UNIVERSIDADE FEDERAL DO PAMPA – UNIPAMPA
CAMPUS ITAQUI-RS
CURSO DE MATEMÁTICA-LICENCIATURA

ALESSANDRA LUCERO SILVA

ESTUDO DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS PROPOSTAS POR LIVROS-TEXTO: UMA ANÁLISE SOB A ÓTICA DA ABORDAGEM QUALITATIVA

Itaqui-RS
2017

ALESSANDRA LUCERO SILVA

ESTUDO DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS PROPOSTAS POR LIVROS-TEXTO: UMA ANÁLISE SOB A ÓTICA DA ABORDAGEM QUALITATIVA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Matemática - Licenciatura da Universidade Federal do Pampa, como requisito parcial para obtenção do Título de Licenciado em Matemática.

Orientador(a):
Prof. Dra. Maria Arlita da Silveira Soares

Itaqui-RS
2017

Ficha catalográfica elaborada automaticamente com os dados fornecidos
pelo(a) autor(a) através do Módulo de Biblioteca do
Sistema GURI (Gestão Unificada de Recursos Institucionais).

S586e Silva, Alessandra Lucero
ESTUDO DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS PROPOSTAS POR LIVROS-TEXTO: UMA ANÁLISE SOB A ÓTICA DA ABORDAGEM QUALITATIVA / Alessandra Lucero Silva.
59 p.

Trabalho de Conclusão de Curso(Graduação)-- Universidade Federal do Pampa, MATEMÁTICA, 2017.
"Orientação: Maria Arlita da Silveira Soares".

1. Análise de Modelos. 2. Registros de Representação. 3. Transformações Cognitivas. 4. Aspectos do Cálculo. 5. Campo de Direções. I. Título.

ALESSANDRA LUCERO SILVA

ESTUDO DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS PROPOSTAS POR LIVROS-TEXTO: UMA ANÁLISE SOB A ÓTICA DA ABORDAGEM QUALITATIVA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Matemática - Licenciatura da Universidade Federal do Pampa, como requisito parcial para obtenção do Título de Licenciado em Matemática.

Trabalho de Conclusão de Curso defendido e aprovado em: 09 de dezembro de 2017.

Banca examinadora:

____

Prof. Dra. Maria Arlita da Silveira Soares
UNIPAMPA – Campus Caçapava do Sul-RS
Orientadora

____

Profa. Dra. Cátia Maria Nehring
Unijuí – Ijuí-RS

____

Prof. Dra. Rita de Cássia Pistóia Mariani
UFSM –Santa Maria-RS

AGRADECIMENTO

A Deus,
pela vida e por me guiar em minha caminhada

A minha mãe,
por me apoiar em todos os momentos

Aos professores Arlita e Leugim
pois são fundamentais na minha trajetória e,
pela dedicação à minha formação

As professoras Cátia e Rita
pelas valiosas contribuições para esta pesquisa

Aos professores do curso Matemática-Licenciatura
pois contribuíram na construção do conhecimento, meu e de meus colegas

RESUMO

A presente pesquisa tem como objetivo analisar de que modo as propostas para o estudo de Equações Diferenciais Ordinárias (EDO), apresentadas em livros textos, podem contribuir no trabalho de professores de Matemática ao selecionarem situações-problema envolvendo o conceito de função. Os pressupostos teóricos para construção desta pesquisa referem-se às perspectivas da pesquisadora Javaroni (2007) sobre o estudo de EDO sob a ótica da Abordagem Qualitativa e por meio da Análise de Modelos, e também o pesquisador Duval (2003), no que tange a teoria dos Registros de Representação Semiótica. Para realizar esta pesquisa foram adotadas as perspectivas da pesquisa qualitativa e quanto aos procedimentos, estes referem-se aos pressupostos da Análise de Conteúdo, segundo Bardin (1977). A fonte de produção de dados foi a análise de 2 livros-texto de Equações Diferenciais mais citados pelos cursos brasileiros de Licenciatura em Matemática. Esta pesquisa permitiu concluir que o livro-texto A e o livro-texto B exploram modelos matemáticos para estudar EDO, sendo as funções mais exploradas as exponenciais, quadráticas e trigonométricas, em detrimento da função logarítmica, não abordada nos capítulos analisados. Quanto a abordagem qualitativa, verificou-se que é utilizada no livro-texto A, pois o comportamento das soluções é interpretado, entretanto no livro-texto B a abordagem qualitativa é limitada. Quanto aos registros de representação, os autores do livro-texto A abordam as EDO por meio de diferentes registros como o geométrico e o gráfico. Contudo, o mesmo não foi verificado no livro-texto B, porque alguns registros de representação, como o geométrico e o gráfico, não são mobilizados nas atividades propostas.

