

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PAMPA

GLEIDSON MACHADO BRAGANÇA

**ANÁLISE SOBRE DIFUSÃO DE CALOR
E CARACTERIZAÇÃO DE UM SENSOR
DE TEMPERATURA**

**Itaqui
2017**

GLEIDSON MACHADO BRAGANÇA

**ANÁLISE SOBRE DIFUSÃO DE CALOR
E CARACTERIZAÇÃO DE UM SENSOR
DE TEMPERATURA**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso de Licenciatura em Matemática como requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Orientador: Charles Quevedo Carpes

**Itaqui
2017**

B813a Bragança, Gleidson Machado

Análise sobre difusão de calor e caracterização de um sensor de temperatura / Gleidson Machado Bragança. – dezembro, 2017.

41 p.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) – Universidade Federal do Pampa, Campus Itaqui, Matemática, 2017.

“Orientação: Charles Quevedo Carpes”.

1. Equação do calor. 2. Difusão de calor. 3. Sensor de temperatura. I. Título.

GLEIDSON MACHADO BRAGANÇA

**ANÁLISE SOBRE DIFUSÃO DE CALOR
E CARACTERIZAÇÃO DE UM SENSOR
DE TEMPERATURA**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso de Licenciatura em Matemática como requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Trabalho de Conclusão de Curso defendido e aprovado em: 9 de dezembro de 2017.

Banca examinadora:

Prof. Dr. Charles Quevedo Carpes
Orientador

Prof. Dr. Radael de Souza Parolin
Universidade Federal do Pampa

Prof. Dr. Rolando Larico Mamani
Universidade Federal do Pampa

RESUMO

Considerando-se a influência da temperatura em diversos campos da ciência e como obter os dados que determinam a temperatura em certo local, pensou-se na utilização de um sensor de temperatura disponível no comércio para se estabelecer o perfil de difusão de calor em torno de uma fonte de calor, através de alguns ensaios experimentais. Dessa forma, este trabalho tem como objetivo analisar o desempenho do sensor de temperatura LM35, para arquitetura Arduino, em situações reais de difusão de calor e após, analisar os dados obtidos experimentalmente com os dados resultantes das soluções analítica e numérica da equação do calor. Para tanto, primeiramente buscou-se, através de uma pesquisa bibliográfica, o modelo matemático que determina a difusão de calor, como também as soluções analítica e numérica desse modelo. Foram realizados quatro ensaios experimentais, onde um deles visou determinar o perfil de difusão de calor gerado pelos dados do sensor de temperatura LM35 para que, posteriormente, comparássemos esses dados resultantes do ensaio com os dados obtidos através das soluções analítica e numérica da equação de difusão de calor. Com os dados dos ensaios, também foi possível obter a caracterização do sensor de temperatura LM35 e suas limitações. A partir dos dados gerados pode-se inferir que, o sensor LM35 possui boa usabilidade em situações que não ocorra mudanças bruscas de temperatura em decorrência de seu tempo de estabilização. Outro ponto observado com este trabalho é de que as soluções analítica e numérica da equação do calor tendem a tomar forma linear conforme o decorrer do tempo, semelhante ao comportamento do sensor LM35.

Palavras-chave: Equação do calor. Difusão de calor. Sensor de temperatura.

ABSTRACT

Considering the influence of temperature in several fields of science and how to obtain the data that determine the temperature in a certain place, it was thought to use a commercially available temperature sensor to establish the diffusion profile of heat around a source of heat, through some experimental tests. Thus, the objective of this work is to analyze the performance of the LM35 temperature sensor for Arduino architecture in real heat diffusion situations and after analyzing the data obtained experimentally with the data resulting from the analytical and numerical solutions of the heat equation. To do so, we first sought, through a bibliographical research, the mathematical model that determines the diffusion of heat, as well as the analytical and numerical solutions of this model. Four experimental tests were carried out, one of them aimed at determining the heat diffusion profile generated by the LM35 temperature sensor data, so that we could later compare these results with the data obtained through the analytical and numerical solutions of the diffusion equation of heat. With the data of the tests, it was also possible to obtain the characterization of the temperature sensor LM35 and its limitations. From the data generated it can be inferred that, the LM35 sensor has good usability in situations that do not occur abrupt changes of temperature due to its stabilization time. Another point observed with this work is that the analytical and numerical solutions of the heat equation tend to take a linear form over time, similar to the behavior of the LM35 sensor.

Keywords: Heat equation, Heat diffusion, Temperature sensor.

LISTA DE FIGURAS

| | | |
|------------|--|----|
| Figura 3.1 | Volume de controle para balanço de energia. | 18 |
| Figura 3.2 | Representação gráfica da barra. | 21 |
| Figura 3.3 | Representação gráfica da discretização. | 29 |
| Figura 4.1 | Dados de temperatura gerados pelo sensor LM35..... | 36 |
| Figura 4.2 | Gráfico da solução analítica da equação de condução de calor. | 38 |
| Figura 4.3 | Gráfico da solução numérica da equação de condução de calor..... | 39 |

LISTA DE TABELAS

| | | |
|------------|---|----|
| Tabela 4.1 | Temperatura da água no recipiente (em graus celcius) ao longo do tempo... | 34 |
| Tabela 4.2 | Temperatura da barra metálica (em graus celcius) em diversos pontos ao longo do tempo..... | 36 |
| Tabela 4.3 | Temperatura do fluxo de ar (em graus celcius) à diferentes distâncias. | 37 |

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

GLP Gás Liquefeito de Petróleo

LISTA DE SÍMBOLOS

| | |
|------------|--|
| A | Área |
| A, B, C | Regiões do volume de controle |
| A_i | Áreas associadas aos vetores \vec{q}_i |
| a_1, a_2 | Coefficientes do sistema discretizado |
| a_{ii} | Elementos da diagonal principal de uma matriz qualquer |
| a_{ij} | Elementos de uma matriz qualquer |
| B_i | Componente do campo gravitacional na direção i |
| c_n | Coefficiente da Série de Fourier de índice n |
| c_p | Calor específico à pressão constante |
| d | Distância entre as seções de área da barra |
| D | Matriz diagonal obtida através de fatoração LU |
| e | Energia armazenada associada com a massa típica |
| e_ρ | Energia específica por unidade de massa |
| E_A | Energia na região A do volume de controle |
| E_B | Energia na região B do volume de controle |
| E_C | Energia na região C do volume de controle |
| E_i | Energia inicial |
| E_f | Energia final |
| $f(x)$ | Função qualquer de variável x |
| $F(x)$ | Função qualquer de variável x |
| $F_n(x)$ | Autofunções associadas aos autovalores λ_n |
| $G(t)$ | Função qualquer de variável t |
| gz | Energia potencial gravitacional por unidade de massa |
| $H(x, t)$ | Taxa instantânea de transferência de calor no ponto x e no tempo t |

| | |
|-------------|--|
| k | Condutividade térmica do material |
| L | Matriz triangular inferior obtida pela fatoração LU, ou extremidade da barra |
| l_i | Estágio i do método de Runge-Kutta |
| \dot{m} | Fluxo de massa |
| M | Uma matriz qualquer |
| n | Número natural qualquer |
| p | Pressão |
| \vec{q} | Vetor fluxo de calor |
| \vec{q}_i | Componente do vetor fluxo de calor de índice i |
| q''' | Geração interna de calor por unidade de volume |
| Q | Calor adicionado ao sistema |
| s_ρ | Entropia específica |
| S | Entropia |
| t | Tempo |
| T | Temperatura |
| T_i | Temperatura na seção i da barra |
| u^{int} | Energia interna |
| u_i^{int} | Componente da energia interna de índice i |
| u_j^k | Solução numérica na posição j e instante k obtida pelo método SOR |
| U | Matriz triangular superior obtida através de fatoração LU |
| \vec{V} | Vetor velocidade |
| $v(x)$ | Função de temperatura no estado estacionário de distribuição |
| $w(x, t)$ | Função de temperatura no estado transiente de distribuição |
| w | Parâmetro de Sobre/Sub-relaxação |
| W | Trabalho realizado pelo sistema |
| x | Variável espacial unidimensional |

| | |
|---------------|--|
| x_i | Ponto do eixo x |
| y_i | Solução numérica obtida pelo método de Runge-Kutta na iteração i |
| α | Coefficiente de difusividade térmica do material |
| ΔE | Varição de energia do sistema |
| Δm | Massa típica |
| Δt | Varição de tempo |
| Δx | Varição de posição |
| $\Delta \tau$ | Varição média de temperatura |
| θ | Entropia por unidade de volume |
| λ | Constante real do método de separação de variáveis |
| λ_n | Autovalor de índice n |
| ρ | Massa específica |
| σ_{ij} | Tensor das tensões de cisalhamento do fluido no interior do volume de controle |
| $\tau(x, t)$ | Temperatura em função da posição x e do instante t |
| $\tau^i(x_j)$ | Temperatura em um tempo i e em uma posição x_j |
| ϕ | Função de dissipação |
| ψ | Potencial gravitacional |
| ω | Parâmetro de acréscimo espacial |
| $\int_{S.C.}$ | Integral com relação à superfície de controle |
| $\int_{V.C.}$ | Integral com relação ao volume de controle |

SUMÁRIO

| | |
|---|-----------|
| 1 INTRODUÇÃO | 13 |
| 2 METODOLOGIA | 15 |
| 3 REFERENCIAL TEÓRICO | 17 |
| 3.1 Forma integral da equação da energia..... | 17 |
| 3.2 Forma diferencial da equação da energia..... | 19 |
| 3.3 Dedução da Equação de Calor Unidimensional..... | 21 |
| 3.3.1 Solução analítica da equação do calor unidimensional..... | 23 |
| 3.4 Métodos de solução numérica | 28 |
| 3.4.1 Discretização..... | 28 |
| 3.4.2 Método de Gauss-Jacobi | 30 |
| 3.4.3 Método de Gauss-Seidel | 31 |
| 3.4.4 Método SOR - Método das sobre/subrelaxações | 32 |
| 3.4.5 Método de Runge-Kutta..... | 32 |
| 4 RESULTADOS | 34 |
| 4.1 Resultados Experimentais | 34 |
| 4.2 Resultados Teóricos..... | 37 |
| 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS | 40 |
| REFERÊNCIAS | 41 |

1 INTRODUÇÃO

Problemas que envolvam fluxo de calor estão presentes em diversos campos da ciência, onde podemos citar a geologia, a biologia, a física, etc. Essa influência decorre da relação que a temperatura possui com as propriedades físicas e químicas dos materiais, como por exemplo: os estados físicos da matéria, a densidade, a solubilidade, entre outros.

