UNIVERSIDADE FEDERAL DO PAMPA

ANDRIELLE CAMARGO DE ALDERETE

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS: UMA SOLUÇÃO EM SÉRIE PARA A EQUAÇÃO DO CALOR

ITAQUI
2017

ANDRIELLE CAMARGO DE ALDERETE

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS: UMA SOLUÇÃO EM SÉRIE PARA A EQUAÇÃO DO CALOR

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Matemática - Licenciatura da Universidade Federal do Pampa, como requisito parcial para obtenção do Título de Licenciada em Matemática.

Orientadora: Karla Beatriz Vivian Silveira.

ITAQUI
2017

Ficha catalográfica elaborada automaticamente com os dados fornecidos
pelo(a) autor(a) através do Módulo de Biblioteca do
Sistema GURI (Gestão Unificada de Recursos Institucionais) .

A357e Alderete, Andrielle Camargo de
Equações Diferenciais Parciais: uma Solução em Série para a Equação do Calor / Andrielle Camargo de Alderete.
56 p.

Trabalho de Conclusão de Curso(Graduação)-- Universidade Federal do Pampa, MATEMÁTICA, 2017.
"Orientação: Karla Beatriz Vivian Silveira".

1. Equações Diferenciais. 2. Equação do Calor. 3. Séries de Fourier. I. Título.

ANDRIELLE CAMARGO DE ALDERETE

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS: UMA SOLUÇÃO EM SÉRIE PARA A EQUAÇÃO DO CALOR

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Matemática - Licenciatura da Universidade Federal do Pampa, como requisito parcial para obtenção do Título de Licenciada em Matemática.

Trabalho de Conclusão de Curso defendido e aprovado em: 09 dez. 2017.

Banca examinadora:

____

Prof. Ma. Karla Beatriz Vivian Silveira
Orientadora
(UNIPAMPA)

____

Prof. Dr. Charles Quevedo Carpes
(UNIPAMPA)

____

Prof. Dra. Daniela de Rosso Tolfo
(UNIPAMPA)

Dedico este trabalho a minha família, a qual foi meu alicerce durante toda a trajetória acadêmica.

AGRADECIMENTO

Agradeço primeiramente a minha mãe Luciola, que me apoiou em todos os momentos, que entendeu minhas ausências e nervosismos durante o decorrer do curso, tentando sempre me auxiliar da forma que podia e que buscou, de modo carinhoso, evidenciar que eu tinha potencial para ir em frente.

Agradeço aos meus irmãos Karen, João Pedro e Fabiola e ao meu pai João Pedro, que sempre buscaram me ajudar em todos os momentos, vibrando junto comigo em cada uma das minhas conquistas, de modo que nada atrapalhasse o meu desempenho.

Agradeço ao meu padrasto Carlos, por ter me incentivado durante todos esses anos a ser sempre melhor, a não ter medo das barreiras impostas e a superar os percalços encontrados no caminho, sendo sempre prestativa em tudo que estivesse ligado a minha educação.

Agradeço a minha orientadora Karla, por ter sido muito mais que uma professora, mas uma amiga, por ter me guiado nesta jornada acadêmica sem medir esforços para meu desenvolvimento. Agradeço também pelos "puxões de orelha", pois eles servirão para que eu nunca deixe uma vitória me impedir de enxergar o quanto preciso me esforçar diariamente para progredir.

Agradeço ao professor Leonel por todo o aprendizado. Jamais conseguirei explicar o quanto suas contribuições e a sua amizade foram importantes para minha carreira acadêmica e para minha vida. É aquele professor que não importa onde esteja, terá sempre um lugar cativo em meu coração.

Por fim, agradeço a Deus por ter iluminado minha caminhada, deixando ao meu lado pessoas que fizeram desta jornada uma experiência gratificante e inesquecível.

“A maior recompensa pelo nosso trabalho não é o que nos pagam por ele, mas aquilo em que ele nos transforma”.

John Ruskin

RESUMO

O trabalho de conclusão de curso tem como tema as Equações Diferenciais Parciais (EDPs), mais especificamente a Equação do Calor, abordando conceitos relacionados à Série de Fourier, e apresenta como problema de pesquisa: com o uso de uma técnica de resolução de equações diferenciais parciais – e por meio de estudo embasado na Série de Fourier e na retomada de conceitos de cálculo diferencial e integral – é possível obter uma solução de um problema relacionado à propagação do calor em uma barra de seção transversal uniforme e de material homogêneo? Na busca pela solução desse problema, colocou-se como objetivo principal compreender uma técnica de resolução de equações diferenciais parciais, visando à solução de um problema relacionado à equação do calor, a partir de conceitos de cálculo diferencial e integral, com ênfase à Série de Fourier. Isso, porque as equações diferenciais são bastante utilizadas na solução de problemas que envolvem modelagem matemática**,** principalmente nas áreas de Química e Física. Na resolução desse problema fez-se necessário rever, ampliar e compreender conceitos de Cálculo, Álgebra, Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs) e Séries, bem como, dividi-lo em três etapas que contemplaram: a transformação de uma EDP em duas EDOs, pelo método de separação de variáveis, para encontrar uma constante de separação e após aplicar as condições de contorno, verificando**,** assim**,** três possibilidades para essa constante, na busca por uma solução não trivial; a utilização do problema de Sturm-Liouville regular, que contribui na determinação dos autovalores e autofunções. A partir disso, fizeram-se estudos que satisfazem a condição inicial em uma série, sendo possível verificar a periodicidade e ortogonalidade de funções, bem como, determinar soluções aplicando o principio da superposição e as séries de Fourier, devido à obtenção de uma série de senos e, consequentemente, fez-se necessária a utilização do teorema da convergência, obtendo assim, uma solução em série para a equação do calor.

Palavras-Chave: Equação do Calor, Equações Diferenciais, Séries de Fourier.

ABSTRACT

The Undergraduated Thesis has the theme Partial Differential Equations (PDE), more especifically the heat Equation, addressing concepts related to the Fourier' Serie, and presentes the search problem: using a technique resolution of partial differential equations – and by means a study of the Fourier' Serie and the resumption of concepts of differential and integral calculus –, is it possible to get a solution of a problem related to the spread of heat in a bar section straight uniform and homogeneous material? Trying to solve this question, the main aim was to understand a technique resolution partial differential equations, aiming at the solution related to the Equation Heat, following concepts of differential and integral calculus, with emphasis in the Fourier' Serie. This, because the differential equations are quite used to solve problems about mathematical modeling – mainly in the chemical and physical areas. In solving this problem became necessary recover, enlarge and understand concepts of Calculus, Algebra, Ordinary Differential Equations (ODE) and series, divided into three steps that take into consideration: the transformation of a PDE in two ODE by the method of separation of variables to find a constant of separation and then apply the contour conditions, checking three posibilities to this, in search for a solution nontrivial; the use of the problem of regular Sturm-Liouville, that contributes in determining of the self values and self functions. From there, studies was maked that meet the inicial condition in a serie, being posible to check the frequency and the orthogonal of functions, as wel as determine solutions applying the principle of superposition and the Fourier' Series due to obtain a serie of sines and, consequently, became necessary the use of the convergence theorem, getting so, a solution in serie to the Equation Heat

Keywords: heat Equation, Differential Equations, Fourier' Serie.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

O presente trabalho de conclusão de curso (TCC) tem como tema as Equações Diferenciais Parciais (EDPs), mais especificamente a Equação do Calor, abordando conceitos relacionados à Série de Fourier.

Nesse sentido, investigamos um problema clássico no estudo de equações diferenciais parciais – a equação do calor – que modela a propagação de calor em uma barra de seção transversal uniforme e de material homogêneo. Para tanto, define-se o eixo x de maneira a representar o eixo da barra de comprimento finito L e, nesse sentido, as extremidades do objeto são denotadas por $x = 0$ e $x = L$. Supõe-se, ainda, que os lados da barra encontram-se corretamente isolados, de forma que não existe perda de calor e que as dimensões da seção transversal são desconsideráveis, de maneira que ali a temperatura pode ser considerada constante. Coloca-se, portanto, o problema de valor inicial e de valores de contorno:

$$\begin{array}{llll} \alpha^2\, u_{xx} = u_t, & 0 < x < L, & t > 0, & \text{(Equação do Calor)} \\ u\,(x,\ 0) = f(x), & 0 < x < L, & & \text{(Condição inicial)} \\ u\,(0,\ t) = u\,(L,\ t) = 0, & & t > 0. & \text{(Condições de contorno)} \end{array}$$

Dessa forma, a temperatura $u(x,t)$ só depende da posição axial x e do instante de tempo t. A constante α^2 representa a difusividade térmica, que está associada ao material do qual é constituída a barra.

Nesse contexto, apresentamos o seguinte problema de pesquisa: com o uso de uma técnica de resolução de equações diferenciais parciais – e por meio de estudo embasado na Série de Fourier e na retomada de conceitos de cálculo diferencial e integral – como obter uma solução de um problema relacionado à propagação do calor em uma barra de seção transversal uniforme e de material homogêneo?

No encaminhamento do estudo das teorias pertinentes a essa temática, teve-se que definir o objetivo geral para a pesquisa e a análise desenvolvida, sendo proposto: *compreender uma técnica de resolução de equações diferenciais parciais, visando à solução de um problema relacionado à equação do calor, a partir de conceitos de cálculo diferencial e integral, com ênfase à Série de Fourier*, isso, porque as equações diferenciais são bastante utilizadas na solução de problemas em modelagem matemática – como nas áreas de Química e Física –, tornando-se útil para resolver a equação do calor**,** a qual modela a evolução temporal da temperatura de um corpo e, para atingir tal objetivo, se fez necessário: *compreender e aplicar o método da separação de variáveis para EDPs*, que em termos gerais, consiste em separar pelo sinal de igualdade as variáveis independentes x e t de duas funções, dividindo assim uma EDP em duas Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs), visando resolvê-las por métodos mais simples, por se tornarem duas funções com parâmetros independentes, satisfazendo as condições iniciais e de fronteira (Figueiredo, 2012, p. 6-7).

Em contrapartida, foi essencial *entender a Série de Fourier no contexto das soluções de uma equação diferencial parcial*, nesse caso a equação do calor, satisfazendo simultaneamente essa e as condições iniciais e de contorno. Também, *reaver e ampliar conceitos relacionados ao estudo de cálculo diferencial e integral*, visto que para resolver o problema de pesquisa faz-se necessário o aprofundamento teórico, considerando a sua compreensão e aplicação. Na busca por *aprofundar os conceitos supracitados a fim de estabelecer a teoria relacionada à Série de Fourier* e obter soluções de convergência uniforme por se tratar de uma sucessão de somas parciais, usou-se a periodicidade de funções e a relação de ortogonalidade.

A relevância do tema escolhido pode ser justificada ao longo da história da Matemática, visto que os estudos realizados por Fourier (1768-1830) colaboraram significativamente para o desenvolvimento de problemas relacionados à propagação do calor. Assim, Eves (2011, p. 526) ressalta que:

> Em 1807 Fourier apresentou um artigo à Academia de Ciências da França que deu início a um novo e extremamente frutífero capítulo da história da matemática. O artigo trata do problema prático da propagação do calor em barras, chapas e sólidos metálicos. (...).

No que se refere aos objetivos, eles se justificam visto que, segundo Alves (2008, p. 11), o componente curricular que trata de “Equações Diferenciais é o fechamento de um ciclo referente ao estudo do Cálculo, pois é a partir de seu estudo é que se passa a entender e melhor aplicar os conceitos de Derivada, Taxa de Variação e Integração”. Ou seja, a partir desse estudo tem-se oportunidade de ver o mundo real por meio do conhecimento matemático de uma forma precisa.

Além disso, sobre a já mencionada relação entre as EDPs e o estudo de Séries de Fourier, Eves (2011, p. 528) salienta que “(...) foram as séries de Fourier que motivaram os métodos modernos de física-matemática que envolvem a integração de equações diferenciais parciais sujeitas a condições de contorno. (...)". Essas condições, diferente das condições iniciais, referem-se à solução de problemas em que o valor da variável dependente (ou de sua derivada) se apresenta em pontos diferentes, como é o caso do problema físico da condução do calor na barra, onde a temperatura u tem valor definido em $x = 0$ e em $x = L$.

