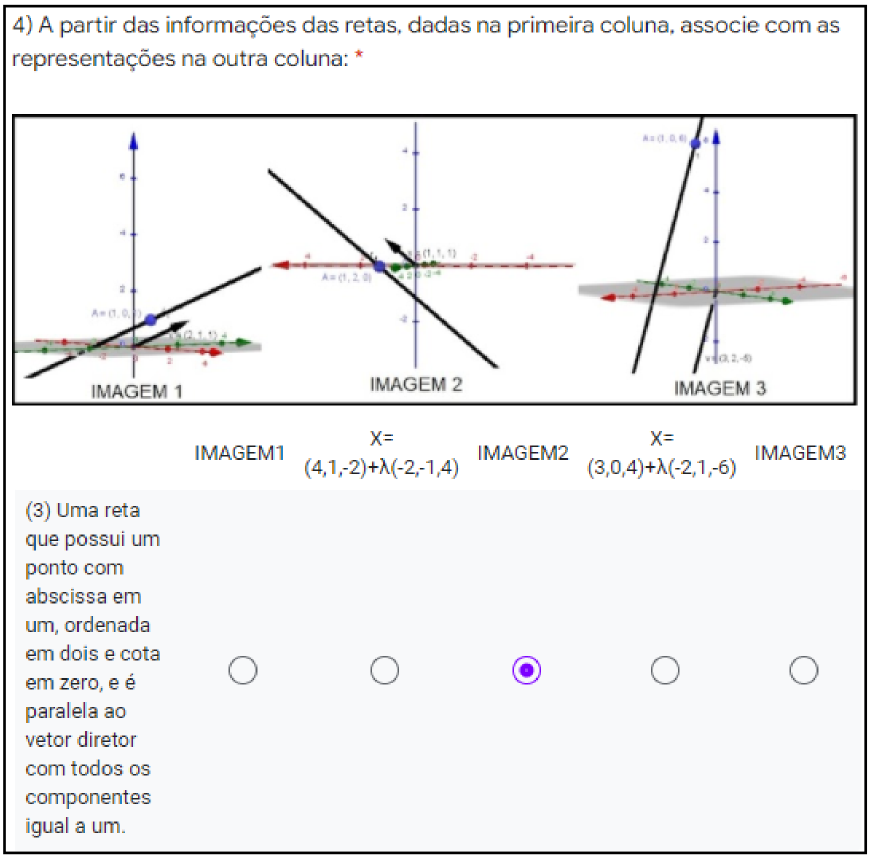


Fonte: Autor (2022).

Nesse item, assim como o anterior, os seis acadêmicos conseguiram fazer a relação corretamente. A atividade, até esse momento, solicitava a relação entre os registros gráfico e algébrico de retas no espaço e poderia ser uma conversão comum para os acadêmicos que estavam realizando o componente Geometria Analítica naquele semestre.

A terceira linha, no entanto, propunha relacionar o registro em língua natural de uma reta no espaço, no qual estavam descritas informações referentes a um ponto e um vetor diretor dessa reta, com o registro gráfico que representasse essa reta. A imagem 2 correspondia as características descritas nesse item como mostra a figura abaixo (Figura 22):

Figura 22 - Terceira linha da questão 4

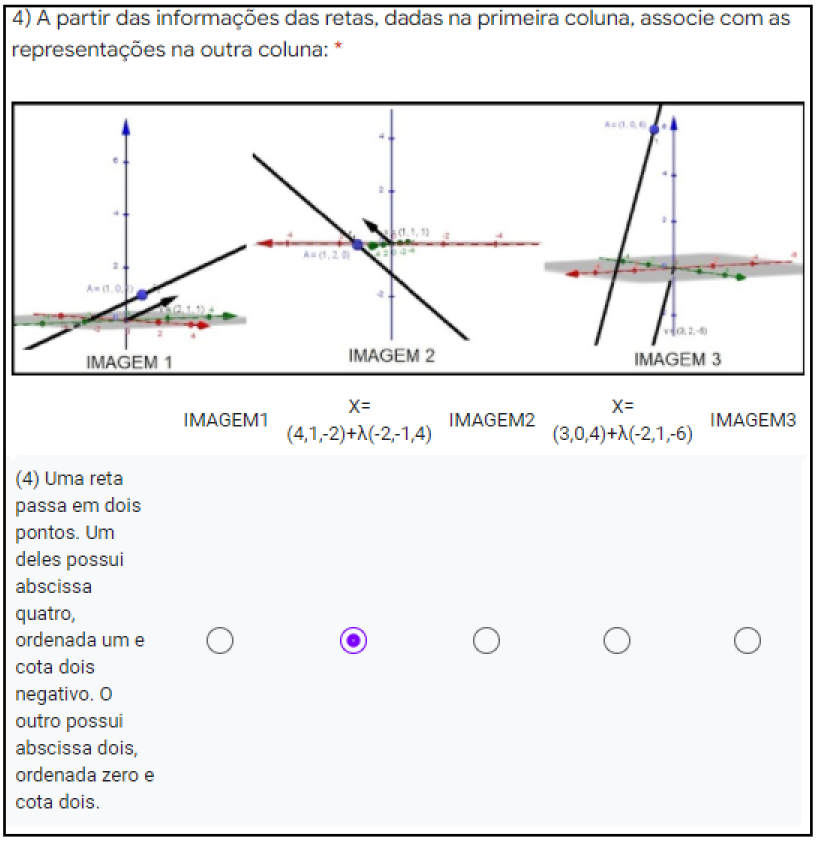


Fonte: Autor (2022).

Para esse item, os acadêmicos Aluna QL, Sthé, Borracha e João Matheus conseguiram relacionar corretamente os dois registros. Os acadêmicos Olivia e Ólafur, por outro lado, relacionaram essa descrição da reta dada na terceira linha com a equação vetorial $X = (4, 1, -2) + \lambda(-2, -1, 4)$.

A quarta linha da questão 4 da atividade preliminar, trazia a descrição de dois pontos pertencentes a uma reta, sendo dadas as coordenadas x, y e z dos pontos no espaço. Para esse item, os acadêmicos deveriam relacionar esse registro em língua natural com a equação vetorial $X = (4, 1, -2) + \lambda(-2, -1, 4)$. Dessa forma, seria possível determinar o vetor diretor a partir dos pontos dados que correspondesse ao que estava no registro algébrico fornecido. A resposta esperada está na figura apresentada a seguir (Figura 23):

Figura 23 - Quarta linha da questão 4

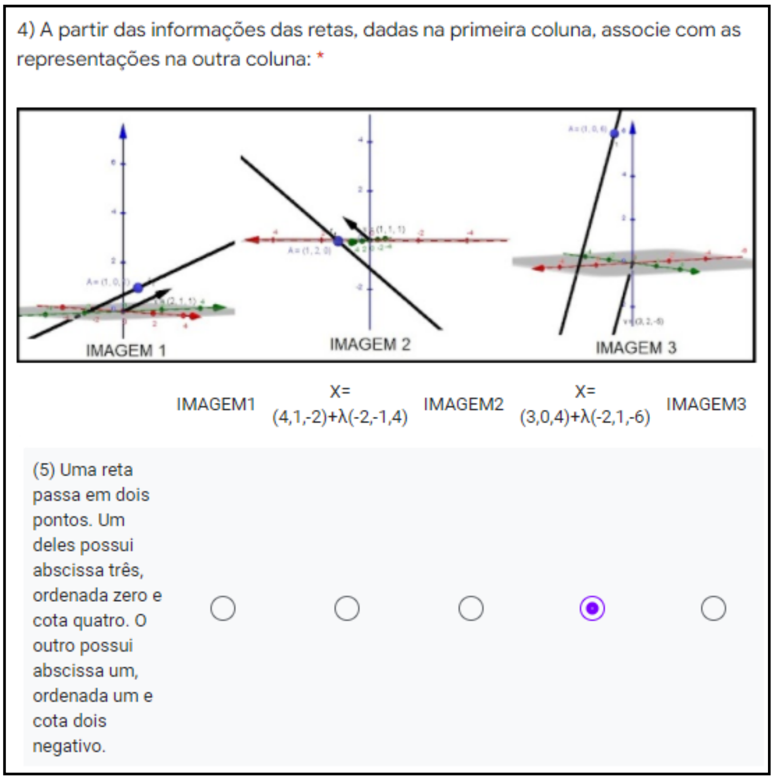


Fonte: Autor (2022).

Os acadêmicos Aluna QL, Sthé, Borracha e João Matheus obtiveram êxito nesse item. Já Olivia e Ólafur selecionaram para esse item a resposta referente à linha anterior.

O último item era semelhante ao anterior. Fornecia as informações das coordenadas de dois pontos pertencentes a uma reta, que deveriam ser associadas à equação vetorial dessa reta dada por $X = (3, 0, 4) + \lambda(-2, 1, -6)$. Os acadêmicos poderiam determinar o vetor diretor com os pontos que foram disponibilizados e verificar, entre os registros apresentados, o correspondente às informações disponibilizadas. Nesse caso, a resposta deveria ficar como apresenta a imagem (Figura 24) que segue:

Figura 24 - Quinta linha da questão 4



Fonte: Autor (2022).

