

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PAMPA

PAOLA AQUINO DOS SANTOS

**ESTUDOS E DEMONSTRAÇÕES PARA ÁREA DE FIGURAS PLANAS
COM INVESTIGAÇÕES POR MEIO DE SOFTWARE**

**Itaqui
2015**

PAOLA AQUINO DOS SANTOS

**ESTUDOS E DEMONSTRAÇÕES PARA ÁREA DE FIGURAS PLANAS
COM INVESTIGAÇÕES POR MEIO DE SOFTWARE**

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao Curso Bacharelado Interdisciplinar em Ciência e Tecnologia da Universidade Federal do Pampa como requisito parcial para obtenção do Título de Bacharel em Ciência e Tecnologia.

Orientador:
Prof. Me. Leonel Giacomini Delatorre

Co-Orientador:
Prof. Ma. Daiane Campara Soares

**Itaqui
2015**

FICHA CATALOGRÁFICA

Ficha catalográfica elaborada automaticamente com os dados fornecidos pelo(a) autor(a) através do Módulo de Biblioteca do Sistema GURI (Gestão Unificada de Recursos Institucionais) .

S237e Santos, Paola Aquino dos

Estudos e demonstrações para área de figuras planas com investigação por meio de software / Paola Aquino dos Santos.

31 p.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade Federal do Pampa, BACHARELADO INTERDISCIPLINAR EM CIÊNCIA E TECNOLOGIA , 2015.

"Orientação: Leonel Giacomini Delatorre ".

1. Geometria Euclidiana Plana. 2. Área de Figuras Planas. 3. Software Livre Régua e Compasso. I. Título.

PAOLA AQUINO DOS SANTOS

**ESTUDOS E DEMONSTRAÇÕES PARA ÁREA DE FIGURAS PLANAS
COM INVESTIGAÇÕES POR MEIO DE SOFTWARE**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso Bacharelado Interdisciplinar em Ciência e Tecnologia da Universidade Federal do Pampa, como requisito parcial para obtenção do Título de Bacharel em Ciência e Tecnologia.

Trabalho de Conclusão de Curso defendido e aprovado em: 23 de Janeiro de 2015.
Banca examinadora:

Daiane Campara Sbares

Prof. Ma. Daiane Campara Sbares
Co-Orientador
UNIPAMPA – Campus Itaqui

Charles Quevedo Carpes

Prof. Me. Charles Quevedo Carpes
UNIPAMPA – Campus Itaqui

Patricia Goulart Carpes

Prof. Ma. Patricia Goulart Carpes
UNIPAMPA – Campus Itaqui

AGRADECIMENTO

Primeiramente, gostaria de agradecer a Deus, pelo amparo em todos os momentos da minha vida. Aos meus pais, Arione e Fátima pelo amor e incentivo, a vocês expresse o meu maior reconhecimento. Ao Anderson, pelo carinho e compreensão, minhas irmãs e minha família por terem me apoiado e ficado ao meu lado nas horas que eu mais precisava.

A professora Karla por contribuir expressivamente em minha formação acadêmica e aos demais professores que contribuíram durante esse período.

Agradeço aos professores Leonel e Daiane, por transmitirem seus conhecimentos, colaboração e orientação, auxiliando durante a elaboração deste trabalho.

Aos meus colegas de curso, como também aos amigos pelo companheirismo, sejam os que estiveram presentes, ou mesmo os que distante torceram por meu sucesso.

Enfim, agradeço a todos que direta, ou indiretamente, sempre estiveram presentes em minha vida e fizeram parte da minha formação, o meu muito obrigado.

“A Geometria faz com que possamos adquirir o hábito de raciocinar, e esse hábito pode ser empregado, então, na pesquisa da verdade e ajudar-nos na vida.”

Jacques Bernoulli

RESUMO

Neste trabalho relacionamos a Matemática e suas contribuições no campo das ciências, por meio de um embasamento no referencial teórico de Geometria Plana Euclidiana. Neste sentido, realizamos algumas demonstrações e cálculos buscando explorar conceitos geométricos que fundamentam o cálculo de área de figuras planas, prevalecendo o rigor matemático e sua estrutura axiomática. Também temos por objetivo mostrar possibilidades de construções geométricas por meio da utilização de software como ferramenta tecnológica que contempla a Geometria Dinâmica. Optamos por realizar esta investigação por meio do software livre “régua e compasso” que contribuiu e promoveu experimentações nas construções geométricas de área de figuras planas acrescentando uma visualização nas demonstrações desse trabalho.

Palavras-chave: Geometria Plana Euclidiana; área de figuras planas; Régua e Compasso; Geometria dinâmica.

ABSTRACT

In this work relate to mathematics and his contributions in the sciences through grounding in the theoretical framework of Euclidean plane geometry. In this sense, we have made some statements and calculations looking to explore geometric concepts underlying the calculation of the area of plane figures, whichever is the mathematical rigor and its axiomatic structure. Also we aim to show possibilities of geometric constructions through the use of software as a technological tool that includes the Dynamic Geometry. We decided to use this research through free software "ruler and compass" that helped and promoted experimentation in geometric constructions area of plane figures adding a view in the statement of work.

Keywords: Euclidean plane geometry; area of plane figures; Ruler and compass; Dynamic geometry.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Regiões poligonais em que $R_1 \subset R_2$	13
Figura 2: Região poligonal	14
Figura 3: Fronteira (ΔABC); Região Triangular ($\Delta A'B'C'$); Interior ($\Delta A''B''C''$)	14
Figura 4: Região poligonal e ponto interior	15
Figura 5: Regiões Poligonais do Quadrado	16
Figura 6: Área de retângulo	18
Figura 7: Área paralelogramo ABCD	19
Figura 8: Área triângulo ΔABC	20
Figura 9: Área do trapézio	21
Figura 10: Área do losango	22
Figura 11: Polígonos inscritos no círculo (a) e círculo inscrito no quadrado (b)	23
Figura 12: Área do círculo	24
Figura 13: Construção referente a interpretação geométrica do Teorema de Pitágoras	26
Figura 14: Movimentação dos vértices B e C do triângulo ΔABC	27