Para resolver o problema de pesquisa foi necessário o estudo teórico referente às equações diferencias, compreendendo as propriedades que distinguem as EDOs e EDPs, os diferentes métodos para resolvê-las, dando uma maior importância à técnica de separação de variáveis e a resolução por integrais impróprias. Ademais, estudou-se ortogonalidade e periodicidade de funções relacionada à soma de senos e cossenos, a qual é utilizada para o desenvolvimento das Series de Fourier**,** bem como o teorema da convergência da Série. Para tanto, esta monografia expõe no Capítulo II o aporte teórico – Referencial Teórico – necessário para a compreensão e resolução do problema de pesquisa, referente: a equações diferenciais e suas propriedades, a equação do calor, o método da separação de variáveis, a ortogonalidade de funções, a periodicidade das funções seno e cosseno e o teorema da convergência de Fourier. No Capítulo III, intitulado como enfoque metodológico, apresenta o problema de pesquisa e as etapas que serão desenvolvidas durante a resolução desse problema. A resolução, a análise e interpretação dos resultados serão apresentadas no Capítulo IV e, após, apresentar-se-á as considerações finais referentes aos resultados obtidos, sobre a importância deste estudo e o referencial bibliográfico.

2. CONCEITOS GERAIS E REVISÃO DE LITERATURA

A fim de abordar a temática proposta, fez-se necessário entender a terminologia *Equação Diferencial Parcial*, a qual se refere a uma equação que apresenta derivadas de uma ou mais variáveis dependentes em função de duas ou mais variáveis independentes. No caso da equação do calor, a variável dependente u que representa a temperatura está relacionada com as duas variáveis independentes x e t que representam, respectivamente, a posição axial e o tempo.

Conceitos importantes se fizeram presentes, como a periodicidade, a ortogonalidade e as séries de funções. Além disso, norteiam o trabalho os resultados clássicos como o Teorema da Convergência de Fourier – que afirma que, em condições específicas, uma função periódica pode ser escrita na forma de série de Fourier e, principalmente, estabelece onde e como se dá a convergência desta série.

Naturalmente, alguns conceitos principais precisaram de uma abordagem mais detalhada.

2.1 Equações Diferenciais

As equações diferenciais (EDs) são equações conhecidas por representarem modelos matemáticos e por auxiliarem na resolução de problemas da Física, Química entre outras áreas. De fato, Boyce e DiPrima evidenciam que:

> Muitos dos princípios, ou leis, que regem o comportamento do tempo físico são proposições, ou relações, envolvendo a taxa segundo a qual as coisas acontecem. Expressa em linguagem matemática, as relações são equações e as taxas são derivadas. Equações contendo derivadas são equações diferenciais (...) (2015, p.1).

Dessa forma, é correto definir:

Definição 2.1.1. Uma *Equação Diferencial* é uma equação que apresenta derivadas ou diferenciais de uma ou mais variáveis dependentes em função de uma ou mais variáveis independentes.

As equações diferenciais podem ser classificadas por sua ordem, por seu tipo – Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs) ou Equações Diferenciais Parciais (EDPs) – e por sua linearidade. A *ordem* de uma equação diferencial é definida como a ordem da maior derivada (seja parcial ou ordinária) nela presente.

Definição 2.1.2. Se uma equação diferencial contiver somente derivadas ordinárias de uma ou mais variáveis dependentes em relação a uma única variável independente, ela será chamada de *equação diferencial ordinária*. De maneira mais geral, uma EDO pode ser escrita na forma

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0,$$

na qual se estabelece uma relação – dada por F – entre a variável independente x, a função desconhecida $y = f(x)$ e suas derivadas.

Definição 2.1.3. Se uma equação diferencial contiver somente derivadas parciais de uma ou mais variáveis dependentes em relação a duas ou mais variáveis independentes, ela será chamada de *equação diferencial parcial*. De maneira mais geral, uma EDP em n variáveis independentes $x_1, \ldots, x_n$ é uma equação da forma

$$F\left(x_1, \ldots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \ldots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_n}, \ldots, \frac{\partial^k u}{\partial x_1^k}\right) = 0,$$

em que $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \Omega$, com $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto, F uma função dada e $u = u(x)$ é a função que queremos determinar.

Um exemplo que se pode tomar para mostrar uma EDP é o nosso problema de pesquisa, relacionado com a condução de calor,

$$\alpha^2 u_{xx} = u_t$$

também denotado por

$$\alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}.$$

Nesse sentido, de acordo com a definição 2.1.3, no primeiro membro da equação temos a derivada de ordem 2 em relação a variável x e no segundo membro, a derivada de ordem 1 em relação a variável t, sendo a variável independente x o eixo axial de uma barra homogênea e t, a variável relacionada ao tempo em que o calor se propaga. Cabe salientar que a função u e suas derivadas parciais dependem destas variáveis e que pode ser (re)escrita como

$$F\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial u}{\partial t}\right) = 0.$$

. A classificação por linearidade vai ser dada pela linearidade da função F em cada uma das definições acima.

Para obtermos algumas respostas de natureza quantitativa, precisamos encontrar *soluções*, ou seja, funções u que, quando substituídas na equação diferencial, a transforma em uma identidade.

Durante muito tempo, vários matemáticos buscaram formas de resolver problemas envolvendo equações diferenciais, assim verificando a existência de diversos métodos de resoluções, tanto com soluções explícitas como com soluções implícitas, podendo elas conter uma constante arbitrária a qual representa um conjunto de soluções chamado *família de soluções a um parâmetro*. Boyce e DiPrima (2015, p.10) afirmam que "(...) *O processo de solução envolve uma integração, que traz consigo uma constante arbitrária, cujos valores possíveis geram uma família infinita de soluções.".*

No intuito de evidenciar um único elemento dessa família infinita de soluções, são impostas algumas condições à equação, transformando-a em um problema. Quando impomos condições – denominadas *condições de contorno* – sobre o valor da solução e de suas derivadas no bordo (ou extremidades) da região (ou intervalo), temos um *problema de valores de contorno*.

Quando, em EDOs, especifica-se um valor inicial, por meio de

$$y(t_0) = y_0, \qquad y'(t_0) = y_1, \dots, \; y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1},$$

estamos atribuindo uma condição à solução y da equação, denominada *condição inicial*. Temos assim**,** um *problema de valor inicial.*

Como nas EDP's temos mais de uma variável independente (por exemplo, x e t) é natural fixar uma das variáveis (por exemplo, $t = 0$) e impor o valor da solução e de suas derivadas parciais em relação à variável fixa como função das outras variáveis (por exemplo, $u\,(x, 0) = f(x)$ e $u_t\,(x,\ 0) = g(x)$), generalizando o conceito de condições iniciais das EDOs para as EDP's.

Por isso, o problema que norteia este trabalho, a saber,

$$\alpha^2\, u_{xx} = u_t, \qquad 0 < x < L, \quad t > 0 \tag{1}$$

$$u\,(x,\ 0) = f(x), \qquad 0 < x < L, \tag{2}$$

$$u(0,\ t) = u(L,\ t) = 0, \qquad t > 0 \tag{3}$$

é classificado como um problema de valor inicial e de valores de contorno.

Em EDOs temos um grande resultado que estabelece condições suficientes**,** não somente para a existência de soluções do problema linear, mas também para a unicidade dessa solução. Para tal, consideramos o problema de valor inicial

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$

sujeito a $y(x_0) = y_0, y(x_0) = y_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$, em que $y_0,\ y_0', \dots, y_0^{(n-1)}$ são constantes arbitrárias.

Teorema 2.1.1. *(da Existência e Unicidade de Soluções para EDOs)*
Sejam $a_n(x),\ a_{n-1}(x), \dots,\ a_1(x),\ a_0(x)$ e $g(x)$ funções contínuas em um intervalo I e seja $a_n(x) \neq$ 0 para todo x nesse intervalo. Se $x = x_0$ for um ponto qualquer em I, então existe uma única solução $y(x)$ do problema de valor inicial acima mencionado.

Demonstração: *Ver em Zill (2001, p. 143).*

Como nosso intuito é obtermos soluções para a equação do calor, que é uma EDP, necessitamos compreender e estudar equações mais gerais do meemos tipo, isto é, que apresentam as mesmas propriedades, tais como a propriedade de linearidade e compreender o principio da superposição.

2.1.1. Linearidade e Superposição

No problema de pesquisa considerou-se uma EDP linear de segunda ordem com duas variáveis independentes, x e t, ou seja, a temperatura u (efeito) depende da posição axial x e do tempo *t* (causas). As equações diferenciais parciais, de qualquer ordem, podem apresentar a propriedade de linearidade, que representa a relação linear entre causa e o efeito. Assim, de uma maneira mais geral, utilizando a notação vetorial $x = (x_1, \dots, x_n)$ para denotar as n variáveis independentes $x_1, \dots, x_n$, consideramos uma equação de segunda ordem do tipo

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)D_iD_ju + \sum_{j=1}^{n} b_j(x)D_ju + c(x)u + d(x) = 0 \tag{4}$$

na qual $D_i = \frac{\partial}{\partial xi}$ e $D_j = \frac{\partial}{\partial xj}$ são notações de derivadas. Observe que, para obtermos uma equação de primeira ordem, basta considerar $a_{ij} \equiv 0$ para todo $i, j \in \{1, \dots, n\}$ e garantir a existência de um índice j, $1 \leq j \leq n$, para o qual $b_j \not\equiv 0$. Sendo de congruência e incongruência ($\equiv$ e $\not\equiv$) a simbologia utilizada por estarmos trabalhando com funções.

Dessa forma, podemos reescrever a equação (4), na forma

$$Lu = f,$$

em que $f(x) = -d(x)$ e

$$(Lu)(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) D_i D_j u + \sum_{j=1}^{n} b_j(x) D_j u(x) + c(x)u(x). \tag{5}$$

Assim, a cada função u corresponde uma única função Lu, com u sendo suficientemente diferenciável, o que nos permite entender L como um operador ou transformador linear. Logo, sendo Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ e considerando as funções a_{ij}, b_{ij} e c, $1 \leq i, j \leq n$, continuas em Ω, definimos

$$L: C^k(\Omega) \to C^0(\Omega)$$

$$u \to Lu$$

em que Lu é dado pela fórmula (5) e $C^k(\Omega)$ e representa o conjunto das funções $u: \Omega \to \mathbb{R}$ **,** que são k vezes continuamente diferenciáveis.

Proposição 2.1.1 (Princípio da Superposição)

Seja L um operador diferencial parcial linear de ordem k cujos coeficientes estão definidos em um aberto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Suponha que $\{u_m\}_{m=1}^{+\infty}$ é um conjunto de funções de classe C^k em Ω**,** satisfazendo a EDP linear homogênea $Lu = 0$. Então, se $\{\alpha_m\}_{m=1}^{+\infty}$ é uma sequência de escalares tal que a série

$$u(x) = \sum_{m=1}^{+\infty} \alpha_m u_m(x) \tag{6}$$

é convergente e k vezes diferenciável termo a termo em Ω, u satisfaz $Lu = 0$.

Demonstração: *Ver em Iório (2012, p. 8).*

2.1.2. *Problema de Sturm-Liouville*

2.1.2.1. *Problema regular de Sturm-Liouville*

Sejam as funções contínuas $p,\ q,\ r$ e r' com valores $x \in [a, b]$, sendo *r'* a derivada de *r* e estes estando em um intervalo real, tal que $r(x) > 0$ e $p(x) > 0$ para todo x no intervalo. O problema de contorno de dois pontos

$$\frac{d}{dx}[r(x)y'] + \big(q(x) + \lambda p(x)\big)y = 0 \tag{7}$$

sujeito a condições de contorno homogêneas

$$\alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) = 0 \tag{8}$$

$$\alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0 \tag{9}$$

é chamado um problema regular de Sturm-Liouville (ZILL, 2001, p. 226).

Nas equações (8) e (9) supomos que os coeficientes são números reais e independentes de λ e, tomamos α_1 e β_1, bem como α_2 e β_2, não-nulos simultaneamente. Sendo a equação diferencial (7) homogênea, o problema de Sturm-Liouville sempre admite a solução trivial $y = 0$, porém, normalmente procuramos determinar λ (autovalores) e soluções não triviais y que dependem de λ (autofunções).