Todos os acadêmicos realizaram corretamente a associação proposta nessa quinta linha.

A partir da atividade preliminar respondida pelos acadêmicos, pôde-se observar que na primeira questão eles, de certa forma, conseguiram escrever suas concepções sobre retas, sendo três mais próximas da noção intuitiva da Geometria Plana, duas trazendo, talvez, elementos da Geometria Analítica e uma possivelmente fazendo referência à representação de uma função de primeiro grau.

Os acadêmicos, a sua maneira, descreveram nas questões dois e três, formas de representar uma reta, que estão relacionadas a registros gráficos, geométricos e algébricos, da Geometria Plana, da Geometria Analítica de nível superior e das funções de primeiro grau.

Na última questão, quatro acadêmicos selecionaram corretamente todos os itens, o que pode sugerir que eles conseguiram fazer conversões entre representações em língua natural, com representações algébricas ou gráficas e representações algébricas com representações gráficas, referentes àquelas retas no espaço. Por outro lado, eles poderiam também ter solucionado essa questão observando que os pontos e vetores utilizados nas equações e nos representações em língua natural, estavam nas representações gráficas e algébricas. De qualquer maneira, essa observação seria positiva para as atividades que viriam a seguir, pois reforça a importância da coordenação entre os diferentes registros.

5.2 Atividades sobre retas no espaço

Essas atividades (Apêndice C) se referem aos itens que foram trabalhados durante a realização das interações síncronas. Nesses momentos, além da exposição dos assuntos de estudo como, equação vetorial da reta, equação paramétrica da reta, reta definida por dois pontos e retas paralelas aos eixos, ocorreu a resolução dessas atividades por parte dos acadêmicos que contaram com o auxílio do pesquisador e da professora coordenadora do projeto.

Para essa etapa, os participantes deveriam desenvolver as atividades, utilizando o *software* matemático GeoGebra, bem como explorar a diversidade de registros que representam o objeto matemático reta, observando as suas características em cada registro. Após a segunda interação síncrona, os participantes postaram as atividades realizadas na plataforma *Google Classroom*.

Não serão mostradas todas as produções dos acadêmicos para cada item realizado, mas procurar-se-á apresentar pelo menos um item respondido de cada participante e, em seguida, comentar como os demais resolveram o item em questão.

O **item 1** da atividade pode ser visto na figura a seguir (Figura 25), respondido pelo acadêmico Borracha.

Figura 25 - Item 1: produção do acadêmico Borracha

Representando uma Reta no Espaço através da Equação Vetorial

1. Selecione a Janela de Visualização 3D e em seguida feche a Janela de Visualização padrão, pois trabalharemos no espaço. Digite na caixa de entrada o ponto $A = (1,2,0)$, e pressione *Enter*. Em seguida, digite também no campo de entrada o vetor diretor $\vec{v} = (1,-1,2)$. Agora, no campo de entrada insira o comando r: A + t*v, e pressione *Enter*.

Escreva, com detalhes, como a reta aparece geometricamente:

A reta passa pelo ponto $A = (1,2,0)$, e fica paralela ao vetor $\vec{v} = (1,-1,2)$.

Escreva a equação vetorial da reta que aparece na janela de álgebra:

X= (1,2,0) + λ(1,-1,2)

Observação: O GeoGebra utiliza a letra grega lambda (λ) para representar o parâmetro da equação vetorial.

Determine pelo menos dois pontos pertencentes à reta que sejam diferentes do ponto A: B= (2,1,2) e C= (3,0,4)

Como você determinou esses pontos? Usei o Geogebra ao meu favor, procurando os pontos com a (ferramenta ponto), na reta formada.

Fonte: Autor (2022).

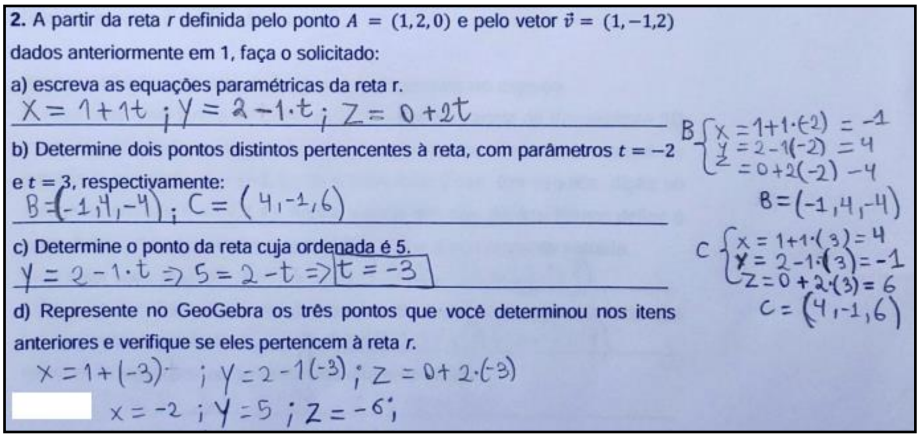
Para a primeira tarefa desse item, o acadêmico Borracha escreveu que a reta passa pelo ponto A e é paralela ao vetor v, tendo uma aproximação com a resposta da acadêmica Olivia: “A reta aparece determinada no ponto A e atravessa o plano sendo paralela ao vetor v”. Os demais apenas destacaram o paralelismo da reta com o seu vetor diretor, como pode ser observado na resposta da Aluna QL: “a reta é paralela ao vetor v (1, -1, 2)”. Considerou-se, assim, que os acadêmicos deram respostas condizentes com a representação dada no *software*.

Com relação à equação vetorial exibida na janela de álgebra, todos os acadêmicos a escreveram corretamente. Isso mostra que eles representaram corretamente a reta no GeoGebra a partir dos procedimentos fornecidos no enunciado.

Na segunda tarefa do item 1, assim como o acadêmico Borracha, João Matheus, Olivia e Sthé utilizaram o GeoGebra para determinar pontos pertencentes à reta. Por outro lado, os acadêmicos Aluna QL e Ólafur, atribuíram dois valores diferentes ao parâmetro da equação vetorial para obter dois pontos distintos, priorizando uma forma algébrica de resolução.

O **item 2** da atividade propunha aos acadêmicos utilizarem as informações do item anterior, para escrever as equações paramétricas da reta e determinarem pontos distintos a partir dos parâmetros dados como mostra a produção do acadêmico Ólafur (Figura 26):

Figura 26 - Item 2: produção do acadêmico Ólafur



2. A partir da reta r definida pelo ponto $A = (1,2,0)$ e pelo vetor $\vec{v} = (1,-1,2)$ dados anteriormente em 1, faça o solicitado:

a) escreva as equações paramétricas da reta r.

$x = 1 + 1t$; $y = 2 - 1 \cdot t$; $z = 0 + 2t$

b) Determine dois pontos distintos pertencentes à reta, com parâmetros $t = -2$ e $t = 3$, respectivamente:

$B = (-1, 4, -4)$; $C = (4, -1, 6)$

$B \begin{cases} x = 1 + 1 \cdot (-2) = -1 \\ y = 2 - 1(-2) = 4 \\ z = 0 + 2(-2) = -4 \end{cases}$

$B = (-1, 4, -4)$

$C \begin{cases} x = 1 + 1 \cdot (3) = 4 \\ y = 2 - 1 \cdot (3) = -1 \\ z = 0 + 2 \cdot (3) = 6 \end{cases}$

$C = (4, -1, 6)$

c) Determine o ponto da reta cuja ordenada é 5.

$y = 2 - 1 \cdot t \Rightarrow 5 = 2 - t \Rightarrow \boxed{t = -3}$

d) Represente no GeoGebra os três pontos que você determinou nos itens anteriores e verifique se eles pertencem à reta r.

$x = 1 + (-3)$; $y = 2 - 1(-3)$; $z = 0 + 2 \cdot (-3)$

$x = -2$; $y = 5$; $z = -6$;

Fonte: Autor (2022).

Como pode ser observado na Figura 26, o acadêmico Ólafur respondeu todas as tarefas desse item corretamente, inclusive apresentando os cálculos realizados na resolução das tarefas b e c. Não se tem como verificar se ele realizou a tarefa d, pois faltou solicitar a importação da imagem do GeoGebra. Com exceção da acadêmica Aluna QL que respondeu a tarefa c com o ponto (4, -1, 6) da tarefa b, os demais apresentaram todas as respostas corretamente. Destacamos ainda que os acadêmicos Borracha e Sthé foram os únicos que na tarefa d inseriram a imagem do GeoGebra com a representação da reta e dos pontos, incluindo o vetor diretor.