LISTA DE SÍMBOLOS

A, B, C, \dots	Ponto.
α	Ângulo ou medida de ângulo.
\overline{AB}	Segmento de extremidades A e B .
\mathbb{R}^*	Conjunto dos números reais positivos.
\emptyset	Conjunto vazio.
ΔABC	Triângulo de vértices A, B, C .
∂	Diferencial parcial.
$C(O, R)$	Circunferência de centro O e raio R .
$\overline{AB} \equiv \overline{CD}$	Segmento \overline{AB} congruente ao segmento \overline{CD} .
l_n	Lado de um polígono regular de n lados inscrito em uma circunferência.
h_n	Altura de um polígono regular de n lados inscrito em uma circunferência.
$a(R)$	Área da região poligonal R .
\subset	Está contido.
\in	Pertence.
\cap	Intersecção.
\cup	União.
\geq	Maior ou igual.
\leq	Menor ou igual.
\setminus	Diferença entre conjuntos.
$a(Q)$	Área do quadrado.
$a(Ret)$	Área do retângulo.
$a(P)$	Área do paralelogramo.
$a(\Delta)$	Área do triângulo.
$a(T)$	Área do trapézio.
$a(L)$	Área do losango.
$a(C)$	Área do círculo.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	11
2 ÁREAS DE FIGURAS PLANAS	12
2.1 Elementos primitivos	12
2.2 Axiomas	12
2.3 Definições iniciais	14
3 CÁLCULO DE ÁREAS	15
3.1 Área de um quadrado	16
3.2 Área de um retângulo	18
3.3 Área do paralelogramo	19
3.4 Área do Triângulo	20
3.5 Área do Trapézio	21
3.6 Área de um losango	22
3.7 Área de um círculo	23
4 INVESTIGAÇÕES POR MEIO DO SOFTWARE	25
5 CONSIDERAÇÕES FINAIS	28
6 REFERÊNCIAS	30

1. INTRODUÇÃO

O presente trabalho aborda uma das contribuições da Matemática no campo das ciências, mais especificamente na área de Geometria. Primeiramente, buscamos embasamento no referencial teórico por meio de livros, artigos e apostilas de geometria plana euclidiana, alguns fatos históricos que contribuíram para o desenvolvimento desse ramo da matemática, os conceitos básicos da Geometria, tais como elementos primitivos, axiomas, teoremas e definições, assim, preferimos por realizar algumas demonstrações sobre o cálculo de área de figuras planas, prevalecendo o rigor matemático e sua estrutura axiomática. Optamos, além disso, pela investigação, por meio do software livre “régua e compasso”, como ferramenta tecnológica que contempla a Geometria Dinâmica, permitindo uma melhor compreensão nas construções geométricas de área de figuras planas.

Heródoto, famoso historiador grego do século V a.C., no livro II das suas *Histórias*, remonta a história dos egípcios e apresenta o seguinte problema:

“Disseram-me que este rei (Sesóstris) tinha repartido todo o Egito entre os egípcios, e que tinha dado a cada um uma porção igual e regular de terra, com a obrigação de pagar por ano um certo tributo. Que se a porção de algum fosse diminuída pelo rio (Nilo), ele fosse procurar o rei que lhe expusesse o que tinha acontecido a sua terra. Que ao mesmo tempo o rei enviava medidores ao local e fazia medir a terra, a fim de saber de quanto ela estava diminuída e de só fazer pagar o tributo conforme o que tivesse ficado de terra. [...]” (CARAÇA, 1951, p. 32).

que acredita-se ter originado a geometria – do grego “geometrien” no qual “geo” significa terra e “metrien”, medida – ou seja, a ciência de medição de terras. Nesse sentido, a Geometria surgiu da necessidade humana, seja para a medição de terrenos – e posterior cobrança de impostos –, seja para a arquitetura, sistemas de irrigação, entre outras situações cuja sua finalidade era estritamente prática.

Euclides, em sua obra “Elementos” (por volta de 300 a.C.), apresenta uma organização de conceitos matemáticos – incluindo, principalmente, a geometria – por meio do que conhecemos como método axiomático, que segundo EVES (2004) “[...] tornaram-se o protótipo da forma matemática moderna”. Esta estrutura estabelecida por Euclides, e aprimorada por seus sucessores, é indicada pela seguinte sequência, em que se segue até os dias atuais: Elementos primitivos → axiomas → definições → teoremas, a qual se fundamentou o presente trabalho.

Muitas questões fundamentais foram surgindo no campo científico da matemática através dos anos, bem como em diversas áreas, e, dessa forma, algumas experiências com o

método demonstrativo foram criando forma. Um exemplo disso é a Geometria. Para Gomez-Granel,

[...] a matemática é uma linguagem formal, diferente das linguagens naturais, caracterizando-se por abstrações, sem qualquer referência ao cotidiano, constituindo-se em uma linguagem algébrica com um alto grau de generalização. E ainda, a linguagem matemática traduz a linguagem natural para uma formalização que permite abstração e rigor. (GOMEZ-GRANELL apud MORELATTI; SOUZA, 2005, p. 266).

Machado (2012, p.111) afirma que o conceito de área está associado a “[...] ideia de medir a “ocupação” de uma região do plano por um contorno, denominada também de regiões poligonais”.

Nesse sentido, tal conceito está inserido em diversas situações de nosso cotidiano como, por exemplo, quando decidimos a quantidade ideal de cerâmica para revestir determinada região ou, ainda, quando a costureira faz o corte de forma a minimizar o desperdício de tecido. Além disso, o problema supracitado, que remete a própria origem da Geometria, aborda a noção de área. Acostumamo-nos a utilizar fórmulas que estimam estas medidas, sem saber, muitas vezes, o porquê da veracidade dessas afirmações. Nesse ponto, a matemática permite a generalização e a validação de tais resultados.

Por meio de uma abordagem lógico-dedutiva dos conceitos relacionados, desenvolvemos demonstrações relativas a área de figuras planas e por meio do software livre “Régua e compasso”, ao final deste trabalho, vamos mostrar uma possibilidade de construção geométrica que permite uma melhor visualização e entendimento dos conceitos geométricos envolvidos, utilizando o dinamismo deste software.

2. ÁREA DE FIGURAS PLANAS

2.1 Elementos Primitivos

Existe alguns elementos intuitivos em geometria plana que não podemos atribuir uma definição formal. Tais elementos são conhecidos como elementos primitivos, a saber: *ponto*, *reta*, *incidente e estar entre*. Todo corpo axiomático apresentado neste trabalho estará baseado nesses elementos.

2.2 Axiomas

Para o estudo da geometria plana – lógico-dedutiva – usamos os *axiomas*, que são leis estabelecidas como verdades, compreendidas de forma intuitiva. Por estabelecerem a

fundamentação teórica necessária à compreensão, a abstração e o estudo no campo das geometrias, “[...] Aristóteles considerava que os axiomas consistiam basicamente em verdades aplicáveis a todas as ciências [...]”. (FREITAS, 2013, p. 15)

Dentre os axiomas da Geometria Plana, vamos estabelecer os seguintes, que envolvem o conceito de área, enfoque de nosso estudo. Ressaltamos, ainda, que alguns resultados, definições e axiomas – prévios ao conteúdo desenvolvido neste trabalho – serão utilizados sem menção explícita.

Para estabelecermos o primeiro axioma que se refere a área de uma região poligonal precisamos primeiramente determinar \mathcal{R} como o conjunto de todas as regiões poligonais do plano. Assim, podemos enunciar:

Axioma 2.2.1 Existe uma função $a: \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$ que associa a cada região poligonal $R \in \mathcal{R}$ um número real positivo, $a(R)$. O número $a(R)$ será chamado de área da região poligonal R .