Palavras-Chave: Análise de Modelos. Registros de Representação. Transformações Cognitivas. Aspectos do Cálculo. Campo de Direções.

ABSTRACT

The present research aims to analyze how the proposals for the study of Ordinary Differential Equations (ODE) presented in textbooks can contribute to the work of mathematics teachers by selecting problem situations involving the concept of function. The theoretical assumptions for the construction of this research refer to the perspectives of the researcher Javaroni (2007) on the study of EDO under the perspective of the Qualitative Approach and through the Analysis of Models, and also the researcher Duval (2003), regarding the Theory of Semiotic Representation Records. To carry out this research were adopted the perspectives of the qualitative research and regarding the procedures, these refer to the assumptions of Content Analysis, according to Bardin (1977). The source of data production was the analysis of 2 textbooks of Differential Equations most cited by the Brazilian courses of Degree in Mathematics. This research allowed us to conclude that Textbook A and Textbook B explore mathematical models to study EDO. The most explored functions are the exponential, quadratic and trigonometric functions, to the detriment of logarithmic function, not addressed in the chapters analyzed. As for the qualitative approach, it has been found that it is used in Textbook A, because the behavior of the solutions is interpreted, but in Book Text B the qualitative approach is limited. As for the registers of representation, the authors of Textbook A approach the ODE by means of different registers like the geometric and the graph. However, this was not verified in Textbook B because some representation records, such as geometric and graphic, are not mobilized in the proposed activities.

Keywords: Model Analysis. Representation Records. Cognitive Transformations. Aspects of Calculation. Direction Field.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

Esta pesquisa refere-se à importância do estudo de Equações Diferenciais Ordinárias (EDO) e suas implicações na atividade do professor de Matemática, em particular, as desenvolvidas na Educação Básica. Uma das principais motivações para desenvolver este estudo deve-se ao fato de que pesquisas na área da Educação Matemática (JAVARONI, 2007; JAVARONI; SOARES, 2012; DULLIUS; ARAÚJO; VEIT, 2011; LAUDARES; MIRANDA, 2007) sugerem que o processo de ensino e aprendizagem de EDO pode enfatizar aspectos qualitativos e não apenas quantitativos.

Sublinha-se que o contato com pesquisas da área da Educação Matemática iniciou-se nas atividades desenvolvidas no Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência – PIBID e no grupo de pesquisa matE^2[1] ao discutir a importância das componentes curriculares como Geometria, Álgebra, Cálculo Diferencial e Integral, entre outras como conteúdos ampliadores do conhecimento matemático do professor de Matemática.

Dessas discussões, destaca-se as ideias apresentadas no documento, denominado *"A formação do professor de Matemática no Curso de Licenciatura: reflexões produzidas pela comissão paritária"*, elaborado, em parceria, por representantes da Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM) e da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), no ano de 2010. Este documento busca contribuir para as discussões sobre os cursos brasileiros de Licenciatura em Matemática, bem como romper com "a dicotomia entre conhecimento matemático e o conhecimento pedagógico, a matemática da universidade e a matemática da escola" (BOLETIM SBEM, 2013, p. 11). Neste documento, o conhecimento específico "envolve a aprendizagem de conceitos matemáticos avançados e a ressignificação de conceitos elementares, de modo a contemplar tanto uma fundamentação e argumentação matemáticas, quanto sua prática profissional futura" (ibidem, p. 12). Ou seja, essas disciplinas enriquecem a formação do futuro professor, pois ampliam seu conhecimento matemático tanto do ponto de vista avançado quanto escolar.