No **primeiro desafio** proposto para os acadêmicos, solicitava-se que fossem escritos um ponto e um vetor qualquer do espaço. Em seguida eles deveriam determinar a equação vetorial e as equações paramétricas da reta com essas informações e, ao final, mostrar a imagem da representação gráfica dessa reta no *software* GeoGebra, como mostra a produção da acadêmica Sthé a seguir (Figura 27):

Figura 27 - Primeiro desafio: produção da acadêmica Sthé

Desafio:

Escreva um ponto qualquer e um vetor qualquer do espaço:

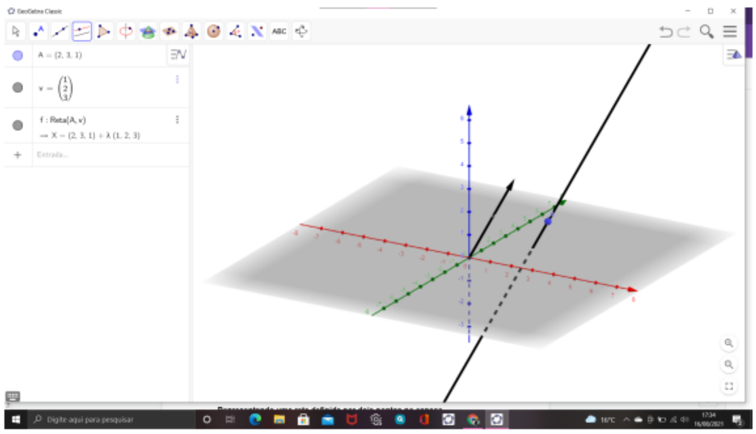
A= (2,3,1) e v= (1,2,3)

Determine uma equação vetorial e equações paramétricas da reta que passa por esse ponto e tem a direção desse vetor:

Eq. Vetorial: X= (2,3,1) +t(1,2,3)

Eq. Paramétricas: x= 2+t; y=3+2t; z= 3t

Em seguida, represente o ponto, o vetor e a reta através do software GeoGebra e inclua a imagem da representação gráfica dessa reta:



Fonte: Autor (2022).

Com exceção do acadêmico Ólafur que não incluiu a imagem solicitada, todos os demais realizaram esse desafio corretamente. Destaca-se que a proposta desse desafio era favorecer as atividades cognitivas de tratamento e de conversão de representações conforme Duval (2009).

Quando os acadêmicos foram solicitados a escrever a equação vetorial da reta e as equações paramétricas, eles poderiam fazer uso da atividade de tratamento, ou seja, transformar a equação vetorial em equações paramétricas, dentro do mesmo registro de representação: o algébrico.

Já quando foram solicitados a construir a reta no GeoGebra, os acadêmicos tiveram que realizar a atividade de conversão de uma representação algébrica para uma representação gráfica.

O **item 3** da atividade apresentava dois pontos distintos. Os acadêmicos deveriam escrever o vetor determinado por esses pontos, criar no GeoGebra a reta passando por A e B e apresentar a forma como a equação constava na janela de álgebra do *software*. Ainda nesse item, solicitou-se aos acadêmicos escreverem as equações paramétricas dessa reta e encontrar o ponto cuja coordenada z fosse igual a 3, conforme mostra a produção da acadêmica Olivia (Figura 28):

Figura 28 - Item 3: produção da acadêmica Olivia

Representando uma reta definida por dois pontos no espaço

3. Abra uma nova janela do GeoGebra. Selecione a Janela de Visualização 3D e em seguida feche a Janela de Visualização padrão. Escreva no campo de entrada o comando, $A = (-2, 2, -3)$ e pressione *Enter*. Em seguida, digite no campo de entrada $B = (4, 3, 4)$. Agora, a partir dos dois pontos, iremos definir o vetor diretor. Para isso insira o comando $v = B - A$ no campo de entrada.

Qual vetor você obteve? **v = (6, 1, 7)**

Com a opção Reta clique nos pontos A e B. Como a equação da reta está apresentada na janela de álgebra? **X = (-2, 2, -3)+t*(6, 1, 7)**

Escreva as equações paramétricas da reta encontrada:

x = -2 + 6*t

y = 2 + t

z = -3 + 7*t

Encontre o ponto pertencente à reta, cuja cota (coordenada z) é 3:

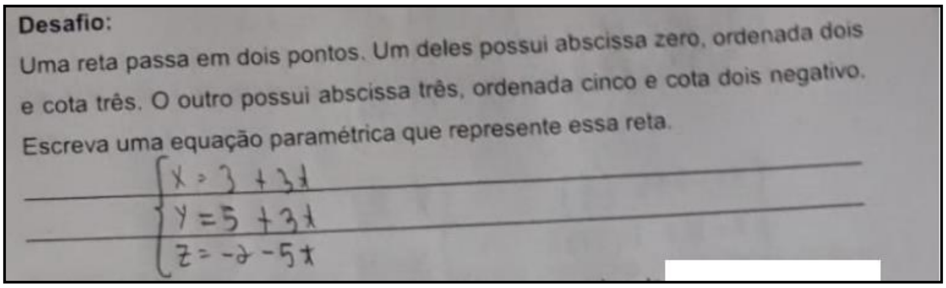
P= (22/7, 20/7, 3)

Fonte: Autor (2022).

Todos os acadêmicos desenvolveram corretamente esse item, sendo que Borracha, Aluna QL, João Matheus e Sthé apresentaram as respostas nos mesmos moldes de Olivia. Porém, Borracha e Aluna QL representaram o ponto de cota 3 na forma decimal. Apenas Ólafur utilizou o ponto B = (4, 3, 4) e o vetor (-6, -1, -7), oposto ao vetor v, para escrever as equações vetorial e paramétricas da reta. Considera-se interessante a opção de Ólafur, pois demonstra uma compreensão de que existem diferentes equações que representam uma mesma reta, basta que se tome qualquer ponto da reta e qualquer vetor paralelo a um vetor diretor dessa reta.

O **segundo desafio** proposto nessa atividade, descrevia as coordenadas de dois pontos pertencentes a uma determinada reta apenas com a representação em língua natural e solicitava que os acadêmicos escrevessem a equação paramétrica que representasse essa reta, como mostra a produção do acadêmico João Matheus (Figura 29):

Figura 29 - Segundo desafio: produção do acadêmico João Matheus



Desafio:

Uma reta passa em dois pontos. Um deles possui abscissa zero, ordenada dois e cota três. O outro possui abscissa três, ordenada cinco e cota dois negativo.

Escreva uma equação paramétrica que represente essa reta.

$$\begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = 5 + 3t \\ z = -2 - 5t \end{cases}$$

Fonte: Autor (2022).

Os acadêmicos Borracha, Sthé, Olivia e a Aluna QL responderam de maneira semelhante à apresentada por João Matheus. As únicas diferenças foram que eles utilizaram o ponto (0, 2, 3) nas equações paramétricas da reta e a acadêmica Sthé apresentou mais detalhes da sua resolução. Já o acadêmico Ólafur apresentou a equação vetorial da reta, utilizando o ponto (0, 2, 3) e o vetor (-3, -3, 5), oposto ao vetor utilizado pelos demais acadêmicos.

A proposta desse segundo desafio era a realização da conversão da representação em língua natural das informações dos pontos dessa reta para a representação algébrica da reta, pelas suas equações paramétricas. As respostas dadas pelos acadêmicos demonstram que eles obtiveram sucesso nessa conversão, embora o acadêmico Ólafur tenha utilizado a equação vetorial ao invés das equações paramétricas solicitadas.

O propósito do **item 4** era reconhecer que os vetores diretores de retas paralelas aos eixos coordenados possuem duas componentes nulas e que quaisquer pontos pertencentes a essas retas possuem duas coordenadas que se mantém constantes. Apenas a coordenada correspondente ao eixo paralelo à reta varia. A descrição dessa atividade pode ser vista na produção da acadêmica Aluna QL (Figura 30):

Figura 30 - Item 4: produção da acadêmica Aluna QL

4. Abra uma nova janela do GeoGebra. Selecione a Janela de Visualização 3D e em seguida feche a Janela de Visualização padrão. Represente no GeoGebra os pontos A = (2, -1, 5) e B = (2, -1, -2). Com a opção Reta clique nos pontos A e B.

Qual característica você observa nessa reta?

Ela é paralela ao eixo z e possui x e y = 0 no vetor diretor______________________

Como a equação da reta está apresentada na janela de álgebra?

x=(2,-1,-2) + λ (0,0,7).

Escreva o vetor diretor dessa reta: (0,0,7)__________________.

Qual característica você observa nesse vetor:

coordenadas x e y são nulas.____________________

Com a opção Ponto em Objeto insira cinco pontos sobre essa reta.

Que pontos você inseriu:

(2, -1, 3), (2, -1, 1.23), (2, -1, 6.55), (2, -1, -.072), (2, -1, -3.28)

Quais características comuns têm esses pontos?

somente a variável z varia.

Como você escreveria equações paramétricas dessa reta?

x= 2

y= -1

Fonte: Autor (2022).