Para realizar as medições das oscilações de temperatura no ambiente, geralmente, utilizamos termômetros e/ou sensores eletrônicos de temperatura, sendo como exemplificador o "termômetro de mercúrio", como mais familiar e usual para exemplificar o processo de medição de temperatura, sendo este composto por um tubo de vidro fechado e evacuado, contendo o metal líquido mercúrio, o qual dilata-se ou se contrai, dentro do tubo, dependendo da temperatura ao qual está sendo exposto (NUSSENZVEIG, 2000).

Já os sensores eletrônicos de temperatura são utilizados em diversas situações visando uma determinada aplicação e expõem em valores numéricos as oscilações de temperatura do ambiente nos quais estão inseridos. Como exemplificador, tomamos o sensor LM35 que através do microcontrolador faz a conversão dos valores analógicos para a forma digital, ou seja, a conversão de impulsos elétricos em valores digitais, onde o microcontrolador realiza a interpretação e conversão desses impulsos elétricos, variados pelo sensor de temperatura.

Segundo Muynarsk and Garcia (2014), os pioneiros no desenvolvimento de microcontroladores de baixo custo foi o projeto Arduino, que em 2005, o professor Massimo Banzi, ao perceber a dificuldade de ensinar eletrônica e programação de computadores aos seus estudantes de design, desenvolveu, juntamente com o pesquisador visitante da Universidade de Malmo (Suécia) David Cuartielles, uma placa com baixo custo para seus estudantes trabalharem com tecnologia. Assim surgiu a placa microcontroladora Arduino, onde seu nome surgiu em homenagem à um bar frequentado pelos participantes do projeto. O Arduino é usualmente utilizado em projetos de automação residencial e industrial, juntamente com seus periféricos destinados às mais diversas situações, tendo como exemplos os sensores de temperatura, umidade, luminosidade, entre outros.

Um ponto a ser destacado é de que há diversos fatores externos que implicam na precisão da conversão dos valores analógicos para os digitais. De forma geral, os sensores de temperatura, juntamente com os microcontroladores, captam as oscilações do ambiente e convertem-nas para medidas de escala usuais, informando os indivíduos das condições de temperatura em determinado local.

O modelo matemático que descreve a difusão de calor é caracterizado por uma Equação Diferencial, sendo que as soluções dessa equação podem ser obtidas analiticamente, segundo Boyce and DiPrima (2010), através de Séries de Fourier, como também numericamente, através de métodos de Elementos Finitos, Diferenças Finitas, Volumes Finitos, entre outros (RUGGIERO; LOPES, 1996).

Assim, devido a relevância do tema, o referido trabalho tem como problemática analisar o comportamento de difusão de temperatura em torno de um corpo quente através de um sensor eletrônico de temperatura disponível no comércio e comparar os resultados experimentais obtidos com as previsões teóricas resultantes da solução da equação de difusão de calor.

Destarte, objetiva-se primeiramente analisar o comportamento do sensor LM35 em situações reais de difusão de calor. Na sequência, comparar os resultados da solução da equação da energia com os dados obtidos a partir dos ensaios experimentais realizados com o sensor.

Posto isto, no segundo capítulo, abordaremos a sequência metodológica utilizada para realização do trabalho, contemplando as características de cada passo utilizado no mesmo; para o terceiro capítulo, bem como suas seções, veremos as deduções da equação da energia e algumas formas de obtenções das suas soluções, sendo elas na forma analítica e numérica; no quarto capítulo, juntamente com suas seções, abordam-se os resultados obtidos com os ensaios experimentais e através das soluções analítica e numérica da equação de difusão de calor; para o quinto capítulo, pontuam-se as considerações finais diante dos resultados e elaboração do trabalho; e por fim as referências bibliográficas.

2 METODOLOGIA

O trabalho desenvolveu-se com base em uma pesquisa bibliográfica inicial sobre problemas de transferência de energia e seu equacionamento, sendo esta realizada em livros texto das áreas de Física Geral, Termodinâmica, Dinâmica de Fluidos e Fenômenos de Transporte, onde podemos citar Cengel and Ghajar (2012), Halliday, Resnick and Walker (2000), Kundu and Cohen (2002), Tipler (2009) e Hughes and Brighton (1974), bem como em livros que tratam da obtenção de soluções analíticas e numéricas para equações diferenciais parciais, onde temos Boyce and DiPrima (2010), Hughes and Brighton (1974), Ruggiero and Lopes (1996), Bortoli (2000) e Zill and Cullen (2001). Após realizou-se uma pesquisa exploratória experimental para determinar alguns parâmetros de funcionamento de um sensor eletrônico de temperatura disponível no mercado.

Desta forma, para entender o problema físico de difusão de calor e realizar previsões com relação à distribuição de temperatura em torno de um corpo quente que não esteja em um sistema isolado, primeiramente, procurou-se qual sistema de equações diferenciais é mais adequado para modelar esta situação e após determinou-se quais são as ferramentas matemáticas disponíveis para a solução deste problema, onde foram analisadas as situações onde foi possível e onde não foi possível obter soluções analíticas, e também verificou-se a viabilidade da utilização de soluções analíticas e numéricas para descrição do campo térmico em uma barra metálica.

Concomitantemente à pesquisa bibliográfica, foram realizados ensaios experimentais em ambientes controlados com objetivo de gerar dados que foram utilizados para aferir as previsões obtidas matematicamente. Foram realizados pelo menos quatro ensaios diferentes com objetivo de determinar o comportamento de um sensor eletrônico de temperatura posicionado nas proximidades da fonte de calor.

No primeiro ensaio fixou-se o sensor de temperatura LM35 juntamente com outros dois sensores, um de mercúrio e outro termopar, dentro de um recipiente com água em temperatura ambiente, além de utilizar um leitor infravermelho. O recipiente com capacidade para 600 ml continha 400 ml de água à temperatura de $22,6^{\circ}\text{C}$ (com referência ao sensor termopar), sendo a mesma homogeneizada através de um agitador magnético e aquecida constantemente. Foram realizadas leituras com os sensores em intervalos regulares de tempo a fim de comparar as leituras dos diferentes sensores. Posteriormente, visando determinar o tempo de estabilização do sensor LM35, mergulhou-se o mesmo, a partir da temperatura ambiente, no recipiente contendo água aquecida até o sensor se

estabilizar. Após retirou-se o sensor do recipiente até que fosse atingida a temperatura ambiente. O processo repetiu-se algumas vezes a fim de analisar o desempenho operacional do sensor LM35 e suas limitações.

No segundo ensaio experimental, utilizou-se uma barra metálica com 30 cm de comprimento, onde foram realizadas marcações com distâncias de 5 cm para determinar os pontos de medições dos sensores. A seguir, a barra metálica foi aquecida constantemente em uma de suas extremidades através de uma chama alimentada por GLP (Gás Liquefeito de Petróleo), e em intervalos de 30 segundos foram realizadas medições nas diferentes divisões de distâncias da barra metálica, visando determinar a difusão de calor em torno dessas divisões. Nesse experimento foi possível analisar o comportamento da difusão de calor na barra, levando em consideração a distância do foco de calor e o tempo.

No terceiro ensaio, procurou-se a ênfase na difusão de calor através de radiação, sendo assim, posicionaram-se os sensores no interior de um recipiente transparente distante do foco de calor, assim inibindo a possível convecção e condução de calor do sensor a partir da região quente e, sendo a fonte de calor determinada por uma chama alimentada através de GLP. O recipiente com os sensores no seu interior foi aproximado do foco de calor até que fosse perceptível a variação de temperatura pelos sensores.

Para o quarto ensaio, realizou-se uma convecção forçada, onde a substância em movimento foi o ar, sendo o mesmo aquecido através da resistência elétrica presente em um secador de cabelo. Foram realizadas marcações de 5 cm de distância entre a fonte de calor e os sensores para que, a cada intervalo de tempo de 30 segundos para estabilização, fossem realizadas medições, até atingir a distância estipulada de 30 cm. E assim, foi analisada a difusão de calor por convecção em diferentes distâncias do foco de calor e em uma determinada variação de tempo.

Finalizados os testes experimentais, os dados foram utilizados para determinar o comportamento e as limitações do sensor eletrônico de temperatura LM35 em comparação com os demais, como também para compará-los com as previsões obtidas através da solução da equação do calor, tanto na forma analítica como na forma numérica. Essas comparações estão melhor abordadas na seção de resultados.