Definição 2.1.2.1. Dizemos que $\lambda \in \mathbb{C}$ é um autovalor do problema de Sturm-Liouville regular (7), (8) e (9) se a equação

$$L_\lambda[y] = 0$$

tem solução $y(t) \not\equiv 0$ (ou seja, solução não - trivial) que satisfaz as condições de contorno (F). A solução $y = y(x)$ é chamada autofunção (correspondente ao autovalor λ).

Assim, na resolução desta equação diferencial**,** podemos obter um conjunto ortogonal de funções, visto que, ao resolver um problema de contorno de dois pontos, envolvendo esta equação diferencial linear de segunda ordem contem-se um parâmetro λ.

O valor λ obtido a partir da condição de contorno, aplicado na equação do calor, tem solução não trivial, ou seja, é equivalente a uma solução não nula. Logo, λ é conhecido como autovalor do problema e as autofunções são soluções não triviais correspondentes aos autovalores λ.

O problema regular de Sturm Liouville possui propriedades importantes, tais como o teorema exposto a seguir:

Teorema 2.1.3.1: *Propriedades do Problema Regular de Sturm-Liouville*

a) Existe um número infinito de autovalores reais que podem ser dispostos em ordem crescente $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \cdots \lambda_n < \cdots$ tais que $\lambda_n \to \infty$ quando $n \to \infty$.
b) Para cada autovalor há apenas uma autofunção (exceto para múltiplos não-zero).
c) As autofunções correspondentes a diferentes autovalores são linearmente independentes.
d) O conjunto de autofunções correspondente ao conjunto de autovalores é ortogonal em relação à função peso $p(x)$ no intervalo [a, b].

Demonstração: A demonstração segue, em linhas gerais, as ideias apresentadas por Zill (2001). Nesse sentido, apresentaremos apenas uma demonstração para o item (d).

Sejam y_m e y_n autofunções correspondentes aos autovalores λ_m e λ_n, respectivamente. Então

$$\frac{d}{dx}\left[r(x){y'}_m\right] + \left(q(x) + \lambda_m p(x)\right)y_m = 0 \tag{10}$$

$$\frac{d}{dx}\left[r(x){y'}_n\right] + \left(q(x) + \lambda_n p(x)\right)y_n = 0 \tag{11}$$

multiplicando (7) por y_n e (8) por y_m, tem-se

$$y_n\frac{d}{dx}\left[r(x){y'}_m\right] + \left(q(x) + \lambda_m p(x)\right)y_m y_n = 0 \tag{12}$$

$$y_m\frac{d}{dx}\left[r(x){y'}_n\right] + \left(q(x) + \lambda_n p(x)\right)y_m y_n = 0 \tag{13}$$

determinando a diferença entre as equações (9) e (10), obtemos

$$y_n \frac{d}{dx}\left[r(x){y'}_m\right] + q(x)y_m y_n + \lambda_m p(x)y_m y_n - y_m \frac{d}{dx}\left[r(x){y'}_n\right] - q(x)y_m y_n - \lambda_n p(x)y_m y_n = 0$$

aplicando a lei do cancelamento temos

$$y_n \frac{d}{dx}\left[r(x){y'}_m\right] + \lambda_m p(x)y_m y_n - y_m \frac{d}{dx}\left[r(x){y'}_n\right] - \lambda_n p(x)y_m y_n = 0$$

$$\lambda_m p(x)y_m y_n - \lambda_n p(x)y_m y_n = y_m \frac{d}{dx}\left[r(x){y'}_n\right] - y_n \frac{d}{dx}\left[r(x){y'}_m\right]$$

e colocando $p(x)y_m y_n$ em evidência no primeiro membro da equação tem-se

$$(\lambda_m - \lambda_n)p(x)y_m y_n = \frac{d}{dx}\left[r(x){y'}_n\right]y_m - \frac{d}{dx}\left[r(x){y'}_m\right]y_n. \qquad (14)$$

Integrando ambos os membros de $x = a$ até $x = b$ obtemos

$$\int_a^b (\lambda_m - \lambda_n)\ p(x)y_m y_n = \int_a^b \underbrace{\frac{d}{dx}\left[r(x){y'}_n\right]y_m dx}_{*} - \int_a^b \underbrace{\frac{d}{dx}\left[r(x){y'}_m\right]y_n dx}_{**}$$

$$(\lambda_m - \lambda_n)p(x)y_m y_n = (*) \text{ e } (**)$$

integrando por partes $(*)$

$$\int_a^b \frac{d}{dx}\left[r(x){y'}_n\right]y_m dx = r(x)\ y_m {y'}_n \Big|_a^b - \int_a^b r(x){y'}_n {y'}_m\, dx$$

$$u = y_m \ \Rightarrow\ du = {y'}_m dx$$

$$dv = \frac{d}{dx}\left[r(x){y'}_n\right]dx \quad \Rightarrow \quad v = r(x){y'}_n$$

integrando por partes $(**)$

$$\int_a^b \frac{d}{dx}\left[r(x){y'}_m\right]y_n dx = r(x)\ y_n {y'}_m \Big|_a^b - \int_a^b r(x){y'}_n {y'}_m\, dx$$

$$u = y_n \qquad \Rightarrow \qquad du = {y'}_n dx$$

$$dv = \tfrac{d}{dx}\left[r(x){y'}_m\right]dx \quad \Rightarrow \quad v = r(x){y'}_m$$

Assim,

$$(\lambda_m - \lambda_n)\int_a^b p(x)y_m y_n\,dx = (*) \text{ e } (**)$$

$$r(x)y_m{y'}_n\Big|_a^b - \int_a^b r(x){y'}_n{y'}_m\,dx - \left(r(x)y_n{y'}_m\Big|_a^b\right) + \int_a^b r(x){y'}_m{y'}_n\,dx =$$

$$r(x)y_m{y'}_n\Big|_a^b - r(x)y_n{y'}_m\Big|_a^b$$

$$= r(b)\big[y_m(b){y'}_n(b) - y_n(b){y'}_m(b)\big] - r(a)\big[y_m(a){y'}_n(a) - y_n(a){y'}_m(a)\big]. \qquad (15)$$

Mas as autofunções y_m e y_n devem**,** ambas**,** satisfazer as condições de contorno (8) e (9). Em particular, de (7) temos

$$\begin{cases} \alpha_1 y_m(a) + \beta_1 {y'}_m(a) = 0 \\ \alpha_1 y_n(a) + \beta_1 {y'}_n(a) = 0 \end{cases} \qquad (16)$$

resolvendo o sistema (16), isolando α_1 da 1° equação

$$\alpha_1 = \frac{-\beta_1 {y'}_m(a)}{y_m(a)}$$

e substituindo seu valor na 2° equação, temos

$$\alpha_1 y_n(a) + \beta_1 {y'}_n(a) = 0$$

$$\frac{-\beta_1 {y'}_m(a)}{y_m(a)} \cdot y_n(a) + \beta_1 {y'}_n(a) = 0$$

$$\frac{-\beta_1 y_n(a)\,{y'}_m(a) + \beta_1 y_m(a)\,{y'}_n(a)}{y_m(a)} = 0$$

colocando β_1 em evidência, obtém-se igualdade

$$-\beta_1\left(y_m(a){y'}_n(a) - y_n(a)\,{y'}_m(a)\right) = 0$$

e para que esta igualdade seja verdadeira, então $\beta_1 = 0$ ou

$$y_m(a)y'_n(a) - y_n(a)\,y'_m(a) = 0. \tag{17}$$

Assim, para que esse sistema seja satisfeito por α_1 e β_1, não simultaneamente nulos. Tomando a matriz de coeficientes do sistema (16) e calculando o determinante verificamos que

$$\begin{vmatrix} y_m(a) & y'_m(a) \\ y_n(a) & y'_n(a) \end{vmatrix} = y_m(a)y'_n(a) - y_n(a)\,y'_m(a) = 0.$$

Argumento análogo aplicado na (6) também resulta

$$y_m(b)y'_n(b) - y_n(b)\,y'_m(b) = 0.$$

Como ambos os termos do membro direito de (12) são zero, estabelecemos a relação de ortogonalidade

$$\int_a^b p(x)y_m y_n\,dx = 0,\ \ \lambda_m \neq \lambda_n. \tag{18}$$

2.2 Método da Separação de Variáveis

No intuito de resolver o problema de pesquisa, estamos em busca de soluções não triviais para o problema que trata da propagação do calor em uma barra. Ou seja, ao considerarmos a equação do calor, que é uma EDP, estamos em busca de uma solução não identicamente nula $u(x,t)$ que satisfaça as condições do problema de valor inicial $(u\,(x,\ 0) = f(x))$ e de contorno $(u(0,\ t) = u(L,\ t) = 0)$ apresentadas. Nesse sentido, uma ferramenta muito eficaz para o tratamento de equações diferenciais parciais é o *método da separação de variáveis*.

O método consiste, basicamente, em assumir uma solução na forma

$$u(x,t) = X(x) \cdot T(t),$$

isto é, supor uma solução que seja um produto de funções de uma variável, em que X só depende de x (posição axial) e T só depende de t (tempo).

Ao descreverem o método de separação de variáveis, Boyce e DiPrima (2010, p. 447) ressaltam que sua “(...) característica essencial é a substituição da equação diferencial parcial por um conjunto de equações diferenciais ordinárias, que tem que ser resolvidas sujeitas a condições iniciais ou de contorno. (...)". Assim, o método será aplicado à equação do calor, para transformá-la em um conjunto de equações diferenciais ordinárias cujas soluções foram desenvolvidas/encontradas em componentes curriculares do curso de Matemática-Licenciatura.

2.3 Equação do Calor

A propagação de calor em um meio, entre dois pontos, se dá por intermédio de três processos distintos: a condução, a convecção e a irradiação. Entretanto aqui será estudada a sua forma de condução, visto a necessidade de compreender e resolver a equação do calor. Deste modo, foi possível analisar mediante estudo teórico que a tal condução só pode realizar-se através de um meio material, sem que haja movimento do próprio meio, ocorrendo tanto em fluidos como em sólidos, em razão de diferentes temperaturas.

Quando uma chaleira contendo água é colocada sobre uma chama, o calor se propaga por condução da chama à água, por meio da parede metálica. Com esse exemplo, podem-se ilustrar todas as leis básicas da condução de calor: o calor vai sempre de um ponto ao outro, da temperatura mais alta a temperatura mais baixa; e a quantidade de calor transportada (ΔQ) durante um intervalo de tempo (Δt) é proporcional à diferença entre as temperaturas inicial e final ($\Delta T = T_1 - T_0$). A intensidade da chama garante uma temperatura mais alta, fazendo com que a água na chaleira ferva mais depressa.

Para isso, é importante considerar: ΔQ é inversamente proporcional à espessura (Δx) da chapa metálica, que constitui a chaleira. Contudo, quanto mais larga a chapa da chaleira, mais tempo a água leva para ferver. Dessa forma, vemos que ΔQ é proporcional a $\Delta T/\Delta x$, que é denominado *gradiente de temperatura*.

Cabe salientar que ΔQ também é proporcional à área (A), que se refere ao fundo da chaleira e proporcional ao Δt.

Nussenzveig (2002, p. 172) afirma que:

> (...) ΔQ é proporcional a $A\Delta t(\Delta T/\Delta x)$, ou seja, para a condução de calor através de uma espessura infinitésima dx de um meio durante um tempo dt,
> $$\frac{dQ}{dt} = -kA\frac{dT}{dX} \qquad (8.3.1)$$
> onde k é uma constante de proporcionalidade característica do meio condutor, que se chama de condutividade térmica do material ($k > 0$). O sinal ($-$) na (8.3.1) exprime o fato de que o calor flui de temperaturas mais

> altas para temperaturas mais baixas: assim, se o gradiente de temperatura dT/dx é negativo, a corrente térmica dQ/dt é positiva.