Ao tratar da seleção de conteúdos para os cursos de Licenciatura em Matemática, Fiorentini (2005) afirma que a formação inicial constrói-se por meio das disciplinas específicas de Matemática e das disciplinas didático-pedagógicas[2]. Para este pesquisador as disciplinas

---

[1] O grupo de pesquisa matE^2, Educação e Educação Matemática, tem por objetivo de problematizar dimensões subjacentes às temáticas currículo, trabalho docente, políticas públicas, gestão educacional e "formação" de professores.

didático-pedagógicas são aquelas que preocupam-se não somente em problematizar as questões subjacentes ao ensino e aprendizagem da Matemática, mas também as dimensões sócio-afetiva, emocional, pessoal e ética. Nesta perspectiva, o professor que ensina matemática escolar deve ter domínio formal sobre o conteúdo a ser ensinado, bem como “conhecer e avaliar potencialidades educativas do saber matemático” (FIORENTINI, 2005, p. 109), ajudando o estudante a problematizar e mobilizar o conteúdo matemático, tendo em vista a realidade escolar, considerando as perguntas: por que, para que e para quem ensinamos matemática?

Para o pesquisador supracitado, os professores que ensinam conteúdos ampliadores do conhecimento matemático (Álgebra, Análise, Cálculo) deveriam, também, ensinar o acadêmico a ser professor. No entanto, uma parcela ínfima desses professores concebe sua prática como formadora de professores e não de matemáticos, pois muitos acreditam que ensinam apenas procedimentos e conceitos. Neste sentido, destaca-se que as metodologias utilizadas por esses professores e por professores da Educação Básica influenciam as concepções de futuros professores, posto que em sua trajetória carregam crenças, valores e experiências. (FIORENTINI, 2005). Assim, pode-se inferir que as disciplinas que abordam os conteúdos ampliadores do conhecimento matemático, também, formam o sujeito pedagogicamente.

No que tange ao Cálculo, o documento elaborado pela Sociedade Brasileira de Matemática (SBM, s/d), intitulado *Diretrizes Curriculares para o Ensino de Matemática*, afirma que esta área contribui para que o futuro professor entenda conceitos fundamentais da Matemática e da Física, amplamente discutidos no Ensino Médio, por exemplo, os conceitos de velocidade instantânea e sistemas massa-mola:

> De fato, uma boa parte dos modelos matemáticos e das leis da física, são expressos em termos de relações entre taxas de variação, derivadas parciais ou ordinárias, como, por exemplo, as equações fornecidas pelos sistemas massa-mola, crescimento populacional, resfriamento de um corpo. (SBM, s/d, p.16)

O estudo de ideias do Cálculo, em cursos de licenciatura, torna-se fundamental por possibilitar, entre outros, o entendimento do conceito de função e suas aplicações, conceito este estudado desde os anos finais do Ensino Fundamental (em especial, a partir do 9ºAno). Além disso, “amplia a visão do futuro professor sobre o desenvolvimento histórico da própria matemática, que teve consequências contundentes para a humanidade nos últimos séculos” (BOLETIM SBEM, 2013, p. 19).

Sabe-se que as funções modelam diversas situações do dia a dia e de outras áreas do conhecimento. Assim, ampliar o entendimento desse conceito é papel da formação inicial do professor. Nesta etapa da formação é preciso explorar a classificação dos vários tipos de funções: lineares, racionais, polinomiais, periódicas, exponenciais e logarítmicas, entre outras.

Acredita-se que o estudo de EDO, conteúdos/conceitos presentes nos cursos de Cálculo na maioria das licenciaturas em Matemática brasileiras, torna mais consistente e “claro” o conceito de função e, consequentemente, possibilita ao professor construir subsídios para abordar situações reais que podem ser modeladas por diferentes funções.

Além disso, muitos fenômenos naturais, sociais e econômicos também podem ser modelados por leis que envolvem taxas de variação. Sublinha-se que quando uma situação-problema “envolve grandezas variáveis e taxas de variação, as equações resultantes costumam ser *equações diferenciais*” (MACHADO, 1988, p. 158). Esse tipo de equação, é denominado EDO e é estudado em cursos de Cálculo, pois envolve a ideia de derivada como taxa de variação. Para que o licenciando verifique esta relação, é recomendável que o professor destes cursos encaminhe o ensino de EDO de modo a abordá-las qualitativamente, ou seja, problematizar acerca do que representa estudar EDO, estudar o significado de EDO e o comportamento das soluções de EDO.