3 REFERENCIAL TEÓRICO

Nesse capítulo faremos as deduções das equações que modelam nosso problema. Na seção seguinte apresentaremos a dedução da equação da energia utilizando o conceito de volume de controle bem como mostraremos sua relação com a segunda lei da termodinâmica. A dedução da equação da energia será feita tanto na forma integral, que está diretamente relacionada com a utilização do conceito de volume de controle, quanto na forma diferencial, a qual será resolvida de forma analítica e numérica conforme os problemas que serão propostos ao longo do texto.

3.1 Forma integral da equação da energia

A primeira lei da termodinâmica, segundo Hughes and Brighton (1974) é definida por

$$Q - W = \Delta E, \quad (3.1)$$

onde Q é o calor adicionado ao sistema; W é o trabalho realizado pelo sistema; e ΔE é a variação de energia do sistema. Considerando o sistema no instante t , em algum instante $t + \Delta t$ ele estará em outro estado. Assim, após transcorrido um instante Δt a equação 3.1 para o sistema torna-se

$$Q - W = E_f - E_i, \quad (3.2)$$

onde E_f é a energia final e E_i a energia inicial. Dividindo por Δt , temos:

$$\frac{Q}{\Delta t} - \frac{W}{\Delta t} = \frac{E_f - E_i}{\Delta t}. \quad (3.3)$$

Considere um volume de controle qualquer e três pontos distintos neste volume de controle, conforme figura 3.1. Desenvolvendo o segundo membro da equação 3.3,

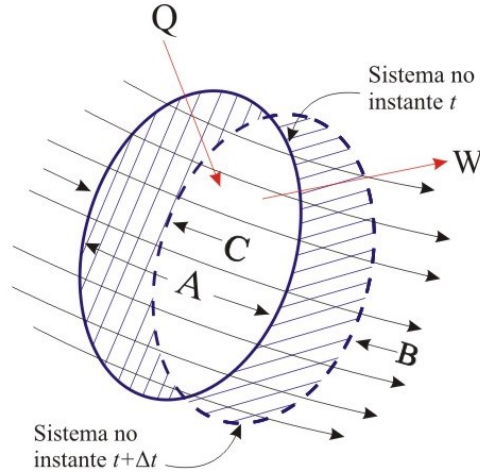
$$\frac{E_f - E_i}{\Delta t} = \frac{E_A(t + \Delta t) - E_C(t + \Delta t) + E_B(t + \Delta t) - E_A(t)}{\Delta t}, \quad (3.4)$$

$$\frac{E_f - E_i}{\Delta t} = \frac{E_A(t + \Delta t) - E_A(t)}{\Delta t} + \frac{E_B(t + \Delta t) - E_C(t + \Delta t)}{\Delta t}. \quad (3.5)$$

onde E_A , E_B e E_C representam a energia em distintas regiões do volume de controle (Figura 3.1).

Analisando o primeiro termo do lado direito da equação 3.5, quando $\Delta t \rightarrow 0$, temos

Figura 3.1: Volume de controle para balanço de energia.



$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{E_A(t + \Delta t) - E_A(t)}{\Delta t} = \frac{\partial}{\partial t}(E)_{V.C.} = \frac{\partial}{\partial t} \int e dm = \frac{\partial}{\partial t} \int_{V.C.} e \rho dV \quad (3.6)$$

onde $\int_{V.C.}$ é a integral com relação ao volume de controle, e é a energia armazenada associada com a massa Δm , Δm é a massa típica e ρ é a massa específica. Logo, o último termo da equação 3.5 fica

$$\frac{E_B(t + \Delta t) - E_C(t + \Delta t)}{\Delta t} = \frac{(\sum \Delta me)_B|_{t+\Delta t}}{\Delta t} - \frac{(\sum \Delta me)_C|_{t+\Delta t}}{\Delta t} \quad (3.7)$$

onde o somatório é para a massa que cruza a superfície. No limite, quando $\Delta t \rightarrow 0$, a equação 3.7 fica

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{E_B(t + \Delta t) - E_C(t + \Delta t)}{\Delta t} = \int_s e dm - \int_e e dm = \int_{S.C.} e \rho \vec{V} \cdot d\vec{A} \quad (3.8)$$

onde $\int_{S.C.}$ é a integral com relação à superfície de controle, \dot{m} é o fluxo de massa, s é a entropia e

$$e = u + \frac{\vec{V}^2}{2} + gz,$$

sendo, u^{int} a energia interna, \vec{V} o vetor velocidade e gz a energia potencial gravitacional por unidade de massa. Assim temos

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{E_f - E_i}{\Delta t} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{V.C.} e \rho dV + \int_{S.C.} e \rho \vec{V} \cdot d\vec{A}. \quad (3.9)$$

A equação para o balanço da energia fica

$$\frac{dQ}{dt} - \frac{dW}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{V.C.} e_{\rho} dV + \int_{S.C.} \left(e + \frac{p}{\rho} \right) \vec{V} \cdot d\vec{A} \quad (3.10)$$

Conforme Hughes and Brighton (1974), a equação 3.10 estabelece que a quantidade de calor adicionado ao sistema, por unidade de tempo, menos o trabalho resultante realizado pelo mesmo é igual a taxa de variação da energia armazenada no volume de controle mais a energia resultante do fluxo de saída do sistema e o trabalho de escoamento para fora do volume de controle.

Outra relação fundamental que precisamos levar em consideração quando estamos trabalhando com variação de energia é a segunda lei da termodinâmica. A segunda lei da termodinâmica para um volume de controle é:

$$dS - \frac{dQ}{T} \geq 0 \quad (3.11)$$

onde S é a entropia do sistema, Q o calor transmitido para o sistema e T a temperatura absoluta. Seguindo o mesmo procedimento realizado para obter a equação da energia em sua forma integral (3.10), podemos obter a segunda lei da termodinâmica, aplicada à um volume de controle:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{S.C.} s_{\rho} dV + \int_{S.C.} s_{\rho} \vec{V} \cdot d\vec{A} - \int_{S.C.} \frac{\vec{q}}{T} \cdot d\vec{A} \geq 0 \quad (3.12)$$

onde \vec{q} é o vetor de fluxo de calor e s_{ρ} é a entropia específica.

3.2 Forma diferencial da equação da energia

Conforme proposto por Hughes and Brighton (1974), vamos apresentar agora a dedução da equação da energia na forma diferencial. Admitindo que o vetor velocidade é \vec{V} e o vetor de fluxo de calor (por condução e radiação) em um ponto da superfície é \vec{q} , o fluxo total de calor no volume de controle dQ/dt seria

$$- \int_{S.C.} \vec{q} \cdot d\vec{A} = - \int_{S.C.} \vec{q}_i d\vec{A}_i. \quad (3.13)$$

O trabalho total realizado por um fluido no volume de controle é

$$\frac{dW}{dt} = - \int_{S.C.} u_i^{int} \sigma_{ji} dA_j, \quad (3.14)$$

onde σ_{ij} é o tensor das tensões de cisalhamento do fluido no interior do volume de controle. Podemos dizer que o aumento da energia total no volume de controle é igual a razão em que o fluido realiza trabalho na vizinhança. Desta forma temos

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V.C.} \rho e dV + \int_{S.C.} \rho e u_i^{int} dA_i = - \int_{S.C.} \vec{q}_i dA_i + \int_{S.C.} u_i^{int} \sigma_{ji} dA_j + \int_{V.C.} q''' dV \quad (3.15)$$

Lembrando que e é a energia total por unidade de massa, dada por $e = \vec{V}^2/2 + u^{int} + \psi$, onde ψ é o potencial gravitacional (gz), e q''' é a geração interna de calor por unidade de volume. Usando o teorema de Gauss, a equação da energia fica

$$\int_{V.C.} \left[\frac{\partial}{\partial t} (\rho e) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho e u_i^{int}) + \frac{\partial}{\partial x_i} \vec{q}_i + q''' + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i^{int}) - \frac{\partial}{\partial x_i} (u_j^{int} \sigma'_{ji}) \right] dV = 0. \quad (3.16)$$

Como o volume é arbitrário, o integrando deve ser nulo. Expandindo os termos e combinando com a equação da continuidade (ver (HUGHES; BRIGHTON, 1974)), obtemos

$$\rho \frac{de}{dt} = - \frac{\partial}{\partial x_i} \vec{q}_i - p \frac{\partial u_i^{int}}{\partial x_i} - u_i^{int} \frac{\partial p}{\partial x_i} + u_i^{int} \frac{\partial \sigma'_{ji}}{\partial x_j} + \phi + q''' \quad (3.17)$$

onde $\phi = \sigma'_{ji} \partial u_j^{int} / \partial x_i$ é a função de dissipação.

Tomando o produto escalar de \vec{V} pela equação do movimento, admitindo que a força do campo B_i é gravitacional conservativa $-\rho \partial \psi / \partial x_i$, obtemos

$$\rho u_i^{int} \frac{du_i^{int}}{dt} = \rho \frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{V}^2}{2} \right) = -u_i^{int} \frac{\partial p}{\partial x_i} + u_i^{int} \frac{\partial \sigma'_{ji}}{\partial x_j} - \rho u_i^{int} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \quad (3.18)$$

que é a equação da energia mecânica. Considerando que ψ é constante no tempo (pois a cota não varia), podemos adicionar $\rho \partial \psi / \partial t$ ao primeiro membro da equação 3.18, resultando

$$\rho \frac{d}{dt} (\vec{V}^2/2 + \psi) = -u_i^{int} \frac{\partial p}{\partial x_i} + u_i^{int} \frac{\partial \sigma'_{ji}}{\partial x_j} \quad (3.19)$$

que subtraída da equação da energia, dá

$$\rho \frac{du^{int}}{dt} = -p \frac{\partial u_i^{int}}{\partial x_i} - \frac{\partial \vec{q}_i}{\partial x_i} + \phi + q''' \quad (3.20)$$

onde u^{int} é a energia interna por unidade de massa. E esta é a forma final da equação da energia.