Axioma 2.2.2. Se

$$R = \bigcup_{k=1}^n R_k \quad (n \geq 2),$$

Onde $R_k, i = 1, 2, \dots, n$, são regiões poligonais tais que $\text{int}(R_i) \cap \text{int}(R_j) = \emptyset, i \neq j, i, j = 1, 2, \dots, n$, então

$$a(R) = \sum_{k=1}^n a(R_k)$$

Axioma 2.2.3. Se um triângulo ΔABC é congruente ao triângulo $\Delta A'B'C'$, então $a(R_{ABC}) = a(R_{A'B'C'})$.

Axioma 2.2.4. Se $ABCD$ é um quadrado, cujo lado mede 1, então $a(R_{ABCD}) = 1$.

Observações:

- Se R_1 e R_2 são regiões poligonais tais que $R_1 \subset R_2$, então $a(R_1) \leq a(R_2)$.

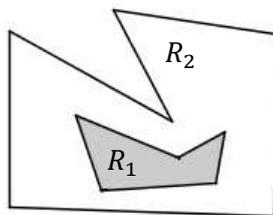


Figura 1: Regiões poligonais em que $R_1 \subset R_2$

- Todo polígono convexo determina uma região poligonal.

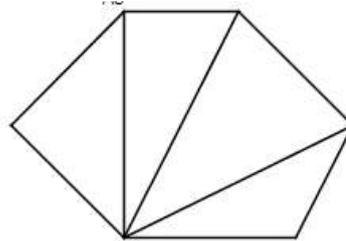


Figura 2: Região Poligonal

2.3 Definições Iniciais

Definição 2.3.1 Dados três pontos A, B e C, não colineares, o *triângulo* ΔABC é o conjunto da união dos segmentos determinados pelos vértices A, B e C, ou seja, $\Delta ABC = \overline{AB} \cup \overline{AC} \cup \overline{BC}$.

Definição 2.3.2 *Região triangular* é um conjunto formado pela união de todos os segmentos cujas extremidades pertencem a um triângulo dado. Assim sendo, a região triangular determinada por ΔABC é dada por

$$R_{ABC} = \bigcup_{X,Y \in \Delta ABC} \overline{XY}.$$

Fronteira de uma região triangular é definida pelo triângulo ΔABC , ou seja, $\partial(R_{ABC}) = \overline{AB} \cup \overline{AC} \cup \overline{BC}$. *Interior* é o conjunto de pontos de uma região triangular que não pertencem ao triângulo ΔABC , representado por $\text{int}(R_{ABC})$, ou ainda, $\text{int}(R_{ABC}) = R_{ABC} \setminus \partial(R_{ABC})$.

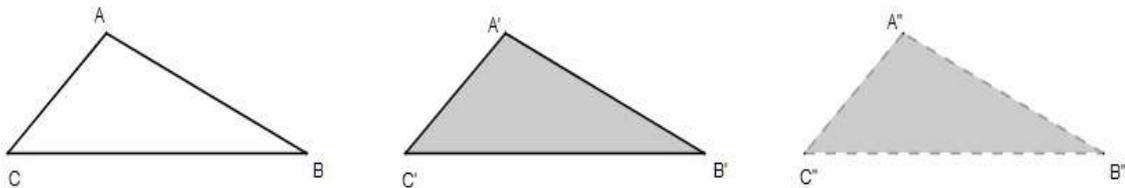


Figura 3: Fronteira (ΔABC); Região Triangular ($\Delta A'B'C'$); Interior ($\Delta A''B''C''$).

Definição 2.3.3 *Região poligonal* é o conjunto determinado pela união finita de regiões triangulares que, duas a duas, não tem pontos interiores em comum. Em outras palavras, se R_k ($k = 1, 2, \dots, n$) são regiões triangulares, para as quais vale $\text{int}(R_i) \cap \text{int}(R_j) = \emptyset$, sempre que $i \neq j$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$), dizemos que o conjunto

$$R = \bigcup_{k=1}^n R_k$$

é uma região poligonal. Um ponto P de uma região poligonal é dito ser *ponto interior* à região R , se existir uma região triangular R_i , contida na região poligonal, de forma que $P \in \text{int}(R_i)$. *Interior* de uma região poligonal é o conjunto de todos os seus pontos interiores.

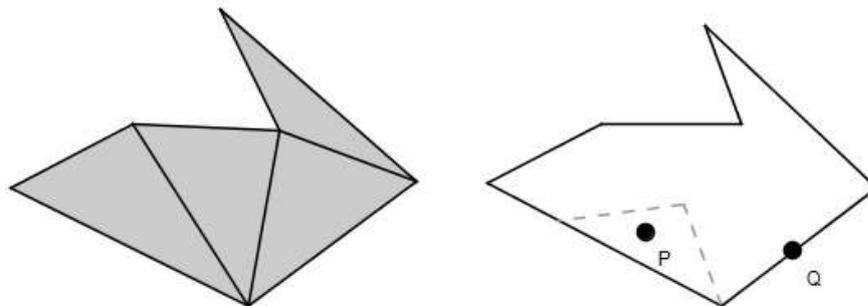


Figura 4: Região Poligonal e Ponto Interior

Fronteira de uma região poligonal é o conjunto dos pontos da região que não são pontos interiores.

Definição 2.3.4 O conjunto constituído por dois pontos e por todos os pontos que se encontram entre eles é chamado *segmento*.

Definição 2.3.5 Um *Polígono é convexo* se o segmento que liga quaisquer dois pontos da região poligonal esta totalmente contida nesta região.

Definição 2.3.6 *Vértice* é o encontro de dois segmentos distintos formando um ângulo α , tal que $\alpha \neq 180^\circ$.

Definição 2.3.7 Dois segmentos (ângulos), são *congruentes* se eles possuem a mesma medida. Utilizamos o termo congruentes para diferenciar do termo igual que significa, matematicamente, o mesmo objeto matemático.

Definição 2.3.8 Um *quadrilátero* é a figura formada pela união de quatro segmentos distintos dois a dois formam um vértice, que chamamos de lados.

Definição 2.3.9 Dois Segmentos são ditos *Paralelos* se eles podem ser tomados sobre retas de forma que estas retas não se interceptem.

3 O CÁLCULO DE ÁREAS

Os axiomas já apresentados são relativos às áreas de figuras planas, vamos então apresentar e demonstrar as seguintes fórmulas, relacionadas ao cálculo de área de algumas figuras geométricas planas.

3.3 Área de um quadrado

3.1.1. Definição *Quadrado* é um quadrilátero que tem os quatro lados congruentes e os quatro ângulos retos.

3.1.2. Teorema A área de um quadrado Q , de lado l , é determinada por $A(Q) = l^2$.

Demonstração. Seja Q um polígono quadrado convexo cujo lado mede l , portanto, determina uma região poligonal R_{ABCD} . Assim, o *axioma 2.2.1* afirma que existe $a(Q) > 0$, em que a representa a área do quadrado. A critério de organização, vamos separar a demonstração em três casos: l é inteiro positivo, l racional positivo e l irracional positivo.

Caso 1. l inteiro positivo.

