UNIVERSIDADE FEDERAL DO PAMPA

JOAQUINA SOLANGE FUCHS

INVESTIGAÇÃO DO DESENVOLVIMENTO DA APRENDIZAGEM E DO PENSAMENTO GEOMÉTRICO

ITAQUI
2019

JOAQUINA SOLANGE FUCHS

INVESTIGAÇÃO DO DESENVOLVIMENTO DA APRENDIZAGEM E DO PENSAMENTO GEOMÉTRICO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Matemática - Licenciatura da Universidade Federal do Pampa, como requisito parcial para obtenção do Título de Licenciada em Matemática.

Orientadora: Karla Beatriz Vivian Silveira.

ITAQUI
2019

Ficha catalográfica elaborada automaticamente com os dados fornecidos
pelo(a) autor(a) através do Módulo de Biblioteca do
Sistema GURI (Gestão Unificada de Recursos Institucionais) .

F951i Fuchs, Joaquina Solange
Investigação do desenvolvimento da aprendizagem e do pensamento geométrico / Joaquina Solange Fuchs.
48 p.

Trabalho de Conclusão de Curso(Graduação)-- Universidade Federal do Pampa, MATEMÁTICA, 2019.
"Orientação: Karla Beatriz Vivian Silveira".

1. Pensamento geométrico. 2. Aprendizagem geométrica. 3. Geometria. 4. Modelo de Van Hiele. I. Título.

JOAQUINA SOLANGE FUCHS

INVESTIGAÇÃO DO DESENVOLVIMENTO DA APRENDIZAGEM E DO PENSAMENTO GEOMÉTRICO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Matemática - Licenciatura da Universidade Federal do Pampa, como requisito parcial para obtenção do Título de Licenciada em Matemática.

Trabalho de Conclusão de Curso defendido e aprovado em: 25 jun. 2019.

Banca examinadora:

KSilveira

Prof. Ma. Karla Beatriz Vivian Silveira
Orientadora
(UNIPAMPA)

Prof. Me. Alex Sandro Gomes Leão
(UNIPAMPA)

Prof. Dra. Sonia Maria da Silva Junqueira
(UNIPAMPA)

Dedico este trabalho a minha família, a qual foi meu alicerce durante toda a trajetória acadêmica.

AGRADECIMENTO

Agradeço primeiramente a Deus por tudo e por sempre me mostra os caminhos que devo seguir.

A minha família, pelo incentivo e apoio nas horas difíceis.

Ao meu filho Thalles Fuchs que sempre me incentivou a ir em frente e nunca desistir dos meus sonhos.

Agradeço a minha Orientadora, Prof. Karla Beatriz da Silveira, pela dedicação e carinho destinados a minha formação enquanto aluna e futura docente.

E, por fim, a todas as pessoas que direta ou indiretamente contribuíram com a minha formação acadêmica.

Muito obrigado!

"Não é o conhecimento, mas o ato de aprender, não a posse, mas o ato de chegar lá, que concede a maior satisfação".

Carl Friedrich Gauss

RESUMO

A presente pesquisa tem por objetivo investigar e analisar como se desenvolve a aprendizagem e o pensamento geométrico euclidiano dos alunos do 9º ano do Ensino Fundamental, fundamentada no modelo de Van Hiele. Para tanto, buscou-se fundamentação teórica sobre o desenvolvimento da aprendizagem geométrica e o modelo de Van Hiele, considerando os cinco níveis de aprendizagem relacionados ao ensino da Geometria e sua compreensão. A metodologia adota pressupostos de uma pesquisa qualitativa, de natureza aplicada, com estudo de caso. Foi planejada uma sequência didática e aplicadas no 9º ano do Ensino Fundamental, da Escola Estadual de Ensino Médio Odila Villordo de Moraes, em Itaqui, durante três encontros de dois períodos aula, cada. A coleta de dados deu-se por meio de anotações das observações da pesquisadora durante a investigação e pelas resoluções dos alunos, que foram recolhidas ao término de cada encontro. Quanto aos resultados, verificou-se as dificuldades em (re)conhecer as propriedades, definições e classificações dos conteúdos geométricos trabalhados, considerando os cinco Níveis de van Hiele e as fases de aprendizagem. Concluiu-se o quanto é importante o professor trabalhar a linguagem matemática e desenvolver os conhecimentos geométricos na integra. Constatou-se que a aprendizagem geométrica acontece quando o aluno compreende e se apropria do conhecimento geométrico, utilizando estratégias de resolução e que o pensamento geométrico ocorre quando conjectura sobre os conhecimentos aprendidos, utilizando um raciocínio próprio. Verificou-se a importância dos níveis de aprendizagem que os alunos se encontram e o quanto esta pesquisa é relevante e contribui para a minha formação.

Palavras-Chave: Pensamento geométrico. Aprendizagem geométrica. Geometria. Modelo de Van Hiele.

ABSTRACT

The present research aims to investigate and analyze how the Euclidean learning and geometric thinking of the students of the 9th grade of Elementary School, based on the Van Hiele model, develops. For this, we sought theoretical basis on the development of geometric learning and the Van Hiele model, considering the five levels of learning related to the teaching of Geometry and its understanding. The methodology adopts the presuppositions of a qualitative research, of applied nature, with case study. It was planned a didactic sequence and applied in the 9th year of Elementary School, of the State High School Odila Villordo de Moraes, in Itaqui, during three meetings of two class periods each. Data collection was done by means of annotations of the researcher's observations during the investigation and by the students' resolutions, which were collected at the end of each meeting. As for the results, the difficulties in (re-) knowing the properties, definitions and classifications of the geometric contents worked, considering the five levels of van Hiele and the learning phases, were verified. It was concluded how important it is for the teacher to work on the mathematical language and to develop the geometric knowledge in the whole. It was observed that geometric learning happens when the student understands and appropriates geometric knowledge, using strategies of resolution and that geometric thinking occurs when conjecture about the knowledge learned, using their own reasoning. It was verified the importance of the levels of learning that the students are and how much this research is relevant and contributes to my formation.

Keywords: Geometric thinking. Geometric learning. Geometry. Model of Van Hiele.

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

A Matemática, como é uma ciência que estabelece relações entre o abstrato e a exatidão, está aplicada nas mais diversas áreas e situações da realidade, por permitir ao aluno conceber uma análise de fatos e correspondências, deduzindo representações e propiciando o desenvolvimento de um pensamento crítico e autônomo. A resolução de seus problemas se caracteriza pela formulação de hipóteses, validadas quando acompanhadas das respectivas demonstrações e, associada a estas, evidenciam-se a Geometria Euclidiana, que é uma matemática aplicada e pura, por ser axiomática (EVES, 2004).

No processo de ensino-aprendizagem de Geometria do Ensino Fundamental, convém trabalhar habilidades cognitivas e estabelecer a diferença entre definir e deduzir os conceitos geométricos (BRASIL, 1998), porém, nas escolas públicas, os professores desenvolvem os conteúdos matemáticos na sequência apresentada nos livros didáticos, principalmente as teorias relacionadas à Geometria. Gravina (1996), afirma que os livros didáticos iniciam o estudo da Geometria com as definições das figuras geométricas (nem sempre claras), acompanhadas de desenhos bem particulares. E nestes, dificilmente encontram-se instruções quanto à construção de objetos geométricos usando papel, cola, tesoura e/ou qualquer outro material. Desta forma, cabe ao professor articular as teorias disponíveis no livro didático com o conhecimento científico mediadas por metodologias apropriadas ao ensino dos conteúdos.

É importante para o desenvolvimento intelectual do aluno que os conteúdos sejam trabalhados de forma que os permitam compreendê-los, aprofundá-los e conjecturá-los, pois "[...] o conhecimento é um processo contínuo de construção de novas estruturas, decorrente da interpretação do sujeito com o real, ele não é pré-formado, há uma criatividade continua" (PIAGET, 1977 *apud* PASSOS, 2000). Para tal, o conhecimento geométrico deve ser trabalhado de forma investigativa, inter-relacionando o conhecimento axiomático com a construção. Assim, é importante que o professor saiba planejar a aula de Geometria mediada com as dificuldades de aprendizagem e percepções geométricas dos alunos.

Ao participar do Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (PIBID), no Ensino Fundamental, foi possível constatar um alto índice de dificuldades na aprendizagem dos alunos – principalmente em relação aos conceitos geométricos. Essa percepção incentivou-me a realizar uma pesquisa com a temática "**O desenvolvimento da aprendizagem e do pensamento geométrico euclidiano dos alunos do 9ºano do Ensino Fundamental**", por proporcionar a minha formação no que tange o entendimento de como trabalhar os conceitos geométricos levando em consideração as dificuldades e limitações dos alunos, enquanto futura professora de Matemática. A investigação no tema desenvolvido também auxiliará nas reflexões dos professores e licenciandos do curso de Matemática-Licenciatura da Unipampa, Campus Itaqui, em relação ao ensino de Geometria, fundamentado no modelo de Van Hiele, valorizando a linguagem matemática e o método axiomático. Além disso, a pesquisa contribuirá para inter-relacionar as teorias geométricas das componentes curriculares de Geometria Plana e dos Laboratórios de Ensino com a vivencia/experiência de sala de aula, preparando assim os licenciandos para atuar na educação básica, bem como, a promover cursos extensionistas, visando mediar os conceitos geométricos.

Conforme os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) do 3º e 4º ciclos (BRASIL, 1998, 49), os alunos devem perceber, compreender e inter-relacionar os vários campos do conhecimento matemático para que no Ensino Médio possam ampliá-los, desenvolvendo "capacidades importantes quanto as de abstração, raciocínio em todas as suas vertentes, [...], investigação, análise e compreensão de fatos matemáticos e de interpretação da própria realidade" (BRASIL, 2000, p. 41). Para tal, entende-se que o conhecimento geométrico tem função de conectar a educação com a pesquisa matemática e outros ramos, pois pode-se investigar as dificuldades de aprendizagem em Geometria, utilizar os conceitos e axiomas geométricos relacionando-os a outras áreas, aplicar novas metodologias no ensino desta, bem como contribuir de forma valiosa na construção do conhecimento matemático ao longo do processo da escolarização dos alunos da educação básica (PAVANELLO, 1993).

Pesquisas de Lorenzato (1995), Fainguelernt (1995), Pavanello (1993), entre outros, apresentam distintas razões para a inexistência da Geometria Euclidiana nos diferentes graus escolares e um dos fatores é a Geometria ser axiomática e exigir o pensamento dedutivo e o rigor matemático. Dessa forma, o fato do aluno ser um bom conhecedor de Aritmética e Álgebra não é suficiente para resolver problemas de Geometria, pois não poderá se utilizar da Geometria como um fator altamente facilitador à compreensão e resolução de questões relacionadas a outras áreas do conhecimento humano. E, para acontecer a aprendizagem Geométrica, os alunos precisam desenvolver habilidades, considerando-se três categorias: a compreensão de conceitos geométricos, o conhecimento e utilização de estratégias de resolução e a execução ou resolução de problemas geométricos.