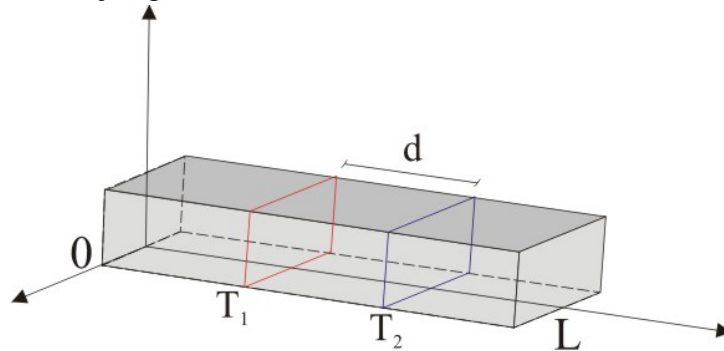
Para obtermos a segunda lei da termodinâmica, podemos transformar a equação 3.12 em igualdade pela introdução do conceito de produção de entropia por unidade de volume, θ . Introduzindo o vetor fluxo de calor \vec{q} ,

$$\int_{V.C.} \theta dV - \int_{S.C.} \frac{\vec{q}}{T} \cdot d\vec{A} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{V.C.} \rho s dV + \int_{S.C.} \rho s \vec{V} \cdot d\vec{A}. \quad (3.21)$$

3.3 Dedução da Equação de Calor Unidimensional

Conforme abordado por Boyce and DiPrima (2010), nesta seção vamos apresentar a dedução da equação do calor através de uma barra. Considerando uma barra uniforme isolada termicamente nas superfícies laterais, de modo que o calor só pode fluir na direção do eixo, como pode ser observado na figura 3.2. Se duas seções retas paralelas de mesma área A e temperaturas diferentes T_1 e T_2 , respectivamente, estiverem separadas por uma distância d , uma quantidade de calor por unidade de tempo vai passar da seção mais quente para a mais fria.

Figura 3.2: Representação gráfica da barra.



Além disso, essa quantidade de calor é diretamente proporcional à área A e à diferença de temperatura $|T_1 - T_2|$, e inversamente proporcional à distância de separação d . Logo,

$$\text{Quantidade de calor por unidade de tempo} = kA|T_1 - T_2|/d, \quad (3.22)$$

onde k é a condutividade térmica do material da barra.

Vamos considerar uma barra com seção reta uniforme, feita de material homogêneo, orientada de modo que o eixo x coincida com o eixo da barra. Denota-se $x = 0$ e $x = L$ como as extremidades da barra. Vamos supor que os lados da barra estão isolados

termicamente, e que a temperatura τ depende apenas da posição x e do tempo t .

A equação diferencial que governa a temperatura na barra expressa a taxa segundo a qual o calor entra em parte da barra e que deve ser igual à taxa de calor que é absorvido naquela parte da barra, denominados, respectivamente, termo de fluxo e termo de absorção. Para o termo de fluxo, considerando uma parte da barra entre as seções retas $x = x_0$ e $x = x_0 + \Delta x$, onde x_0 é arbitrário e Δx é pequeno.

A taxa instantânea de transferência de calor $H(x_0, t)$ da esquerda para a direita através da seção reta $x = x_0$ é dada por

$$H(x_0, t) = \lim_{d \rightarrow 0} kA \frac{\tau(x_0 + d/2, t) - \tau(x_0 - d/2, t)}{d} = -kA \frac{d\tau}{dx}(x_0, t). \quad (3.23)$$

O sinal negativo decorre do fluxo positivo de calor da esquerda para a direita, só ocorrerá se a temperatura à esquerda de $x = x_0$ for maior do que à direita. De maneira semelhante, a taxa por segundo a qual o calor passa da esquerda para a direita através da seção reta $x = x_0 + \Delta x$ é dada por

$$H(x_0 + \Delta x, t) = -kA \frac{d\tau}{dx}(x_0 + \Delta x, t). \quad (3.24)$$

Então a taxa total segundo a qual o calor entra no trecho da barra entre $x = x_0$ e $x = x_0 + \Delta x$ é dada por

$$Q = H(x_0, t) - H(x_0 + \Delta x, t) = kA \left[\frac{d\tau}{dx}(x_0 + \Delta x, t) - \frac{d\tau}{dx}(x_0, t) \right], \quad (3.25)$$

e a quantidade de calor entrando nesse trecho da barra no intervalo de tempo Δt é

$$Q\Delta t = kA \left[\frac{d\tau}{dx}(x_0 + \Delta x, t) - \frac{d\tau}{dx}(x_0, t) \right] \Delta t. \quad (3.26)$$

Para o termo de absorção, a variação média de temperatura $\Delta\tau$ no intervalo de tempo Δt é diretamente proporcional à quantidade de calor $Q\Delta t$ introduzida e inversamente proporcional à massa Δm do trecho da barra. Logo,

$$\Delta\tau = \frac{1}{c_p} \frac{Q\Delta t}{\Delta m} = \frac{Q\Delta t}{c_p \rho A \Delta x}, \quad (3.27)$$

onde c_p é o calor específico do material da barra e ρ é sua massa específica. A variação média de temperatura $\Delta\tau$ no trecho da barra é igual à variação de temperatura em algum

ponto intermediário $x = x_0 + \omega\Delta x$, onde $0 < \omega < 1$. Portanto a equação 3.27 fica

$$\tau(x_0 + \omega, t + \Delta t) - \tau(x_0 + \omega\Delta x, t) = \frac{Q\Delta t}{c_p \rho A \Delta x}, \quad (3.28)$$

que pode ser escrita como

$$Q\Delta t = [\tau(x_0 + \omega, t + \Delta t) - \tau(x_0 + \omega\Delta x, t)] c_p \rho A \Delta x. \quad (3.29)$$

Para equilibrar os termos de fluxo e de absorção, igualamos as equações 3.26 e 3.29 para $Q\Delta t$:

$$kA [\tau(x_0 + \Delta x, t) - \tau(x_0, t)] \Delta t = c_p \rho A [\tau(x_0 + \omega, t + \Delta t) - \tau(x_0 + \omega\Delta x, t)] \Delta x. \quad (3.30)$$

Dividindo a equação 3.30 por $\Delta x \Delta t$ e fazendo $\Delta x \rightarrow 0$ e $\Delta t \rightarrow 0$, obtemos a equação de calor ou de difusão

$$\frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial \tau}{\partial t}, \quad (3.31)$$

onde $\alpha^2 = k/\rho c_p$ é a difusividade térmica do material da barra.

3.3.1 Solução analítica da equação do calor unidimensional

Vamos considerar um problema de condução de calor em uma barra de seção reta uniforme feita com material homogêneo. Escolhendo o eixo das abscissas como eixo da barra e suponha que $x = 0$ e $x = L$ sejam as extremidades da barra. Suponha ainda que não haja transmissão de calor ao redor da barra e, também, que as dimensões da seção reta são tão pequenas que a temperatura τ pode ser considerada constante. Assim, τ só depende da coordenada x e do instante t . A variação de temperatura na barra é definida pela equação do calor, que é uma equação diferencial parcial conforme foi deduzida na seção anterior (BOYCE; DIPRIMA, 2010),

$$\frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial \tau}{\partial t}, \text{ para } 0 < x < L, t > 0, \quad (3.32)$$

onde α^2 é a difusividade térmica do material e é definido por $\alpha^2 = k/\rho c_p$, onde k é a condutividade térmica, ρ é a densidade e c_p é o calor específico do material na barra.

Além disso, admitindo dada a temperatura inicial na barra, temos

$$\tau(x, 0) = f(x), 0 \leq x \leq L, \quad (3.33)$$

onde f é uma função dada. Considerando que as temperaturas nas extremidades da barra são fixas: T_1 em $x = 0$ e T_2 em $x = L$. Vamos supor que τ é sempre zero quando $x = 0$ ou $x = L$:

$$\tau(0, t) = 0, \tau(L, t) = 0, t > 0. \quad (3.34)$$

O problema fundamental de condução de calor é encontrar $\tau(x, t)$ que satisfaz a equação 3.32 para $0 < x < L$ e para $t > 0$, a condição inicial 3.33 quando $t = 0$ e as condições 3.34 em $x = 0$ ou $x = L$.