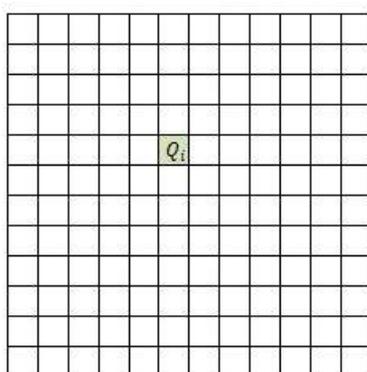


Figura 1: Regiões Poligonais do Quadrado

Como l é um inteiro positivo, vamos dividir cada lado em l partes congruentes, por meio de segmentos paralelos aos lados do quadrado, cuja existência é garantida pelo *axioma das paralelas*.

Nesse sentido, subdividimos a região Q em l^2 regiões quadradas $Q_i, i = 1, 2, \dots, l^2$. Os quadrados Q_i , por construção, possuem lado com medidas iguais a 1, então, pelo *axioma 2.2.4*, $a(Q_i) = 1$. Os quadrados Q_i possuem interiores, dois a dois, disjuntos. Nestas condições, temos que,

$$Q = \bigcup_{i=1}^{l^2} Q_i.$$

Como $int(Q_i) \cap int(Q_j) = \emptyset$, sempre que $i \neq j$, segue pelo *axioma 2.2.2*:

$$a(Q) = \sum_{i=1}^{l^2} a(Q_i) = \sum_{i=1}^{l^2} 1 = l^2.$$

■

Caso 2. l racional positivo.

Considere, inicialmente, um quadrado Q' cujo lado mede $\frac{1}{n}$. Um quadrado unitário Q_u pode ser visto como a união de n^2 quadrados justapostos Q_i , $i = 1, \dots, n^2$, congruentes a Q' , com $\text{int}(Q_i) \cap \text{int}(Q_j) = \emptyset$, $i \neq j$, para $i, j = 1, \dots, n^2$.

Pelo *axioma 2.2.4*, $a(Q_u) = 1$ e, pelo *axioma 2.2.2*, obtemos,

$$1 = a(Q_u) = \sum_{i=1}^{n^2} a(Q_i) = \sum_{i=1}^{n^2} a(Q') = a(Q') \cdot \sum_{i=1}^{n^2} 1 = n^2 \cdot a(Q').$$

Ou seja,

$$1 = n^2 \cdot a(Q') \Rightarrow a(Q') = \frac{1}{n^2}.$$

Retornando ao quadrado Q , de lado $l = \frac{m}{n}$, afirmamos por argumento análogo aos anteriores, que este pode ser dividido em m^2 quadrados justapostos Q_i cujo lado mede $\frac{1}{n}$ com $\text{int}(Q_i) \cap \text{int}(Q_j) = \emptyset$, $i \neq j$; $i, j = 1, \dots, m^2$. Pelo *axioma 2.2.2*, podemos afirmar,

$$a(Q) = \sum_{i=1}^{m^2} a(Q_i) = \sum_{i=1}^{m^2} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{i=1}^{m^2} 1 = \frac{m^2}{n^2} = \left(\frac{m}{n}\right)^2 = l^2.$$

■

Caso 3. Suponha l irracional.

Inicialmente, conjecturamos que $a(Q) = l^2$. Se k_1 é um número qualquer tal que $k_1 < l^2$, mostrar que $k_1 < a(Q)$.

Deste modo, então $0 < k_1 < l^2$, seja r_1 um número racional, em que $k_1 < r_1^2 < l^2$.

Consideremos Q um quadrado Q_{r_1} , com lado igual a r_1 . Como r_1 é racional, temos que $a(Q_{r_1}) = r_1^2$, como Q_{r_1} está contido no interior de Q , temos que $a(Q_{r_1}) \leq a(Q)$, assim $k_1 < r_1^2$, concluindo que $k_1 < a(Q)$, logo $k_1 < l^2$, tal que $k_1 < a(Q)$. Mas, se k_2 , é qualquer número em que $l^2 < k_2$, vamos mostrar que $a(Q) < k_2$.

Deste modo, sendo k_2 um número real, em que $l^2 < k_2$ e seja r_2 um número racional em que $l^2 < r_2^2 < k_2$. Considerando um quadrado Q_{r_2} , com lado igual a r_2 , em que $Q \subset Q_{r_2}$. Como r_2 é racional, temos que $a(Q_{r_2}) = r_2^2$. Como $Q \subset Q_{r_2}$, temos que $a(Q) \leq a(Q_{r_2})$, assim $k_2 < r_2^2$, concluindo que $k_2 < a(Q)$, logo $k_2 > l^2$, tal que $a(Q) < k_2$.

Assim, se $a(Q)$ não pode ser um número k_1 menor que l^2 , como k_2 um número maior que l^2 , deste modo será igual a l^2 . (*tricotomia*).

Se $a(Q) < l^2$, o número $k_1 = \frac{a(Q) + l^2}{2}$, em que $a(Q) < k_1 < l^2$, contradizendo $k_1 < a(Q)$.

Se $a(Q) > l^2$, o número $k_2 = \frac{a(Q)+l^2}{2}$, em que $l^2 < k_1 < a(Q)$, contradizendo $a(Q) < k_2$. De acordo com a tricotomia, segue que $a(Q) = l^2$. ■

3.2 Áreas de um retângulo

3.2.1. Definição *Retângulo* é um quadrilátero em que os lados opostos são paralelos e tem os quatro ângulos retos.

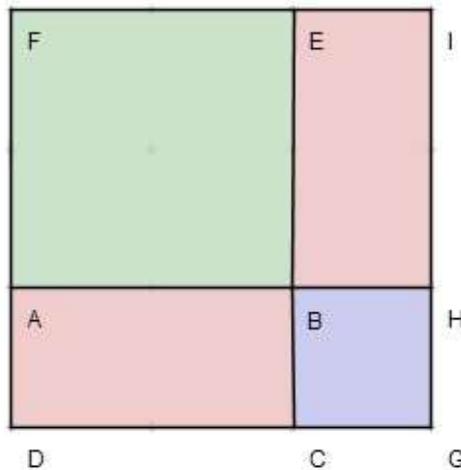


Figura 2: Área do retângulo

3.2.2 Teorema A área de um retângulo R , com base b e altura h , é determinada pelo produto $a(Ret) = b \cdot h$.

Demonstração: Seja R um retângulo com medida da base b e medida da altura h . O retângulo é um polígono convexo com região retangular $R = ABCD$, onde $\overline{AB} = \overline{DC}$ e $\overline{AD} = \overline{BC}$.

Vamos construir um quadrado $ABEF$ sobre o lado \overline{AB} e, outro, $BHCG$ sobre o lado \overline{BC} . Prolongamos o lado \overline{FE} e \overline{GH} , de forma que a intersecção ocorra em I , formando assim um quadrado $Q = DGIF$, cujo lado mede $b + h$, formado por quatro regiões poligonais disjuntas, $R_1(ABCD)$, $R_2(BHCG)$, $R_3(ABEF)$ e $R_4(BHEI)$, com $int(R_i) \cap int(R_j) = \emptyset, i \neq j; i, j = 1, 2, 3, 4$.