Com relação à característica observada na reta, Ólafur respondeu de maneira semelhante à Aluna QL, porém ao invés de utilizar a palavra “paralela” utilizou as palavras “mesmo sentido”, ou seja, confundiu sentido com direção: “x e y do vetor é 0; a reta está no mesmo sentido do eixo z” (Ólafur). Os acadêmicos João Matheus e Borracha escreveram apenas que a reta é paralela ao eixo z. A acadêmica Sthé escreveu que “É uma reta perpendicular”, mas não complementou a sua informação. Realmente a reta é perpendicular ao plano xOy, mas não é possível saber se a acadêmica se referiu a esse fato. A acadêmica Olivia respondeu que a reta é paralela ao eixo y e não se sabe como ela chegou a essa conclusão.

Todos escreveram corretamente a equação da reta apresentada na janela de álgebra, com algumas variações no ponto e no vetor diretor.

O vetor diretor da reta também foi descrito corretamente por todos os acadêmicos, sendo que apenas a Aluna QL escreveu o vetor (0, 0, 7). Os demais escreveram o vetor oposto (0, 0, -7).

Quando solicitados a escrever sobre as características observadas no vetor diretor da reta, a Aluna QL escreveu que as “coordenadas x e y são nulas”. O acadêmico João Matheus respondeu da seguinte forma: “Qualquer valor não nulo em z”. A acadêmica Sthé, parece ter a mesma compreensão da Aluna QL e do João Matheus, mas não encontrou os termos adequados para a sua escrita: “Os vetores x e y são formados por números iguais que resulta zero no vetor enquanto o ponto z são números diferentes”. Percebe-se que eles focaram nas características da representação algébrica do vetor.

O acadêmico Borracha escreveu “O vetor é paralelo à reta x=(2,-1,5)+λ (0,0,-7).”, parecendo ter focado sua percepção na representação gráfica do vetor diretor e não na seu representação algébrica. Já o acadêmico Ólafur parece ter focado nessas duas representações, pois escreveu “Vetor têm a abscissa e ordenada são igual a zero, o vetor é o próprio eixo z.”. Ao afirmar que o vetor é próprio eixo z, considera-se a possibilidade de Ólafur ter observado a representação gráfica desse vetor no GeoGebra, pois ele aparece sobre a parte negativa do eixo z, parecendo o próprio eixo.

A acadêmica Olivia respondeu “O vetor v é semelhante ao ponto B” e, dessa forma, não é possível constatar quais foram as motivações para tal conclusão.

Quando solicitados a inserir cinco pontos sobre a reta utilizando a opção “Ponto em Objeto” do GeoGebra, todos os acadêmicos realizaram essa tarefa corretamente, embora tenham encontrado pontos diferentes, conforme o esperado.

Com relação às características comuns desses pontos, percebeu-se que todos os participantes observaram que os valores das coordenadas x e y se mantiveram constantes, variando apenas a coordenada z.

Para a última tarefa do item 4, todos os acadêmicos a realizaram corretamente, utilizando as três variáveis na escrita das equações paramétricas. Apenas a Aluna QL utilizou somente as variáveis x e y, antecipando o propósito do próximo desafio.

O objetivo do **terceiro desafio** era reconhecer que as equações paramétricas de uma reta paralela a um eixo coordenado podem ser escritas com apenas duas equações, excluindo aquela da mesma variável do eixo ao qual a reta é paralela. Porém, antes da proposição do desafio, foi incluído um breve texto procurando esclarecer essas afirmações, como pode ser visto na produção do acadêmico Borracha (Figura 31):

Figura 31 - Terceiro desafio: produção do acadêmico Borracha

Uma reta paralela ao eixo z possui como vetor diretor qualquer múltiplo do vetor k = (0, 0, 1) e os pontos dessa reta terão as coordenadas x e y fixas, com o z variando em todos os reais. Portanto, as equações paramétricas de uma reta paralela ao eixo z que passa pelo ponto $A = (x_1, y_1, z_1)$ são dadas por:

$$\begin{cases} x = x_1 \\ y = y_1 \end{cases}$$

Na atividade 4 as equações paramétricas da reta poderiam ser representadas por:

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$$

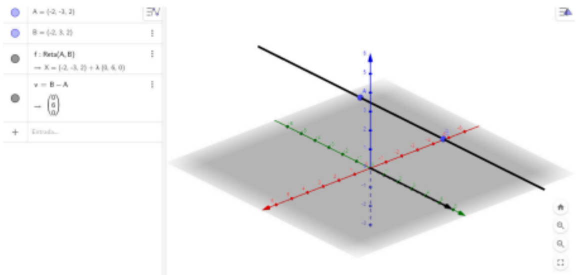
Desafio: Seguindo o mesmo padrão, escreva equações paramétricas de uma reta paralela ao eixo y:

(x=-2 , y= -3 + 6t , z=2)

Qual o vetor diretor dessa reta?

v= (0,6,0)

Represente essa reta no GeoGebra e cole sua construção aqui:



Fonte: Autor (2022).

Na análise desse terceiro desafio verifica-se que os acadêmicos Borracha, João Matheus, Aluna QL e Sthé escreveram corretamente as equações paramétricas de uma reta paralela ao eixo y. No entanto, apenas a Aluna QL seguiu o padrão recomendado, omitindo a equação da variável y. O acadêmico Ólafur escreveu novamente a equação vetorial, mas ao tentar escrever as equações paramétricas apresentou apenas a equação da variável y que poderia ser omitida conforme o padrão recomendado.

Ainda nessa parte do desafio, a acadêmica Olivia apresentou os pontos A = (2, 4, 3) e B = (2, 6, 3), então escreveu a equação vetorial X = (2, 4, 3) + (0, 2, 0), esquecendo-se do parâmetro, e escreveu as equações paramétricas x = 2; y = 4 + 2*t; z = 6. Essas equações paramétricas não estão de acordo tanto com o padrão recomendado quanto com os pontos definidos pela acadêmica.

Uma representação algébrica esperada para uma reta que passasse por esses pontos seria $\begin{cases} x = 2 \\ z = 3 \end{cases}$.

Quando solicitados a escrever o vetor diretor da reta definida por eles, verificou-se que todos os acadêmicos escreveram um vetor diretor que correspondia a uma reta paralela ao eixo y.

Com relação a representação da reta no GeoGebra, apenas o acadêmico Ólafur não incluiu a sua construção. A acadêmica Olivia representou a reta no GeoGebra de forma similar ao acadêmico Borracha, exibindo o vetor diretor na janela de álgebra e na janela de visualização 3D. Já os acadêmicos João Matheus, Sthé e Aluna QL apenas representaram dois pontos com as coordenadas x e z idênticas e construíram a reta passando por esses dois pontos.

Para finalizar a análise dos itens dessa atividade sobre retas, é importante ressaltar que todos foram resolvidos durante as interações síncronas, sendo possível esclarecer dúvidas, tanto com o pesquisador quanto com a coordenadora. Além disso, os acadêmicos puderam trocar ideias e informações sobre a atividade por meio do *chat* ou do microfone.

A utilização do GeoGebra contribuiu para a visualização das representações das retas e para os acadêmicos perceberem que elas são paralelas ao vetor diretor, presente nas suas representações algébricas. Além disso, o uso desse *software* se fez essencial, visto que as interações e a sequência didática foram desenvolvidas durante o período de ensino remoto emergencial e seria muito desafiador tentar fazer as representações gráficas da reta utilizando lápis e papel.

Concorda-se com Silva (2014) quando afirmou que a utilização do GeoGebra proporcionou a prática de dois registros importantes para a compreensão do objeto matemático retas e maior agilidade nas conversões e tratamentos desse objeto. Lemke (2011) e Cardoso (2014) também ressaltaram a importância da utilização de *softwares* na realização de conversões de registros.

No entanto, Silva (2014) salientou que o uso do computador não substitui o trabalho do professor. Percebeu-se esse fato durante as interações, pois para resolverem os itens da atividade sobre retas, os acadêmicos contaram bastante com a colaboração do pesquisador e da professora coordenadora.

Embora algumas respostas apresentadas não estivessem conforme o esperado, a atividade sobre retas permitiu aos acadêmicos utilizar diferentes registros de representação e realizar a coordenação entre esses registros. Esse fato pode ter colaborado com uma compreensão mais efetiva das relações entre as equações vetorial e paramétricas das retas e suas representações gráficas.

5.3 Atividade final

Próximo do encerramento da segunda interação síncrona, o pesquisador encaminhou um formulário elaborado no *Google Forms* (Apêndice D), no *chat* da sala do *Google Meet*, que se tratava da atividade final, sendo a última atividade aplicada nessa sequência didática. Para esse formulário, os seis acadêmicos que concordaram em participar da pesquisa, além de resolverem as atividades anteriores, também realizaram as questões presentes nessa atividade.

A atividade final, com exceção da questão 5, contava com questões similares ou iguais as da atividade preliminar, com o objetivo de verificar as compreensões dos acadêmicos sobre os conteúdos de reta a partir dos estudos realizados durantes as duas interações síncronas, e comparar com o que foi respondido na atividade preliminar por cada acadêmico.