Consequentemente, a substância será melhor condutora de calor conforme a sua maior condutividade térmica k. Nussenzveig (2002, p. 172) salienta que "(...) Se medirmos $\frac{dQ}{dt}$ em $kcal/s$, A em m^2 e $\frac{dT}{dx}$ em $℃/m$, as unidades de k são $kcal/s.m.℃$ (...)". Materiais como o ar, a água, o vidro e o cobre possuem um valor k específico, porém, nem todos são bons condutores de calor por não serem bons condutores de eletricidade. Pois, nas teorias físicas – Lei de Wiedemann e Franz – é evidenciado que "(...) a condutividade térmica de um material é proporcional a sua condutividade elétrica". A partir das discussões sobre a condução do calor teve-se um melhor esclarecimento sobre o tema de pesquisa e consequentemente, compreensão do tema, o qual tem por necessidade *obter (um)a solução de um problema relacionado à propagação do calor em uma barra de seção transversal uniforme e de material homogêneo*.

Nesse sentido, tomando-se um eixo x como eixo da barra de tal forma que suas extremidades inicial e final, respectivamente, sejam $x = 0$ e $x = L$ e que os lados da barra estejam perfeitamente isolados – sem transmitir calor em suas laterais. E supondo que as dimensões da seção transversal são desconsideradas, sendo a temperatura ali vista como uma constante, logo, u esta dependendo apenas da coordenada axial x e do instante t.

Dessa forma, uma equação diferencial parcial estabelece a variação da temperatura na barra, sendo esta a equação do calor, que pode ser representada por

$$\alpha^2 u_{xx} = u_t, \qquad 0 < x < L, \qquad t > 0 \tag{1}$$

Sabendo-se que (1) pode ser resolvido pelo método de separação de variáveis e que ao resolver este, obteremos uma integração em seus dois membros durante a busca das antiderivadas, obtendo dessa forma a integração por partes

$$\int_\alpha^\beta u(x) \cdot v(x)\, dx, \tag{2}$$

a qual apresentará funções u e v formadas por senos e cossenos. Para resolver estas duas funções, há a necessidade de aprofundar os conceitos de periodicidade e ortogonalidade, desde que o problema envolva equações diferenciais que sejam expressas por funções em séries infinitas de senos e cossenos, para assim, resolvermos a problemática por meio da proposta de série trigonométrica chamada Série de Fourier.

2.4 Relações de ortogonalidade e periodicidade de funções seno e cosseno: Séries Trigonométricas

O tema de pesquisa nos leva a trabalhar com séries trigonométricas, e dessa forma, há a necessidade de entender como a periodicidade das funções seno e cosseno e as relações de ortogonalidade têm influência no desenvolvimento da série.

Para tanto, em um primeiro momento – utilizando conceitos de álgebra linear – vemos que**,** se o produto interno entre duas ou mais funções definidas em um mesmo intervalo for zero, estas constituem um conjunto de funções mutuamente ortogonais. Os termos deste conjunto ortogonal $\{\phi_n(x)\}$ em um $[\alpha, \beta]$ podem ser escritos como uma combinação linear, ou seja, uma soma de produtos de coeficientes a_n por funções ortogonais ϕ_n

$$f(x) = a_0\phi_0(x) + a_1\phi_1(x) + \cdots + a_n\phi_n(x), \text{ com } n = 0, 1, 2, \cdots \tag{1}$$

onde, os a_n, com $n = 0, 1, 2, 3 \cdots$, são os coeficientes das funções mutuamente ortogonais.

Neste sentido, é conveniente (ao nosso objetivo) definirmos um conjunto ortogonal de funções por meio do produto interno

$$< u, v > = \int_\alpha^\beta u(x) \cdot v(x)\, dx, \tag{2}$$

para duas funções reais u e v no intervalo $\alpha \leq x \leq \beta$. Por conseguinte, as funções u e v são ditas ortogonais em $\alpha < x < \beta$ se seu produto interno for nulo, ou seja, se $\int_\alpha^\beta u(x) \cdot v(x)\, dx = 0$.

A partir disso, podemos concluir que o conjunto

$$\phi = \left\{1, \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right), \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right), \cos\left(\frac{3\pi x}{L}\right), \dots, \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{L}\right), \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi x}{L}\right), \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi x}{L}\right), \dots\right\}$$

é ortogonal no intervalo $(-L, L)$, ao mostrarmos que são satisfeitas as relações de ortogonalidade:

$$\int_{-L}^{L} \cos\frac{m\pi x}{L}\; dx = 0 \tag{3}$$

$$\int_{-L}^{L} \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L} dx = 0 \tag{4}$$

$$\int_{-L}^{L} \cos\frac{m\pi x}{L}\, \cos\frac{n\pi x}{L} dx = \begin{cases} 0,\ m \neq n, \\ L,\ m = n; \end{cases} \tag{5}$$

$$\int_{-L}^{L} \cos\frac{m\pi x}{L}\, \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L} dx = 0, \qquad \forall\, m, n \tag{6}$$

$$\int_{-L}^{L} \operatorname{sen}\frac{m\pi x}{L}\, \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L} dx = \begin{cases} 0,\ m \neq n, \\ L,\ m = n. \end{cases} \tag{7}$$

Tomando a integral (5) com $m \neq n$, substituindo $\frac{m\pi x}{L}$ e $\frac{n\pi x}{L}$ por A e B respectivamente e utilizando a fórmula de adição trigonométrica temos:

$$cos(A - B) + cos(A + B) = cosAcosB + \cancel{senAsenB} + cosAcosB - \cancel{senAsenB}$$

$$cosAcosB = \frac{1}{2}[\cos(A - B) + \cos(A + B)]$$

logo,

$$cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = \frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{m\pi x}{L} - \frac{n\pi x}{L}\right) + \cos\left(\frac{m\pi x}{L} + \frac{n\pi x}{L}\right)\right]$$

então

$$\frac{1}{2}\int_{-L}^{L}\left[\cos\left(\frac{m\pi x}{L} - \frac{n\pi x}{L}\right) + \cos\left(\frac{m\pi x}{L} + \frac{n\pi x}{L}\right)\right] dx =$$

$$\frac{1}{2}\left[\int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{m\pi x - n\pi x}{L}\right) dx + \int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{m\pi x + n\pi x}{L}\right) dx\right]$$

considerando

$$u = \frac{(m\pi x - n\pi x)}{L} \quad \Rightarrow \quad du = \frac{(m\pi - n\pi)}{L} dx \quad \Rightarrow \quad \frac{L}{m\pi - n\pi} du = dx$$

e

$$v=\frac{(m\pi x+n\pi x)}{L} \quad \Rightarrow \quad dv=\frac{(m\pi+n\pi)}{L}dx \quad \Rightarrow \quad \frac{L}{m\pi+n\pi}dv=dx$$

segue

$$\frac{1}{2}\left[\frac{L}{m\pi-n\pi}\int_{(-m\pi+n\pi)}^{(m\pi-n\pi)}\cos u\,du+\frac{L}{m\pi+n\pi}\int_{(-m\pi+n\pi)}^{(m\pi-n\pi)}\cos v\,dv\right]=$$

$$\frac{1}{2}\left[\frac{L}{m\pi-n\pi}sen\,u\Bigg|\begin{matrix}(m\pi-n\pi)\\(-m\pi+n\pi)\end{matrix}+\frac{L}{m\pi+n\pi}sen\,v\Bigg|\begin{matrix}(m\pi-n\pi)\\(-m\pi+n\pi)\end{matrix}\right]=$$

$$\frac{L}{2\pi}\left[\frac{L}{m\pi-n\pi}sen\left(\frac{(m\pi-n\pi)x}{L}\right)\Bigg|\begin{matrix}L\\-L\end{matrix}+\frac{L}{m\pi+n\pi}sen\left(\frac{(m\pi+n\pi)x}{L}\right)\Bigg|\begin{matrix}L\\-L\end{matrix}\right]=$$

$$\frac{L}{2\pi}\left\{\frac{L}{m\pi-n\pi}\left[sen\left(\frac{(m\pi-n\pi)L}{L}\right)-sen\left(\frac{(m\pi-n\pi)(-L)}{L}\right)\right]\right.$$
$$\left.+\frac{L}{m\pi+n\pi}\left[sen\left(\frac{(m\pi+n\pi)L}{L}\right)-sen\left(\frac{(m\pi+n\pi)(-L)}{L}\right)\right]\right\}$$

para $(m\pi-n\pi)=p$ e $(m\pi+n\pi)=q$, com $p,q\in\mathbb{Z}$ temos

$$\frac{L}{2L}\left\{\frac{1}{p}[sen\,(p)+sen\,(p)]+\frac{1}{q}[sen\,(q)+sen\,(q)]\right\}.$$

Como $sen\,(p)=sen\,(q)=0$, então

$$\int_{-L}^{L}\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx=\ 0, \qquad \forall\, m\neq n.$$

Para $m=n$, temos que:

$$\int_{-L}^{L}\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx=\int_{-L}^{L}\cos^2\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\ dx. \tag{8}$$

Assim, usando uma das identidades sobre medidas múltiplas no segundo membro da Equação (8), temos

$$cos(A-B)+cos(A+B)=cosAcosB+\cancel{senAsenB}+cosAcosB-\cancel{senAsenB}$$

$$cosAcosB=\frac{1}{2}[\cos(A-B)+\cos(A+B)]$$

$$cosA = \frac{1}{2}[1 + \cos 2A]$$

logo

$$\frac{1}{2}\int_{-L}^{L} 1 + \cos\left(\frac{2m\pi x}{L}\right)\, dx = \frac{1}{2}\left[\int_{-L}^{L} 1\, dx + \int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{2m\pi x}{L}\right)\, dx\right] =$$

$$u = \frac{2m\pi x}{L} \quad \Rightarrow \quad du = \frac{2m\pi}{L} dx \quad \Rightarrow \quad \frac{L}{2m\pi} du = dx$$

que resulta

$$\frac{1}{2}\left[\int_{-L}^{L} 1\, dx + \frac{L}{2m\pi}\int_{-2m\pi}^{2m\pi} \cos u\; du\right] = \frac{1}{2}\left[x \Big|_{-L}^{L} + \frac{L}{2m\pi} \operatorname{sen} u \Big|_{-2m\pi}^{2m\pi}\right] =$$

$$\frac{1}{2}\left[(L + L) + \frac{L}{2m\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{2m\pi x}{L}\right)\Big|_{-L}^{L}\right] =$$

$$\frac{1}{2}\left\{(2L) + \frac{L}{2m\pi}\left[sen\left(\frac{2m\pi L}{L}\right) - sen\left(\frac{2m\pi(-L)}{L}\right)\right]\right\} =$$

$$\frac{1}{2}\left\{(2L) + \frac{L}{2m\pi}[sen\ (2m\pi) + sen\ (2m\pi)]\right\} =$$

$$\frac{1}{2}\left[(2L) + \frac{L}{2m\pi} \cdot 2\ sen\ (2m\pi)\right] = \frac{1}{2}\left[(2L) + \frac{L}{2m\pi} \cdot 0\right] = L.$$

Pode-se verificar também a integral (6), substituindo $\frac{m\pi x}{L}$ e $\frac{n\pi x}{L}$ de forma análoga a anterior, assim temos:

$$sen(A + B) + sen(A - B) = senAcosB + \cancel{senBcosA} + senAcosB - \cancel{senBcosA}$$

$senAcosB = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(A + B) + sen(A - B)]$, dai

$$\int_{-L}^{L} sen\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\ \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{1}{2}\int_{-L}^{L} \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L} + \frac{n\pi x}{L}\right) dx + \int_{-L}^{L} sen(\frac{m\pi x}{L} - \frac{n\pi x}{L})\, dx =$$

$$\frac{1}{2}\left[-\frac{L}{m\pi + n\pi} \cos\left(\frac{(m\pi + n\pi)x}{L}\right) - \frac{L}{m\pi - n\pi} \cos\left(\frac{(m\pi - n\pi)x}{L}\right)\right]\Big|_{-L}^{L} =$$

$$-\frac{1}{2}\left\{\left[\frac{L}{m\pi+n\pi}\cos\left(\frac{(m\pi+n\pi)L}{L}\right)-\frac{L}{m\pi+n\pi}\cos\left(\frac{(m\pi+n\pi)(-L)}{L}\right)\right]\right.$$
$$\left.+\left[\frac{L}{m\pi-n\pi}\cos\left(\frac{(m\pi-n\pi)L}{L}\right)-\frac{L}{m\pi-n\pi}\cos\left(\frac{(m\pi-n\pi)(-L)}{L}\right)\right]\right\}=$$

$$-\frac{1}{2}[(m+n)\pi+(m-n)\pi]=0$$

se $m+n$ é par e $m+n$ é ímpar, temos $(1-1)=0$.