Nessas condições temos que:

$$a(Q) = a(R_1) + a(R_2) + a(R_3) + a(R_4)$$

Como, por construção, R_1 é congruente a R_4 , temos que,

$$a(R_1) = a(R_4).$$

Assim,

$$a(Q) = (b + h)^2$$

E, como, $a(R_2) = h^2$ e $a(R_3) = b^2$, então, podemos escrever,

$$(b + h)^2 = b^2 + 2a(R_1) + h^2$$

Concluindo que

$$a(R_1) = a(ABCD) = a(Ret) = b \cdot h.$$

■

3.3 Área de paralelogramos

3.3.1 Definição *Paralelogramo* é um quadrilátero em que os lados opostos são paralelos.

3.3.2 Teorema Considere um paralelogramo $ABCD$, com base \overline{AB} cuja medida é b e com altura \overline{BG} cuja medida é h . Então, a área do paralelogramo é determinada por $a(P) = b \cdot h$.

Demonstração: Seja $ABCD$ um paralelogramo, com base \overline{AB} . Como o paralelogramo um é polígono convexo em que os lados opostos são paralelos, prolongamos \overline{CD} e traçamos uma perpendicular ao lado \overline{AB} passando por A de forma que essa perpendicular intercepte \overline{CD} no ponto F . Por construção análoga, encontramos o ponto E . Desse modo construímos o retângulo $AECF$.

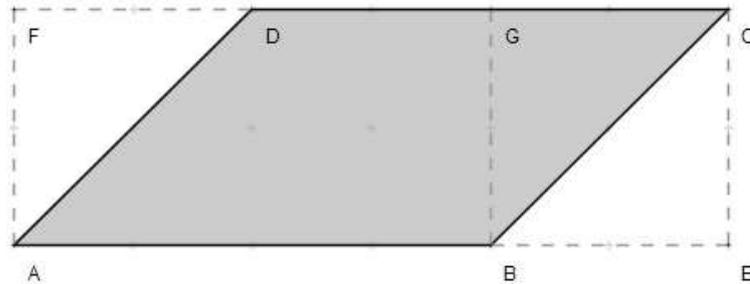


Figura 3: Paralelogramo ABCD

Pela *definição 2.3.7* os triângulos $\triangle BEC \cong \triangle AFD$ são congruentes, deste modo pelo *axioma 2.2.3* possuem a mesma área.

Assim,

$$a(AECF) = a(ABCD) + a(\triangle AFD) + a(\triangle BEC). \quad (1)$$

Como

$$a(BECG) = a(\triangle AFD) + a(\triangle BEC)$$

E pelo *teorema 3.2.2*, temos

$$a(BECG) = \overline{BE} \cdot \overline{EC}$$

Dessa forma,

$$a(\Delta AFD) + a(\Delta BFC) = \overline{BE} \cdot \overline{EC}. \quad (2)$$

Ainda sabemos que

$$a(AECF) = \overline{AE} \cdot \overline{EC}. \quad (3)$$

Por fim, substituindo (2) e (3) em (1), obtemos

$$\overline{AE} \cdot \overline{EC} = a(ABCD) + \overline{BE} \cdot \overline{EC}$$

E, como $\overline{AB} = \overline{AE} - \overline{BE}$, temos que

$$\overline{AB} \cdot \overline{EC} = a(ABCD).$$

Uma vez que $\overline{BG} = \overline{EC}$, concluímos que

$$a(ABCD) = \overline{AB} \cdot \overline{BG} = b \cdot h.$$

■

3.4 Área do Triângulo

Conforme já mencionado neste trabalho,

3.4.1 Definição Dados três pontos A, B e C, não colineares, o *triângulo* ΔABC é o conjunto da união dos segmentos determinados pelos vértices A, B e C, ou seja, $\Delta ABC = \overline{AB} \cup \overline{AC} \cup \overline{BC}$.

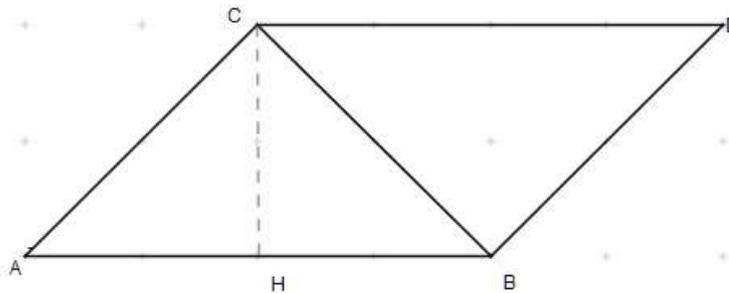


Figura 4: Triângulo ΔABC

3.4.2 Teorema Seja ΔABC um triângulo com base \overline{AB} cujo comprimento denotaremos por b e \overline{CH} , em que H é a altura relativa ao lado \overline{AB} , cujo comprimento denotaremos por h . Então, a área do ΔABC é determinada por $a(\Delta) = \frac{b \cdot h}{2}$.

Demonstração: Dado o triângulo ΔABC , considere uma reta paralela a \overline{AB} e de mesmo comprimento passando por C e uma reta paralela a \overline{AC} e de mesmo comprimento passando por B , de modo que essas duas retas se interceptem no ponto D . Observamos que $ABCD$ é um

paralelogramo com base \overline{AB} e medida b . E ainda, podemos observar também que os triângulos ΔABC e ΔCBD são congruentes e, pelo *axioma 2.2.3*, possuem a mesma medida.

Nesse sentido, temos que

$$a(ABCD) = a(\Delta ABC) + a(\Delta CBD).$$

Mas, pelo *teorema 3.3*, temos

$$a(ABCD) = b \cdot h,$$

Logo,

$$a(\Delta) = a(\Delta BCD) = \frac{1}{2}(b \cdot h).$$

■

3.5 Área do Trapézio

3.5.1 Definição *Trapézio* é um quadrilátero com dois lados paralelos entre si, que são chamados de base maior e base menor.

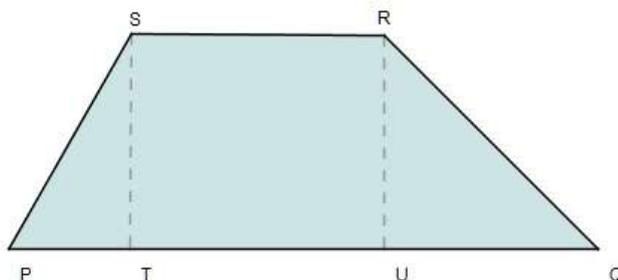


Figura 5: Área do trapézio

3.5.2 Teorema Considere um trapézio $PQRS$, cuja base maior é o lado \overline{PQ} de medida B , e a base menor \overline{SR} de medida b e a altura \overline{ST} é o lado de medida h . Então, a área do trapézio é determinada por $a(T) = \frac{h(B+b)}{2}$.

$$a(T) = \frac{h(B+b)}{2}.$$

Demonstração: Seja $PQRS$ um trapézio tendo como base maior o lado \overline{PQ} de medida B , base menor o lado \overline{SR} de medida b e altura o lado $\overline{RU} = \overline{ST}$ de medida h . Dividimos o trapézio $PQRS$ em dois triângulos e um retângulo, a saber, ΔSPT , ΔRUQ e $SRTU$.