Para a **primeira questão**, assim como na atividade preliminar, solicitou-se aos acadêmicos a escrita, utilizando as suas palavras, sobre o que é uma reta conforme apresenta o Quadro 3:

Quadro 3 – Respostas dos acadêmicos para a questão 1 da atividade final

“são formadas por dois ou mais pontos” (Aluna QL)
“É um trecho linear, sem indicar direção, geralmente necessita de pontos no plano para que essa reta se constituir.” (Borracha)
“a reta pode ser um traço dado por dois pontos que segue uma única direção” (Olivia)
“É uma ferramenta matemática, que descreve infinitos pontos, uma soma de infinitos pontos, pontos esses que são regidos por uma equação, a que chamamos de equação da reta.” (Ólafur)
“Reta é um segmento em que pode-se representar infinitos pontos” (João Matheus)
“É uma linha que pode ser formada por vários pontos” (Sthé)

Fonte: Autor (2022).

Ao realizar a leitura das respostas percebe-se que a maioria deles não utilizou referências do material trabalhado nos encontros e priorizou relatar apenas características dos registros geométricos da reta. Eles realmente escreveram com as próprias palavras e de certa forma as respostas foram semelhantes às da atividade preliminar. Isso mostra que nem sempre trabalhar com diferentes registros vai propiciar que os acadêmicos façam referência a esses diferentes registros.

Duval (2012) comenta que em todos os níveis de ensino, a maioria dos alunos faz um isolamento de registros de representação, ou seja, “[...] não reconhecem o mesmo objeto nas representações que são dadas em sistemas semióticos diferentes [...]” (DUVAL, 2012, 283). Além disso, esse autor afirma que esse “[...] isolamento subsiste, mesmo após um ensino de conteúdos matemáticos que tenha tido estes diferentes registros amplamente utilizados” (DUVAL, 2012, 283).

Apenas o acadêmico Ólafur que na atividade preliminar pareceu fazer referência à reta como uma representação de uma função de primeiro grau, nessa atividade, embora tenha cometido alguns equívocos na escrita, apresentou dois registros referentes à reta, o geométrico (“descreve infinitos pontos”) e o algébrico (“pontos esses que são regidos por uma equação, a que chamamos de equação da reta”).

A **segunda questão** da atividade final era idêntica à segunda questão da atividade preliminar e solicitava se saberiam dizer as formas de representação de uma reta. Com exceção da acadêmica Sthé, todos responderam apenas sim. Sthé escreveu “Com um segmento de reta, de um ponto ao outro.”. Novamente a acadêmica Sthé utiliza um registro geométrico, mas parece confundir segmento de reta com reta.

A **terceira questão**, também era uma continuidade da questão dois e solicitava que, em caso afirmativo, os acadêmicos escrevessem as formas de representar retas por eles conhecidas. As respostas estão apresentadas no Quadro 4:

Quadro 4 – Respostas dos acadêmicos para a questão 3 da atividade final

“por dois pontos” (Aluna QL) “Através de dois pontos.” (Borracha) “Horizontalmente, verticalmente ou inclinada em diferentes ângulos” (Olivia) “Pela equação da reta, por uma equação, por uma equação vetorial da reta.” (Ólafur) “Quaisquer dois ou mais pontos em um espaço é possível representar uma reta. Dentro deste espaço existem vários tipos de retas como: - Retas Paralelas; -Retas Transversais; -Retas Horizontais; -Retas Verticais. Entre outas retas.” (João Matheus) “inclinadas, horizontais, verticais, paralelas, coincidentes, reversas, coplanares, transversais, perpendiculares e retas concorrentes.” (Sthé)

Fonte: Autor (2022).

Os acadêmicos Aluna QL e Borracha apenas fizeram referência ao registro geométrico da reta que passa por dois pontos. Essa resposta pode ou não estar relacionada ao conteúdo “reta definida por dois pontos” trabalhado na segunda interação síncrona que aconteceu no mesmo dia em que eles responderam a atividade final. O trecho inicial da resposta de João Matheus se assemelha às de Aluna QL e Borracha, mas ele faz referencia a pontos em um espaço. Comparando com a resposta dele na atividade preliminar “vetores, função de primeiro grau” parece que a participação nas interações síncronas trouxe uma ampliação na percepção do acadêmico sobre retas, isto é, retas como entes que podem ser representados no espaço.

Ainda na resposta de João Matheus, ele faz referência a posições de retas e a posições relativas entre duas retas, assim como a acadêmica Sthé. Olivia apenas se refere a posições de retas. Ressaltando que as respostas de Sthé e Olivia foram muito semelhantes às dadas na atividade preliminar.

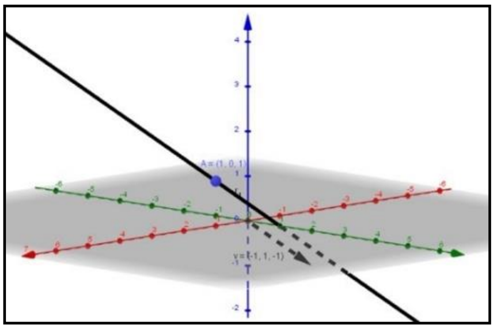
O acadêmico Ólafur foi o único que fez referência ao registro algébrico da reta como uma possível representação de reta, inclusive mencionando a equação vetorial da reta.

A **quarta questão** da atividade final era semelhante à quarta questão da atividade preliminar. No entanto, dentre os itens a serem associados foi incluído um referente a retas paralelas aos eixos coordenados.

Além disso, por um erro de digitação, a equação da coluna 4 não correspondia a nenhum dos registros das linhas que deveriam ser associadas. Esse fato só foi percebido após a realização das interações síncronas e nenhum acadêmico reportou esse problema enquanto realizavam essa atividade. Mesmo assim, todos os acadêmicos associaram corretamente os demais registros aos seus correspondentes em outros registros, demonstrando um avanço dos acadêmicos Ólafur e Olivia que na atividade preliminar haviam se equivocado em duas associações.

A **quinta questão** solicitava que os acadêmicos incluíssem nos espaços destinados para o anexo de imagens no formulário, dois registros algébricos, uma equação vetorial e equações paramétricas, da reta representada graficamente conforme mostra a figura a seguir (Figura 32):

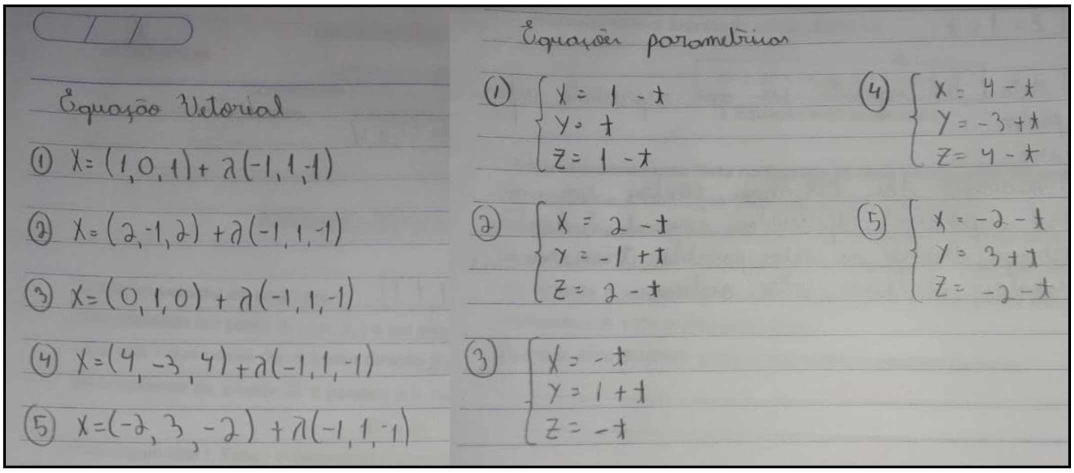
Figura 32 - Representação da reta da questão 5 da atividade final



Fonte: Autor (2022).

O acadêmico João Matheus colocou cinco equações vetoriais e suas correspondentes equações paramétricas utilizando o mesmo vetor diretor e cinco pontos distintos que pertencem à reta representada, como mostra a figura abaixo (Figura 33). Parece que ele compreendeu que diferentes registros algébricos podem representar a mesma reta.

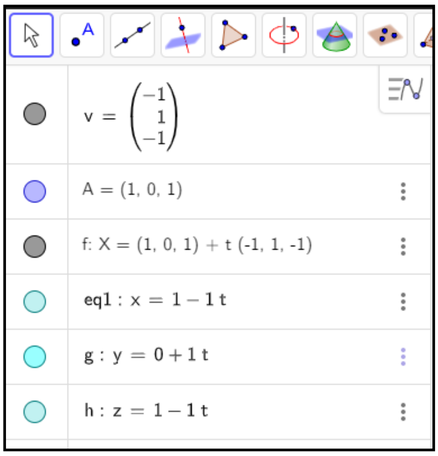
Figura 33 - Questão 5: produções do acadêmico João Matheus



Fonte: Autor (2022).

O acadêmico Ólafur enviou uma imagem do GeoGebra com a equação vetorial e ele digitou as equações paramétricas na janela de álgebra como mostrado a seguir (Figura 34):

Figura 34 - Questão 5: produção do acadêmico Ólafur



Fonte: Autor (2022).