Do mesmo modo, é possível integrar (7) com $m \neq n$:

$$cos(A-B)-cos(A+B)=\cancel{cosAcosB}+senAsenB-\cancel{cosAcosB}+senAsenB$$

$$senAsenB=\frac{1}{2}[\cos(A-B)-\cos(A+B)]$$

$$\int_{-L}^{L} sen\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\,\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx=\frac{1}{2}\left[\int_{-L}^{L}\cos\left(\frac{m\pi x}{L}-\frac{n\pi x}{L}\right)dx-\int_{-L}^{L}\cos\left(\frac{m\pi x}{L}+\frac{n\pi x}{L}\right)dx\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{L}{m\pi-n\pi}sen\left(\frac{(m\pi-n\pi)x}{L}\right)\Bigg|_{-L}^{L}-\left[\frac{L}{m\pi+n\pi}\right]sen\left(\frac{(m\pi+n\pi)x}{L}\right)\Bigg|_{-L}^{L}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{L}{m\pi-n\pi}\left[sen\left(\frac{m\pi-n\pi}{L}L\right)-sen\left(\left(\frac{m\pi-n\pi}{L}\right)(-L)\right)\right]\right.$$
$$\left.-\frac{L}{m\pi+n\pi}\left[sen\left(\frac{m\pi+n\pi}{L}\right)L-sen\left(\frac{m\pi+n\pi}{L}\right)(-L)\right]\right\}=$$

$$-\frac{1}{2}[0+0]=0.$$

E para $m=n$, obtem-se que:

$$senAsenB=\frac{1}{2}[\cos(A-B)-\cos(A+B)]\Rightarrow \mathrm{sen}^2 A=\frac{1}{2}[1-cos2A]$$

$$\int_{-L}^{L}\mathrm{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx=\int_{-L}^{L}\mathrm{sen}^2\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\,dx \tag{9}$$

Assim, usando uma das identidades sobre medidas múltiplas no segundo membro da Equação (9), temos

$$\frac{1}{2}\int_{-L}^{L} 1-\cos\left(\frac{2m\pi x}{L}\right)\, dx = \frac{1}{2}\left[\int_{-L}^{L} 1\, dx - \int_{-L}^{L}\cos\left(\frac{2m\pi x}{L}\right)\, dx\right] =$$

$$\frac{1}{2}\left[\int_{-L}^{L} 1\, dx - \frac{L}{2m\pi}\int_{-2m\pi}^{2m\pi}\cos u\ du\right] = \frac{1}{2}\left[x\,\Big|_{-L}^{L} - \frac{L}{2m\pi}\operatorname{sen} u\,\Big|_{-2m\pi}^{2m\pi}\right] =$$

$$\frac{1}{2}\left[(L-L) - \frac{L}{2m\pi}\operatorname{sen}\left(\frac{2m\pi x}{L}\right)\Big|_{-L}^{L}\right] =$$

$$\frac{1}{2}\left\{(2L) - \frac{L}{2m\pi}\left[sen\left(\frac{2m\pi L}{L}\right) - sen\left(\frac{2m\pi(-L)}{L}\right)\right]\right\} =$$

$$\frac{1}{2}\left\{(2L) - \frac{L}{2m\pi}\left[sen\ (2m\pi) - sen\ (2m\pi)\right]\right\} =$$

$$\frac{1}{2}\left[(2L) - \frac{L}{2m\pi}\cdot 0\right] = L$$

Após analisar os coeficientes das funções ortogonais ϕ, faz-se necessário compreender e verificar o caráter periódico, para conferir se o produto $u(x)\cdot v(x)$ e qualquer combinação linear $a_1u(x) + a_2v(x)$ também são periódicos em um período T. Assim, tem-se:

Definição 2.5.1. *Uma função f é dita periódica, com período $T > 0$, se $f(x + T) = f\ (x)$, para todo valor de x no domínio de f tal que $x + T$ também pertença ao domínio de f. O menor valor de T, para o qual a função é periódica, é denominado período fundamental de f.*

Sabe-se que as funções $\operatorname{sen}(x)$ e $\cos(x)$ satisfazem a definição acima, com período fundamental $T = 2\pi$, assim como (pode-se demonstrar que) as funções $\operatorname{sen}(ax)$ e $\cos(ax)$ permanecem periódicas, porém apresentam período fundamental $T = \frac{2\pi}{a}$. Por consequência, as funções $\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$ e $\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$ – amplamente utilizadas no desenvolvimento da série de Fourier – são periódicas com período fundamental $T = \frac{2L}{m}$.

2.5 Teorema da Convergência de Fourier

Na tentativa de definir uma série trigonométrica – a Série de Fourier – da forma periódica f de período $2L$

$$\int_{-L}^{L} f(x)dx = \int_{-L}^{L} \frac{a_0}{2} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-L}^{L} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right), \quad (1)$$

associada à função f, podemos encontrar expressões que determinam os coeficientes a_0, a_n e b_n.

Entretanto, para isso é necessário primeiramente fazer-se uma analise referente a funções trigonométricas, já que, é importante perceber-se quando esta é dita par ou impar, visando sua contribuição na hora da resolução de problemas, já que por meio delas é possível simplificar essa tarefa. Dessa forma, tem-se que toda função $y = g(x)$ é dita *par* se $g(-x) = g(x)$, para qualquer x, e seu gráfico é simétrico em relação ao eixo das ordenadas (y). Uma função $y = h(x)$ é dita ímpar se $h(-x) = -h(x)$, para todo x, e seu gráfico é simétrico em relação à origem dos eixos xy.

Identificar se uma função é par ou ímpar contribui também no estudo do comportamento de seu gráfico, visto que para $x > 0$ pode-se, utilizando os argumentos de simetria, concluir o que acontece em todo domínio da função.

Se $g(x)$ é uma função par, então

$$\int_{-L}^{L} g(x)dx = 2\int_{0}^{L} g(x)dx. \quad (2).$$

Se $h(x)$ é uma função ímpar, então

$$\int_{-L}^{L} h(x)dx = 0.$$

Cabe salientar que a função produto $q(x) = g(x) \cdot h(x)$, de uma g função par por uma função h ímpar, é ímpar, pois

$$q(-x) = g(-x) \cdot h(-x) = g(x) \cdot (-\, h(x)) = \, -q(x).$$

A série de Fourier é uma série trigonométrica, envolvendo uma soma de funções senos e cossenos, sendo a função $\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ par e a função $sen\,\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ ímpar.

Desta forma, se $f(x)$ for par, então $f(x) \cdot sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ será ímpar, igualmente, se $f(x)$ for ímpar, então $f(x) \cdot cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ será ímpar.

Para determinar o coeficiente a_0 basta integrarmos (1) termo a termo utilizando as relações de ortogonalidade supracitadas:

$$\int_{-L}^{L} \frac{a_0}{2} dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-L}^{L} cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-L}^{L} sen\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx =$$

$$\frac{a_0}{2} x|_{-L}^{L} + \frac{L}{n\pi} s\, en\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\Big|_{-L}^{L} - \frac{L}{m\pi} cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\Big|_{-L}^{L}$$

Assim, resultando

$$\left[\frac{a_0 L}{2} + \frac{a_0 L}{2}\right] = a_0 L \quad \Rightarrow$$

$$\left[\frac{L}{n\pi} sen\left(\frac{n\pi L}{L}\right) - \left(-\frac{L}{n\pi} sen\left(\frac{n\pi L}{L}\right)\right)\right] = \frac{L}{n\pi} \cdot 0 + \frac{L}{n\pi} \cdot 0 = 0 \qquad \Rightarrow$$

$$\left[-\frac{L}{m\pi} cos\left(\frac{m\pi L}{L}\right) - \left(-\frac{L}{m\pi} cos\left(\frac{m\pi L}{L}\right)\right)\right] = -\frac{L}{m\pi} \cos m\pi + \frac{L}{m\pi} \cos(-m\pi)$$
$$= -\frac{L}{m\pi} (\cos m\pi - \cos m\pi) = 0$$

como cosseno é par, então

$$-\frac{L}{m\pi} \cdot 1 + \frac{L}{m\pi} \cdot 1 = 0$$

logo, podemos deduzir que

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) dx. \qquad (3)$$

Multiplicando cada membro da Eq. (1) por $cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$, obtém-se a_n

$$\int_{-L}^{L} f(x) cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx =$$

$$\int_{-L}^{L} \frac{a_0}{2} cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-L}^{L} cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cdot cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-L}^{L} sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cdot cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx =$$

o que resulta

$$\int_{-L}^{L} f(x) cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = a_n L$$

logo,

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx. \qquad (4)$$

Multiplicando a Eq. (1) por $sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$, temos b_n:

$$\int_{-L}^{L} f(x) sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx =$$

$$\int_{-L}^{L} \frac{a_0}{2} sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-L}^{L} cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cdot sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-L}^{L} sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cdot sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

assim,

$$\int_{-L}^{L} f(x) sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = b_n L$$

então,

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx. \qquad (5)$$

Portanto, uma função periódica contínua por partes pode ser calculada por meio de uma série de Fourier.

Desta forma, constata-se que a série de Fourier de uma função periódica par $f(x)$, com período $2L$ é uma série de Fourier de cossenos

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

com coeficientes

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)dx\,, \qquad a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \cdot cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx\,, \qquad n = 1, 2, 3, \cdots$$

enquanto que a série de Fourier de uma função periódica ímpar $f(x)$, com período $2L$ é uma série de Fourier de senos

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

com coeficientes

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \cdot sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx.$$

E, os coeficientes Fourier de uma soma $f_1 + f_2$ são as somas dos coeficientes de Fourier de f_1 e f_2.

Porém, é imprescindível estabelecer hipóteses sobre a função f de forma a conhecer o comportamento e a convergência dessa série.

Para tanto, faz-se necessário definir a noção de seccionalmente contínua.

Definição 2.5.1. *Uma função f é dita seccionalmente contínua em $[\alpha, \beta]$ se for contínua nesse intervalo exceto, possivelmente, em um número finito de pontos e apresentar descontinuidades finitas nesses pontos.*

Nesse sentido, relacionando a temática, tomando o eixo axial da barra de material homogêneo de seção transversal e uniforme e de comprimento de 0 a L, pode-se tomar pontos entre os extremos do intervalo $[0, L]$, tais como $\alpha = 0 < x_1 = L_1 < x_2 = L_2 < \cdots < L = \beta$, obtendo assim pequenos subintervalos $(0, L_1)$, (L_1, L_2), $(L_2, L_3), \ldots, (L_n, L)$. A função $u(x,t)$ "é continua em cada subintervalo" se esta, "tende a um limite finito nas extremidades de cada subintervalo, quando aproximadas do interior do subintervalo."

Estamos, agora, em condições de formalizar o resultado seguinte, conhecido como o Teorema da Convergência de Fourier.

Teorema 2.5.2. *Considere f e f' funções seccionalmente contínuas no intervalo $(-L,\ L)$. Suponha, além disso, que f seja definida fora do intervalo $(-L, L)$ de forma que $f(x) = f(x + 2L)$. Então, f tem uma série de Fourier dada pela expressão*

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \text{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right), \tag{1}$$

cujos coeficientes são dados por

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\,\pi x}{L}\ dx\ \ (n \geq 0) \tag{2}$$

e

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\,\text{sen}\frac{n\,\pi x}{L}\ dx\ \ (n \geq 1). \tag{3}$$

A série de Fourier converge para $f(x)$ em todos os pontos onde f é contínua. Nos pontos de descontinuidade de f, a série converge para a média dos limites laterais

$$\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} \tag{4}$$

Demonstração: Ver Boyce e DiPrima (2010, p. 504).

Dessa forma, podemos observar que (4) é o valor médio dos limites laterais no ponto x, e sendo esta função contínua em qualquer ponto deste intervalo teremos que, $f(x^+) = f(x^-) = f(x)$, logo a serie de Fourier converge para esse valor médio.