Como $SRTU$ é um retângulo, com base \overline{SR} de medida b e altura \overline{ST} de medida h , temos pelo *teorema 3.2.2* que $a(SRTU) = b \cdot h$, e, como ΔSPT e ΔRUQ são triângulos que tem como bases os lados \overline{PT} e \overline{UQ} , medindo respectivamente b_1 e b_2 , concluímos, pelo *teorema 3.4.2*, que $a(\Delta SPT) = \frac{b_1 \cdot h}{2}$ e $a(\Delta RUQ) = \frac{b_2 \cdot h}{2}$.

Nessas condições temos que

$$a(T) = a(SRTU) + a(\Delta STP) + a(\Delta RUQ)$$

Logo,

$$a(T) = b \cdot h + \frac{b_1 \cdot h}{2} + \frac{b_2 \cdot h}{2}$$

$$a(T) = \frac{2b \cdot h + b_1 \cdot h + b_2 \cdot h}{2}$$

$$a(T) = \frac{h(b + B)}{2}$$

Em que b é a medida de \overline{SR} (base menor do trapézio) e $b + b_1 + b_2$ é a medida de \overline{PQ} (base maior do trapézio).

Logo, concluímos que

$$a(T) = \frac{h(B + b)}{2}$$

■

3.6 Áreas de um losango

3.6.1 Definição *Losango* é um quadrilátero formado por lados de igual comprimento.

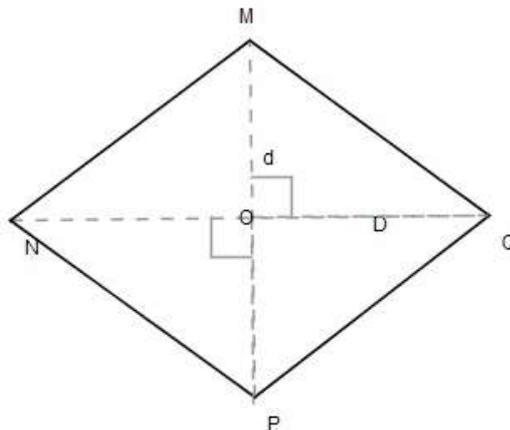


Figura 6: Área do losango

3.6.2 Teorema Considere um losango $MNPQ$, cuja diagonal maior é o lado \overline{NQ} de medida D e a diagonal menor é o lado \overline{MP} de medida d . Então, a área do losango é definida por $a(L) = \frac{D \cdot d}{2}$.

Demonstração. Se considerarmos no losango $MNPQ$ a sua diagonal menor, \overline{PM} temos dois triângulos, o triângulo ΔPNM e o triângulo ΔPQM .

O triângulo ΔPNM , tem base \overline{PM} e altura \overline{ON} e pelo teorema 3.5.2,

$$a(\Delta PNM) = \frac{\overline{PM} \cdot \overline{ON}}{2}$$

E o triângulo ΔPQM , tem base \overline{PM} e altura \overline{OQ} , assim, pelo teorema 3.5.2,

$$a(\Delta PQM) = \frac{\overline{MP} \cdot \overline{OQ}}{2}$$

Dizemos, então que $a(L) = a(\Delta PNM) + a(\Delta PQM)$.

Logo temos que,

$$\begin{aligned} a(L) &= \frac{\overline{PM} \cdot \overline{ON}}{2} + \frac{\overline{PM} \cdot \overline{OQ}}{2} \\ a(L) &= \overline{PM}(\overline{ON} + \overline{OQ}) \end{aligned}$$

Como $\overline{ON} + \overline{OQ}$ é a diagonal maior (D) e \overline{PM} é a diagonal menor (d), temos que

$$a(L) = \frac{D \cdot d}{2}.$$

■

3.7 Área de um círculo

3.7.1 Definição. Dada uma circunferência $C(O, R)$, chamaremos de *círculo* de centro O e raio R ao conjunto de todos os pontos X do plano, tais que $\overline{OX} \leq R$.

Seja C um círculo qualquer de centro O e raio R . Vamos construir polígonos com cada vez mais lados, a fim de nos aproximarmos cada vez mais da área do círculo.

Começamos construindo um quadrado inscrito, depois, tomando o ponto médio de cada arco, ligamos dois vértices a fim de construir um octógono inscrito e prosseguimos da mesma forma construindo polígonos regulares inscritos p_n com 2^n lados, $n \geq 2$. Ou seja, p_2 é o quadrado inscrito, p_3 é o octógono, p_4 é o polígono regular inscrito com $2^4 = 16$ lados, p_5 é o polígono regular inscrito com $2^5 = 32$ lados (figura 11. a) e assim sucessivamente.

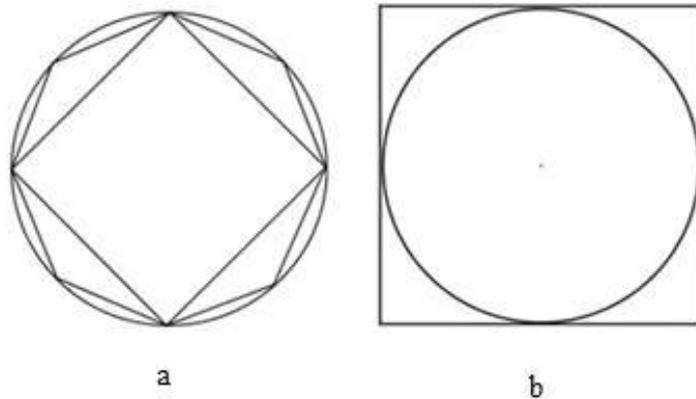


Figura 7: Polígonos inscritos no círculo (a) e quadrado circunscrito (b).

Seja a_n a área de p_n . Por construção, temos que,

$$0 < a_2 < a_3 < a_4 < \dots < a_n < a_{n+1} < \dots$$

A área $a(C)$ do círculo é definida como sendo o $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, se esse limite existir. Como a sequência $\{a_2, a_3, a_4, \dots, a_n, \dots\}$ é monótona crescente, se ela for limitada, também será convergente. Note que tomando o quadrado p_2 circunscrito no círculo (figura 11. b), temos que sua área, $(2R)^2$, é maior do que a área de qualquer polígono inscrito. Logo,

$$0 < a_2 < a_3 < a_4 < \dots < a_n < a_{n+1} < \dots < 4R^2$$

Concluindo que a sequência é limitada, portanto, convergente. Dessa forma, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ existe e $a(C)$ é um número bem definido, verificando $a(C) \leq 4R^2$.

Agora, podemos calcular esse limite, ou seja, podemos calcular a área do círculo:

3.7.2 Teorema A área de um círculo C , com centro em O e raio com medida R é determinada por $a(C) = \pi \cdot R^2$.

Demonstração. Retomando a construção feita até aqui, observamos que o polígono regular inscrito p_n tem 2^n lados e logo, é a união de 2^n triângulos isósceles idênticos. Vamos denotar por l_n o comprimento do lado e por h_n a altura relativa ao lado. Como o ângulo do vértice oposto ao lado do polígono vale $\frac{2\pi}{2^n}$, usando as definições de seno e cosseno, temos, $l_n = 2R \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$ e $h_n = R \cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right)$.