Diante desse contexto, esta pesquisa tem como problemática central defender a ideia de que o estudo de EDO na licenciatura contribui para que o professor consiga ampliar o campo de aplicação ao trabalhar funções, no Ensino Médio, em especial, exponencial e logarítmica, bem como as relações entre estas funções. Além disso, de que a utilização dos materiais didáticos, por exemplo, livros didáticos (materiais curriculares elaborados para a Educação Básica) é enriquecida por meio da pesquisa em livros-texto (materiais curriculares elaborados para o Ensino Superior).

A questão de pesquisa que orientou o desenvolvimento desta investigação ficou assim estruturada: *De que forma as propostas para o estudo de Equações Diferenciais Ordinárias, apresentadas em livros-texto, podem contribuir no trabalho de professores de Matemática ao selecionarem situações-problema envolvendo o conceito de função?*

Para responder a questão de pesquisa foram elaborados os seguintes objetivos:

Objetivo Geral: Analisar de que modo as propostas para o estudo de Equações Diferenciais Ordinárias (EDO), apresentadas em livros textos, podem contribuir no trabalho de professores de Matemática ao selecionarem situações-problema envolvendo o conceito de função.

Objetivos Específicos:

- Identificar as aplicações de EDO propostas nos livros textos e suas relações com os conceitos de exponencial e logaritmo;
- Verificar as representações semióticas mobilizadas nos livros textos;
- Examinar se recursos tecnológicos são citados nas aplicações de EDO e para a resolução das situações-problema.

O texto que apresenta os movimentos realizados no desenvolvimento desta pesquisa está organizado em seções. A primeira seção é denominada Introdução. A segunda seção apresenta as escolhas teóricas, que são os entendimentos dos pesquisadores Javaroni (2007) sobre Abordagem Qualitativa e Análise de Modelos, e Duval (2003) no que tange a teoria dos Registros de Representação Semiótica. A terceira seção explicita as escolhas metodológicas. A quarta seção expõe os dados obtidos por meio da análise de 2 livros-texto, bem como a interpretação destes dados. E na última seção, são tecidas as considerações sobre o trabalho realizado.

2. ENSINO E APRENDIZAGEM DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS: ALGUNS ENTENDIMENTOS

Inicialmente, para identificar as contribuições do estudo de EDO na formação do professor de Matemática, torna-se importante discutir acerca das questões curriculares, em particular do Ensino Médio. Os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCN+) (BRASIL, 2002) destacam que o objetivo desta etapa da Educação Básica não deve ser especificamente profissionalizante, tampouco pré-universitária. Neste sentido, o objetivo do Ensino Médio "em qualquer de suas modalidades [...] é preparar para a vida, qualificar para a cidadania e capacitar para o aprendizado permanente, em eventual prosseguimento dos estudos ou diretamente no mundo do trabalho" (BRASIL, 2002, p.08). Em outras palavras, o objetivo do Ensino Médio refere-se à formação de pessoas críticas, pessoas que conseguem estabelecer relações com o abordado em sala de aula e o mundo em que vivem. Para tanto, é recomendável que o professor propicie um ambiente em que o estudante reflita e seja ativo no seu processo de aprendizagem.

No que tange ao papel da Matemática na formação dos estudantes, os PCN+ (BRASIL, 2002) ressaltam que eles devem perceber que a Matemática é "uma parcela do conhecimento humano essencial para a formação de todos os jovens, que contribui para a construção de uma visão de mundo, para ler e interpretar a realidade e para desenvolver capacidades que deles serão exigidas ao longo da vida social e profissional" (BRASIL, 2002, p. 111). Assim, apontam que é necessário aprender Matemática de forma contextualizada, integrada aos conhecimentos de outras áreas, como as da Ciências da Natureza, potencializando o

> [...] desenvolvimento de competências e habilidades que são essencialmente formadoras, à medida que instrumentalizam e estruturam o pensamento do aluno, capacitando-o para compreender e interpretar situações, [...] argumentar, analisar e avaliar, tirar conclusões próprias, tomar decisões, generalizar e para muitas outras ações necessárias à sua formação (BRASIL, 2002, p. 111).