Procura-se a solução $\tau(x, t)$ da equação 3.32 em $0 < x < L, t > 0$ sujeita à condição de que $\tau(x, t)$ tem que assumir um valor dado em cada ponto da fronteira desse espaço. O problema de condução de calor 3.32, com condições iniciais e de contorno 3.33 e 3.34, é linear, já que τ está sempre em primeira potência. Para encontrar as soluções necessárias para satisfazer as condições 3.33 e 3.34, toma-se como hipótese que $\tau(x, t)$ é um produto de duas outras funções, $F(x)$ e $G(t)$, a primeira dependendo de x e a segunda de t . Assim,

$$\tau(x, t) = F(x)G(t). \quad (3.35)$$

Substituindo a equação acima na equação diferencial 3.32, temos

$$\alpha^2 F'' G = F G', \quad (3.36)$$

onde as derivadas estão relacionadas com as respectivas variáveis. A equação 3.36 é equivalente à

$$\frac{F''}{F} = \frac{1}{\alpha^2} \frac{G'}{G}, \quad (3.37)$$

na qual cada lado da igualdade depende de uma variável. Para que a equação 3.37 seja válida para $0 < x < L, t > 0$ é preciso que ambos os lados da igualdade sejam iguais à uma mesma constante, onde denotando por $-\lambda$, a equação 3.37 fica

$$\frac{F''}{F} = \frac{1}{\alpha^2} \frac{G'}{G} = -\lambda. \quad (3.38)$$

Assim, obtemos duas equações ordinárias $F(x)$ e $G(t)$:

$$F'' + \lambda F = 0, \quad (3.39)$$

$$G' + \alpha^2 \lambda G = 0. \quad (3.40)$$

A hipótese 3.35 levou à substituição da equação diferencial 3.32 pelas equações diferenciais ordinárias 3.39 e 3.40. Cada uma delas pode ser resolvida imediatamente para qualquer valor de λ , porém é necessário que satisfaça as condições 3.34, o que restringe os valores possíveis para λ . Substituindo $\tau(x,t)$ da equação 3.35 em $x = 0$, obtemos

$$\tau(0,t) = F(0)G(t) = 0. \quad (3.41)$$

Se a equação 3.35 fosse satisfeita para $G(t) = 0$ para todo t , então $\tau(x,t) = 0$ para todo x e t , mas não podemos ter essa possibilidade. Assim, a equação 3.41 tem que ser satisfeita impondo-se

$$F(0) = 0. \quad (3.42)$$

Analogamente, temos em $x = L$

$$F(L) = 0 \quad (3.43)$$

Considerando a equação 3.39 com as condições 3.42 e 3.43, temos um problema de autovalores, onde as únicas soluções não triviais das equações 3.39, 3.42 e 3.43 são as autofunções

$$F_n(x) = \text{sen}(n\pi x/L), n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.44)$$

Associadas aos autovalores

$$\lambda_n = n^2 \pi^2 / L^2, n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.45)$$

Substituindo λ por $n^2 \pi^2 / L^2$ em 3.40, temos

$$G' + (n^2 \pi^2 / L^2) G = 0. \quad (3.46)$$

Logo, $G(t)$ é proporcional a $e^{-n^2 \pi^2 \alpha^2 t / L^2}$. Portanto, multiplicando as soluções das equações 3.39 e 3.40, e desprezando as constantes de proporcionalidade, temos que as funções

$$\tau_n(x, t) = e^{-n^2 \pi^2 \alpha^2 t / L^2} \text{sen}(n\pi x / L), n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.47)$$

satisfazem a equação diferencial parcial 3.32 e as condições de contorno 3.34 para cada valor inteiro positivo de n . As funções τ_n são chamadas, muitas vezes, de soluções fundamentais do problema de condução do calor 3.32, 3.33, 3.34. Admitindo que a solução do problema é uma combinação linear de todas as soluções fundamentais, encontramos

$$\tau_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2 \pi^2 \alpha^2 t / L^2} \text{sen}(n\pi x / L), \quad (3.48)$$

onde

$$c_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \text{sen}(n\pi x / L) dx, n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.49)$$

Conforme Boyce and DiPrima (2010), considerando condições de contorno não homogêneas, com temperaturas distintas nas fronteiras, temos

$$\frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial \tau}{\partial t}, \text{ para } 0 < x < L, t > 0, \quad (3.50)$$

onde

$$\tau(0, t) = t_1, \tau(L, t) = t_2 \text{ para } t > 0, \quad (3.51)$$

$$\tau(x, 0) = f(x), \text{ para } 0 < x < L. \quad (3.52)$$

Agora, tentaremos expressar $\tau(x, t)$ como a soma da temperatura do estado estacionário de distribuição $v(x)$ e outra distribuição (transiente) de temperatura $w(x, t)$. Assim

$$\tau(x, t) = v(x) + w(x, t). \quad (3.53)$$

Substituindo $\tau(x, t) = v(x) + w(x, t)$ em

$$\frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial \tau}{\partial t},$$

obtemos

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial w}{\partial t},$$

com

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial v}{\partial t} = 0.$$

Como $v(x)$ tem que satisfazer a equação de condução do calor 3.50, temos

$$v(x) = 0, \text{ para } 0 < x < L. \quad (3.54)$$

Além disso, $v(x)$ deve satisfazer as condições de contorno

$$v(0) = t_1, \quad v(L) = t_2. \quad (3.55)$$

Resolvendo para $v(x)$, obtemos

$$v(x) = (t_2 - t_1) \frac{x}{L} + t_1. \quad (3.56)$$

A seguir, $w(x, t)$ satisfaz as condições de contorno e iniciais:

$$w(0, t) = \tau(0, t) - v(0) = t_1 - t_1 = 0, \quad (3.57)$$

$$w(L, t) = \tau(L, t) - v(L) = t_2 - t_2 = 0, \quad (3.58)$$

$$w(x, 0) = \tau(x, 0) - v(x) = f(x) - v(x). \quad (3.59)$$

Portanto, o problema de valor de contorno para $w(x, t)$ é

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial w}{\partial t}, \text{ para } 0 < x < L, \quad t > 0, \quad (3.60)$$

$$w(0, t) = 0, \quad w(L, t) = 0 \text{ para } t > 0, \quad (3.61)$$

$$w(x, 0) = f(x) - v(x), \text{ para } 0 < x < L, \quad (3.62)$$

onde

$$v(x) = (t_2 - t_1) \frac{x}{L} + t_1. \quad (3.63)$$

A solução desse problema é

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2 \pi^2 \alpha^2 t / L^2} \text{sen}(n\pi x / L), \quad (3.64)$$

onde

$$c_n = \frac{2}{L} \int_0^L \left[f(x) - (t_2 - t_1) \frac{x}{L} - t_1 \right] \text{sen}(n\pi x/L) dx. \quad (3.65)$$

Como o problema de valor de contorno original é não homogêneo:

$$\frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial \tau}{\partial t}, \text{ para } 0 < x < L, t > 0, \quad (3.66)$$

$$\tau(0, t) = t_1, \quad \tau(L, t) = t_2 \text{ para } t > 0, \quad (3.67)$$

$$\tau(x, 0) = f(x), \text{ para } 0 < x < L. \quad (3.68)$$

Assim a solução $\tau(x, t) = v(x) + w(x, t)$ é dado por

$$\tau(x, t) = (t_2 - t_1) \frac{x}{L} + t_1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-n^2 \pi^2 \alpha^2 t / L^2} \text{sen}(n\pi x/L), \quad (3.69)$$

onde

$$c_n = \frac{2}{L} \int_0^L \left[f(x) - (t_2 - t_1) \frac{x}{L} - t_1 \right] \text{sen}(n\pi x/L) dx. \quad (3.70)$$

3.4 Métodos de solução numérica

Na seção anterior, abordamos a obtenção da solução analítica da equação do calor, no entanto, quando consideramos casos mais gerais de que envolvam difusão de calor, a obtenção de soluções analíticas torna-se cada vez mais difícil devido ao acréscimo de mais termos à equação. Sendo assim, uma abordagem numérica torna-se preferível, pois muitas vezes sua utilização é mais veloz na obtenção de soluções e, quase em sua totalidade, apresenta aproximações satisfatórias em problemas aplicados.

Desta forma, nesta seção apresentaremos algumas ferramentas matemáticas utilizadas para obtenção de uma solução numérica para a equação do calor.

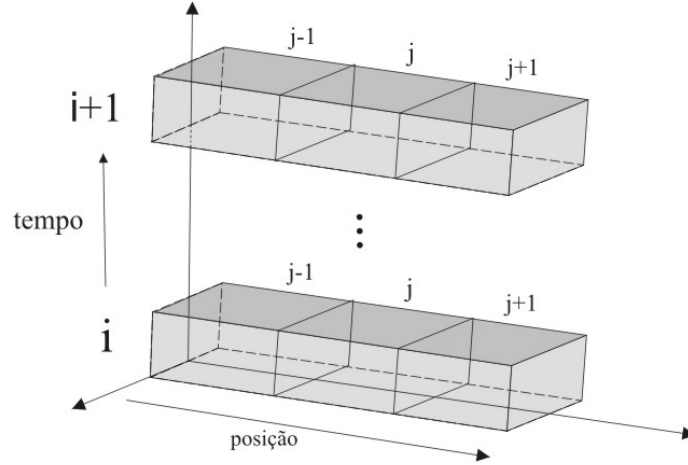
3.4.1 Discretização

Para obter a discretização de equações diferenciais, dispomos de diversos métodos para o mesmo, porém, por não se tratar do foco desse trabalho, apresentaremos apenas

um desses métodos, o Método de Diferenças Finitas conforme Justo et al. (2017).

A discretização pode ser melhor compreendida na figura 3.3, onde j é a discretização espacial unidimensional e i é a discretização temporal.

Figura 3.3: Representação gráfica da discretização.