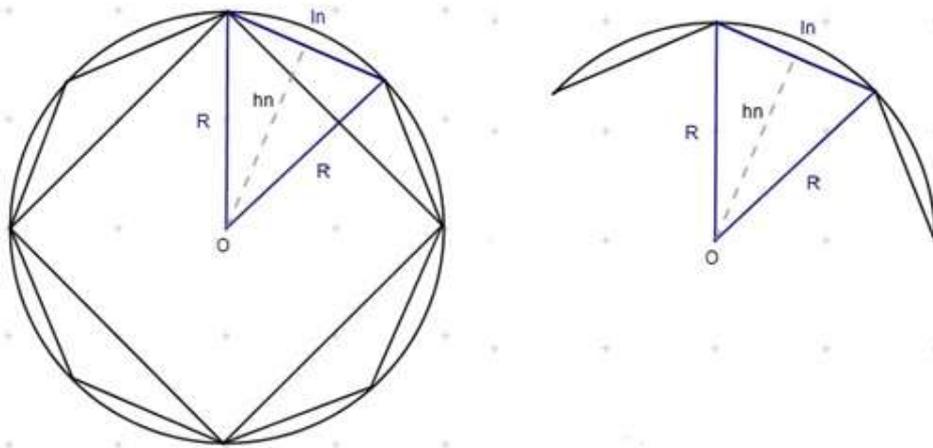


Figura 8: Área do círculo

Assim,

$$a_n = 2^n \cdot \left(\frac{1}{2} l_n \cdot h_n\right)$$

$$a_n = 2^n \left(\frac{1}{2} \cdot 2R \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right) \cdot R \cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right)\right)$$

$$a_n = 2^n \left(R^2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right) \right)$$

A área do círculo é

$$a(C) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2^n R^2 \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right) \right)$$

E, como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right) = \cos\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\pi}{2^n}\right)\right) = 1$$

Temos que

$$a(C) = R^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2^n \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right) \right)$$

Considere um círculo C_1 de raio R_1 , então, sua área é

$$a(C_1) = R_1^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2^n \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right) \right)$$

De maneira análoga, para um círculo C_2 com raio R_2 , tem área,

$$a(C_2) = R_2^2 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2^n \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right) \right)$$

Logo,

$$\frac{a(C_1)}{R_1^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right) = \frac{a(C_2)}{R_2^2}$$

Ou seja, $\frac{a(C)}{R^2}$ é **sempre o mesmo número, qualquer que seja o círculo**. Esta constante universal dos círculos, o número,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(2^n \sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right) \right) = \frac{a(C)}{R^2}$$

é o que convencionamos chamar de π . Usando esta convenção, obtemos:

$$a(C) = \pi R^2.$$

■

4 INVESTIGAÇÕES POR MEIO DE SOFTWARE

Entendendo o método demonstrativo, buscamos promover investigações envolvendo, também, as tecnologias disponíveis. Borba e Vilarreal (apud Domingues; Heitmann; Sobrinho, 2003, p. 131) complementando esta ideia, afirmam que “O conhecimento é produzido em processos que envolvem seres humanos e as mídias utilizadas para sua expressão e comunicação”.

Deste modo, o software escolhido para a realização deste trabalho foi o “Régua e Compasso”, que foi desenvolvido pelo Professor René Grothmann, da Universidade Católica de Berlim, na Alemanha. Um software de geometria dinâmica plana, ou seja, que permite construções geométricas que podem ser modificadas por movimentação de seus pontos básicos e é escrito na linguagem Java (PARANÁ, p. 8, 2010).

Para representar o dinamismo do software, utilizamos de um exemplo interessante envolvendo o conceito de área já trabalhado. Tal exemplo nos remete a interpretação geométrica do Teorema de Pitágoras, porém, a ênfase não é dada a aplicações de tal resultado e sim a construção através do software envolvendo a área de quadrados. Dessa forma, construímos a seguinte figura:

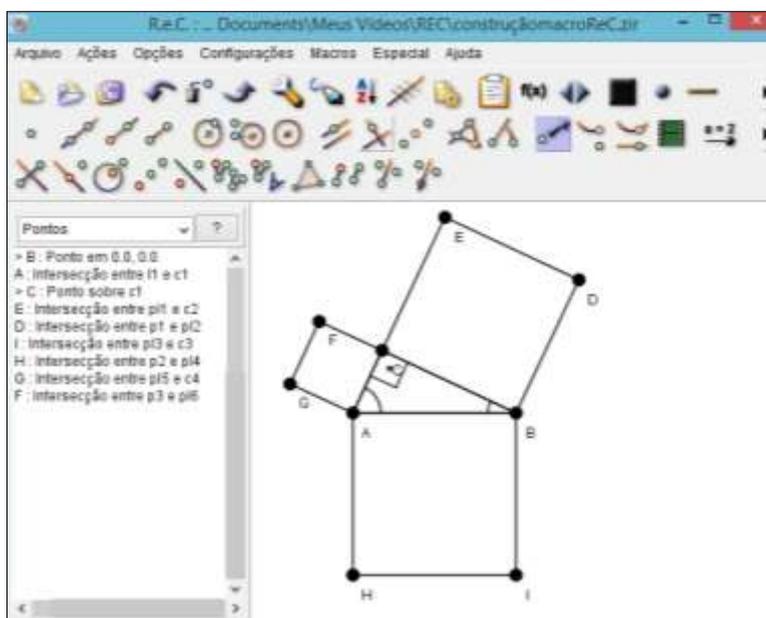


Figura 9: Construção da figura referente a interpretação geométrica do Teorema de Pitágoras.

Este software possui diversas ferramentas e funções que abordam conceitos e demonstrações geométricas, permitindo construir figuras que podem ser modificadas através da movimentação de seus pontos básicos (pontos, retas e círculos), no entanto mantendo suas propriedades originais (PARANÁ, p.9, 2010).

Para realizarmos esta construção utilizamos alguns recursos e ferramentas, tais como, traçar segmentos, criar circunferências e inscrever nestas circunferências quadrados por meio de retas paralelas e segmentos formando ângulos de 90° , do mesmo modo, construímos triângulos retângulos inscritos e por meio da ferramenta “parâmetro de macro” construímos uma macro para cada quadrado, permitindo assim a construção da figura 13.