Lorenzato (1995), destaca que um dos objetivos do ensino da Geometria é fazer com que a criança abstraia. Para Pires, Cury e Campos (2000, p. 15 *apud* RÊGO; RÊGO; VIEIRA, 2012, p. 10), a Geometria "[...] desenvolve um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive, além de ser um campo fértil para se trabalhar com situações-problema". Como futura docente, acredito que é fundamental a intervenção pedagógica do professor, mediada por uma metodologia adequada a cada teoria geométrica a ser trabalhada. Além do mais, nas séries mais avançadas, pode-se conceber a Geometria como uma rede de princípios relacionados, formas de raciocínios e sistemas de representações utilizados nas definições e análises dos espaços que nos circundam (BATTISTA, 2007, p. 843 *apud* LOUREIRO, 2009, p. 63).

Para investigar e analisar como se desenvolve a aprendizagem e o pensamento geométrico euclidiano dos alunos, a pesquisa teve caráter bibliográfica, exploratória e qualitativa. Foi aplicada na Escola Estadual de Ensino Médio Odila Villordo de Moraes, em Itaqui, porém no 9º ano do Ensino Fundamental, trabalhando os níveis de aprendizagem geométrica sequencial do modelo Van Hiele, no qual o aluno não consegue alcançar um nível sem ter passado pelos anteriores. O modelo Van Hiele foi proposto na Holanda e constitui-se em cinco níveis de compreensão – denominados visualização, análise, dedução informal, dedução formal e rigor –, que caracterizam o processo de pensamento geométrico do aluno (DE VILLIERS, 2010). O professor, ao trabalhar com esse modelo, aplica atividades adequadas que propiciem seus alunos progredirem em todos os níveis. Os pesquisadores Van Hiele especificaram cada nível de pensamento geométrico identificando generalidades, tornando as propriedades dos níveis significativas aos educadores matemáticos, se tornando capaz de orientar as decisões sobre o ensino de geometria (PASSOS, 2000; DE VILLIERS, 2010).

Nas ações de iniciação à docência acabei por refletir a respeito da seguinte questão: *Como estes alunos aprendiam a geometria?* e *De que forma eles compreendiam e associavam as propriedades geométricas*? e, consequentemente, tomei como problemática de pesquisa **Como se desenvolve a aprendizagem e o pensamento Geométrico Euclidiano dos alunos do 9º ano[1] do Ensino Fundamental, fundamentada no modelo de Van Hiele?**. Dessa forma, priorizando responder a problemática e, consequente, os questionamentos relacionados a ela, determinou-se como objetivo geral de pesquisa **investigar e analisar como se desenvolve a aprendizagem e o pensamento geométrico euclidiano dos alunos do 9º ano do Ensino Fundamental, fundamentada no modelo de Van Hiele.** Ao buscar respostas a essa questão, fez-se necessário investigar alguns fatores, tais como: se eles *possuíam conhecimento dos axiomas de Euclides*, se *compreendiam e abstraíam os axiomas* e

[1] No projeto de Trabalho de Conclusão de Curso I (TCC I) estava previsto a aplicação das atividades de pesquisa numa turma do 8º ano do EF.

relacionavam a escrita simbólica com a definição formal dos entes geométricos, por dar condições aos alunos de compreender “a importância ao tratar de fundamentos e relações na matemática” e fazer “demonstrações abstratas” (CAMPOS; SILVA; CANDIDO, [2018?]).

A fim de responder a problemática, foram trabalhados os conteúdos de Geometria[2] Euclidiana numa investigação matemática pelo modelo de Van Hiele, usando como ferramenta o Floco de Neve e o Triângulo de Sierpinski. Para tal, tornou-se essencial investigar *se conseguiam compreender os conteúdos sobre geometria euclidiana[3] por meio dos níveis de Van Hiele*, visto que a aprendizagem e ensino geométrico passou pelo: reconhecimento (ou visualização), análise, dedução informal, dedução formal e o rigor (DE VILLIERS, 2010). Os fatores supracitados relacionados à investigação propiciaram como *objetivos específicos*: analisar como os alunos desenvolvem as atividades visando à construção dos conceitos e das propriedades geométricas, mediadas pelo modelo de Van Hiele; verificar e analisar se o Triângulo de Sierpinski e a curva de Koch contribuíram na aprendizagem das teorias de geometria euclidiana; e analisar se os alunos relacionam a escrita simbólica com a definição formal dos entes geométricos.

O trabalho de conclusão de curso apresenta três (3) capítulos. O capítulo 1 apresenta fundamentação teórica, descrevendo o desenvolvimento da aprendizagem geométrica e o modelo de van Hiele. O capítulo 2 apresenta os aspectos metodológicos: descrição do tipo de pesquisa, escolha do campo, a descrição dos participantes e a especificação dos instrumentos e procedimentos para análise dos dados. Para a metodologia fez-se um estudo teórico sobre o pensamento geométrico e os níveis de aprendizagem de Van Hiele e o estudo está embasado nos principais pesquisadores como Rodrigues (2015), De Villiers (2010), entre outros. Nesse sentido, planejou-se seis atividades de aula (Apêndices A, B e C), desenvolvidas em três encontros de dois períodos cada, no período matutino. A turma é composta por 22 estudantes e, após o término das atividades mediadas pela pesquisadora, as resoluções foram recolhidas para análise *a posteriori*. O capítulo 3 descreve a execução da sequência didática constituída pelas atividades que foram aplicadas e descreve a análise dos dados coletados a partir da aplicação destas.

O trabalho se encerra com as considerações finais e alguns apêndices e anexos, contendo os planos de aula e as atividades que constituem os instrumentos da pesquisa.

---

[2] Conteúdos geométricos: reta, segmento de reta (congruência, segmentos: coplanares, consecutivos e adjacentes, paralelos e perpendiculares), triângulos equiláteros e retângulos, quadriláteros (quadrado, retângulo, paralelogramo e trapézio retângulo).

2. CONCEITOS GERAIS E REVISÃO DE LITERATURA

Segundo Lorenzato (1995, 2009) o entendimento geométrico permite ao aluno a visualização do espaço, exploração das formas, permitindo o desenvolvimento de habilidades em outras áreas do conhecimento e, para tanto, há necessidade que o aluno compreenda, memorize e relacione as teorias geométricas euclidianas. Assim, como futura professora e para responder o problema de pesquisa foi fundamental ter o conhecimento de como se *"desenvolve a aprendizagem"* e o *"pensamento geométrico"* destes, para tal, é imprescindível compreender *"o que é aprendizagem geométrica"*. Dessa forma, este capítulo foi dividido em duas seções: o desenvolvimento da aprendizagem geométrica e o modelo de Van Hiele.

2.1 O desenvolvimento da aprendizagem geométrica: conceitos e procedimentos geométricos envolvidos

A aprendizagem geométrica se dá quando o aluno está preparado (maduro) o suficiente para compreender e assimilar os conceitos e procedimentos (metodologias) geométricos envolvidos na aprendizagem. Por meio disso, o aluno pode indicar o nível de conhecimento que se encontra, o como está desenvolvendo o seu raciocínio, suas dificuldades ou soluções encontradas.

Soares (2015, p. 66) compreende que é importante e viável considerar a relação do concreto com o abstrato na intervenção das diferentes representações do conhecimento matemático no processo de aprendizagem. Para ele, "[...] os fundamentos do conhecimento matemático, com seu caráter simbólico-abstrato, tem sua origem a partir das muitas experiências do homem com o mundo", o que vem ao encontro às considerações de Kaleff (1994) em relação ao raciocínio espacial, pois a Geometria é considerada como uma ferramenta que inter-relaciona o homem com seu espaço. A pesquisadora (1994, p. 21) afirma que a "visualização e a percepção do espaço em nossa volta" não são favorecidas durante a resolução de atividades matemáticas no Ensino Fundamental. Além disso, salienta que os professores de matemática devem inserir, de forma simples e gradual, a terminologia geométrica para que esta seja um fator ordenador de aprendizagem geométrica.

Para Azevedo e Rêgo (2016, p. 158), "[...] a capacidade de abstração é fundante do próprio processo de criação da linguagem, [...]", pois, para os alunos compreenderem conceitos geométricos, há necessidade destes serem nomeados e exemplificados com uma figura, relacionando-os com respectivos conceitos. Além disso, devem fazer o uso de modelos, diagramas e símbolos para descreverem o conhecimento geométrico. Para Pagliaro (1967, p. 289 *apud* MACHADO, 2011, p. 59) “todo o sinal” é elemento de um sistema originado da abstração de um fato da língua, “independente do seu ponto de partida”.

Janela (2012, p. 184) destaca que a aprendizagem de conceitos de “[...] Geometria envolve uma linguagem, uma simbologia e uma notação próprias, [...]” que devem ser apropriadas gradativamente de forma metódica. Quanto ao raciocínio geométrico, por envolver a construção e a manipulação das representações mentais dos objetos e a conexão destes com a resolução dos problemas, esta autora compreende ser “[...] necessária a comunicação dessa informação, contribuindo assim para a aprendizagem e para o desenvolvimento de uma linguagem matemática adequada. [...]” (p. 192-193), porém, muitos alunos ingressam nos anos finais do Ensino Fundamental sem conhecimento da nomenclatura matemática correta. (BIANI, 2015, p. 64)

Nos conceitos e estratégias de resolução, é fundamental os alunos desenvolverem as habilidades de selecionar e aplicar corretamente estratégias de resolução, fazendo o uso de algoritmos matemáticos, interpretação e (re)produção gráfica, bem como, de construções geométricas. E, finalmente, na aplicação e/ou resolução de problemas é imprescindível selecionarem e utilizarem as estratégias, os modelos e as técnicas matemáticas apropriadas, utilizando o raciocínio lógico e espacial, (re)formulando problemas, interpretando os dados. (PASSOS, 2000)

Ao relacionar ideias matemáticas entre si, os alunos podem reconhecer princípios gerais, como proporcionalidades, igualdade, composição, decomposição, inclusão e perceber que processos como o estabelecimento de similaridades, indução e dedução estão presentes tanto no trabalho com números e operações com o espaço, forma e medidas. Assim, sendo necessário que suas propriedades sejam inseridas nas séries iniciais, para que na sequência do Ensino Fundamental os alunos possam compreender seus fundamentos de forma expressiva. Nesse contexto, Lorenzato (2009, p. 31), afirma que: “[...] o professor pode acelerar o ritmo das atividades dos alunos apresentando questões que os auxiliem em suas reflexões, fazendo acontecer a chamada descoberta dirigida [...]”. Diante disso, a Geometria valoriza a construção do conhecimento, do (re)descobrir, do investigar e conjecturar, possibilitando ao aluno superar este nível ou passar do concreto ao abstrato.