Pesquisadores também entendem que a Matemática escolar deve ser abordada visando a integração e investigação com as demais ciências. Sobre estas ideias, Silva e Pires (2013) afirmam que o currículo deve ser pensado de forma a propiciar situações problema que explorem a interdisciplinaridade dos conteúdos, desse modo, o estudante pode estabelecer relações entre os conhecimentos, de forma a construir uma *rede de significados*[3]. Também,

---

[3] Para Silva e Pires (2013) o termo *rede de significados* refere-se a metáfora Currículo em Rede. Esta perspectiva de organização do curricular pressupõe o currículo construído de forma contrária às ideias de pré-requisito. O currículo elaborado desta maneira possibilita que o estudante construa significados acerca de determinado eixo temático, de forma a organizar seu pensamento estabelecendo ligações entre diversos conteúdos.

propõem que o currículo da Educação Básica seja organizado de forma oposta às ideias de linearidade e pré-requisito para o ensino de Matemática, pois estas ideias reforçam a concepção de acumulação de conhecimento, de que o estudante apenas recebe conhecimento matemático pronto. Em outros termos, o estudante não é capaz de produzir e transformar o conhecimento.

Constata-se que as concepções apresentadas nos documentos voltados para a formação de professores de Matemática (SBEM, 2003; SBM, s/d; BOLETIM SBEM, 2013) vêm ao encontro das ideias propostas para o Ensino Médio, principalmente, no que diz respeito ao ensino desta área do conhecimento, uma vez que se

> [...] deve desenvolver uma matemática que ultrapasse o simples uso mecânico de fórmulas, algoritmos e procedimentos memorizados, sem consistência, sem origem e sem finalidade [...] Além disso, como parte essencial da linguagem de todas as ciências, o ensino de matemática deve proporcionar o suporte adequado para outras disciplinas do currículo, através de tópicos que permitam exprimir de forma adequada, por exemplo, as leis da física, os fenômenos químicos, biológicos, econômicos e sociais, e as aplicações tecnológicas à vida diária. (BOLETIM SBEM, 2013, p. 5)

Para que o futuro professor desenvolva atividades que propiciem, ao estudante da Educação Básica, construir seu próprio conhecimento, é necessário que os cursos de formação inicial sejam organizados, de modo a fornecer subsídios para essa construção. Para tal, entende-se que as disciplinas ampliadoras do conhecimento matemático, que abordam a matemática escolar sob a ótica mais avançada do Ensino Superior, podem e devem se preocupar com ampliação, mas também com a ressignificação do conhecimento matemático. Estas disciplinas permitem que seja estabelecida a articulação entre a Matemática avançada e a escolar, as quais enriquecerão a formação do licenciando "ao explicitar o conteúdo específico de matemática necessário à prática docente, equilibrando com o conhecimento de cunho pedagógico constante em seu currículo" (BOLETIM SBEM, 2013, p. 18).

Neste sentido, o ensino de Cálculo, no Ensino Superior, contribui para a formação do professor, no que tange às possibilidades de interdisciplinaridade que oferece. O Cálculo pode propiciar uma real integração entre outras disciplinas, pois não contextualiza apenas a própria Matemática, configurando-se como potente possibilidade para o trabalho pedagógico a ser realizado no ensino básico, em razão de que permite explorar aspectos da realidade. Bem como, amplia a capacidade de justificação e argumentação ao ensinar os conceitos de número real, infinito, continuidade, limite e função. (BARUFI, 2002; SBEM, 2003)

No entanto, Barufi (1999, 2002) enfatiza que para desenvolver o Cálculo como ferramenta importante ao trabalho na Educação Básica, a abordagem dos conceitos não deve ser realizada de modo superficial a ponto de tornar-se apenas exposição de conhecimentos. É pertinente haver equilíbrio entre os conceitos inerentes ao Cálculo (Diferenciação-Integração, propriedade de funções, taxa de variação, proporcionalidade, aplicações) e manipulação de técnicas. Esta abordagem potencializa a aprendizagem de forma significativa das ferramentas do Cálculo, articulando os conceitos aprendidos de forma a desenvolver a competência de resolver problemas.