Sendo assim, aplicando o método de Diferenças Finitas à equação do calor

$$\frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial \tau}{\partial t} \quad (3.71)$$

obtemos, através da Diferença Finita regressiva, que a aproximação para a derivada primeira via série de Taylor é

$$\frac{\tau^i(x_j) - \tau^{i-1}(x_j)}{\Delta t}, \quad (3.72)$$

e para a segunda derivada, através da Diferença Finita central, temos

$$\frac{\tau^{i-1}(x_{j+1}) - 2\tau^{i-1}(x_j) + \tau^{i-1}(x_{j-1}))}{\Delta x^2}. \quad (3.73)$$

Substituindo as aproximações 3.72 e 3.73, obtidas através de Diferenças Finitas, na equação do calor temos

$$\frac{\tau^1(x_j) - \tau^{i-1}(x_j)}{\Delta t} = \alpha^2 \left(\frac{\tau^{i-1}(x_{j+1}) - 2\tau^{i-1}(x_j) + \tau^{i-1}(x_{j-1}))}{\Delta x^2} \right). \quad (3.74)$$

Isolando $\tau^i(x_j)$ em 3.74, obtemos

$$\tau^i(x_j) = \left(\frac{\alpha^2 \Delta t}{\Delta x^2} \right) \tau^{i-1}(x_{j+1}) + \left(-\frac{2\alpha^2 \Delta t}{\Delta x^2} + 1 \right) \tau^{i-1}(x_j) + \left(\frac{\alpha^2 \Delta t}{\Delta x^2} \right) \tau^{i-1}(x_{j-1}). \quad (3.75)$$

Assim, para todo j , podemos escrever um sistema linear da forma

$$\tau^i(x_j) = a_1 \tau^{i-1}(x_{j+1}) + a_2 \tau^{i-1}(x_j) + a_1 \tau^{i-1}(x_{j-1}), \quad (3.76)$$

onde:

$$a_1 = \frac{\alpha^2 \Delta t}{\Delta x^2};$$

$$a_2 = -\frac{2\alpha^2 \Delta t}{\Delta x^2} + 1.$$

Reescrevendo o sistema 3.76 na forma matricial $Mx = b$ temos

$$\begin{bmatrix} \tau^i(x_1) \\ \tau^i(x_2) \\ \tau^i(x_3) \\ \tau^i(x_4) \\ \vdots \\ \tau^i(x_{n-1}) \\ \tau^i(x_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_2 & a_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & a_2 & a_1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_1 & a_2 & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tau^{i-1}(x_1) \\ \tau^{i-1}(x_2) \\ \tau^{i-1}(x_3) \\ \tau^{i-1}(x_4) \\ \vdots \\ \tau^{i-1}(x_{n-1}) \\ \tau^{i-1}(x_n) \end{bmatrix}, \quad (3.77)$$

onde a primeira e última linha da matriz são determinadas pelas condições de contorno em que, neste exemplo, foram:

Para $x = 0$ temos,

$$\frac{\partial \tau}{\partial x} = 0; \quad (3.78)$$

E para $x = L$ temos,

$$\frac{\partial \tau}{\partial x} = 0. \quad (3.79)$$

Dado o sistema 3.77, sua solução pode ser obtida através de diversos métodos numéricos, sendo alguns desses métodos citados abaixo.

3.4.2 Método de Gauss-Jacobi

Para resolver o sistema de equações

$$Mx = b \quad (3.80)$$

escreve-se a matriz M da seguinte forma

$$M = D + L + U, \quad (3.81)$$

onde D é matriz diagonal, L é matriz triangular inferior e U é matriz triangular superior, obtidas a partir da matriz M através de fatoração LU (ver (RUGGIERO; LOPES, 1996)). Pode-se ainda escrever

$$Dx = -(L + U)x + b \quad (3.82)$$

ou seja,

$$x_{i+1} = -D^{-1}(L + U)x_i + D^{-1}b. \quad (3.83)$$

Neste caso, os valores de x_{i+1} são obtidos em função de valores conhecidos de x_i . A condição de convergência é dada por

$$\|D^{-1}(L + U)\| < 1. \quad (3.84)$$

3.4.3 Método de Gauss-Seidel

Conforme Bortoli (2000), é um dos procedimentos de iteração por pontos mais usuais para sistemas de equações de porte médio. O método converge sob a condição de diagonal dominância da matriz dos coeficientes, ou seja,

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|. \quad (3.85)$$

Quando x_{i+1} é calculado, usam-se os valores já obtidos da interação anterior. Desta forma o sistema

$$Mx = b \text{ ou } \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i \quad (3.86)$$

com $M = D + L + U$ é escrito como

$$x_{i+1} = -D^{-1}(Lx_{i+1} + Ux_i) + D^{-1}b, \quad (3.87)$$

ou seja,

$$x_{i+1} = -(D + L)^{-1}Ux_i + (D + L)^{-1}b. \quad (3.88)$$

3.4.4 Método SOR - Método das sobre/subrelaxações

Segundo Bortoli (2000), este método pode ser empregado para acelerar a convergência de qualquer procedimento iterativo. Aplica-se uma correção para os valores calculados para cada passo conforme

$$u_j^{k+1} = u_j^k + w \left(u_j^{k+1} - u_j^k \right). \quad (3.89)$$

O valor w varia entre 0 e 2, sendo classificado como um processo de

- sobre-relaxação para $1 < w < 2$ (problemas parabólicos e hiperbólicos);
- subrelaxação para $0 < w < 1$ (problemas elípticos e oscilatórios).

Este método é empregado para resolver problemas como por exemplo

$$\frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial \tau}{\partial t} \quad (3.90)$$

que pode ser aproximado como

$$\tau_i^{k+1} = \tau_i^k + \frac{\beta^2 \left(\tau_{i+1}^k + \tau_{i-1}^{k+1} \right)}{2(1 + \beta^2)}, \text{ onde } \beta = \frac{\Delta t}{\Delta x}. \quad (3.91)$$

3.4.5 Método de Runge-Kutta

O método de Runge-Kutta é caracterizado pelo pequeno número de iterações que geralmente são necessárias para se atingir a convergência. O método de Runge-Kutta clássico contém quatro estágios e é descrito como

$$y_{i+1} = y_i + \frac{\omega}{6} (l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4) \quad (3.92)$$

onde,

$$l_1 = f(x_i, y_i)$$

$$l_2 = f\left(x_i + \frac{\omega}{2}, y_i + \frac{\omega}{2}l_1\right)$$

$$l_3 = f\left(x_i + \frac{\omega}{2}, y_i + \frac{\omega}{2}l_2\right)$$

$$l_4 = f(x_i + \omega, y_i + \omega l_3)$$

Esquemas com mais de 5 estágios não são eficientes pois o trabalho computacional envolvido é muito alto.

Na próxima seção apresentaremos os dados provenientes dos ensaios experimentais e das soluções analítica e numérica da equação de difusão de calor.

4 RESULTADOS

Nesta seção discutiremos acerca dos dados obtidos nos ensaios experimentais, sendo alguns determinantes para a caracterização do sensor de temperatura, como também para as comparações e relações entre os dados resultantes das soluções analítica e numérica dos modelos matemáticos que descrevem a difusão de calor, mais especificamente a condução de calor em uma barra metálica.

4.1 Resultados Experimentais

Para o primeiro ensaio, onde em um recipiente contendo 400 ml água em constante aquecimento, foram submersos os sensores LM35, o termômetro de mercúrio e o termopar, a fim de comparar a variação das medições de cada sensor em intervalos de tempo 3 minutos, sendo os dados obtidos distribuídos na tabela 4.1.

Tabela 4.1: Temperatura da água no recipiente (em graus celcius) ao longo do tempo.

| Tempo | Equipamento | | | | Diferença relativa |
|--------|-------------|----------|-------------|---------------|--------------------|
| | Mercúrio | Termopar | Sensor LM35 | Infravermelho | |
| 3 min | 23,5 | 23,2 | 23,2 | 23,6 | 0,017 |
| 6 min | 25,0 | 24,9 | 24,8 | 25,0 | 0,008 |
| 9 min | 29,0 | 28,9 | 28,6 | 28,8 | 0,013 |
| 12 min | 34,5 | 32,9 | 32,5 | 32,7 | 0,061 |
| 15 min | 37,0 | 37,3 | 36,8 | 36,8 | 0,013 |
| 18 min | 42,0 | 41,4 | 41,1 | 40,6 | 0,021 |
| 21 min | 46,0 | 45,6 | 45,8 | 44,8 | 0,004 |
| 24 min | 50,0 | 50,0 | 50,0 | 49,3 | 0,00 |
| 27 min | 54,0 | 53,7 | 53,6 | 52,1 | 0,007 |
| 30 min | 57,5 | 57,5 | 57,4 | 55,7 | 0,001 |

Analisando os dados da tabela 4.1, podemos verificar que as leituras de temperatura são muito próximas independentemente do equipamento utilizado, o que indica que o sensor LM35 apresenta uma boa precisão para esse tipo de medição. Veja que cada um dos sensores de temperatura listados na tabela 4.1 utilizam princípios de medição de temperatura distintos, por exemplo, o sensor de mercúrio funciona através do princípio de dilatação térmica, o sensor infravermelho considera o nível de radiação emitida pelo corpo quente, enquanto que os sensores LM35 e o termopar fazem uso da diferença de resistência elétrica que os metais apresentam com relação à temperatura. Apesar dos princípios físicos utilizados na construção de cada um dos sensores é possível perceber que

isso não influencia na determinação da temperatura nas condições propostas neste ensaio experimental. Em particular, considerando que, exceto o sensor LM35, todos os demais sensores listados na tabela 4.1 são equipamentos de uso laboratorial e aferidos, podemos concluir que o sensor LM35 possui boa confiabilidade para atuar nesse tipo de medição.