Em sala de aula, a diversidade dos conteúdos e métodos está na multiplicidade de informações relacionadas à teoria geométrica e sua complexidade, não sendo possível determinar “um único caminho, linear, hierárquico” ao trabalhar “os princípios elementares até as abstrações e axiomas" (PASSOS, 2000, p. 49). Quanto ao ensino de Geometria, Pavanello (1993, p. 16) informa aspectos que inquietam os professores, tais como "[...] a ausência da geometria e a ênfase no da álgebra pode estar prejudicando a formação dos alunos por privá-los da possibilidade do desenvolvimento integral do pensamento necessários à resolução de problemas matemáticos [...]". E, uma das metodologias a serem consideradas é o reconhecimento das formas geométricas mais constantes, pela manipulação de objetos e que, também é pouco realizado em sala aula (GRAVINA, 1996 apud PASSOS, 2000, p. 59), pois se percebe que os alunos apresentam pouca compreensão destes, confundindo as propriedades do desenho com as propriedades do objeto e não conseguindo atingir os níveis mentais de dedução ou de rigor.

As características do processo de raciocínio em Geometria são descritas de forma sequencial e hierárquica, caracterizadas pela observação, representação e construção reproduzidas informalmente, formalmente e/ou pelo rigor matemático, propiciando a compreensão e a utilização de conceitos geométricos de maneira própria – conforme o nível de aprendizagem do aluno –, permitindo-o refletir, interpretar, definir, conjecturar, classificar e demonstrar, tornando-se apto a aprender um conhecimento geométrico mais complexo (DE VILLIERS, 2010). Assim, a Geometria proporciona ao aluno do Ensino Fundamental um desenvolvimento amplo de conceitos e raciocínio, viabilizando a compreensão e evolução intelectual e preparando-o para o Ensino Médio.

Para Pais (1996 *apud* NASSER; VIEIRA, 2015, p. 33) existe "[...] quatro elementos fundamentais que intervêm fortemente nos processos de ensino e de aprendizagem da Geometria Plana e Espacial: o objeto, o conceito, o desenho e a imagem mental". Para tal, o desenvolvimento de uma representação conceitual mais aprimorada e significativa se dá a partir da formação da imagem mental por meio do objeto e do desenho. E, de forma natural, inserir a simbologia e linguagem matemática, mediada pela língua materna, o que é proposto nas resoluções de problemas matemáticos por Machado (2011), Lorensatti (2009), contribuindo para a argumentação do aluno, na construção de hipóteses e definições formais e, dessa forma, expressando o rigor matemático.

2.2 Modelo de Van Hiele: investigação do desenvolvimento de aprendizagem geométrica e o pensamento geométrico

O modelo Van Hiele foi desenvolvido em trabalho de doutorado por Pierre Marie Van Hiele e sua esposa Dina Van Hiele Geldof. Campos, Silva e Candido ([2018?], p. 235), salientam que eles propuseram uma distinção entre cinco níveis de raciocínio geométrico e cada nível envolve a "compreensão e a utilização de conceitos geométricos de uma maneira diferenciada", considerando a sua proposta, definição, classificação e demonstração, de forma ordenada e sequencial (RODRIGUES, 2015; DE VILLIERS, 2010; VAN DE WALLE, 2009).

Para Van de Walle (2009, p. 440, grifo do autor) "[...] Uma diferença significativa de um nível ao seguinte são *os objetos de pensamento* – sobre os quais somos capazes de pensar [operar] geometricamente". Nesse sentido, dois alunos, apresentando-se em níveis de raciocínio geométrico distintos, podem descrever o mesmo triângulo isósceles de formas diferentes. Um deles, considerando apenas os dois lados congruentes do objeto geométrico, enquanto que o outro, presumindo a congruência dos ângulos adjacentes à base e dos dois lados do triângulo, relacionando a estes lados, a congruência das respectivas: alturas e medianas, com os vértices opostos e mediatrizes. Este autor (2009, p. 440) afirma que o desenvolvimento do pensamento geométrico depende do objeto de pensamento e que, conforme o nível de aprendizagem do indivíduo, descreve "[...] como pensamos e quais os tipos de ideias geométricas sobre as quais pensamos [...]" do objeto (concreto ou mental), independentemente da quantidade de conhecimento que temos sobre o mesmo.

Júnior e Silva (2014, p. 4) ressaltam que "[...] o modelo não considera como fator determinante da aprendizagem da geometria, ou do desenvolvimento do pensamento geométrico, a idade cronológica, mas sim a forma pela qual o ensino é estruturado". No desenvolvimento dos níveis, o importante é perceber que:

> [...], a crescente complexidade do objeto concreto: dos elementos básicos passou-se às suas propriedades, às relações entre propriedades, às cadeias de propriedades e às propriedades das cadeias. A despeito de sua linearidade e da finitude da sequência de patamares, além da aparência de certa arbitrariedade na fixação do número de níveis, o modelo de Van-Hiele tem o inequívoco mérito de destacar a relatividade da noção do objeto concreto, bem como o papel de mediação desempenhado pelas abstrações. E chama a atenção para o fato fundamental de que, percorrendo-se uma via adequada, como são os sistemas formais, como objetos concretos, plenos de conteúdos de significações (MACHADO, 2011, p. 58).

Em relação a estruturação dos níveis de aprendizagem geométrica, Rodrigues (2015, p. 45) ressalta que esta organização "[...] se deu por influência da teoria piagetiana, identificando quatro fatores atuantes no processo de desenvolvimento cognitivo: maturação, experiência com o mundo físico, experiências sociais e equilibração [...]", tendo como foco o processo de ensino-aprendizagem.

O primeiro nível é a *visualização*, e nesse se dá o reconhecimento, a identificação e a reprodução das figuras geométricas por meio de suas formas, características físicas, dando início à familiarização com a linguagem geométrica. (RODRIGUES, 2015; DE VILLIERS, 2010) Por exemplo, o aluno ao visualizar um triângulo, identifica que este tem três vértices e três lados.

O objetivo geral deste nível é

> [...] explorar como as formas são parecidas e diferentes e usar essas ideias para criar classes de formas (tanto fisicamente quanto mentalmente). Algumas dessas classes de formas possuem **nomes** – retângulos, triângulos, prismas, cilindros e assim por diante. As **propriedades** das formas, tais como lados paralelos, simetrias, ângulos retos e assim por diante, estão incluídas nesse nível, mas apenas de uma maneira **informal** e **observacional** (VAN DE WALLE, 2009, p. 440, grifo do autor).

Janela (2012, p. 36), afirma que “a percepção humana é muito visual, por isso o recurso a aspectos visuais e representações em tarefas matemáticas é natural e é uma parte integrante do desenvolvimento dessas tarefas [...]”. Segundo esta pesquisadora, a visualização é fundamental “[...] na descoberta de novas relações entre objectos matemáticos e na descrição e comunicação dos processos que são característicos da actividade matemática” (p. 37), por não predominar somente no início do pensamento matemático e contribuir na organização das relações entre os sistemas representacionais.

No segundo nível se dá a *análise*, e por meio dela o aluno compreende as características físicas pela experimentação e observação dessas, percebendo as respectivas propriedades, tais como, diferençar os triângulos por meio de seus ângulos internos e medidas dos lados (RODRIGUES, 2015; DE VILLIERS, 2010). Nesse aspecto, Van de Walle (2009, p. 441) salienta que os alunos mantêm o uso de “[...] modelos e desenhos de formas, eles começam a vê-las como representantes de classes de formas [...]”, mantendo uma compreensão sofisticada das propriedades dos objetos geométricos.

No nível *dedução informal*, o aluno constitui o processo de pensamento geométrico, organizando inter-relações entre as propriedades das figuras e identificando suas classes (RODRIGUES, 2015; DE VILLIERS, 2010). Por exemplo, descrever um quadrado por meio de suas propriedades mínimas: afirmando que a figura apresenta quatro lados iguais, quatro ângulos retos e o reconhecendo, também, como um retângulo.

Quanto ao conhecimento e a caracterização, Nasser e Tinoco (2011, p. 41) recomendam que os alunos devem “[...] desenvolver atividades que unifiquem esses conhecimentos e que aprimorem a linguagem informal utilizada, levando-os a usar a nomenclatura adequada ao seu nível [...]”. Em relação a este nível, os alunos terão eficiência em “[...] acompanhar e apreciar um argumento dedutivo informal sobre formas e suas respectivas propriedades. As “provas” podem ser mais intuitivas do que rigorosamente dedutivas. Entretanto, há uma apreciação de que um argumento lógico é necessário [...]” (VAN DE WALLE, 2009, p. 442, grifo do autor), fazendo distinção entre os objetos geométricos planos e espaciais, determinando semelhanças e diferenças de figuras (em pares) por meio da observação e comparação, construindo conceitos.

Esses três primeiros níveis são fundamentais para o aluno abstrair os conhecimentos geométricos compreendidos e apreendidos e se familiarizar com expressões (linguagem) matemáticas específicas da Geometria Euclidiana (DE VILLIERS, 2010; VAN DE WALLE, 2009). Em relação à linguagem matemática específica, Azevedo e Rêgo afirmam a importância do professor promover relações entre a língua materna e a linguagem matemática, tornando claro que “[...] a língua materna é a principal forma de linguagem humana, mas não é única, uma vez que somos seres simbólicos e fazemos uso de linguagens complexas e plurais como imagens, gráficos, sinais, sons, gestos, expressões, cheiros, entre muitos outros” (SANTAELLA, 1988 *apud* AZEVEDO; RÊGO, 2016, p. 159). Para Machado (2011, p. 101) “[...] a Matemática erige-se, desde os primórdios, como um sistema de representação original; aprendê-lo tem um significado de um mapeamento da realidade, como no caso da Língua [...]”, por associar-se intensamente com o desenvolvimento da capacidade de “interpretar, analisar, sistematizar, significar, conceber, transcender o imediatamente sensível, extrapolar, projetar” (idem, 2011, p. 101), pois os objetos matemáticos foram construídos a partir da realidade mapeada, sem correspondência com qualquer outro tipo de sistema prévio.

No quarto nível, *dedução formal,* o aluno deduz axiomas, fazendo inter-relações desses com as definições e teoremas. Passa a realizar e compreender a condição necessária e suficiente, bem como desenvolver diversas maneiras de demonstrar (CAMPOS; SILVA; CANDIDO, [2018?], p. 235-236). Como por exemplo, demonstrar as propriedades dos triângulos e quadriláteros usando os casos de congruência de triângulo.

Por meio do pensamento anterior, os alunos promovem conjecturas compreendendo propriedades específicas dos objetos de pensamento, considerando a veracidade e precisão. Assim,

> [...] Quando essa análise dos argumentos informais começa a ocorrer, a estrutura de um sistema completo – com axiomas, definições, teoremas, corolários e postulados –

> começa a se desenvolver e pode ser apreciada como um meio necessário de estabelecer verdades geométricas. Neste Nível, os estudantes começam a apreciar a necessidade de um sistema lógico fundamentado sobre um conjunto mínimo de suposições e do qual, outras verdades possam ser derivadas [...] (VAN DE WALLE, 2009, p. 443).