Os demais acadêmicos enviaram imagens com as respostas escritas a mão e todas corretas, com exceção da acadêmica Sthé, que nas equações paramétricas escreveu x = 1 + t, sendo a forma correta x = 1 – t.

A acadêmica Olivia foi a única a escrever a equação vetorial da seguinte forma (x,y,z) = (1, 0, 1) + t*(-1, 1, -1), como foi apresentada na primeira interação e está presente no material de estudo utilizado. Quanto aos demais acadêmicos, preferiram utilizar a representação que aparece na janela de álgebra do GeoGebra e que foi a mesma utilizada pelo acadêmico João Matheus na Figura 33.

Constata-se, ao analisar as respostas dadas pelos acadêmicos na atividade final, que houve avanço de conhecimentos relacionados a retas no espaço, embora ainda ocorram alguns equívocos quando eles escrevem o que pensam sobre retas. Compreende-se esse fato, pois se torna complicado escrever sobre um ente primitivo para o qual não há uma definição. De acordo com Silva (2014) o objeto matemático reta não é compreendido por alguns alunos, pois a reta não é um objeto real, não é possível encontrar algo que possa ser considerado reta.

Mesmo assim, percebe-se que eles conseguiram fazer a coordenação de alguns registros referentes a esse objeto matemático, ao observar as atividades que privilegiaram a conversão e o tratamento dos registros algébricos, gráficos e em língua natural que representam retas no espaço.

Destaca-se ainda o avanço do acadêmico Ólafur que até o momento da aplicação da sequência didática não havia cursado o componente Geometria Analítica e na atividade final foi o único que fez referência à equação vetorial da reta que foi estudada na primeira interação.

A realização de dois encontros síncronos para o desenvolvimento dos conteúdos de retas pode não ter sido suficiente para a total compreensão por parte dos acadêmicos. Porém, a sequência didática privilegiou a coordenação dos registros o que pode ter colaborado para o entendimento dos conteúdos trabalhados como destacaram os acadêmicos João Matheus e Ólafur ao escreverem, respectivamente no *chat*: “[...] aprendi bastante”; “[...] tô aprendendo muito [...]”.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A realização desse trabalho iniciou com o interesse do pesquisador em compreender como ocorre a aprendizagem dos conceitos acerca dos objetos matemáticos. Isso o direcionou para a Teoria dos Registros de Representação Semiótica desenvolvida por Raymond Duval. Com o aprofundamento dessa teoria, o pesquisador decidiu explorar esses conceitos na Geometria Analítica, delimitando o conteúdo de retas no espaço.

Com essas decisões, definiu-se a seguinte questão de pesquisa: “Uma sequência didática sobre retas no espaço que favoreça a coordenação de diferentes registros de representação pode contribuir na aprendizagem desse conteúdo por estudantes de graduação?”.

No intuito de responder essa questão, foi elaborado como objetivo geral “verificar as contribuições de uma sequência didática baseada na Teoria dos Registros de Representação Semiótica, para a aprendizagem de retas no espaço por estudantes do ensino superior”.

O primeiro passo na direção desse objetivo, e que constituiu um dos objetivos específicos, foi elaborar uma sequência didática sobre o conteúdo de retas no espaço, a partir do uso do *software* GeoGebra. Tal sequência contemplou as equações vetorial e paramétricas de retas e retas paralelas aos eixos coordenados, e foi composta por atividades que favorecessem a coordenação de diferentes registros de representação.

Para concretizar esse primeiro passo, fez-se necessário analisar em livros de Geometria Analítica para o ensino superior, como é abordado o estudo de retas no espaço, contemplando o segundo objetivo específico.

O terceiro objetivo específico tinha o propósito de destacar pesquisas que trataram sobre o uso de registros de representação no estudo de retas. Os três trabalhos analisados nesta pesquisa trouxeram reflexões tanto para a condução das interações realizadas quanto para a análise das atividades desenvolvidas.

Retomando então a questão norteadora e o objetivo geral desta pesquisa, pode-se afirmar que o desenvolvimento da sequência didática elaborada e os resultados da análise das produções dos seis acadêmicos participantes da pesquisa, permitiram concluir que uma sequência didática baseada na Teoria dos Registros de Representação Semiótica contribui para a aprendizagem de retas no espaço por estudantes do ensino superior.

Tem-se consciência que a realização de apenas dois encontros síncronos para o desenvolvimento da sequência didática pode não ter sido suficiente para os participantes consolidarem os conhecimentos sobre retas propostos nas atividades. Porém, foi possível observar que eles conseguiram realizar as conversões de registros solicitadas nas atividades, e alguns participantes se sentiram a vontade para afirmar que estavam aprendendo muito.

Mesmo que a utilização do *software* GeoGebra não fosse o foco deste trabalho, verificou-se que a sua utilização se fez essencial, pois as interações e a sequência didática foram desenvolvidas de forma remota, dificultando a realização das representações gráficas da reta com a utilização de lápis e papel.

Ainda na fase de elaboração da sequência didática, foram encontradas algumas dificuldades. O pesquisador precisava se aprofundar no conteúdo escolhido, bem como produzir atividades que permitissem a realização da conversão dos registros, em um curto período de tempo até a aplicação. Essa pressa ocasionou alguns equívocos na atividade final, mas não prejudicou o intuito da mesma.

No desenvolvimento da atividade sobre retas, percebeu-se que os participantes tinham dificuldade em expressar em que parte eles estavam trabalhando naquele momento, pois faltou enumerar cada tarefa dos itens propostos. Esse fato também foi percebido pelo pesquisador durante a análise dessa atividade.

Como sugestões para pesquisas futuras pode-se trabalhar outros conteúdos sobre retas que não foram explorados neste trabalho, assim como outros temas da Geometria Analítica, observando como a coordenação dos registros pode favorecer a aprendizagem desses conteúdos. Outra sugestão seria o desenvolvimento dessa mesma sequência didática, com possíveis aprimoramentos, no ensino presencial.

Apesar das dificuldades encontradas durante a realização desse trabalho, o mesmo permitiu ao pesquisador estudar a Teoria dos Registros de Representação Semiótica e revisar conteúdos sobre retas no espaço no contexto da Geometria Analítica, contribuindo para a consolidação desses conhecimentos.

Também foi essencial a realização deste trabalho como experiência de elaboração de uma pesquisa acadêmica, servindo de aprendizado para trabalhos futuros.

Para finalizar, a elaboração e aplicação de uma sequência didática para acadêmicos do ensino superior que favorecesse a coordenação de diferentes registros de representação contribuíram para o aprimoramento profissional deste pesquisador enquanto futuro professor.

REFERÊNCIAS

BRASIL. Ministério da Educação. **Base nacional comum curricular**: educação é a base. Brasília, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 22 ago. 2021.

CAMARGO, Ivan de; BOULOS, Paulo. **Geometria analítica**: um tratamento vetorial. 3. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2005.

CARDOSO, Franciele Catelan. **O ensino da geometria analítica em um curso de licenciatura em matemática**: uma análise da organização do processo educativo sob a ótica dos registros de representação semiótica. 2014. Dissertação (Mestrado em Educação nas Ciências) – Universidade do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul, Ijuí, 2014. Disponível em: http://bibliodigital.unijui.edu.br:8080/xmlui/handle/123456789/2309. Acesso em: 23 set. 2021.

DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. **Fundamentos de matemática elementar**: geometria plana. 7. ed. São Paulo: Atual, 1993.

DUVAL, Raymond. Registros de Representações Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática. In: **Aprendizagem em matemática**: registros de representação semiótica. 8 ed. Campinas: Papirus, 2003, p. 11-33.

DUVAL, Raymond. **Semiósis e pensamento humano**: registros semióticos e aprendizagens intelectuais (Fascículo I). Trad.: Lênio Fernandes Levy e Marisa Roâni Abreu da Silveira. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

DUVAL, Raymond; MORETTI, Méricles Thadeu (trad.). Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. **Revista eletrônica de educação matemática**, v. 7, n. 2, p. 266-297, 2012. Disponível em: https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2012v7n2p266. Acesso em 26 jun. 2021.

FLORES, Cláudia Regina. Registros de representação semiótica em matemática: história, epistemologia, aprendizagem. **Boletim de educação matemática**, v. 19, n. 26, p. 1-22, 2006. Disponível em: https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=291221866005. Acesso em 03 jul. 2021.

FREITAS, Wesley RS; JABBOUR, Charbel JC. Utilizando estudo de caso (s) como estratégia de pesquisa qualitativa: boas práticas e sugestões. **Revista Estudo & Debate**, v. 18, n. 2, 2011. Disponível em: https://www.nelsonreyes.com.br/560-566-1-PB-2.pdf. Acesso em: 24 set. 2021.