Fischbein (apud SBEM, 2003), ao refletir sobre os conteúdos de Cálculo nos cursos de formação de professores, destaca 5 aspectos basilares[4], a serem considerados: *caráter formal*, no qual constitui o cerne da Matemática; *caráter algorítmico*, em que o estudante desenvolve capacidades de resolução de problemas, teoricamente justificados; *caráter intuitivo*, o pensamento aceito sem ser demonstrado ou justificado; *caráter unificador*, em que é possível conectar campos da matemática (Geometria - Álgebra, Aritmética - Álgebra, Aritmética - Álgebra) e conectar a Matemática a outras área do conhecimentos como Química, Física, Biologia e Economia; e o quinto aspecto trata da *variedade de representações* semióticas mobilizadas.

Os conceitos de Cálculo são amplamente mobilizados ao estudar EDO, uma vez que potencializam desenvolver os aspectos *Unificador, Algorítmico* e *Variedade de Representações*, apontados por Fischbein. O estudo de EDO em cursos de licenciatura em Matemática, conforme já mencionado na Introdução, contribui, dentre outros aspectos, para conectar o estudo da Matemática do Ensino Superior com os conteúdos matemáticos escolares na resolução de situações reais. Javaroni (2007), afirma que as EDO modelam diversos fenômenos físicos:

> Muitos dos princípios, ou leis, que descrevem o comportamento do mundo físico são proporções, ou relações, envolvendo a taxa segundo a qual determinados fenômenos acontecem. Ao modelar esses fenômenos, freqüentemente se obtêm equações que envolvem as variações das quantidades (variáveis), presentes e consideradas essenciais na situação analisada. Assim, as leis que regem tal fenômeno podem ser representadas por equações de variações. Quando essas variações são instantâneas e o fenômeno se desenvolve continuamente, as equações são denominadas equações diferenciais. (JAVARONI, 2007, p. 30)

Corroboram com esta ideia os pesquisadores Laudares e Miranda (2007) ao mencionarem que as EDO apresentam-se como objeto para o estudo dos fenômenos físicos, usando a derivação com as noções de “taxa de variação” em problemas de várias áreas do conhecimento, bem como as funções, que frequentemente representam os fenômenos matemáticos. Ademais, cabe destacar que as soluções de EDO são funções que satisfazem determinada equação.

---

[4] Aspectos sugeridos por Fischbein (s/d apud SBEM, 2003) em seu artigo intitulado “A interação entre os componentes Formal, Algorítmico, e Intuitivo na atividade matemática”. Importante destacar que este teórico sugere que estes cinco aspectos devam ser trabalhados concomitantemente e não de forma isolada entre si.

> De maneira geral, uma *equação diferencial* é uma pergunta do tipo "Qual a função cuja derivada satisfaz determinada relação?" Ou seja, uma equação diferencial é uma equação (no sentido de igualdade envolvendo uma incógnita) onde a incógnita é uma função, sendo que as informações disponíveis para a determinação da função desconhecida envolvem uma derivada (MACHADO, 1988, p. 153)

Defende-se que ao analisar modelos matemáticos que envolvem EDO, o licenciando estará trabalhando com a solução desta equação, que refere-se a uma função. Deste modo, analisar o comportamento das soluções de EDO é analisar o comportamento de funções. Assim, o estudo de EDO constitui-se como potente objeto para enriquecer o trabalho do futuro professor no ensino de funções, pois fornece subsídios para ampliar a discussão no que tange à taxa de variação entre as grandezas envolvidas.

Para identificar quais tendências acerca do ensino e aprendizagem de EDO, no âmbito da Educação Matemática, foi realizada uma busca[5] na plataforma de periódicos da Capes[6], tendo como foco principal o ensino e aprendizagem de EDO, publicados em periódicos da área da Educação Matemática. As publicações sugerem que as EDO devem ser abordadas de modo contextualizado; ressaltam que as EDO constituem um objeto privilegiado para o estudo de fenômenos físicos, usando a derivada com a noção de taxa de variação. Além disso, apontam que as EDO podem ser estudadas por meio de modelos matemáticos clássicos como misturas entre recipientes, sistema massa-mola, desintegração radioativa, crescimento populacional, entre outros. Em outros termos, pesquisadores apontam como perspectiva para explorar EDO a Modelagem Matemática ou Modelos Matemáticos.