Nesse sentido, por exemplo, os alunos têm vontade de demonstrar por meio de premissas dedutivas que as alturas dos vértices opostos em relação aos lados congruentes de um triângulo isósceles são congruentes.

No quinto nível, o *rigor*, o aluno abstrai o conhecimento Geométrico Euclidiano, trabalhando vários sistemas axiomáticos e reconhecendo e estudando geometrias não-euclidianas. Sendo assim, o ato de provar que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180° seria um exemplo de estabelecimento e demonstração de teoremas em geometria. Dessa forma, Van de Walle (2009, p. 443) ratifica que "[...] no nível mais elevado da hierarquia da Teoria dos van Hiele, os objetos de atenção são os próprios sistemas axiomáticos, não apenas as deduções dentro de um sistema. Há uma apreciação das distinções e relações entre diferentes sistemas axiomáticos [...]", complementando que "[...] por exemplo, a geometria esférica é baseada em linhas traçadas sobre uma esfera em vez de um plano ou espaço ordinário" (idem, 2009). Assim, no último nível, os inúmeros sistemas axiomáticos da geometria são utilizados na equiparação (comparar/confrontar) dos objetos de pensamento. (JÚNIOR; SILVA, 2014)

Nestes dois últimos níveis se potencializa a maturidade de conhecimento geométrico e propicia ao aluno a condição de aprofundar e ampliar os conceitos e definições, bem como relacioná-los com outras áreas do saber. De Villiers (2010) expõe que o modelo de Van Hiele *está fundamentado em experiências educacionais apropriadas* e *que o comportamento do aluno se dá a partir do nível inicial*, obedecendo a ordenação de aprendizado – hierarquia –, sem transpor níveis de aprendizagem para compreender melhor o espaço em que vive. Este autor (2010) saliefnta que é de responsabilidade do professor planejar atividades que contribuam para os alunos progredirem em cada nível.

Em relação às condições do professor, Van de Walle (2009, p. 444), afirma que nem todos conseguem fazer os alunos evoluírem de um nível para outro e que "[...] todos os professores devem estar conscientes de que as experiências fornecidas aos alunos serão o fator simples mais importante ao tentar fazer as crianças subirem essa escada desenvolvimentista [...]". Em contrapartida, também devem estar preparados para perceber algum desenvolvimento no pensamento geométrico desses alunos ao longo do curso de um ano letivo.

Rodrigues (2015, p. 46-47, grifo nosso) afirma que cada um dos níveis apresenta características globais distintas, reunidas com algumas propriedades, tais como: a *sequencial* – o aluno deve passar por todos os níveis, na sequência –; o *avanço* – o aluno só troca de nível se atingir os objetivos propostos para os conteúdos do nível anterior –; o *intrínseco* e *extrínseco* – Os objetivos implícitos num nível tornam-se explícitos no nível seguinte –; a *linguística* – o aluno utiliza a linguagem própria de cada nível e um conjunto de relações interligadas – e, a *combinação inadequada* – o professor deve planejar a aula e o material didático de acordo com o nível de aprendizagem do aluno, bem como o uso de vocabulário compatível a este.

Em relação às características, Campos, Silva e Candido ([2018?], p. 236) salientam que estas “[...] são bastante significativas para compreender o modelo e posteriormente aplicá-lo ao plano de ensino de Geometria”, destacando a: sequencialidade, linguagem, localidade e continuidade. Para essas autoras, na *Sequencialidade*, é importante o domínio dos “[...] conhecimentos e estratégias de um nível de raciocínio no avançar para o nível seguinte [...]”; quanto à *Linguagem*, o professor deve respeitar as “[...] palavras próprias de cada nível [...]”, cuidando “[...] a maneira de expressar suas instruções, que são fundamentais para o aluno avançar de um nível a outro [...]”. Quanto à *Localidade*, cabe ao professor perceber qual (ou quais) nível(is) que o aluno se encontra, dependendo do domínio dos conceitos geométricos envolvidos. E, em relação à *Continuidade*, as autoras consideram que pelo fato dos níveis terem sido descritos “[...] como escadas de um degrau [...]”, aparentando saltos inesperados entre os níveis, os alunos produzem resultados comportamentais na apropriação dos conhecimentos geométricos a partir de um período de transição.

Para Jaime e Gutierrez (1990 *apud* RODRIGUES, 2015, p. 63) é pertinente investigar em que nível de pensamento geométrico os sujeitos se encontravam, sendo válido observar que “[...] um aluno pode estar situado em um determinado nível na aprendizagem dos conceitos geométricos segundo a teoria de van Hiele, mas domina algumas habilidades do nível seguinte [...]”. Assim, em relação às fases: a ação dirigida, a explicação, a orientação livre e a integração, que não estão ligadas a um nível específico, significando que cada nível de raciocínio deve perpassar por todas elas. Além disso, a ação pedagógica do professor – o método, a organização do planejamento, os conteúdos e os materiais – é muito importante no processo de ensino-aprendizagem do aluno.

Junior e Silva (2014, p. 6) salientam a importância dos livros didáticos considerarem "[...] o modelo de van Hiele, procurando estruturar o conteúdo de forma que atenda a hierarquia dos níveis, possibilitando com isso uma aprendizagem significativa da geometria [...]". Além disso, pode contribuir para os alunos se familiarizarem com os termos específicos da linguagem matemática, mesmo que alguns deles se apresentem em nível de raciocínio anterior. Para Nassar e Vieira (2015, p. 27), Van Hiele determina que "[...] o progresso de níveis na aprendizagem de Geometria passa por fases em que a comunicação é fundamental, e que a aprendizagem significativa só ocorre quando o discurso do professor, o material didático (livro texto) e o aluno estão emparelhados num mesmo nível". Para tal, o professor deve estar preparado para ser observados/mediados do processo de ensino-aprendizagem e o aluno, deve ser participativo, atuante e responsável com sua própria aprendizagem.

3. METODOLOGIA

Na presente pesquisa, aplicou-se uma metodologia investigativa com intuito de nortear a coleta de dados e conduzir o pesquisador à descoberta do conhecimento teórico, desenvolvendo um caráter bibliográfico e exploratório. De acordo com Otani e Fialho (2011, p. 38), a pesquisa bibliográfica nos permite obter dados por meio de materiais publicados. Nesse sentido, desenvolveu-se uma pesquisa básica pura (ADELAIDE UNIVERSITY, 2008 *apud* GIL, 2010, p. 26-27), ou seja, com ênfase apenas na ampliação do conhecimento relacionado ao referencial teórico. Para tal, coletou-se dados teóricos referentes ao *desenvolvimento da aprendizagem geométrica e do pensamento geométrico*, bem como *o Modelo de Van Hiele* (grifo nosso) – em livros, revistas, artigos, dissertações e teses –, que foram analisados e contextualizados a orientar na busca da solução do problema de pesquisa descrito "**Como se desenvolve a aprendizagem e o pensamento Geométrico Euclidiano dos alunos do 9º ano do Ensino Fundamental, fundamentada no modelo de Van Hiele?**".

O caráter exploratório se deu pela necessidade de "[...] levantamento bibliográfico e coleta de dados" (GIL, 2002 *apud* OTANI e FIALHO, 2011, p. 36) e, para tal, empregou-se a técnica classificada como documentação direta, pelos dados coletados na escola, objetivando refletir claramente sobre a prática desenvolvida por meio do conhecimento teórico e análise dos dados coletados afim de se familiarizar e responder a problemática (RODRIGUES, 2015, p. 51).

A pesquisa foi de natureza aplicada, por ser uma aplicação prática e voltada à solução de problemas específicos. Quanto à abordagem do problema, esta pesquisa foi de cunho qualitativa, que "[...] é vista como uma relação entre sujeitos, portanto dialógica, na qual o pesquisador é uma parte integrante do processo investigativo [...]" (NEVES; DOMINGUES 2007, p. 57 *apud* RODRIGUES, 2015, p. 51). Quanto à análise qualitativa, Rodrigues (2015) evidencia que "[...] pode ter apoio quantitativo, contudo geralmente se omite a análise estatística ou seu emprego não é sofisticado" e nesse sentido, a análise dos dados foi executada de modo intuitivo e indutivo, buscando estabelecer verdades em relação à temática "**O desenvolvimento da aprendizagem e do pensamento geométrico euclidiano dos alunos do 9ºano do Ensino Fundamental**" estudada e os respectivos resultados.

Em relação às fontes de informação, desenvolveu-se uma coleta de campo, com aplicação de uma sequência didática previamente planejada desenvolvida na Escola Estadual de Ensino Médio Odila Villordo de Moraes, em Itaqui. A aplicação das atividades de investigação, prevista no projeto de TCC I, ocorreria numa turma do 8º ano desta escola, porém, por questões alheias a nossa vontade, trabalhou-se em apenas três encontros de duas horas aulas cada, no 9º ano do Ensino Fundamental, turma B, no período matutino, tendo 22 alunos como sujeitos da pesquisa.

A escola deu início as suas atividades em 1980 em um prédio de madeira junto ao Núcleo Habitacional Promorar, com 279 alunos matriculados. Em 1991, mudou-se para o atual prédio localizado na Rua Atanásio José Lopes, nº 1771, no Bairro Cafifas de Itaqui. A escola funciona nos períodos matutino, vespertino e noturno, oferecendo à comunidade o Ensino Fundamental e o Ensino Médio (regular e Educação de Jovens e Adultos), atendendo em média 980 alunos matriculados no total. O grupo de servidores é composto de 15 funcionários e 70 professores. Destes, nove (9) professores são da área da Matemática, atuantes nos três turnos escolares. A preferência pela escola Odila, enquanto campo de pesquisa, se deu em razão de ter realizado meus dois estágios e também pela receptividade no ambiente escolar.

Em relação aos procedimentos técnicos, foi desenvolvido um estudo de caso, por envolver a participação efetiva da pesquisadora e as ações dos alunos do 9º ano, turma B. Sendo trabalhados os conteúdos: reta, segmentos de retas – segmentos colineares, consecutivos, adjacentes e segmentos congruentes –, paralelismo e perpendicularidade entre segmentos, triângulos e quadriláteros, de modo que os alunos registraram em folhas quadriculadas os passos da resolução das situações-problema (FIORENTINI; LORENZATO, 2012, p. 98-99), de tal forma que eles perpassem pelos cinco níveis de compreensão e as cinco fases de aprendizagem do modelo de Van Hiele.