GODOY, Arlida Schmidt. Introdução à pesquisa qualitativa e suas possibilidades. **Revista de administração de empresas**, v. 35, n. 2, p. 57-63,

1995. Disponível em: https://www.scielo.br/j/rae/a/wf9CgwXVjpLFVgpwNkCgnnC/?format=pdf&lang=pt. Acesso em: 24 set. 2021.

HENRIQUES, Afonso; ALMOULOUD, Saddo Ag. Teoria dos registros de representação semiótica em pesquisas na Educação Matemática no Ensino Superior: uma análise de superfícies e funções de duas variáveis com intervenção do software Maple. **Ciência & educação**, Bauru, v. 22, n. 2, p. 465-487, 2016. Disponível em: https://www.scielo.br/j/ciedu/a/QVbBDvRRtjvVXD6HXFYXcxx/?lang=pt. Acesso em: 23 mar. 2022.

LEMKE, Maria de Fátima dos Santos Monteiro. **Retas e planos na geometria analítica espacial**: uma abordagem envolvendo conversões de registros semióticos com o auxílio de um software de geometria dinâmica. 2011. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade Bandeirante de São Paulo, São Paulo, 2011. Disponível em: https://repositorio.pgsskroton.com/handle/123456789/3605. Acesso em: 28 dez. 2021.

PAIS, Luiz Carlos. **Didática da matemática**: uma análise da influência francesa. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

SANTOS, Fabiano José dos; FERREIRA, Silvimar Fábio. **Geometria Analítica**. Porto Alegre: Grupo A, 2009. Disponível em: https://integrada.minhabiblioteca.com.br/#/books/9788577805037/. Acesso em: 10 ago. 2021.

SILVA, Raquel Santos. **Estudo da reta em geometria analítica**: uma proposta de atividades para o ensino médio a partir de conversões de registros de representação semiótica com o uso do software geogebra. 2014. Dissertação (Mestrado em Educação) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2014. Disponível em: https://tede2.pucsp.br/handle/handle/10990. Acesso em: 26 jun. 2021.

WINTERLE, Paulo. **Vetores e geometria analítica**. São Paulo: Pearson Makron Books, 2000.

APÊNDICES

APÊNDICE A – Termo de Consentimento de participação na pesquisa

Termo de Consentimento - "O ESTUDO DA RETA NO ESPAÇO A PARTIR DA MOBILIZAÇÃO DE REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA"

Prezado(a) discente, você está sendo convidado(a) para participar, como voluntário(a), em uma pesquisa intitulada: "O ESTUDO DA RETA NO ESPAÇO A PARTIR DA MOBILIZAÇÃO DE REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA", cujos dados produzidos serão utilizados para a realização do Trabalho de Conclusão de Curso do Curso de Matemática – Licenciatura da Universidade Federal do Pampa (UNIPAMPA). A pesquisa tem como objetivo geral verificar a aprendizagem dos estudantes a partir da Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval, para o estudo da Reta no Espaço. O estudo é coordenado pela Profª. Drª. Claudia Laus Angelo, professora do curso de Matemática - Licenciatura da UNIPAMPA e as atividades serão conduzidas pelo acadêmico Lorenzo Schneider Morales. Através deste instrumento e a qualquer momento, você poderá solicitar esclarecimentos adicionais sobre o estudo em qualquer aspecto que desejar. Também poderá retirar seu consentimento ou interromper a participação a qualquer momento. Com a participação neste estudo, você não terá nenhum custo, nem receberá qualquer vantagem financeira. Além disso, seu nome, assim como dos(as) demais participantes do estudo não serão identificados em nenhum momento, garantindo seu anonimato. Havendo qualquer dúvida, você poderá entrar em contato com o discente ou a coordenadora responsáveis pelo estudo através dos e-mails: lorenzomorales.aluno@unipampa.edu.br ou claudiaangelo@unipampa.edu.br

Seu e-mail será registrado quando você enviar este formulário.

Não é **lorenzomorales.aluno@unipampa.edu.br**? Trocar de conta

*Obrigatório

Escreva seu nome completo: *

Sua resposta

Você concorda em participar da pesquisa? *

- ◯ Concordo em participar da pesquisa intitulada: "O ESTUDO DA RETA NO ESPAÇO A PARTIR DA MOBILIZAÇÃO DE REGISTROS DE REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS".
- ◯ Não concordo em participar da pesquisa intitulada: "O ESTUDO DA RETA NO ESPAÇO A PARTIR DA MOBILIZAÇÃO DE REGISTROS DE REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS".

Seção 2 de 2

Caso aceite participar da pesquisa:

Descrição (opcional)

Por qual pseudônimo você gostaria de ser identificado? *

Texto de resposta curta

APÊNDICE B – Atividade preliminar

Atividade Preliminar

Para começo de conversa...

*Obrigatório

Nome: *

1) A partir do que você conhece sobre reta, descreva com suas palavras o que é uma reta: *

2) Saberia dizer as formas que você pode representar uma reta? *

3) Em caso afirmativo, que formas seriam? *

4) A partir das informações das retas, dadas na primeira coluna, associe com as representações na outra coluna: *

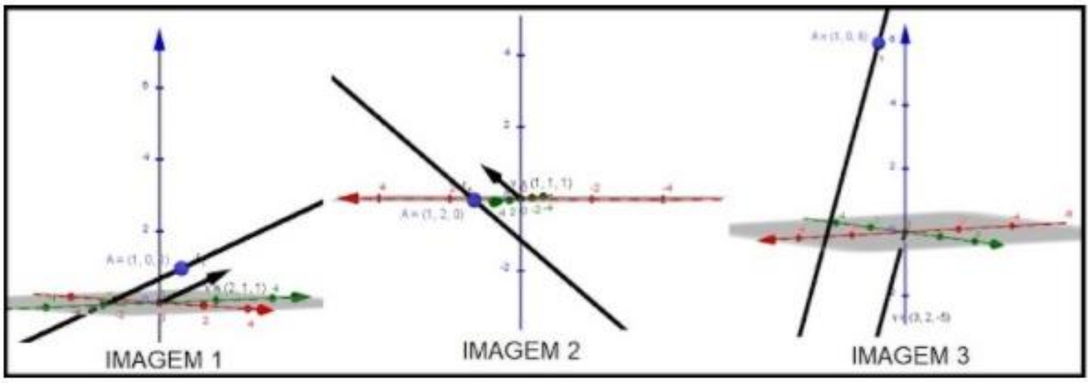


	IMAGEM1	X= (4,1,-2)+λ(-2,-1,4)	IMAGEM2	X= (3,0,4)+λ(-2,1,-6)	IMAGEM3
(1) X= (1,0,6)+λ(3,2,-5)	○	○	○	○	○
(2) X= (1,0,1)+λ(2,1,1)	○	○	○	○	○
(3) Uma reta que possui um ponto com abscissa em um, ordenada em dois e cota em zero, e é paralela ao vetor diretor com todos os componentes igual a um.	○	○	○	○	○
(4) Uma reta passa em dois pontos. Um deles possui abscissa quatro, ordenada um e cota dois negativo. O outro possui abscissa dois, ordenada zero e cota dois.	○	○	○	○	○

(5) Uma reta passa em dois pontos. Um deles possui abscissa três, ordenada zero e cota quatro. O outro possui abscissa um, ordenada um e cota dois negativo.

Enviar

Limpar formulário

APÊNDICE C – Atividades sobre retas no espaço

<table>
<tr><td></td><td colspan="2">UNIVERSIDADE FEDERAL DO PAMPA

LICENCIATURA EM MATEMÁTICA
Componente Curricular: Trabalho de Conclusão de Curso</td></tr>
<tr><td>Autores: Lorenzo Morales.</td><td>Orientadora: Claudia Laus Angelo</td><td>Data: 16/08</td></tr>
<tr><td colspan="3">Nome:</td></tr>
</table>

<u>ATIVIDADE – ESTUDO DA RETA</u>[1]

Equação vetorial de uma reta

Considerando um ponto $A(x_1, y_1, z_1)$ e um vetor não-nulo $\vec{v} = (a, b, c)$. Só existe uma reta *r* que passa por A e tem direção $\vec{v}$. Um ponto $P(x, y, z)$ pertence à *r* se, e somente se, o vetor $\overrightarrow{AP}$ é paralelo a $\vec{v}$, isto é,

$$\overrightarrow{AP} = P - A = t\vec{v} \rightarrow P = A + tv$$

Para algum real *t*. Esse *t* é denominado parâmetro da equação vetorial.

Desenvolvendo a expressão acima, obtém-se:

$$\boxed{(x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + t(a, b, c)}$$

Equação vetorial da reta *r*

Representando uma Reta no Espaço através da Equação Vetorial

1. Selecione a Janela de Visualização 3D e em seguida feche a Janela de Visualização padrão, pois trabalharemos no espaço. Digite na caixa de entrada o ponto $A = (1, 2, 0)$, e pressione *Enter*. Em seguida, digite também no campo de entrada o vetor diretor $\vec{v} = (1, -1, 2)$. Agora, no campo de entrada insira o comando r: A + t*v, e pressione *Enter*.

Escreva, com detalhes, como a reta aparece geometricamente:

____

____

Escreva a equação vetorial da reta que aparece na janela de álgebra:

X=____

Observação: O GeoGebra utiliza a letra grega lambda (λ) para representar o parâmetro da equação vetorial.