Conseguimos dar movimento a figura com a intenção de mostrar que independente de tais movimentações, mesmo que as áreas dos quadrados sejam modificadas, a propriedade dada pelo Teorema de Pitágoras, em que a^2 (a hipotenusa ao quadrado) é igual a soma de b^2 e c^2 (soma dos quadrados dos catetos) que, em termos de área, relaciona a soma das áreas de dois dos quadrados com a área do terceiro, ainda será preservada. Ao movimentarmos o ponto B e o ponto C , obtemos a seguinte figura:

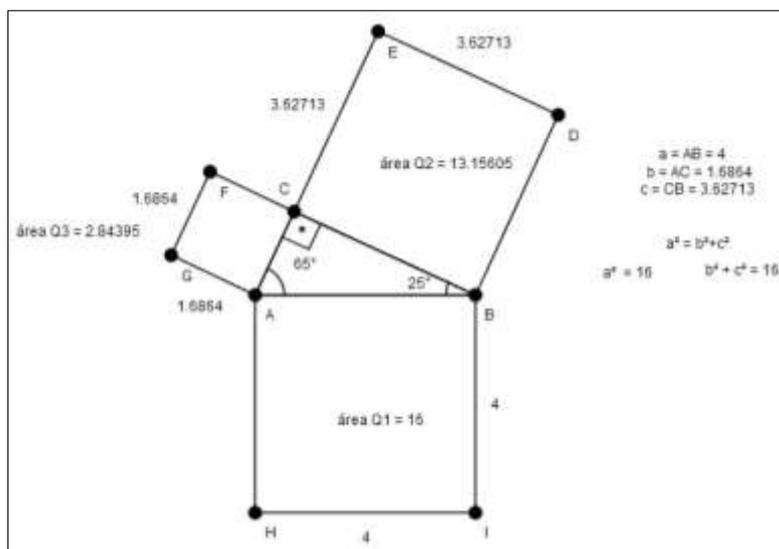


Figura 10: Movimentação dos vértices B e C do triângulo $\triangle ABC$.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Propusemo-nos a apresentar neste trabalho uma abordagem lógico-dedutiva dos conceitos relacionados a áreas de figuras planas. Com isso foi possível perceber o quanto a matemática, como ciência, pode ser formalizada a partir de conceitos e demonstrações, em particular, no campo da geometria plana, fica muito clara a importância da estrutura axiomática e definições.

Trazendo isso para o cotidiano, dentro do contexto deste trabalho, é possível notar, por exemplo, o quanto passa despercebido o fato de que muitas vezes utilizamos desses conhecimentos para o cálculo de área de figuras planas mecanicamente, até mesmo como aprendemos na escola, sem ao menos saber o porquê e sem investigar a veracidade de tais afirmações por meio do rigor matemático da geometria ou ainda, por meio da utilização de uma tecnologia como um software, visando relacionar a percepção visual com os conhecimentos teóricos adquiridos. Isso está diretamente ligado ao nosso trabalho onde além do rigor, buscamos apresentar uma interpretação geométrica dos teoremas e definições apresentados neste trabalho a partir do software livre “régua e compasso”.

Em nosso trabalho, optamos por utilizar um software livre, que está disponível na web para qualquer pessoa, justamente por ser de fácil acesso (<http://www2.mat.ufrgs.br/edumatec/software/soft_geometria.php>, último acesso em 03/02/2015, onde podemos encontrar também outros softwares de geometria e/ou geometria dinâmica). Consideramos, o “régua e compasso”, por exemplo, uma ferramenta pertinente e útil para o trabalho de área das principais figuras planas, podendo ser adotado inclusive nas escolas, pois tal software proporciona uma visualização mais clara das possíveis situações que podemos encontrar, por exemplo, um dos casos que fizemos porém que não foi acrescentado nesse trabalho é o cálculo de área para os vários tipos de trapézios possíveis, mostrando que apesar das diferenças, sua área não se altera. Nosso objetivo ao utilizar da formalidade da demonstração matemática é justamente a generalização, então não escrevemos tais cálculos mas, esse é um dos casos que também podem ser investigados a partir do software e que permite uma interpretação mais completa e ampla a partir da percepção visual. Concluímos assim o quanto a tecnologia tem a contribuir nas construções geométricas trabalhando concomitantemente com a linguagem matemática.

Além disso, espera-se despertar, nos demais acadêmicos, o interesse à pesquisa em Geometria Plana e, possivelmente, que este trabalho possa ser utilizado para novas pesquisas ou, ainda, como leitura complementar em disciplina de Geometria Plana.

6 REFERÊNCIAS

- [1] BARBOSA, M. J. L. Áreas. In: _____. (Org.). **Geometria Euclidiana Plana**. Rio de Janeiro: SBM, 2012.
- [2] CARAÇA, B. J. **Conceitos Fundamentais de Matemática**. Lisboa: Livraria Sa da Costa Editora, 1951.
- [3] CARVALHO, S. P. **A área e o perímetro de um círculo**. UFMG. 2011. Disponível em: <<http://www.sbm.org.br/docs/coloquios/SE-1.02.pdf>>
- [4] CATTONY, C. Áreas Planas: Medições das áreas das principais figuras planas. In: _____. (Org.). **Matemática: álgebra e geometria**. São Paulo: IBRASA, 1979.
- [5] DOMINGUES, N. S.; HEITMANN, F.P; SOBRINHO, G. A. P. Vivências e pesquisas: compondo uma história das tecnologias em 20 anos de GPIMEM. In: BORBA, M.C. ; CHIARI, A. (Org.). **Tecnologias Digitais e Educação Matemática**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2013. p. 133-139.
- [6] EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Tradução de Hygino H. Domingues. 5 ed. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2004.
- [7] FREITAS, B. A. **Introdução à Geometria Euclidiana Axiomática com o Geogebra**. UFJF, Juiz de Fora, 2013. Disponível em: <http://bit.proformat-sbm.org.br/xmlui/bitstream/handle/123456789/297/2011_00149_BRASILIO_ALVES_FREITAS.pdf?sequence=1> Acesso em: 07 jan. 2015.
- [8] MACHADO, P. F. **Fundamentos de Geometria Plana**. Belo Horizonte: CAED-UFMG, 2012.
- [9] MORELATTI, M. R. M.; SOUZA, L. H. G. **Aprendizagem de conceitos geométricos pelo futuro professor das séries iniciais do Ensino Fundamental e as novas tecnologias**. Educar, Curitiba. Editora UFPR. 2006. p. 263-275.
- [10] PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação. Superintendência da Educação. Diretoria de Tecnologias Educacionais. **Régua e compasso, versão 1.1.0: geometria dinâmica**. Curitiba: SEED, 2010. Disponível em: <<http://www.gestaoescolar.diaadia.pr.gov.br/arquivos/file/tutoriais/reguaecompasso.pdf>> Acesso em: 09 jan. 2015. Disponível também em:<<http://www.diaadia.pr.gov.br/multimeios>>
- [11] PENEIREIRO, J. B.; SILVA, M. F. **Geometria Plana e Desenho Geométrico**. UFSM. 2008. Disponível em <<http://w3.ufsm.br/carmen/disciplinas/Geometria/GeometriaPlana.pdf>>. Acesso em: 09 jan. 2015.
- [12] UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL. Educação Matemática e Tecnologia Informática. **Software Régua e Compasso**. Versão 8.6. Disponível em

<http://www2.mat.ufrgs.br/edumatec/software/soft_geometria.php>. Acesso em: 03 fev. 2015.