Num primeiro momento, foi desenvolvida a investigação de cunho bibliográfico acerca de conhecimentos que nortearam a busca da compreensão sobre o problema de pesquisa. Os conceitos centrais da pesquisa foram o “desenvolvimento da aprendizagem geométrica”, o “desenvolvimento do pensamento geométrico” e o “modelo de Van Hiele”. Além disso, pesquisas disponíveis em livros, revistas, artigos, dissertações e teses foram objeto de leitura atenciosa, obtendo dados essenciais para fundamentar o planejamento da sequência didática e principalmente, a análise dos resultados.

3.1 Sequência Didática: instrumento da pesquisa

Num segundo momento, planejou-se ~~s~~equências didáticas com os conteúdos supracitados para serem aplicados. Como instrumentos motivadores, utilizou-se os fractais Triângulo de Sierpinski e curva de Koch (Floco de Neve) como ferramentas de ensino e assim, tratar as propriedades e axiomas relacionados aos conhecimentos geométricos euclidianos de reta, segmentos, paralelismo, perpendicularidade, triângulos e quadriláteros. Para Barbosa (2005, p.10) “[...] a estrutura fragmentada do fractal fornece certa ordem ao Caos e busca padrões dentro de um sistema por vezes aparentemente aleatório”. E, estes dois modelos de fractais contribuiriam na verificação dos cinco níveis de Van Hiele após a realização das atividades acerca do conteúdo de geometria euclidiana. Esperava-se que tais instrumentos, motivassem os alunos à investigação, levando-os a compreender a definição formal pelo rigor matemático, possibilitando “[...] um alicerce visual intuitivo (Van Hiele 1) para vários conteúdos geométricos, [...]” (DE VILLERS, 2010, p. 407), pois por meio dos fractais escolhidos o professor poderia trabalhar: semelhança, simetria e reflexão de triângulos e quadriláteros.

Foram elaboradas seis atividades distribuídas em três (3) planos de aula e, na intenção de aproveitar o tempo de aplicação da sequência didática na exploração dos conhecimentos geométricos, mediação das atividades e coleta de dados, tais atividades foram disponibilizadas aos alunos em material impresso. As situações-problema compreenderam os níveis: a *visualização*, a *análise*, a *dedução informal*, a *dedução formal* e o *rigor*, assim como as cinco fases de aprendizagem – a *interrogação informada*, a *orientação dirigida*, a *explicação*, a *orientação livre* e a *integração* – do modelo de Van Hiele.

A questão 1 (Apêndice A) tinha como proposta os alunos construírem a curva de Koch (Floco de Neve), usando régua, compasso e folha quadriculada, seguindo quatro passos de construção. Por meio desta, deveriam apresentar conhecimentos relacionados à: reta; segmentos de reta; segmentos colineares e congruentes, consecutivos e não consecutivos e adjacentes. Para verificar a aprendizagem geométrica e o pensamento geométrico, esta questão priorizava os Níveis 1 e 2 de van Hiele e à medida que os alunos iriam desenhando, o professor/pesquisador orientaria possíveis dificuldades, bem como faria perguntas para identificar os conhecimentos prévios. Após a construção completa do fractal, priorizados na atividade, os sujeitos da pesquisa deveriam descrever (informalmente) os objetos geométricos e na sequência, juntamente com o professor, escreveriam a definição formal destes, bem como, usariam a linguagem matemática (símbolos e notações) para promoverem comparações em relação as medidas dos segmentos, trabalhando, de forma muito simples os Nível 3 e 4 de van Hiele, assim como, introduzindo o Nível 5.

A questão 2 (Apêndice A) foi pensada como uma revisão dos conhecimentos geométricos trabalhados na atividade anterior, com intuito de verificar se estavam se familiarizando com as nomenclaturas próprias da geometria, notações e símbolos matemáticos. Os alunos deveriam realizar mais dois passos da curva de Koch e identificar pares de segmentos: colineares, adjacentes, consecutivos e igualmente, comparar segmentos. Essa questão priorizava os Níveis 1, 2 e 3 de van Hiele.

A questões 3 (Apêndice B) foi estruturada para ser verificado os Níveis 1, 2 e 3, por meio do Triângulo de Sierpinski construído no Geogebra. Os alunos deveriam classificar os triângulos quanto à medida de seus lados, revisar os segmentos consecutivos, colineares e adjacentes, sendo que nas atividades anteriores já haviam sido trabalhados. Por meio desta questão, deveriam apresentar conhecimentos supracitados, fazendo o uso da linguagem matemática novamente. Também seria introduzido os conceitos geométricos de segmentos concorrentes e paralelos, bem como triângulos semelhantes. A questão 4, também no Apêndice B, traria como proposta a fixação das propriedades dos triângulos semelhantes, bem como a definição formal e linguagem matemática, priorizando os Níveis 1, 2, 3 e 4 de van Hiele.

Em relação a questões 5 (Apêndice C), por meio do Triângulo de Sierpinski construído no Geogebra, foram propostos o reconhecimento de triângulo retângulo e a nomenclatura de seus lados, fixação dos conceitos geométricos sobre: segmentos paralelos, perpendiculares, concorrentes; triângulos semelhantes e congruentes. Nesta situação-problema foi considerado os Níveis 1, 2, 3 e 4 de van Hiele. Na questão 6, disponibilizada no mesmo Apêndice, visava a identificação dos quadriláteros paralelogramo, quadrado, retângulo e trapézio por meio de suas propriedades, bem como a revisão dos segmentos paralelos, perpendiculares e congruentes, buscando priorizar os quatro primeiros níveis do modelo de Van Hiele.

Num terceiro momento, aplicou-se a sequência didática e à medida que elas foram sendo desenvolvidas em aula, as ações dos alunos foram mediadas pela pesquisadora, apontando-se os dados relacionados ao desenvolvimento da aprendizagem e do pensamento geométrico dos alunos no diário de campo – na forma de relato. Os sujeitos da pesquisa deveriam resolver as questões em folhas quadriculadas, utilizando lápis, e entregá-las ao final de cada encontro para posterior análise dos resultados. As anotações no diário de campo, juntamente com as respostas das situações-problema desenvolvidas pelos alunos constituiriam a coleta de dados da investigação. Na análise documental foram levados em consideração as fases de aprendizagem: interrogação informada, a orientação dirigida, a explicação, a orientação livre e a integração, para cada nível do modelo de Van Hiele, pois concordamos com as afirmações de Rodrigues (2015, p. 54) que “[...] O modelo de pensamento geométrico e as fases de aprendizagem desenvolvidos pelos van Hiele, além de identificar o nível de maturidade geométrica dos alunos indicam caminhos para ajudá-los a avançar de um nível para outro [...]”. Após a análise, apresentamos os resultados e as considerações finais em capítulos posteriores.

4. APRESENTAÇÃO DA PESQUISA E ANÁLISE DOS RESULTADOS

Na intenção de **investigar e analisar como se desenvolve a aprendizagem e o pensamento geométrico euclidiano dos alunos do 9º ano do Ensino Fundamental, fundamentada no modelo de Van Hiele**, buscou-se coletar e analisar os dados após a aplicação da sequência didática.

A turma era composta por 22 alunos, os quais foram subdivididos em grupos – sendo formados cinco (5) grupos de quatro (4) alunos e uma dupla – para resolverem as atividades. Observou-se que, ao serem solicitados a formarem os grupos, os sujeitos da pesquisa não tomaram nenhuma iniciativa, aguardando a intervenção do professor. Cada um recebeu um texto introdutório sobre os fractais (Apêndice A) e realizou-se a leitura do mesmo, bem como, uma breve explicação sobre a curva de Koch e o Triângulo de Sierpinski enquanto ferramenta para o ensino-aprendizagem em geometria euclidiana, por concordamos com Gravina (1996, p. 3) que "[...] o desenho entra aqui como materialização da configuração geométrica, guardando as relações a partir das quais decorrem as propriedades [...]". Após algumas discussões, verificou-se que os mesmos não possuíam nenhum conhecimento sobre o fractal por apresentarem-se bastante surpresos e afirmarem que nunca ouviram falar deste tipo de geometria.

Na questão 1 (Apêndice A) estava proposto a construção da curva de Koch (Floco de Neve) para trabalhar reta e segmentos, foram necessários que os grupos utilizassem lápis, régua, compasso e folhas quadriculadas. À medida que iam construindo a curva, passo a passo, constatou-se que alguns alunos apresentavam dificuldades no manuseio do compasso, precisando da ajuda do professor, bem como, realizando a construção na lousa para uma explicação mais geral. Conforme iam construindo a reta e os segmentos, a pesquisadora (enquanto professora) fez alguns questionamentos (Quad. 1), na intenção de observar se os alunos estavam em conformidade com os níveis 1 e 2 do modelo de Van Hiele que trata do reconhecimento e a análise.

Assim, percebeu-se que a maioria dos alunos construíram a reta somente após a leitura do 2º passo, pois não visualizavam mentalmente a construção de reta para desenhá-la. Também constatou-se que: 13 alunos construíram a reta como segmento AB, posicionando os pontos nas extremidades da construção; 10 alunos posicionaram os pontos fora dela e/ou bem afastado da mesma (acima e/ou abaixo). Apesar das dificuldades iniciais, verificou-se que todos os alunos dividiram corretamente a reta em três segmentos congruentes.

Em virtude de 13 participantes acreditarem que a reta tem extremidades e que não tem diferença entre uma reta e um segmento de reta, em relação aos Níveis 1 e 2 do modelo de Van Hiele, constatou-se que a maioria deles não têm estes níveis bem desenvolvidos, por não visualizarem mentalmente estas construções geométricas, prejudicando a reprodução no papel. Quanto a isto, De Villers (2010, p. 402) salienta que “[...], é necessário que ocorra uma reorganização significativa de relações e um refinamento de conceitos [...]”, pois estes apresentam um conhecimento intuitivo superficial de reta e segmento de reta, sem perceberem que o segmento é uma parte da reta e que qualquer segmento pode ser estendido em sentidos opostos, determinando (intuitivamente) a ideia de reta. Assim sendo, não conseguem reestruturar o conhecimento com suas próprias definições informais (verbalização), prejudicando a reprodução no papel.

No 4º passo da construção do Floco de Neve (curva de Koch), da mesma questão, em relação ao triângulo CDE, verificou-se que dois (2) alunos não conseguiram construir os segmentos CE e DE corretamente, mesmo utilizando régua. Também, percebeu-se no grupo D que três (3) alunos marcaram o ponto fora da intersecção dos arcos (feita por meio do compasso) e consequentemente, ligaram errado. Na construção dos triângulos congruentes, ΔFGH, ΔMNL, ΔOPQ e ΔIJK, seis (6) alunos conseguiram desenhá-los, utilizando corretamente o compasso. Os demais, tiveram dificuldade no manuseio do compasso, posicionando os pontos nos lugares errados e alguns, também construíram os lados desses triângulos a mão livre. Cabe salientar que à medida que iam realizando a atividade, receberam orientações da pesquisa/professora, pois concordamos com Biani (2015, p. 67) que salienta o quanto é importante “[...] explicar os porquês das respostas ou dos resultados, para desenvolver sua habilidade de argumentação, demonstração e validação de suas hipóteses, ou seja, desenvolver o raciocínio lógico”. Nesse sentido, é importante frisar que os 22 alunos não tiveram interesse em arrumar o que haviam feito na atividade.