Assim, sabemos que a série de Fourier de f converge, em cada ponto x, para a média dos limites laterais no ponto x, visto que, $f(x)$ é uma função periódica e seccionalmente contínua em cada um de seus intervalos limitados tendo um número finito de extremos locais. Portanto, quando $f(x)$ for contínua em x_0, consequentemente

$$f({x_0}^+)\ =\ f({x_0}^-)\ =\ f(x_0) \text{ então, } f(x_0) = \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2}$$

Seja F um prolongamento de uma função f a todo domínio $\mathbb{R}$ tal que F é periódica de período $2L$ – isto é, no intervalo $(-\,L, L)$ –, e o seu gráfico se repete a cada $2L$ unidades ao longo do eixo dos x. Logo, a função F é dita uma extensão periódica de f, com período $2L$.

Assim, dizer que a série de Fourier converge para $f(x)$ no intervalo $-L < x < L$ significa também que a série de Fourier converge para uma extensão periódica de f, com período $2L$.

Do teorema 2.5.2. tem-se que: Seja $f(x)$ uma função seccionalmente contínua num intervalo $]-L, L[$, o qual tem apenas um número finito de extremos locais. Então a série de Fourier de f, dada por

$$A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \, cos(\frac{n\pi x}{L}) + B_n sen(\frac{n\pi x}{L})]$$

onde

$$A_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(x) dx$$

$$A_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \, cos(\frac{n\pi x}{L}) \, dx \, , n = 1, 2, 3, \cdots$$

$$B_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \, \mathrm{sen} \left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \, , n = 1, 2, 3, \cdots$$

converge em cada ponto $x_0 \in]-L, L[$ para $\frac{1}{2} \ [f({x_0}^-) + f({x_0}^+)]$.

A série de Fourier de $f(x)$ no intervalo $[-L, L]$ converge, nos pontos $-L$ e L, para o mesmo valor. Com efeito, fazendo $x = -L$ ou $x = L$, obtém-se o mesmo resultado

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\pi).$$

3. METODOLOGIA

Para encontrarmos uma solução $u(x,t)$ – não nula, que satisfaz a equação diferencial e as condições iniciais e de contorno –, e respondermos a questão de pesquisa, desenvolveu-se um estudo aprofundado sobre as equações diferenciais parciais, a equação do calor, a resolução de Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs), autovalores e auto funções, o problema de Sturm Liouville e a Série de Fourier, bem como a aplicação da técnica de separação de variáveis, que é apresentada e implementada em diversas bibliografias, ou seja, a pesquisa fundamentou-se em materiais já publicados, dando a este trabalho o caráter bibliográfico (GIL, 2010).

Além disso, utilizaram-se hipóteses simplificadoras a fim de compreender a modelagem do fenômeno que envolve a propagação do calor em uma barra e buscou-se, assim, entender o raciocínio utilizado por Fourier no século XIX. Para isso, fez-se uma análise de tais hipóteses, visando interpretar os dados bibliográficos levantados. Nesse sentido, entendemos que a pesquisa adota, também, caráter exploratório, visto que:

> As pesquisas exploratórias têm como propósito proporcionar maior familiaridade com o problema, com vista a torná-lo mais explícito ou a construir hipóteses. Seu planejamento tende a ser bastante flexível, pois interessa considerar os mais variados aspectos relativos ao fato ou fenômeno estudado [...] (GIL, 2010, p.27).

À medida que a pesquisa teórica se desenvolveu, os conceitos, definições, teoremas, lemas – e demais conhecimentos relevantes – foram apontados, com a finalidade de levantar dados e destacar propriedades/características importantes do referencial, objetivando tanto a formalização (e a ambientação) matemática quanto à correta resolução do problema proposto.

Sendo assim, foi necessário análises, apontamentos e discussões sobre o referencial teórico e metodológico para, enfim, mobilizarmos os conceitos matemáticos que, em linhas gerais, envolveram: a aplicação da Separação de Variáveis $u(x,t) = X(x)\ \cdot T(t)$ (utilizando "$-\lambda^2$" como constante de separação) e a transformação da equação do calor $\alpha^2\, u_{xx} = u_t$, em duas EDOs; associando o autovalor $\lambda = \frac{n\,\pi}{L}$ a uma autofunção $X_n(x)$, obtendo assim, uma função $u_n(x,t) =$

$X_n(x) \cdot T_n(t)$, que apesar de ainda não ser a solução procurada, apresentou uma solução em série pelo princípio da superposição

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot u_n(x,t).$$

Esta solução, enfim, dependeu de coeficientes c_n que, em correspondência à condição inicial, puderam ser identificados pela semelhança a uma série de Fourier em senos. Permitindo ser verificado – ao implementar o método da separação de variáveis – se havia uma solução para o problema de valor inicial e de contorno utilizando propriedades da série de Fourier.

Visando resolver o problema proposto na monografia, houve a necessidade de dividi-lo em etapas, para melhor organização e compreensão, para isso, foi considerada uma EDP – a equação do calor – para a partir dela, obter-se uma solução que satisfaça, simultaneamente, as condições inicial e de contorno.

1° Etapa: empregou-se o método de separação de variáveis para obterem-se duas EDOs, por meio de uma constante de separação.

2° Etapa: aplicou-se as condições de contorno verificando três possibilidades para a constante de separação λ, sendo estas: $\lambda = 0$, $\lambda < 0$ e $\lambda > 0$, na busca por soluções não triviais para as EDOs obtidas. Sendo também necessário utilizar o problema de Sturm-Liouville regular para determinar autovalores e autofunções que proporcionam uma expressão característica, essencial na obtenção de uma família de soluções fundamentais.

3° etapa: determinou-se uma solução que satisfaz a condição inicial, por meio de uma série, verificando a periodicidade e a ortogonalidade das funções e aplicando o princípio da superposição. O que possibilita o reconhecimento de uma série de Fourier de senos, sendo necessária a utilização do teorema da convergência, permitindo assim, encontrar-se uma solução em série para a equação do calor.

4. APRESENTAÇÃO DA PESQUISA E ANÁLISE DOS RESULTADOS

No presente trabalho de conclusão de curso, investigou-se um problema clássico no estudo de equações diferenciais parciais – a equação do calor – que modela a propagação de calor em uma barra de seção transversal uniforme e de material homogêneo.

Para responder o seguinte problema de pesquisa: com o uso de uma técnica de resolução de equações diferenciais parciais – e por meio de estudo embasado na Série de Fourier e na retomada de conceitos de cálculo diferencial e integral – como obter uma solução de um problema relacionado à propagação do calor em uma barra de seção transversal uniforme e de material homogêneo?

Logo, fez-se necessário determinar o comprimento finito L do eixo de uma barra por meio do eixo x, de maneira que as extremidades do objeto fossem representadas por $x = 0$ e $x = L$. Para tanto, tomou-se os lados da barra corretamente isolados, de forma que não existe transmissão de calor e as dimensões da seção transversal são desprezíveis, de maneira que ali a temperatura pode ser considerada constante.

Assim, tem-se o problema proposto pelas equações:

$$\alpha^2 u_{xx} = u_t, \qquad 0 < x < L, \quad t > 0, \tag{1}$$

$$u\,(x,\ 0) = f(x), \qquad 0 < x < L, \tag{2}$$

$$u(0,\ t) = u(L,\ t) = 0, \qquad t > 0. \tag{3}$$

Visto isso, determinaremos uma solução $u(x,t)$ de (1) que satisfaz as condições (2) e (3). Logo o problema será resolvido por meio de três etapas.

Primeira etapa: inicialmente, determinamos as possíveis soluções de (1) aplicando o método de separação das variáveis**,** visando satisfazer as condições de contorno (3).

Para isso**,** tomaremos a função

$$u(x,t) = X(x) \cdot T(t) \tag{4}$$

para derivá-la uma vez a t e duas vezes em relação a x, isto é,

$$u_t(x,t) = X(x) \cdot T'(t)$$

$$u_x(x,t) = X'(x) \cdot T(t)$$

$$u_{xx}(x,t) = X''(x) \cdot T(t),$$

assim $u_t = \alpha^2 u_{xx}$, então

$$X(x) \cdot T'(t) = \alpha^2 X"(x) T(t),$$

logo, por meio da separação de variáveis, obtemos a equação equivalente

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{\alpha^2 T(t)}. \tag{5}$$

Observa-se em (5) que o primeiro membro depende unicamente de x, enquanto o segundo membro depende somente de t. Assim, ambas as expressões devem ser iguais a uma constante, digamos λ, porque se a expressão do primeiro membro não for constante, uma mudança de x eventualmente muda o valor desta expressão, mas possivelmente não muda o segundo membro, porque esse depende de x. Analogamente, se o segundo membro não for uma constante, o valor de t seguramente transformará o valor dessa expressão, mas não mudará o primeiro membro.

Se**,** em (5) designarmos uma constante de separação por $-\lambda$, então a equação será

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{\alpha^2 T(t)} = -\lambda. \tag{6}$$

A equação (6) fornece imediatamente duas equações diferenciais ordinárias. Sendo elas

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda \Rightarrow X''(x) = -\lambda\, X(x) \Rightarrow$$

$$X''(x) + \lambda\, X(x) = 0 \tag{7}$$

$$\frac{T'(t)}{\alpha^2 T(t)} = -\lambda \Rightarrow T'(t) = -\alpha^2 \lambda T(t) \Rightarrow$$

$$T'(t) + \alpha^2 \lambda T(t) \tag{8}$$

Nas equações (7) e (8) λ é ainda uma constante de separação. Logo, cada uma das equações pode ser resolvida rapidamente para qualquer valor de λ, sendo o produto destas, uma solução da equação diferencial parcial (1).

No entanto, buscam-se somente soluções as quais satisfaçam, também, as condições de contorno.

Segunda etapa: Ao substituirmos a função (4) na condição de contorno em $x = 0$ temos que

$$u(x,t) = X(x) \cdot T(t) = 0$$

$$u(0,t) = X(0) \cdot T(t) = 0$$

$$u(L,t) = X(L) \cdot T(t) = 0$$

Cabe salientar que $T(t)$ não pode ser zero, pois resultaria $u(x,t) = 0$, então $X(0) = 0$. Analogamente se $x = L$ implica em $X(L) = 0$.

Considerando (7), analisaram-se três possibilidades de valores que λ pode assumir, sendo estas, $\lambda = 0$, $\lambda < 0$ e $\lambda > 0$.

1°possibilidade: $\boldsymbol{\lambda = 0}$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0 \Rightarrow X''(x) + 0 \cdot X(x) = 0 \Rightarrow X''(x) + 0 = 0 \Rightarrow X''(x) = 0$$

logo, integrando

$$X''(x) = 0$$

obtém-se

$$X'(x) = constante\ c$$

que implica numa antiderivada

$$X(x) = cx + d.$$

Calculando a função $X(x)$ a partir das condições de contorno

$$X(0) \qquad \text{e} \qquad X(L)$$

tem-se

$$X(0) = c = 0 \qquad \text{e} \qquad X(L) = c \cdot L + d = 0$$

logo

$$X(x) = 0$$

é uma solução trivial para primeira possibilidade, logo não nos interessa.

2°possibilidade: $\lambda < 0$

Tomamos $\lambda = -k^2$, isto é, um valor estritamente negativo para λ. Assim temos

$$X''(x) + (-k^2)\, X(x) = 0.$$

Para resolvê-la, utilizou-se o problema de Sturm-Liouville regular

$$X''(x) - k^2\, X(x) = 0$$

$$X(0) = 0 \quad X(L) = 0$$

em que reescrevemos a equação na forma

$$\frac{d}{dx}[1 \cdot X'(x)] + (-k^2) \cdot X(x) + \lambda \cdot 0 \cdot X(x) = 0$$

ou seja, para

$$\frac{d}{dx}[r(x) \cdot X'(x)] + p(x)X(x) + \lambda q(x)X(x) = 0$$

consideramos

$$r(x) = 1 \qquad p(x) = -k^2 \qquad q(x) = 0.$$

Além disso, temos $X(0) = 0$ e $X(L) = 0$ ou, reescrevendo,

$$1 \cdot X(0) + 0 \cdot X'(0) = 0$$

$$1 \cdot X(L) + 0 \cdot X'(L) = 0$$

ou seja, $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ e $\beta_1 = \beta_2 = 0$, nas condições

$$\alpha_1 X(0) + \beta_1 X'(0) = 0$$

$$\alpha_2 X(L) + \beta_2 X'(L) = 0$$

de Sturm-Liouville.