Neste ensaio experimental, com o objetivo de determinar o tempo de estabilização da leitura de temperatura do sensor LM35, foi planejado um ensaio que consistia em mergulhar o sensor em um recipiente contendo água quente ($\approx 68,4^{\circ}\text{C}$) até que suas leituras estabilizassem. Após atingir a estabilidade das leituras na temperatura quente o sensor era retirado e colocado em uma região à temperatura ambiente ($\approx 22,6^{\circ}\text{C}$). Esse procedimento foi realizado quatro vezes e o tempo necessário para que as leituras do sensor estabilizassem foram registradas, obtendo-se um tempo médio de 60 segundos para estabilização quando o sensor saía da temperatura mais quente para a mais fria e um tempo médio de 100 segundos para estabilização quando o sensor saía da temperatura mais fria para a mais quente. Consideramos que o tempo de estabilização das leituras é grande, o que implica no fato do sensor LM35 não ser adequado para ocasiões em que ocorra mudanças bruscas de temperaturas, ou em situações em que se exijam leituras muito precisas logo após a variação de temperatura.

Para o segundo ensaio experimental foi utilizada uma barra metálica com 30 cm de comprimento aquecida em uma das extremidades através de uma chama alimentada por GLP. As medições de temperatura foram realizadas em pontos equidistantes à 5 cm entre si e em intervalos de 30 segundos. Para análise de desempenho nesse ensaio foram utilizados os sensores de temperatura: o LM35 e o termopar, os quais geraram os seguintes dados (tabela 4.2).

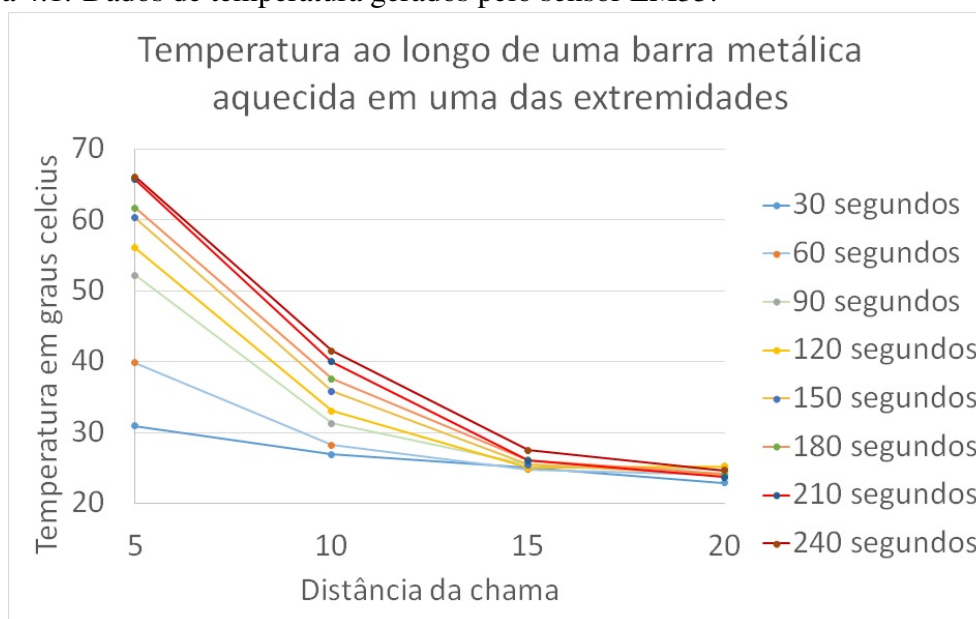
Os dados da tabela 4.2 permitem verificar que ocorreu uma discrepância considerável entre as leituras do termopar e do sensor LM35. Uma hipótese para essa grande discrepância é o fato do tempo de estabilização das leituras do sensor LM35 ser muito maior que o tempo de estabilização do termopar. Como as medições eram feitas em intervalos de 30 segundos o sensor LM35, apesar de ser capaz de descrever o comportamento de difusão de calor, não era capaz de apresentar leituras corretas de temperatura ao longo da barra.

A figura 4.1 permite verificar que apesar dos valores de temperatura produzidos pelo sensor LM35 não serem os valores corretos, quando comparados com os dados do termopar, o perfil de difusão de calor na barra metálica segue o previsto teoricamente conforme veremos a seguir.

Tabela 4.2: Temperatura da barra metálica (em graus celcius) em diversos pontos ao longo do tempo.

| Tempo | Equipamento | Distância da chama | | | | | |
|-------|--------------|--------------------|-------|-------|-------|-------|-------|
| | | 5 cm | 10 cm | 15 cm | 20 cm | 25 cm | 30 cm |
| 30 s | Termopar | 33,0 | 30,1 | 27,2 | 26,1 | 25,4 | 24,9 |
| | Sensor LM 35 | 30,9 | 26,9 | 25,1 | 22,9 | | |
| 60 s | Termopar | 44,5 | 33,0 | 29,3 | 26,7 | 25,5 | 25,2 |
| | Sensor LM 35 | 39,8 | 28,2 | 24,8 | 24,0 | | |
| 90 s | Termopar | 64,4 | 41,2 | 30,2 | 28,0 | 26,1 | 25,5 |
| | Sensor LM 35 | 52,2 | 31,3 | 25,4 | 24,8 | | |
| 120 s | Termopar | 71,8 | 47,5 | 33,0 | 28,2 | 26,5 | 25,4 |
| | Sensor LM 35 | 56,1 | 33,0 | 25,0 | 25,2 | | |
| 150 s | Termopar | 91,7 | 61,0 | 40,4 | 31,6 | 28,4 | 26,5 |
| | Sensor LM 35 | 60,3 | 35,8 | 25,4 | 24,0 | | |
| 180 s | Termopar | 121,2 | 72,3 | 45,5 | 33,6 | 30,0 | 28,7 |
| | Sensor LM 35 | 61,7 | 37,6 | 26,1 | 24,1 | | |
| 210 s | Termopar | 125,3 | 80,8 | 52,4 | 37,4 | 30,1 | 27,2 |
| | Sensor LM 35 | 65,7 | 40,0 | 26,0 | 23,7 | | |
| 240 s | Termopar | 136,5 | 83,7 | 56,7 | 37,1 | 30,4 | 27,7 |
| | Sensor LM 35 | 66,1 | 41,5 | 27,5 | 24,6 | | |

Figura 4.1: Dados de temperatura gerados pelo sensor LM35.



No terceiro ensaio experimental, o sensor LM35 juntamente com o sensor termopar foram colocados em um recipiente de vidro com o objetivo de evitar a convecção e a condução de calor do ar para os sensores. A partir de uma distância fixa inicial os sensores foram então aproximados de uma chama com o objetivo de determinar a distância a partir da qual os sensores tinham suas leituras de temperatura afetadas pela radiação proveniente da chama. Esse ensaio foi repetido duas vezes e verificou-se que a partir da distância

de 14 cm ambos os sensores eram capazes de detectar a influência da radiação. Como as leituras do sensor LM35 e do termopar, nesse experimento, foram muito próximas é possível concluir que ambos possuem a mesma sensibilidade para essa forma de difusão de calor.

Para o quarto ensaio experimental, a fonte de calor utilizada foi uma resistência elétrica e este calor era direcionado para os sensores de temperatura através de um sistema de convecção forçada. Foram feitas medições a cada 5 cm de distância a partir do foco de calor até a distância máxima de 30 cm. Os dados obtidos neste ensaio estão dispostos na tabela 4.3 abaixo.

Tabela 4.3: Temperatura do fluxo de ar (em graus celcius) à diferentes distâncias.

| Ensaio | Equipamento | Distância da fonte de calor | | | | | |
|----------|--------------|-----------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|
| | | 5 cm | 10 cm | 15 cm | 20 cm | 25 cm | 30 cm |
| Primeiro | Termopar | 57,8 | 58,4 | 55,7 | 54,3 | 51,0 | 46,2 |
| | Sensor LM 35 | 55,6 | 57,8 | 55,9 | 53,9 | 50,8 | 46,0 |
| Segundo | Termopar | 57,2 | 59,3 | 57,8 | 54,8 | 49,7 | 48,3 |
| | Sensor LM 35 | 55,8 | 58,2 | 57,0 | 54,2 | 49,8 | 48,1 |

O objetivo do quarto ensaio era verificar a sensibilidade do sensor LM35 em situações de convecção de calor, sobretudo através do ar. A tabela 4.3 permite verificar que as leituras de temperatura do sensor LM35 foram muito próximas das leituras do termopar o que era uma situação esperada pois ambos os equipamentos utilizam o mesmo princípio físico para determinação da temperatura.