Quadro 1 - Questionamento norteador da Questão 1 – do 1º ao 4º passos

Ficha do Professor
Perguntas que o professor fará aos alunos: - O que é uma reta para vocês? - Reta tem extremidades? - A distância do ponto A até o ponto B é uma reta? - Como denominamos esta parte de reta? - Qual é a diferença de reta para segmento de reta?

Fonte: do autor.

Quanto às respostas dos alunos em relação às perguntas do professor (Quad. 1) certificou-se que: a maioria dos alunos do grupo C esperavam que um colega se manifestasse para concordarem. Ao serem questionados se concordavam com o colega, demonstravam dúvidas. No decorrer das atividades, percebeu-se que todos realizaram a construção com muito entusiasmo e interação.

Após a apresentação do exemplo na lousa, os alunos conseguiram diferenciar reta e segmento. Entretanto, os componentes do grupo B não sabiam fazer as questões e mantiveram-se pouco receptivos a tarefa. Em contrapartida, os alunos do grupo A e E demonstraram mais interesse em responder as questões. No grupo D, somente um aluno respondia e os demais concordavam, enquanto que os alunos do grupo D e E afirmaram que não tinham visto ainda esse tipo de atividade na escola. Em relação ao ensino de Geometria na sala de aula, Longo (2015, p. 127) afirma que “[...], é preciso uma busca constante de novas possibilidades, por meio de atividades que se aproximam do educando e estimulam a compreensão daquilo que está sendo abordado”. Ou seja, é possível estimular os alunos a estudarem e aprenderem Geometria a partir da exploração dos conhecimentos prévios e/ou descobertos por meio de atividades diferenciadas, aprofundando a teoria e as propriedades geométricas (NASSER; TINOCO, 2011). Com isso, cabe ao professor evitar a apresentação dos conteúdos em nível muito baixo (ou elevado) e construções de figuras prontas (impressas), permitindo-os evoluir o pensamento geométrico.

Em relação às respostas da Questão 1(a) – dedução informal –, sete (7) alunos descreveram, de forma mais clara, como é uma reta e um segmento de reta. No grupo C, os alunos visualizaram os pontos pertencentes à reta, sem perceberem os segmentos determinados por estes. Assim, não conseguiram definir: segmentos consecutivos, segmentos não consecutivos e segmentos colineares, segmentos adjacentes e congruentes e também, não souberam compará-los em relação a respectivas medidas. Nasser e Tinoco (2011, p. 6), salientam que “[...] por falta de orientação e de experiência neste sentido, muitas vezes, professores trabalham muito pouco a Geometria, e, quando o fazem, exploram quase que somente a aplicação de fórmulas, sem ligação com outros ramos da Matemática [...]" e, consequentemente, prejudicando a aprendizagem em relação às propriedades geométricas. A falta do hábito de desenhar os entes geométricos (com ou sem técnica) e relacioná-los à teoria (abstração) também implica nas dificuldades.

O grupo B não definiu informalmente segmentos adjacentes, talvez por não terem compreendido que estes apresentam uma extremidade comum e são colineares. Um aluno do grupo D respondeu corretamente as definições informais sobre reta, segmento de reta, segmentos adjacentes, mas respondeu de forma incompleta sobre segmentos consecutivos, não consecutivos e colineares. Verificou-se que os demais alunos não souberam comparar os segmentos em relação as suas medidas (congruência). Fainguelernt (1995, p. 49) considera que "[...] não devemos esquecer que a aquisição de um conceito sempre depende da experiência pessoal de cada um" e, nesse sentido, constatamos que estes alunos não tiveram ao longo de seus anos escolares uma grande variedade de concretizações, experimentando construções, medições, comparações e relações na aprendizagem das propriedades geométricas.

Em relação aos alunos do grupo E, responderam as seis primeiras definições de retas e segmentos de retas, segmentos consecutivos e colineares, segmentos adjacentes, comparação de segmentos e segmentos congruentes. No grupo F, um dos alunos descreveu claramente as respostas visualizando os segmentos na reta, consequentemente definindo-os (consecutivos, colineares e congruentes). No grupo A, quase todos responderam, tentando realizar todas as atividades, mesmo que desorganizados e trocando as respostas das questões. Em relação a competência dos alunos no Nível 3, concordamos com Van de Walle (2009, p. 442), ao ressaltar que os alunos "[...] são capazes de acompanhar e apreciar um argumento dedutivo informal estabelecendo as relações existentes entre as figuras e suas propriedades [...]", porém é preciso que tenham o hábito de escreverem definições dos objetos geométricos nas aulas de Matemática.

Na Questão 1(b), as definições formais foram trabalhadas a partir das definições informais escritas pelos alunos, mediadas pela professora/pesquisadora. À medida que ia reescrevendo-as na lousa, os alunos copiavam no caderno. Porém, ao passarem para a folha quadriculada, eles apontaram de qualquer jeito devido ao fato de terem respondido na sequência da questão 1(a). Em relação à utilização da linguagem matemática na identificação de segmentos maior que ou menor que e congruência, estes alunos não conseguiram resolver a atividade, devido ao fato de manterem somente a visualização de pontos e não de segmentos. Para Loureiro (2009, p. 62) "[...] a visualização e o raciocínio visual são uma âncora para o pensamento matemático e também a primeira oportunidade para participarem na actividade matemática [...]".

Em relação à construção do Floco de Neve, os alunos conseguiram em parte, sendo que 20 alunos realizaram toda a construção. Na Questão 2 (Apêndice A), em relação à identificação de segmentos colineares, consecutivos e adjacentes e o uso da linguagem matemática na comparação de segmentos, constatou-se que: no grupo A, dois alunos responderam as questões (a), (b) e (c), mas nenhum teve condições de usar a linguagem matemática; o grupo B, por sua vez, não conseguiu responder as questões, fato que também ocorreu com o grupo C. Em contrapartida, o grupo F respondeu corretamente todas as questões, enquanto que o grupo D, respondeu parcialmente, apresentando uma confusão dos conceitos envolvidos e também sobre a linguagem matemática. Com referência ao papel das abstrações no âmbito do aprendizado da língua matemática, também consideramos que:

> [...] A Língua Materna deveria participar efetivamente dos processos de ensino de Matemática, não apenas tornando possível a leitura dos enunciados, mas sobretudo como fonte alimentadora na construção dos conceitos, na apreensão das estruturas lógicas da argumentação, na elaboração da própria linguagem matemática (MACHADO, 2011, p. 15).

O grupo E respondeu corretamente todas as questões, mas também não compreendeu como usar a linguagem matemática e a simbologia, principalmente pela falta de familiarização com elas. Lorenzato (2010 p. 44), destaca que "nas salas de aula, alunos e professores também enfrentam dificuldades para entender e para explicar o significado da linguagem matemática repleta de símbolos próprios [...]", ocasionando assim o impedimento ao aluno de obter o entendimento necessário das questões, por se caracterizar uma linguagem resumida e precisa.

Na Questão 3 (Apêndice B), as respostas foram diretas e sem justificativas, sendo que as atividades (d) e (h) não foram respondidas por nenhum dos grupos. Quanto ao reconhecimento dos triângulos congruentes, o grupo A respondeu de forma clara e correta, mesmo visualizando a figura 4(3) em vez da figura 4(2). O grupo B, na atividade (a), respondeu somente a medida dos lados do triângulo, enquanto que identificaram somente os pontos, sem reconhecer os segmentos consecutivos e colineares – atividade (b). O grupo D, respondeu toda a Questão 3, porém não apresentou conceitos bem definidos em relação as propriedades dos triângulos equiláteros, segmentos consecutivos e colineares, segmentos adjacentes e segmentos concorrentes e paralelos. No grupo E, um aluno respondeu corretamente as atividades e os demais responderam em partes. Os alunos do grupo F, responderam as perguntas de forma clara, tendo mais facilidade com a visualização das figuras prontas.

Nas Questões 4 (Apêndice B) e 5 (Apêndice C), acredita-se que os alunos obtiveram um melhor desempenho devido à construção do Triângulo de Sierpinski estar pronto nas atividades, o que reforça a concepção de que os alunos não fazem construções geométricas, apenas recebem prontas, não relacionando o concreto com o abstrato. Em relação as manipulações e construções dos objetos geométricos, Castilho (1989, p. 25 *apud* KALLEF, 1994, p. 22, gripo do autor) "[...] mais importante que "designar" e "definir", como ações meramente repetidoras das palavras e proposições que o professor fala ou escreve, é observar, descrever, comparar, tocar e construir [...]", sendo importante para o desenvolvimento do pensamento geométrico dedutivo do aluno.

Na Questão 4 (Apêndice B), os alunos do grupo C não identificaram os triângulos semelhantes e não justificaram com o uso da linguagem matemática. Quanto as características comuns dos triângulos equiláteros, descreveram sucintamente sem justificar. O grupo A, respondeu somente a letra (b), sem justificativas. Em relação ao grupo B, um aluno tentou responder as questões (a) e (b), porém, na primeira não soube utilizar a linguagem matemática e na segunda, não concluiu a resposta, errando as duas. O grupo D, identificou os triângulos semelhantes, mas não usaram a linguagem matemática e responderam às perguntas sem justificativas. O grupo E respondeu sem o uso da linguagem matemática e sem justificativa, enquanto que o grupo F respondeu sem usar justificativas. Este último grupo respondeu incorreta a questão (a) e sucintamente a (b). A exigência dos sujeitos da pesquisa justificarem as respostas das atividades os obrigariam a (re)pensar sobre as propriedades dos objetos geométricos e assim, conjeturar, desenvolver relações (VAN DE WALLE, 2009, p. 442).

Na Questão 5 (Apêndice C), os grupos A, B, C, D, e E responderam a questão (a) só afirmando que eram triângulos e não souberam descrever qual a diferença entre eles, além de tentarem resolver as questões (c) e (d). O grupo F, respondeu corretamente as questões (a), (b) e (c), porém, não respondeu a atividade (e). Na Questão 6, do mesmo apêndice, os grupos identificaram somente o quadrado, talvez por ser a figura geométrica que mais identificam no dia a dia. A questão (b) não responderam e o grupo F demonstrou mais interesse e conhecimento em relação aos conceitos geométricos trabalhados pelo pesquisador/professor nesta investigação.

Durante a resolução das Questões 2, 3, 4, 5 e 6, a pesquisadora também fez questionamentos (Apêndice D), na intenção de observar se os alunos estavam em conformidade com os Níveis do modelo de Van Hiele, consideram-se as cinco fases de aprendizagem – a interrogação informada, a orientação dirigida, a explicação, a orientação livre e a integração – durante a resolução de todas as questões.