Tomando

$$X(x) = e^{rx} \Rightarrow X'(x) = re^{rx} \text{ e } \quad X''(x) = r^2 e^{rx} \tag{9}$$

substituindo (9) na equação, obtém-se

$$X''(x) - k^2\, X(x) = 0 \Rightarrow r^2 e^{rx} - k^2\, e^{rx} = 0$$

$$(r^2 - k^2) \cdot e^{rx} = 0. \tag{10}$$

Para (10) ser válida, a função $X(x) = e^{rx}$ não poderá ser nula. Logo $r^2 - k^2 = 0$, obtendo-se assim, uma equação característica, e resolvendo a mesma**,** temos

$$r^2 - k^2 = 0 \Rightarrow r^2 = k^2 \Rightarrow r = \pm\sqrt{k^2}$$
$$\Rightarrow r = \pm k.$$

Desse modo**,** consideramos $X(x) = c_1 \cdot e^{-kx} + c_2 \cdot e^{kx}$ uma solução por EDO.

As soluções gerais também podem ser expressas a partir do seno hiperbólico e cosseno hiperbólico, definidos por

$$senh(kx) = \frac{e^{kx} - e^{-kx}}{2} \qquad \text{e} \qquad \cosh(kx) = \frac{e^{kx} + e^{-kx}}{2}$$

determinando**,** assim como solução geral

$$X(x) = c_1 cosh(kx) + c_2 senh(kx). \tag{11}$$

Aplicando as condições de contorno $X(0) = 0$ e $X(L) = 0$ em (10) tem-se

$$X(0) = c_1\, cosh\,(0) + c_2\, senh\,(0) \Rightarrow$$

$$X(0) = c_1\, cosh\,(0) + 0 \Rightarrow$$

$$X(0) = c_1 \cdot 1 = 0$$

e

$$X(L) = c_1\, cosh\,(kL) + c_2\, senh\,(kL),$$

sabendo que $c_1 = 0$ temos

$$X(L) = c_2\, senh\,(kL),$$

sendo L o comprimento da barra, implica $L \neq 0$ e com $\lambda < 0$ então $k \neq 0$. Sendo assim, constata-se que $c_2 = 0$.

Assim

$$X(L) = 0 \cdot\ cosh\,(kL) + 0 \cdot\ senh\,(kL)$$

logo, $X(x) \equiv 0$ é uma solução trivial $u(x,t) = 0 \cdot T(t) = 0$ para a segunda possibilidade. Sendo assim, a mesma não nos interessa.

3°possibilidade: $\boldsymbol{\lambda > 0}$

Tomando $\lambda = k^2$, isto é, um valor estritamente positivo para λ. Assim temos temos:

$$X''(x) + k^2\,X(x) = 0 \tag{12}$$

obtendo, novamente, um problema de Sturm-Liouville regular, em que

$$X''(x) + k^2\,X(x) = 0$$

$$X(0) = 0 \quad X(L) = 0$$

no qual, identifica-se $q(x) = k^2$,

Para resolvê-la, utilizou-se o problema de Sturm-Liouville regular

$$X''(x) + k^2\,X(x) = 0$$

$$X(0) = 0 \quad X(L) = 0$$

em que reescrevemos a equação na forma

$$\frac{d}{dx}[1 \cdot X'(x)] + (k^2) \cdot X(x) + \lambda \cdot 0 \cdot X(x) = 0$$

ou seja, para

$$\frac{d}{dx}[r(x) \cdot X'(x)] + p(x)X(x) + \lambda q(x)X(x) = 0$$

consideramos

$$r(x) = 1 \qquad p(x) = k^2 \qquad q(x) = 0.$$

Além disso, temos $X(0) = 0$ e $X(L) = 0$ ou, reescrevendo,

$$1 \cdot X(0) + 0 \cdot X'(0) = 0$$

$$1 \cdot X(L) + 0 \cdot X'(L) = 0$$

ou seja, $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ e $\beta_1 = \beta_2 = 0$, nas condições

$$\alpha_1 X(0) + \beta_1 X'(0) = 0$$

$$\alpha_2 X(L) + \beta_2 X'(L) = 0$$

de Sturm-Liouville.

Tomando

$$X(x) = e^{rx} \Rightarrow X'(x) = re^{rx} \text{ e } \quad X''(x) = r^2 e^{rx} \tag{13}$$

substituindo (13) na equação, obtém-se

$$X''(x) + k^2\, X(x) = 0 \Rightarrow r^2 e^{rx} - k^2\, e^{rx} = 0$$

$$(r^2 + k^2) \cdot e^{rx} = 0. \tag{14}$$

Para (14) ser válida, a função $X(x) = e^{rx}$ não poderá ser nula. Logo $r^2 + k^2 = 0$, obtendo-se assim, a equação característica**,** temos

$$r^2 + k^2 = 0 \Rightarrow r^2 = -k^2 \Rightarrow r = \pm\sqrt{-k^2} \Rightarrow\; r = \pm\sqrt{-1} \cdot k,$$

sendo $r = \pm ki$ raízes complexas.

Aplicando as condições de contorno em $X(x) = c_1 sen(kx) + c_2\, cos(kx)$, temos

$$X(x) = c_1 sen(kx) + c_2\, cos(kx) \;\Rightarrow\; X(0) = c_1\, sen(k0) + c_2\, cos(k0)$$

$$X(0) = 0 + c_2 \cdot 1 \quad \Rightarrow \quad X(0) = c_2\; = 0$$

para

$$X(L) = c_1\, sen(kL) + c_2\, cos(kL) \;\Rightarrow\; X(L) = c_1\, sen(kL) + 0$$

$$X(L) = c_1\, sen(kL) = 0.$$

Dessa forma, se $c_1 = 0$, resultaria novamente em $X(x) = 0$**,** teríamos uma solução trivial, porém este não é nosso objetivo. Suponhamos que $c_1 \neq 0$, assim temos que

$$c_1\, sen(kL) = 0 \;\Rightarrow\; sen(kL) = 0 \;\Rightarrow\; kL = n\pi \text{ com } n = 1, 2, 3, \ldots$$

Como as soluções são funções trigonométricas, tomamos $kL = n\pi \Rightarrow k = \frac{n\pi}{L}$ com $n = 1, 2, 3, \ldots$ como autovalores associados ao problema de Sturm-Liouville e

$$X_n(x) = c_1 \, sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \tag{15}$$

são suas respectivas autofunções.

Tomando as resoluções de (7) resolve-se a (8), substituindo $\lambda = \frac{n^2\pi^2}{L^2}$. Pois, seja

$$\lambda = k^2 \Rightarrow \lambda = \frac{n\pi}{L} \Rightarrow \lambda = \frac{n^2\pi^2}{L^2} \text{ com } n = 1, 2, 3, \ldots,$$

são, portanto, chamados de *autovalores* (ou *valores característicos*), para os quais o problema de contorno apresentou uma solução não-trivial. As soluções que decorrem dos valores λ, tais como $y = c_1 sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ ou simplesmente $y = sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$, são chamadas *autofunções* (*ou funções características*) (ZILL, 2001, p. 224-226).

Assim sendo, com $\lambda > 0 \Rightarrow k^2 = \frac{n^2\pi^2}{L^2}$ temos que a solução será dada por uma família de equações

$$T_n{}'(t) + \alpha^2\left(\frac{n^2\pi^2}{L^2}\right) T(t) = 0$$

e verifica-se que

$$T'(t) + \alpha^2\left(\frac{n^2\pi^2}{L^2}\right) T(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad T'(t) = -\alpha^2\left(\frac{n^2\pi^2}{L^2}\right) T(t) \quad \Rightarrow$$

$$\frac{dT}{dt} = -\alpha^2\left(\frac{n^2\pi^2}{L^2}\right) T(t) \quad \Rightarrow \quad \frac{dT}{T(t)} = -\alpha^2\left(\frac{n^2\pi^2}{L^2}\right) dt \quad \Rightarrow$$

$$\int \frac{1}{T(t)} dT = -\alpha^2\left(\frac{n^2\pi^2}{L^2}\right) \int dt \quad \Rightarrow \quad ln|T(t)| = -\alpha^2\left(\frac{n^2\pi^2}{L^2}\right) t \quad \Rightarrow$$

$$e^{ln|T(t)|} = e^{-\alpha^2\left(\frac{n^2\pi^2}{L^2}\right)t} \quad \Rightarrow \quad T(t) = e^{-\alpha^2\left(\frac{n^2\pi^2}{L^2}\right)t}$$

logo temos

$$T(t) = c_3 \, e^{-\alpha^2\left(\frac{n^2\pi^2}{L^2}\right)t}$$

então podemos considerar

$$u_n(x,t) = X_n(x)\cdot T_n(t) = A_n \cdot e^{-\alpha^2\left(\frac{n^2\pi^2}{L^2}\right)t} \cdot sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

como soluções fundamentais.

Visto que, a equação diferencial e as condições de contorno são lineares e homogêneas, verifica-se que haverá soluções fundamentais para qualquer combinação linear finita, logo consideramos que para as combinações lineares infinitas das soluções fundamentais também esteja certa esta afirmação.

Terceira etapa: Considerando agora, o problema de valor inicial

$$u\,(x,0) = \, f(x), \qquad\qquad 0 < x < L$$

desta forma,

$$u(x,0) = A_n \cdot sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = f(x)$$

entretanto**,** não se pode afirmar que $f(x)$ é uma função periódica. Sendo assim, supor apenas u_n como solução não é o suficiente para se verificar a condição inicial, logo utilizando a Proposição 2.1.1.1, que fala sobre o princípio da superposição, ajuda a garantir que

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot e^{-\alpha^2\left(\frac{n^2\pi^2}{L^2}\right)t} \cdot sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \qquad (16)$$

deve satisfazer a condição inicial (2). Além disso,

$$u(0,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot e^{-\alpha^2\left(\frac{n^2\pi^2}{L^2}\right)t} \cdot sen(0) = 0, \qquad \forall\, t > 0$$

$$u(L,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot e^{-\alpha^2\left(\frac{n^2\pi^2}{L^2}\right)t} \cdot sen(n\pi) = 0, \qquad \forall\, t > 0$$

satisfazendo, também, as condições de contorno (3).

Para que as condições iniciais (2) sejam satisfeitas, devemos ter

$$u(x,0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right).$$

Reconhecemos, nesta última expressão o desenvolvimento (de meio intervalo) de f em uma série de Fourier em senos.

Decorre da (seção de série de senos e cossenos) que só pode ocorrer

$$A_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \cdot sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx. \tag{17}$$

Substituindo (15) em (14) obtém-se:

$$u(x,t) = \frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^L f(x) sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx\right) \cdot e^{-\alpha^2\left(\frac{n^2\pi^2}{L^2}\right)t} \cdot sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

que é uma solução em série para a equação do calor nas condições iniciais e de contorno (2) e (3), respondendo assim a questão de pesquisa proposta nesta monografia.

Outras soluções podem ser encontradas ao atribuirmos diferentes valores para as condições inicial e de contorno. Para tanto, apresenta-se abaixo um exemplo considerando o problema de pesquisa.

Exemplo[1]: Considerando uma barra de metal com 30m de comprimento, isolada nos lados, inicialmente a uma temperatura $u\,(x,\ 0)$ em toda barra, determine a equação do calor considerando as seguintes equações.

$$\alpha^2\, u_{xx} = u_t, \qquad 0 < x < 30, \qquad t > 0, \tag{18}$$

$$u\,(x,\ 0) = 60 - 20x, \qquad 0 < x < 30, \tag{19}$$

$$u(0,\ t) = 20 \qquad u(30,\ t) = 50, \qquad t > 0. \tag{20}$$

encontrando a distribuição de temperatura no estado estacionário e o problema de valores de contorno, o qual determina a distribuição transiente.