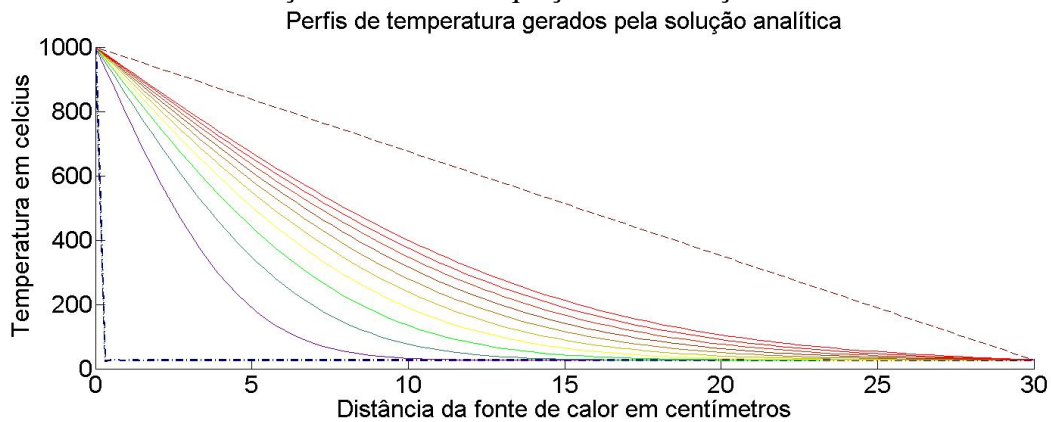
4.2 Resultados Teóricos

Nesta seção, iremos apresentar os resultados obtidos analítica e numericamente para o problema de difusão de calor em uma barra metálica, ou seja, problema equivalente ao nosso segundo ensaio experimental. Primeiramente, mostraremos o gráfico das soluções obtidas analiticamente na seção 3.4, e a seguir mostraremos os resultados obtidos a partir da solução numérica. Os problemas resolvidos de forma analítica e numérica são descritos pelas equações 3.50,3.51 e 3.52.

Para obtenção da solução analítica da equação de difusão de calor em uma barra metálica consideramos as equações 3.50,3.51 e 3.52, cuja solução foi dada pelas equações 3.69 e 3.70 . Os resultados apresentados na figura 4.2 foram obtidos a partir da solução 3.69 onde foram considerados $\alpha = 0,148$ cm (o qual aproxima o coeficiente de difusividade térmica do ferro), e foi necessário considerar 10000 termos da série de Fourier

da solução. As linhas apresentadas na figura 4.2 representam os valores de temperatura

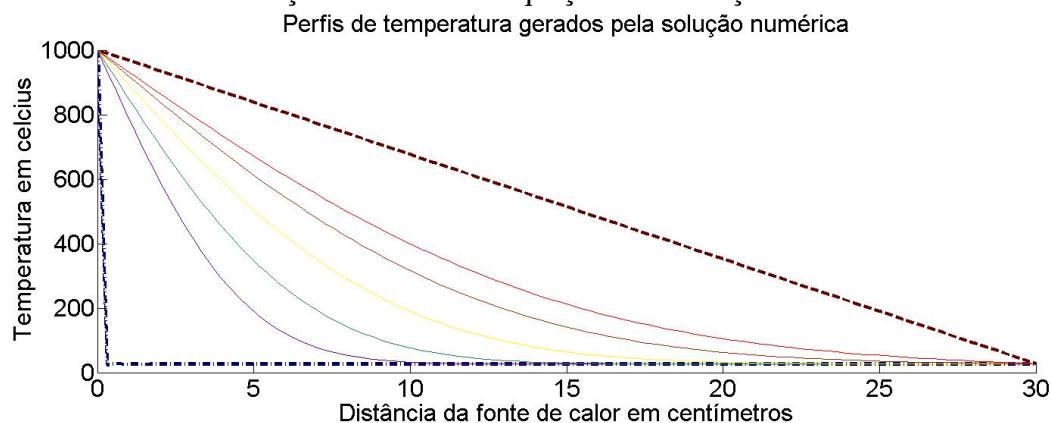
Figura 4.2: Gráfico da solução analítica da equação de condução de calor.



previstos em cada posição da barra metálica para um determinado instante de tempo. Foi considerada que a fonte de calor estava posicionada no ponto $x = 0$ da barra metálica e possuía temperatura fixa de $\approx 1000^{\circ}\text{C}$ e ainda que no instante inicial o restante da barra estava à temperatura de $\approx 27^{\circ}\text{C}$. As curvas presentes na figura 4.2 representam distintos instantes de tempo, sendo que os instantes iniciais estão destacados em tons de azul enquanto que os instantes finais aparecem em tons de vermelho. Analisando cada uma das curvas apresentadas nessa figura podemos verificar que as curvas que estão mais abaixo do gráfico, e que são aquelas obtidas para um instante de tempo menor, possuem uma concavidade bastante acentuada, o que significa que nos instantes iniciais havia uma grande diferença de temperatura entre as extremidades da barra metálica. Conforme o tempo avança novas curvas são geradas e estas aparecem no gráfico acima das curvas de instantes de tempos anteriores. Percebemos que, conforme o tempo passa, a concavidade das curvas diminui o que indica que, para um tempo suficientemente grande, a curva obtida aproximaria-se de uma reta o que é um comportamento esperado conforme nosso estudo bibliográfico.

Para obtenção da solução numérica das equações 3.50, 3.51 e 3.52, utilizamos 1000 pontos para x , $\Delta t = 0,0001$ segundos e $\Delta x = 0,03$ cm, ao realizar a discretização. O método numérico utilizado para obtenção da solução foi o Método de Gauss-Seidel, obtendo assim o gráfico apresentado na figura 4.3, onde as linhas com tons de azul representam intervalos de tempo iniciais e os tons de vermelho para intervalos de tempo finais. Percebemos que o comportamento gráfico da solução numérica da equação do calor é semelhante ao encontrado de forma analítica (Figura 4.2), os dados obtidos de forma numérica são bem próximos dos analíticos, resultando na grande semelhança entre os gráficos das figuras 4.2 e 4.3.

Figura 4.3: Gráfico da solução numérica da equação de condução de calor.



Ao compararmos os gráficos que representam as soluções analítica e numérica da equação do calor, figuras 4.2 e 4.3, com o gráfico dos dados obtidos através do sensor LM35 (figura 4.1), podemos inferir que, apesar do número pequeno de pontos utilizados para as medições com o sensor no decorrer da barra metálica e sua precisão nas leituras, há uma semelhança entre o comportamento das soluções analítica e numérica em relação aos dados obtidos com o sensor LM35. As figuras 4.1, 4.2 e 4.3 mostram que a temperatura em longo da barra está migrando de sua extremidade mais quente para a extremidade mais fria, como também podemos visualizar que, conforme o tempo aumenta, as curvas tendem a tomar uma forma linear.

Na seção seguinte, pontuaremos algumas considerações com relação aos resultados obtidos no trabalho, bem como em sua elaboração.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com a elaboração desse trabalho foi possível perceber que, diante da problemática envolvendo fenômenos de difusão de calor, o estudo de equações diferenciais que modelam situações reais é amplo e de grande aplicabilidade, como também as ferramentas matemáticas que podem ser utilizadas para resolução dessas equações, tanto na forma analítica como na forma numérica.

Para obtenção das soluções da equação do calor, analiticamente o processo se torna mais complicado quando adicionados mais termos à série de Fourier. Quando realizado numericamente, dependendo do método utilizado para obtenção da solução, obtemos uma boa aproximação para solução do problema.

Analisando o comportamento das soluções analítica e numérica da equação de difusão de calor, como também os dados obtidos através do sensor LM35, vemos que conforme o tempo aumenta as curvas tendem a tomar forma mais linear, buscando o equilíbrio entre as extremidades.

Observa-se que o sensor LM35 apresenta boa usabilidade em situações que não ocorra oscilações bruscas na temperatura, pois o sensor LM35 necessitou de um tempo grande para sua estabilização, o que o torna desfavorável na utilização em aplicações em que isso ocorra.

REFERÊNCIAS

- BORTOLI, A. L. D. **Introdução a dinâmica de fluidos computacional**. Porto Alegre: Editora da Universidade/UFRGS, 2000.
- BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. 9. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2010.
- CENGEL, Y. A.; GHAJAR, A. J. **Tranferência de calor e massa: uma abordagem prática**. Porto Alegre: AMGH, 2012.
- HALLIDAY, D.; RESNICK; WALKER, J. **Fundamentos de física: gravitação, ondas e termodinâmica**. 8. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2000.
- HUGHES, W. F.; BRIGHTON, J. A. **Dinâmica dos fluidos**. São Paulo: McGraw-Hill do Brasil, 1974.
- JUSTO, D. A. R. et al. **Cálculo numérico**. Porto Alegre, RS, 2017. Disponível em: <<https://www.ufrgs.br/numerico/livro/main.html>>. Visitado em: novembro de 2017.
- KUNDU, P. K.; COHEN, I. M. **Fluid mechanics**. San Diego: Academic Press, 2002.
- MUYNARSK, O. G.; GARCIA, M. V. R. Sistema de monitoramento e controle de máquinas elétricas, utilizando microcontrolador arduino e supervisorio elipse scada para diminuição programadas para a manutenção. **VI Seminário Multidisciplinar ENIAC**, v. 1, n. 6, p. 98–107, 2014. Disponível em: <<https://ojs.eniac.com.br/index.php/Anais/article/view/191/220>>. Visitado em: novembro de 2017.
- NUSSENZVEIG, H. M. **Curso de física básica: fluidos, oscilações, ondas e calor**. [S.l.]: Blucher, 2000.
- RUGGIERO, M. A. G.; LOPES, V. L. R. **Cálculo numérico: aspectos teóricos e computacionais**. 2. ed. São Paulo: Pearson Makron Books, 1996.
- TIPLER, P. A. **Física para cientistas e engenheiros, volume 1**. Rio de Janeiro: LTC, 2009.
- ZILL, D. G.; CULLEN, M. R. **Equações diferenciais, volume 2**. São Paulo: Pearson Makron Books, 2001.