Assim, constatou-se, por meio do estudo teórico e da investigação no lócus profissional, que a aprendizagem geométrica acontece quando o aluno compreende e se apropria do conhecimento geométrico – ideias, definições, axiomas, proposições, teoremas, notações, linguagem geométrica, ... –, utilizando estratégias, modelos e técnicas de resolução e inter-relacionando o objeto de estudo com a percepção de mundo a sua volta. Aprendendo de forma simples, gradual e sequencial, interpretando dados a partir de um raciocínio lógico e espacial. Também, percebeu-se que o pensamento geométrico ocorre quando o aluno reflete e conjectura sobre os conhecimentos aprendidos e a partir destes, investiga e (re)descobre novos conceitos, passando do concreto ao abstrato, compreendendo e utilizando as características do processo de raciocínio de maneira própria – a observação, a representação e a construção reproduzida informalmente, formalmente e pelo rigor.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

A presente pesquisa traz resultado importantes de uma investigação sobre como se desenvolve o pensamento e a aprendizagem geométrica dos alunos do 9º ano do Ensino Fundamental, por meio de atividades diferenciadas, fundamentada na teoria de Van Hiele. Mediante os resultados obtidos nesta pesquisa, pôde-se verificar que as dificuldades de aprendizagem e a deficiência do ensino dos conhecimentos geométricos contribuem para a maioria dos alunos se manterem no Nível 2 de van Hiele.

Portanto, para responder: **Como se desenvolve a aprendizagem e o pensamento Geométrico Euclidiano dos alunos do 9º ano do Ensino Fundamental, fundamentada no modelo de Van Hiele?**, pode-se verificar que estes alunos apresentam conhecimento superficial das propriedades dos objetos geométricos trabalhados, além de não terem o hábito de utilizar as nomenclaturas, notações e simbologias matemáticas apropriadas, devido às respostas das atividades terem sido escritas de forma direta, sem uma análise ou conjecturas das mesmas. Assim, nos certificamos que não reconhecem as propriedades especificas das figuras geométricas por meio do desenho e/ou a construção impressa destas, como por exemplo: segmento congruente, segmentos adjacentes, segmentos colineares, segmentos consecutivos. Dessa forma, é fundamental os professores de Matemática planejarem e aplicarem atividades adequadas ao nível de raciocínio geométrico que seus alunos se encontram e também, se utilizar das técnicas de desenho e de materiais manipuláveis associados a sequências didáticas embasada no modelo de Van Hiele.

Concluo que os conceitos geométricos, com suas propriedades, classificações e definições, bem como as demonstrações devem ser trabalhadas respeitando a particularidade de cada Nível de van Hiele, de forma sequencial e ordenada. Cabe ao professor ficar atento ao quando deve aprofundar os conhecimentos geométricos, acompanhados da linguagem matemática específica à medida que os alunos vão avançando nos níveis. Para tal, o planejamento das aulas, o vocabulário e o material didático a ser utilizado devem ser compatíveis ao nível de raciocínio geométrico dos alunos, permitindo-os avançarem. Nesse sentido, é pertinente que as atividades variem entre os níveis fácil ao difícil e que o professor seja sempre questionador/mediador, fazendo-os observarem, analisarem, refletirem, argumentarem e conjecturarem para abstraírem geometricamente.

Quanto ao modelo de Van Hiele, concluímos que foi um importante auxílio na análise de como se dá o nível de raciocínio geométrico dos sujeitos da pesquisa e também nos fez constatar que estes possuem muitas dificuldades em relacionar as propriedades geométricas com a escrita simbólica e a definição dos entes geométricos, por terem pouca compreensão do conteúdo e, consequentemente, apenas dois (2) alunos atingiram o Nível 3, quatro (4) alunos atingiram o Nível 2 e os demais, somente o Nível 1.

Sendo assim, concluímos que é importante que o professor desenvolva atividades em sala de aula usando a linguagem matemática e realmente trabalhe os conteúdos de Geometria propostos para cada ano do Ensino fundamental, evitando lacunas de conhecimento geométrico. Assim, a discussão em pauta contribuiu na minha formação, por estabelecer em sala de aula a compreensão da dinâmica entre a geometria da realidade e a geometria da razão, entre a matemática concreta e a matemática abstrata.

REFERÊNCIAS

BARBOSA, R. M. **Descobrindo a Geometria Fractal para sala de aula.** Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

BRASIL, Ministério da Educação e da Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais (matemática)**. Brasília: MEC/SEF, 1998. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf. Acesso em: 27 ago. 2018.

BRASIL, Ministério da Educação e Cultura. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM).** Brasília: MEC, SEMTEC, 2000.

BIANI, R. P. Uma Proposta Didática para a Geometria. In. LORENZATO, S. (Org.). **Aprender e ensinar geometria.** Campinas, SP: Mercado de Letras, 2015. p. 57-98. (Educação Matemática)

CAMPOS, E. P.; SILVA, J. P. da; CANDIDO, C. C. **Ensino de translações e rotações com base na teoria de Van Hiele**. [2018?] Disponível em: https://www.ime.usp.br/arquivos/4congresso/38%20Elisa%20Padinha%20Campos_N.pdf. Acesso em: 27 ago. 2018.

DE VILLIERS, M. Algumas reflexões sobre a Teoria de Van Hiele. **Educação Matemática e Pesquisa**, v.12, n. 3, p. 400-431, São Paulo, 2010. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/5167/3696. Acesso em: 27 ago. 2018. ISSN: 1983-3156.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática.** Tradução: Hygino H. Domingues. Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 2004.

FAINGUELERNT, E. K. O Ensino de Geometria no 1º e 2º Graus. **Educação Matemática em Revista**, SBEM, n. 4, p. 45-53, 1º semestre. São Paulo, 1995. Disponível em: http://www.sbem.com.br/revista/index.php/emr/article/view/1316/726. Acesso em: 24 ago. 2018. ISSN: 2317-904X.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em educação matemática:** percursos teóricos e metodológicos. 3. ed. São Paulo: Autores Associados, 2012 (Formação de Professores).

GIL, A. C. **Como Elaborar Projetos de Pesquisa.** 5.ed. São Paulo: Atlas, 2010.

GRAVINA, M.A. Geometria Dinâmica: Uma abordagem para o aprendizado da geometria. In Anais do **VIII Simpósio Brasileiro de Informática na Educação**, p. 1-13, Belo Horizonte, nov. 1996. Disponível em: http://www.ufrgs.br/espmat/disciplinas/geotri/pdf/maria-alice_geometria-dinamica1996-vii_sbie.pdf. Acesso em: 24 ago. 2018.

JANELA, M. A. C. R. M. P. **O (Novo) Programa de Matemática do Ensino Básico e o Desenvolvimento do raciocínio geométrico no tópico triângulos e quadriláteros**. Dissertação (Mestrado) — Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, 2012.

Disponível em: http://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/6323/1/ulfpie040086_tm.pdf. Acesso em: 12 abr. 2019.

JÚNIOR, J. R. C.; SILVA, J. B. R. A Geometria pela Ótica de Van Hiele: Uma Análise do Nível de Desenvolvimento do Pensamento Geométrico de Alunos de Um curso de Licenciatura em Matemática. **VIII EPBEM**, v. 1, 2014, Campina Grande, PB. **Anais** [...]. Campina Grande: Realidade, 2014. Disponível em: http://editorarealize.com.br/revistas/epbem/trabalhos/Modalidade_1datahora_14_10_2014_23_21_33_idinscrito_184_635ff0775077c6f65c4dd6dcd8ca2cbc.pdf. Acesso em: 12 abr. 2019. ISSN: 2317-0042.

KLALEFF, A. M. Tomando o ensino de geometria em nossas mãos... **Educação Matemática em Revista**, SBEM, n. 2, 1º semestre, São Paulo, 1994. Disponível em: http://www.sbem.com.br/revista/index.php/emr/article/view/1334/743. Acesso em: 14 abr. 2019. ISSN: 2317-904X.

LORENSATTI, E. J. C. Linguagem Matemática e Língua Portuguesa: diálogo necessário na resolução de problemas matemático, **Conjectura: Filosofia e Educação,** v. 14, n. 2, maio/ago. 2009, Caxias do Sul (UCS), 2009. Disponível em: http://www.ucs.br/etc/revistas/index.php/conjectura/article/view/17/16. Acesso em: 14 abr. 2019. ISSN: 0103-1457.

LORENZATO, S. Por que não ensinar geometria? **Educação Matemática em Revista**, SBEM, n. 4, p. 3-13, 1º semestre. São Paulo, 1995. Disponível em: http://www.sbem.com.br/revista/index.php/emr/article/view/1311/721. Acesso em: 22 ago. 2018. ISSN: 2317-904X.

LORENZATO, S. **Para aprender matemática.** 3. ed. rev. Campinas, SP: Autores Associados, 2010 (Formação de Professores).

LORENZATO, S. (Org.) **O laboratório de ensino de matemática na formação de professores**. Campinas, SP: Autores Associados, 2009 (Formação de Professores).

LOUREIRO, C. Geometria no Novo Programa de Matemática do Ensino Básico: Contributos para uma gestão curricular reflexiva. **Educação Matemática**, n. 105, nov./dez., 2009, Lisboa: Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico. Disponível em: http://www.apm.pt/files/_EM105_pp061-066_lq_4ba2b378bd03e.pdf. Acesso em: 22 ago. 2018.

LONGO, C. A. C. As (Re)descobertas do Ensino de Geometria. In. LORENZATO, S. (Org.). **Aprender e ensinar geometria.** Campinas, SP: Mercado de Letras, 2015 (Educação Matemática). p. 99-130.

MACHADO, N. J. **Matemática e Língua Materna**: análise de uma impregnação mútua. 6 ed., São Paulo: Cortez, 2011.

NASSER, L.; TINOCO, L**. Enfoque Didático;** Instituto de Matemática, ed. IM/UFRJ, Rio de Janeiro, 2011. (Projeto Fundão).

NASSER, L.; VIEIRA, E. R. Formação de Professores em Geometria: Uma Experiência no Ciclo de Alfabetização, **VIDYA**, v. 35, n. 2, p. 19-36, jul./dez., 2015. IM/UFRJ. Santa Maria, 2015. (Projeto Fundão).

OTANI, N.; FIALHO, F. A. P. **TCC:** métodos e técnicas. 2.ed. Florianópolis: Visual Books, 2011.

PASSOS, C. L. B. **Representações, interpretações e prática pedagógica:** a geometria na sala de aula. 2000. 348 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Estadual de Campinas Faculdade de Educação, Campinas, SP, 2000.

PAVANELLO, R. N. O abandono do ensino da geometria no Brasil: causas e consequências, **Revista Zetetikê**, UNICAMP: Campinas, São Paulo, ano1, n.1, p.7-17, 1993. ISSN: 2176-1744.