Primeira etapa:

$$u(x,t) = X(x) \cdot T(t) \tag{21}$$

temos

$u_t(x,t) = X(x) \cdot T'(t)$

1- Problema disponibilizado em: BOYCE E DIPRIMA (2015, p. 524-525).

$$u_x(x,t) = X'(x) \cdot T(t)$$

$$u_{xx}(x,t) = X''(x) \cdot T(t)$$

assim $u_t = \alpha^2 u_{xx}$, então

$$X(x) \cdot T'(t) = \alpha^2 X"(x) T(t)$$

logo

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{\alpha^2 T(t)}. \tag{22}$$

Usando em (22) uma constante de separação $-\lambda$, então a equação será

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{\alpha^2 T(t)} =- \lambda. \tag{23}$$

Da equação (23) resulta

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda \Rightarrow X''(x) = -\lambda\, X(x) \Rightarrow$$

$$X''(x) + \lambda\, X(x) = 0 \tag{24}$$

$$\frac{T'(t)}{\alpha^2 T(t)} =- \lambda \Rightarrow T'(t) = -\alpha^2 \lambda T(t) = 0 \Rightarrow$$

$$T'(t) + \alpha^2 \lambda T(t) = 0. \tag{25}$$

Nas equações (24) e (25) λ é uma constante de separação. Logo, buscam-se soluções as quais satisfaçam as condições de contorno.

Segunda etapa: Ao substituirmos a função (4) na condição de contorno em $x = 0$ e $L = 30$, temos que

$$u(x,t) = X(x) \cdot T(t)$$

$$u(0,t) = X(0) \cdot T(t) = 20 = T_1$$

$$u(30,t) = X(30) \cdot T(t) = 50 = T_2$$

de forma que (18) e (19) permanecem inalteradas.

Esse problema pode ser reduzido a um problema de condições de contorno homogêneas, para aplicar as técnicas trabalhadas na pesquisa, visto que, quando

$t \to \infty$, obtemos uma temperatura estacionária $Y(x)$, que independe do tempo t e das condições iniciais.

Logo, sua derivada em relação ao tempo $Y(x)$ é nula e a equação (18) fica

$$Y''(x) = 0 \qquad 0 < x < 30 \tag{26}$$

então

$$Y'(x) = c$$

e, a distribuição de temperatura no estado estacionário é uma função linear de x. Ademais, $Y(x)$ deve satisfazer as condições de contorno

$$Y(0) = 20 \quad \text{e} \quad Y(30) = 50 \tag{20'}$$

que são válidas, até mesmo quando $t \to \infty$.

A solução da Eq. (26), que satisfaz as Eq. (20'), é

$$Y(x) = (50 - 20)\frac{x}{30} + 20 \qquad \Rightarrow \qquad Y(x) = x + 20, \tag{27}$$

pois $Y(x) = (T_2 - T_1)\frac{x}{L} + T_1$.

Retornando ao problema inicial, as Eqs. (18), (19), e (20) expressaremos $u(x,t)$ como a soma da distribuição de temperatura no estado estacionário $Y(x)$ com outra distribuição (transiente) $H(x,t)$, sendo (re)escrita como

$$u(x,t) = Y(x) + H(x,t) \tag{28}$$

porém, isolando $H(x,t)$, temos

$$H(x,t) = u(x,t) - Y(x)$$

e aplicando (19) em $H(x,t)$, temos

$$H(x,t) = (60 - 2x) - (x + 20)$$

$$H(x,t) = 40 - 3x. \tag{29}$$

Dessa forma, a solução transiente $H(x,t)$ satisfaz a equação do calor

$$H_t = H_{xx}, \tag{30}$$

(19) e as condições de contorno homogêneas

$$H(0,t) = 0 \quad \text{e} \quad H(30,t) = 0, \tag{20”}$$

com $\alpha^2 = 1$ e $L = 30$ e tomando $H_n(x,t) = X_n(x) \cdot T_n(x)$, temos

$$H_t(x,t) = X_n(x) \cdot T_n'(t), \;\; H_x(x,t) = X_n'(x) \cdot T_n(t) \;\text{ e }\; H_{xx}(x,t) = X_n''(x) \cdot T_n(t).$$

Assim, então (29) é (re)escrita como

$$X_n(x) \cdot T_n'(t) = X_n^{''(x)} \cdot T_n(t)$$

logo, pela equivalência, temos

$$\frac{X_n''(x)}{X_n(x)} = \frac{T_n'(t)}{T_n(t)} =-\lambda. \tag{31}$$

Da equação (31) resulta

$$X_n''(x) + \lambda\, X_n(x) = 0 \tag{32}$$

e

$$T_n'(t) + \lambda T_n(t) = 0. \tag{33}$$

Por λ ser uma constante de separação e buscarmos soluções as quais satisfaçam (30) e (20”).

Trabalhando a condição de contorno em $x = 0$ e $x = L = 30$ na igualdade $H_n(x,t) = X_n(x) \cdot T_n(x)$, temos que

$$H_n(0,t) = X_n(0) \cdot T_n(t) = 0 \;\text{ e }\; H_n(30,t) = X_n(30) \cdot T_n(t) = 0$$

com $T_n(t) \neq 0$. Nessas condições, tomamos $\lambda > 0$, isto é, $\lambda = k^2$. Utilizando o problema de Sturm-Liouville regular e (32) resulta

$$r(x)X_n''(x) + p(x)X_n(x) + \lambda q(x)X_n(x) = 0,$$

em que $r(x) = 1$, $p(x) = k^2$ e $q(x) = 0$, o que garante

$$\alpha_1 X_n(0) + \beta_1 X_n'(0) = 0 \quad \Rightarrow \; \alpha_1 \cdot 0 + \beta_1 X_n'(0) = 0$$

$$\alpha_2 X_n(30) + \beta_2 X_n'(30) = 0 \;\; \Rightarrow \; \alpha_2 \cdot 0 + \beta_2 X_n'(30) = 0$$

e, para $X_n'(0) \neq 0$ e $X_n'(30) \neq 0$, temos $\beta_1 = \beta_2 = 0$, o que resulta $\alpha_1 \neq 0$ e $\alpha_2 \neq 0$. Logo, podemos tomar $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$.

Seja $X_n(x) = e^{rx}$, teremos a equação característica

$$r^2 + k^2 = 0 \;\Rightarrow\; r = \pm ki,$$

e, determinando $X_n(x) = c_1 sen(kx) + c_2\, cos(kx)$ como uma solução por EDO e, aplicando as condições de contorno (20") nesta e, para $x = 0$, temos $c_2 = 0$ e $c_1 sen(30k)$. Tomando $c_1 \neq 0$ temos

$$c_1 sen(30k) = 0 \;\Rightarrow\; 30k = n\pi \quad \Rightarrow k = \frac{n\pi}{30}, n = 1, 2, 3, \cdots,$$

que são autovalores associados ao problema de Sturm-Liouville regular e

$$X_n(x) = c_1 sen\left(\frac{n\pi x}{30}\right) \tag{34}$$

que são autofunções.

Para $\lambda > 0$ e $k^2 = \frac{n^2\pi^2}{900}$, temos que a solução obtida a partir de (33) é

$$T_n(t) = c_3 e^{-\left(\frac{n^2\pi^2}{900}\right)t},$$

então podemos considerar que

$$H_n(x,t) = X_n(x) \cdot T_n(x) \quad \Rightarrow H_n(x,t) = A_n e^{-\left(\frac{n^2\pi^2}{900}\right)t} \cdot sen\left(\frac{n\pi x}{30}\right)$$

são soluções fundamentais.

Terceira etapa: Sabendo que $u(x,t)$ foi (re)escrita como (28), temos

$$u(x,t) = x + 20 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\left(\frac{n^2\pi^2}{900}\right)t} \cdot sen\left(\frac{n\pi x}{30}\right)$$

em que

$$A_n = \frac{1}{15}\int_0^{30} (60 - 2x) \cdot sen\left(\frac{n\pi x}{30}\right) dx, \qquad n = 1, 2, 3, \cdots.$$

Obtendo assim,

$$u(x,t) = x + 20 + \frac{1}{15}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^{30}(60 - 2x) \cdot sen\left(\frac{n\pi x}{30}\right) dx\right) e^{-\left(\frac{n^2\pi^2}{900}\right)t} \cdot sen\left(\frac{n\pi x}{30}\right)$$

que é uma solução em série para a equação do calor nas condições iniciais e de contorno (19) e (20) deste exemplo.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Diante da pesquisa apresentada foi possível aplicar uma técnica para resolução de equações diferenciais parciais no intuito de resolver um problema relacionado à equação do calor e**,** para isso**,** foi necessário reaver, ampliar e compreender conceitos de Cálculo, Álgebra, EDs e séries.

No decorrer do desenvolvimento da pesquisa, fez-se um estudo aprofundado de equações diferenciais, sendo possível perceber a importância desta em problemas reais da Física, da Engenharia e na própria Matemática.

Para conclusão da pesquisa nessa temática, foram necessários estudos que auxiliaram a obter os resultados e considerações, isso explica a necessidade de concluir os componentes curriculares de Álgebra Linear e EDO – como foram mencionadas no projeto de TCCI –, visto que para resolver uma EDP foi utilizada a técnica de separação de variáveis**,** a qual possibilitou transformar a mesma em duas EDOs. Sendo que estas poderiam ser solucionadas de forma mais simples utilizando: as condições iniciais e de contorno, o princípio da superposição e linearidade e na sequência, o problema de Sturm-Liouville regular, que permitiu encontrar autovalores e autofunções para obtermos uma relação de ortogonalidade.

Ao ser aplicado o método de separação de variáveis, foi importante estudar sobre a constante de proporcionalidade, a qual é considerada a condutividade térmica da barra, assim como mencionado no referencial teórico sobre a equação do calor.

A partir disso, foram feitos estudos sobre a periodicidade e ortogonalidade de funções, por perceber que no desenvolvimento do problema estava se definindo uma série de senos e cossenos. Assim, levou-se em consideração o estudo de funções pares e impares, que resultou em uma série de senos e, por conseguinte, foi possível chegar ao estudo das séries de Fourier. Dessa forma, fez-se um estudo detalhado sobre a convergência deste tipo de série, verificando a continuidade, para chegar em uma solução geral por meio dos coeficientes obtidos no desenvolvimento da série de Fourier. Obtendo assim a solução

$$u(x,t) = \frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^L f(x) sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx\right)\cdot e^{-\alpha^2\left(\frac{n^2\pi^2}{L^2}\right)t}\cdot sen\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

que responde ao problema de pesquisa proposto.

Esta pesquisa proporcionou o estudo de vários conceitos e de manipulações algébricas – muitas já vistas no decorrer do curso, porém sem um devido significado de minha parte –, sendo assim, motivou o interesse em estudos matemáticos de problemas reais, apesar de inicialmente o problema ser desenvolvido de forma hipotética, visto que, no decorrer do trabalho, verificaram-se outras possibilidades para as condições iniciais e de contorno, podendo elas oportunizar a compreensão deste fenômeno na realidade, ou seja, o conhecimento matemático permitiu a compressão do mundo no qual vivo.

Acredito ser possível ampliar os estudos que permitam melhorar os resultados aqui apresentados, visando resolver problemáticas de caraterísticas semelhantes. Em virtude disso, esta monografia propiciou curiosidade na compreensão da teoria matemática, qualidade importante para uma futura professora, por relacionar a matemática curricular com a matemática aplicada, a qual determina o desenvolvimento do mundo.

REFERÊNCIAS

ALVES, M. B. **Equações Diferenciais Ordinárias em cursos de Licenciatura de Matemática**: Formulação, Resolução de Problemas e Introdução à Modelagem Matemática. 2008. 83 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2008.

BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**. 9.ed. Rio de Janeiro: LTC, 2010.

______. **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**. 10.ed. Rio de Janeiro: LTC, 2015.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Campinas: Editora da Unicamp, 2011.

GIL, A. C. **Como Elaborar Projetos de Pesquisa**. 5.ed. São Paulo: Atlas, 2010.

NUSSENZVEIG, H. M. **Curso de física básica**. V.2. 4.ed. São Paulo: Edgard Blucher, 2002.

IÓRIO, V. **EDP, um curso de graduação**. 3.ed. Rio de Janeiro: 2012.

ZILL, D. G.; MICHAEL, R. C. **Equações Diferenciais**. V.1. 3.ed. São Paulo: Makron Books, 2001.

______. **Equações Diferenciais**. V.2. 3.ed. São Paulo: Makron Books, 2001.

FIGUEIREDO D. G. **Análise de fourier e equações diferenciais parciais**. 4.ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2012.