Determine pelo menos dois pontos pertencentes à reta que sejam diferentes do ponto A:____

Como você determinou esses pontos?_________________________________

Equações Paramétricas da Reta

Da equação vetorial da reta

$$(x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + t(a, b, c)$$

Ou ainda

$$(x, y, z) = (x_1 + at, y_1 + bt, z_1 + ct)$$

Pela condição de igualdade, obtém-se:

$$\boxed{\begin{cases} x = x_1 + at \\ y = y_1 + bt \\ z = z_1 + ct \end{cases} \quad \text{, com } t \in \mathbb{R}}$$

Equações paramétricas da reta *r*

2. A partir da reta *r* definida pelo ponto $A = (1, 2, 0)$ e pelo vetor $\vec{v} = (1, -1, 2)$ dados anteriormente em 1, faça o solicitado:

a) escreva as equações paramétricas da reta r.

____

b) Determine dois pontos distintos pertencentes à reta, com parâmetros $t = -2$ e $t = 3$, respectivamente:

____

c) Determine o ponto da reta cuja ordenada (y) é 5.

____

d) Represente no GeoGebra os três pontos que você determinou nos itens anteriores e verifique se eles pertencem à reta *r*.

Desafio:

Escreva um ponto qualquer e um vetor qualquer do espaço:

____

Determine uma equação vetorial e equações paramétricas da reta que passa por esse ponto e tem a direção desse vetor:

____

____

Em seguida, represente o ponto, o vetor e a reta através do *software* GeoGebra e inclua a imagem da representação gráfica dessa reta:

Reta definida por dois pontos

A reta definida pelos pontos A e B é a reta que passa por A (ou B) e tem a direção do vetor $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = B - A$.

Representando uma reta definida por dois pontos no espaço

3. Abra uma nova janela do GeoGebra. Selecione a Janela de Visualização 3D e em seguida feche a Janela de Visualização padrão. Escreva no campo de entrada o comando, $A = (-2, 2, -3)$ e pressione *Enter*. Em seguida, digite no campo de entrada $B = (4, 3, 4)$. Agora, a partir dos dois pontos, iremos definir o vetor diretor. Para isso insira o comando $v = B - A$ no campo de entrada.

Qual vetor você obteve?____

Com a opção Reta clique nos pontos A e B. Como a equação da reta está apresentada na janela de álgebra? __________________________________

Escreva as equações paramétricas da reta encontrada:

____

____

____

Encontre o ponto pertencente à reta, cuja cota (coordenada z) é 3:

____

Desafio:

Uma reta passa em dois pontos. Um deles possui abscissa zero, ordenada dois e cota três. O outro possui abscissa três, ordenada cinco e cota dois negativo. Escreva uma equação paramétrica que represente essa reta.

____

____

4. Abra uma nova janela do GeoGebra. Selecione a Janela de Visualização 3D e em seguida feche a Janela de Visualização padrão. Represente no GeoGebra os pontos A = (2, -1, 5) e B = (2, -1, -2). Com a opção Reta clique nos pontos A e B.

Qual característica você observa nessa reta?

____

____

Como a equação da reta está apresentada na janela de álgebra? ____________________________________.

Escreva o vetor diretor dessa reta: __________________________________.

Qual característica você observa nesse vetor:

____.

Com a opção Ponto em Objeto insira cinco pontos sobre essa reta.

Que pontos você inseriu:

____

Quais características comuns têm esses pontos?

____

Como você escreveria equações paramétricas dessa reta?

____

____

____

Uma reta paralela ao eixo z possui como vetor diretor qualquer múltiplo do vetor k = (0, 0, 1) e os pontos dessa reta terão as coordenadas x e y fixas, com o z variando em todos os reais. Portanto, as equações paramétricas de uma reta paralela ao eixo z que passa pelo ponto $A = (x_1, y_1, z_1)$ são dadas por:

$$\begin{cases} x = x_1 \\ y = y_1 \end{cases}$$

Na atividade 4 as equações paramétricas da reta poderiam ser representadas por:

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$$

Desafio: Seguindo o mesmo padrão, escreva equações paramétricas de uma reta paralela ao eixo y:

____

____

____

Qual o vetor diretor dessa reta?

____

Represente essa reta no GeoGebra e cole sua construção aqui:

APÊNDICE D – Atividade final

Atividade Final

Contamos com você na realização das atividades abaixo. Você pode demorar quanto quiser e desde já agradecemos a sua contribuição.

Nome: *

Sua resposta

1) A partir do que você conhece sobre reta, descreva com suas palavras o que é uma reta: *

Sua resposta

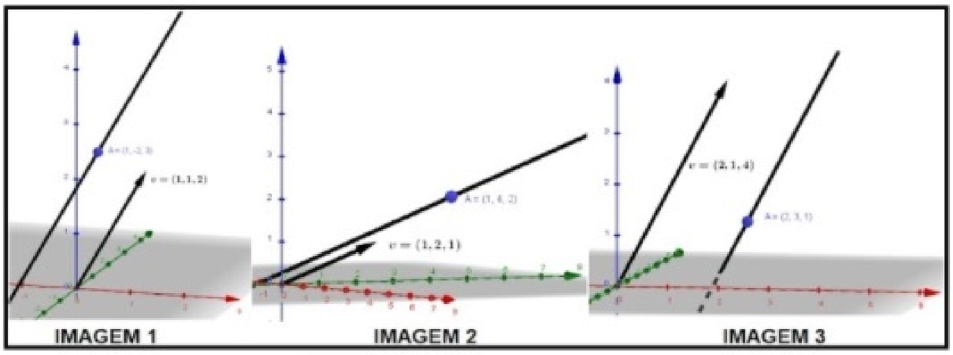
2) Saberia dizer as formas que você pode representar uma reta? *

Sua resposta

3) Em caso afirmativo, que formas seriam? *

Sua resposta

4) A partir das informações das retas, dadas na primeira coluna, associe com as representações na outra coluna: *

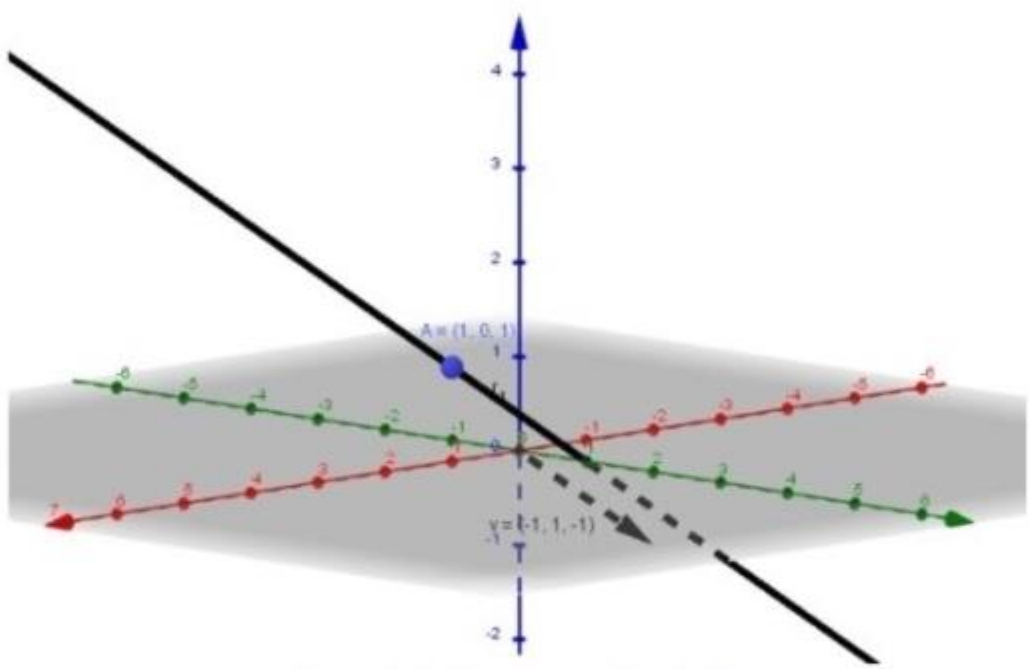


$$r: \begin{cases} y = -3 \\ z = 5 \end{cases}$$

Reta r

	IMAGEM1	Reta r	IMAGEM2	X= (3,0,4)+λ(-2,1,-6)	IMAGEM3
(1) X= (2,3,1)+λ(2,1,4)					
(2) X= (1,-2,3)+λ(1,1,2)					
(3) Uma reta que possui um ponto com abscissa em um, ordenada em quadro e cota em dois, e é paralela ao vetor diretor cujos componentes são 1, 2 e 1, respectivamente.					
(4) Uma reta paralela ao eixo x.					
(5) Uma reta passa em dois pontos. Um deles possui abscissa um, ordenada dois e cota dois. O outro possui abscissa dois, ordenada um negativo e cota um.					

5) Represente com equações vetorial e paramétricas, a reta abaixo: *



Espaço destinado para a equação vetorial:

Adicionar arquivo

Espaço destinado para as equações paramétricas: *

Adicionar arquivo

Enviar

Limpar formulário