RÊGO, R. G. do; RÊGO, R. M. do; VIEIRA, K. M. **Laboratório de Ensino de Geometria.** Campinas, SP: Autores Associados, 2012 (Formação de Professores).

RODRIGUES, S. S. A. **Teoria se Van Hiele Aplicada aos Triângulos:** uma Sequência Didática para o 8º Ano do Ensino Fundamental. 2015. 125 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro. Campos dos Goytacazes, RJ, 2015.

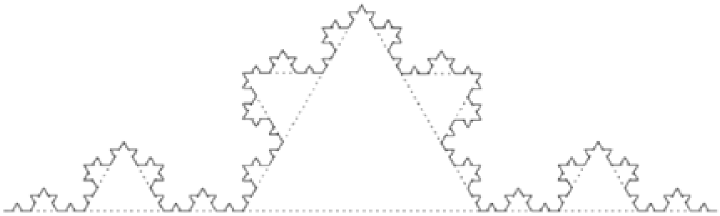
SOARES, L. H. **A Dialética entre o Concreto e o Abstrato na Construção do Conhecimento Matemático**. 2015, 211f. Tese (Doutorado) – Universidade Federal da Paraíba. João Pessoa, PB, 2015.

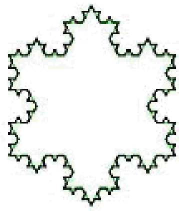
VAN DE WALLE, J. A. **Matemática no Ensino Fundamental**: formação de professores e aplicação em sala de aula, Porto Alegre- 6. Ed.: Artmed, 2009.

APÊNDICE A – Sequência Didática do 1º Encontro

Fractais Geométricos

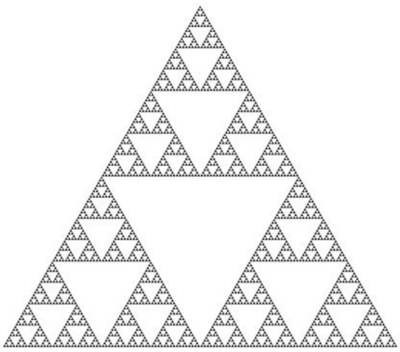
Figuras 1 e 2 - Fractais Flocos de Neve





Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Curva_de_Koch

Figura 3 - Triângulo de Sierpinski



Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Tri%C3%A2ngulo_de_Sierpinski#/media/Ficheiro:SierpinskiTriangle.PNG

Os fractais podem apresentar uma infinidade de formas diferentes, não existindo uma definição consensual. Contudo, muitos conjuntos considerados fractais têm alguma forma de auto semelhança, ou seja, possuem partes que são réplicas (em escalas menores) da sua própria figura. Além disso, muitos fractais são definidos de um modo bastante simples, por exemplo, recursivamente. Muitos fenômenos e formas irregulares, como nuvens, montanhas, turbulências, árvores, crescimento de populações, vasos sanguíneos, entre outros na natureza, podem ser estudados e descritos utilizando modelos com estruturas fractais e teoria da geometria fractal.

Questão 1. Construir o Floco de Neve (Figura 1) a partir de uma reta.

Passos para a construção:

1º) Desenhe uma reta com apoio de uma régua.

2ª) Posicione nela um ponto A e a 18cm de distância deste, posicione um ponto B.

3º) Divida a reta em três partes iguais, usando o compasso, posicionando os pontos C e D.

4º) Com a mesma abertura do compasso, posicione a ponta seca no ponto C e desenhe um arco, da direita para a esquerda.

Após, posicione a ponta seca no ponto D e desenhe um arco, da esquerda para a direita. Na intersecção dos arcos, marque o ponto E. Ligue os pontos C e E, bem como, E e D.

I. Responda:

a) Escrever com suas palavras como você define de (Dedução informal):

- A reta e o segmento de reta:
- Segmentos consecutivos, não consecutivos e colineares:
- Segmentos adjacentes:
- Comparação de segmentos:
- Segmentos congruentes:

b) Escrever as definições formais de:

- A reta e o segmento de reta:
- Segmentos consecutivos, não consecutivos e colineares:
- Segmentos adjacentes:
- Comparação de segmentos:
- Segmentos congruentes:

c) Utilize a linguagem matemática para escrever as seguintes afirmações:

- O segmento AD é menor que o segmento ED.
- O segmento AB é maior que o segmento CD.
- O segmento CE é congruente do segmento ED.

Questão 2. Concluir a construção do Floco de Neve (Figura 1) da questão 1.

Passos para a construção:

1º) Dividir cada um dos segmentos AC, CE, ED e DB em três partes iguais, usando o compasso. Nomeie os novos pontos.

2ª) Repita o 4º passo da construção anterior, usando os pontos F, G, H, I, J, L, M e N.

I. Identificar o que se pede abaixo:

a) Dois pares de segmentos consecutivos e colineares:
b) Dois pares de segmentos consecutivos e não colineares:
c) Dois pares de segmentos colineares não consecutivos:
d) Dois pares de segmentos não colineares e não consecutivos:
e) Dois pares de segmentos adjacentes:

II. Usando a linguagem matemática, faça a comparação de segmentos e justifique:

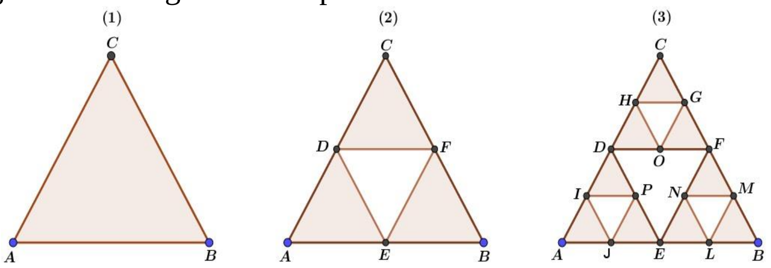
a) Os segmentos FO e HI:
b) Os segmentos CI e DM:
c) Os segmentos GC e DN:

APÊNDICE B – Sequência Didática do 2º Encontro

Questão 3. Dadas as figuras abaixo, responda:

a) Observe e classifique a figura 4 (1), considerando a medida de seus lados. Justifique, usando a linguagem matemática.
b) Se a figura 4 (2) apresenta segmentos consecutivos e colineares, quais são eles?
c) Estes segmentos são adjacentes? Por que?
d) Indique os segmentos concorrentes e paralelos, de dois a dois, na figura (2):

Figura 4 - Triângulo de Sierpinski



Fonte: do autor.

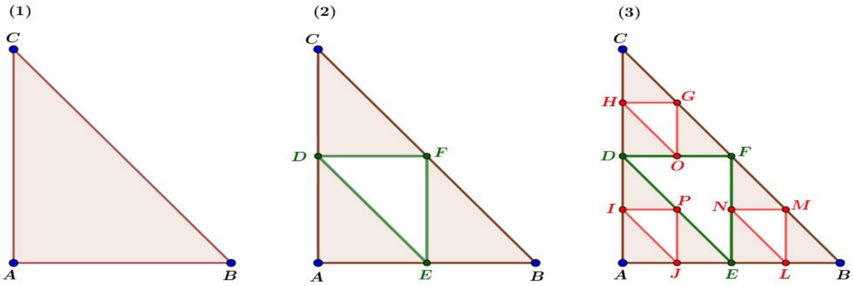
e) Usando uma régua, verifique se os segmentos correspondentes das figuras (1) e (2) possuem a mesma medida:
f) Na figura 4 (2), indique quais triângulos são congruentes:
g) E na figura 4 (3)? Quais triângulos são congruentes?
h) Compare os lados e ângulos internos dos triângulos ABC, DFE e IPJ; descrevendo suas observações, fazendo o uso da linguagem matemática:

Questão 4. Observe a figura 4 da questão anterior, e responda:

a) Olhando para as figuras (2) e (3), identifique os triângulos semelhantes? Justifique, usando a linguagem matemática.
b) Cite uma característica comum a todos os triângulos equilátero? Justifique:

APÊNDICE C – Sequência Didática do 3º Encontro

Figura 5 - Triângulo de Sierpinski



Fonte: autor

Questão 5. Observe a figura 5, e responda:

a) Qual a diferença entre as figuras 4 (1) e 5(1)?
b) Como podemos classificar a figura 5 (1)?
c) Na figura 5 (1), os segmentos AB e AC são perpendiculares? Justifique.
d) Dos segmentos ED, FB, DF e EB quais são paralelos? Quais são concorrentes?
e) Observando as figuras 5 (1), (2) e (3) elas são semelhantes? Se a resposta for afirmativa responda com suas palavras porquê?
f) Dos triângulos da figura (5) 3, quais deles são congruentes? Justifique com suas palavras.
g) Os triângulos ABC e EDF são semelhantes?

Questão 6.

a) Na figura 5 (2), visualizamos os polígonos DFEA, DFAB e DFEB. Quais os quadriláteros que você identificou?
b) O quadrado é um paralelogramo? E o trapézio?
c) Escreva a definição para o quadrilátero trapézio:
d) O quadrado é uma figura possui seus quatros lados congruentes? Justifique:
e) Os retângulos cujas diagonais são perpendiculares?
f) Na figura 5 (3) os segmentos HG, DF e AB são paralelos?

APÊNDICE D – Ficha do professor

Perguntas orais realizadas aos alunos durante a resolução da Questão 2, considerando a visualização e a análise:

- Para dividir o segmento AB em 3 partes iguais, cada parte deve medir quanto?
- Quais os segmentos de reta que vocês observam?
- Quais deles, de dois a dois, são consecutivos? Por quê?
- Os segmentos AC e DB são consecutivos? E os segmentos AD e DB?
- Os segmentos AC e CE são consecutivos? E os segmentos CE e ED?
- Os segmentos AC e ED são consecutivos?

Perguntas orais realizadas aos alunos durante a resolução das Questões 3 e 4:

- Quais os segmentos que estão contidos na mesma reta (consecutivos e não consecutivos)?
- Quais segmentos consecutivos, de dois a dois, que não estão contidos na mesma reta?
- Observem os segmentos AC e CD e depois, os segmentos AC e CE. Qual diferença entres?
- Quanto a medida de comprimento dos segmentos AC, CD, CE, ED, DB, o que podemos afirmar?
- E, em relação aos segmentos CE e CB?
- E os segmentos AD e DB?

Perguntas orais realizadas aos alunos durante a resolução da Questão 5:

- Porque eles são triângulos equiláteros?
- Porque eles são triângulos retângulos?

A maioria dos alunos manifestaram dúvidas em responder as perguntas supracitadas, porém apresentaram uma melhor qualidade nas respostas após as observações e análises dos objetos geométricos, principalmente após exemplos fornecidos pela pesquisadora, na lousa e relacionando-os a objetos espaciais da sala de aula.