Javaroni (2007, p. 26) ressalta que há diferenças conceituais e procedimentais entre Modelagem Matemática e Análise de Modelos Matemáticos. Nas palavras da pesquisadora, a "modelagem matemática pode ser definida como processo dinâmico utilizado para a elaboração e validação de modelos matemáticos, e tem como um de seus objetivos principais a possibilidade de previsão de tendências acerca do objeto estudado". Em outras palavras, o processo de Modelagem Matemática parte de situações-problema, elabora um modelo matemático, analisa-o, ajusta-o se necessário e após infere sobre o problema modelado. Distintamente da Modelagem Matemática, a Aplicação de Modelos Matemáticos caracteriza-se em partir de modelos que atendam situações ditas 'reais', sendo realizada a análise, estudo, aplicação de técnicas algébricas ou numéricas de resolução, até determinar a solução. Para esta

---

[5] Esta busca resultou em 7 artigos por meio dos descritores: "Equações Diferenciais"; "Ensino e Aprendizagem + Equações Diferenciais", "Modelagem Matemática + Equações Diferenciais" e "Educação Matemática +Equações Diferenciais".
[6] Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior.

pesquisa, será enfatizada a abordagem Aplicação de Modelos Matemáticos, pois entende-se que os livros-texto favorecem o trabalho com este tipo de abordagem.

A pesquisadora supracitada, sublinha que a importância dos modelos matemáticos centra-se na possibilidade de expressar as peculiaridades de determinado fenômeno físico (situação problema) matematicamente. Em outras palavras, conforme Stewart (2015), as EDO podem ser a principal aplicação do Cálculo, pois quando tenta-se utilizar as ferramentas do Cálculo, geralmente, faz-se para analisar uma EDO que modela determinado fenômeno em estudo. Esta afirmação acentua a relação entre Modelagem Matemática e/ou Aplicação de Modelos Matemáticos e a aprendizagem de EDO.

Entende-se que o estudante que depara-se com um Modelo Matemático que envolve EDO necessita possuir subsídios para inferir sobre o problema, estes subsídios tampouco referem-se apenas à habilidade de solucionar EDO analiticamente, pois os modelos matemáticos são proporcionalmente complexos ao fenômeno que representam. Em outros termos, quando o modelo matemático é uma EDO nem sempre é possível analisa-lo por meio da solução explícita, pois nem toda função incógnita pode ser obtida por intermédio de uma quantidade finita de passos de integração e manipulação algébrica. (BASSANEZI, 2002 apud JAVARONI, 2007).

Entretanto, pesquisas realizadas (DULLIUS; ARAÚJO; VEIT, 2011; JAVARONI; SOARES, 2012; JAVARONI, 2007) verificaram que professores de cursos de Ensino Superior[7] trabalham apenas EDO que possuem solução analítica. Ou seja, EDO cujas soluções podem ser representadas por funções elementares, justamente porque os professores optam por apenas apresentar métodos analíticos de solução (aspecto algébrico).

Corrobora-se com esses pesquisadores ao afirmarem que um enclausuramento, quanto as representações matemáticas, pode limitar a aprendizagem de EDO, pois enfatizar apenas a manipulação algébrica reduz as possiblidades de análise da situação de aplicação. Além disso, desconsidera a questão central da resolução de uma EDO, isto é, compreender sua solução, não oferecendo subsídios para o estudante responder a seguinte pergunta *"Como as soluções se comportam?"*

Pesquisadores (DULLIUS; ARAÚJO; VEIT, 2011; JAVARONI; SOARES, 2012; JAVARONI, 2007; FILHO; LAUDARES; MIRANDA, 2014; DULLIUS; VEIT; ARAÚJO, 2013; LAUDARES; MIRANDA, 2007) sugerem, para ampliar a discussão acerca de EDO, a abordagem qualitativa. Com base nos entendimentos de Javaroni (2007), a abordagem

[7] Apenas uma das publicações mapeadas possui objetivo de pesquisar acerca do ensino e aprendizagem de EDO em curso de Matemática (Licenciatura e Bacharelado). As demais pesquisas referem-se a cursos de Engenharia.

qualitativa possui uma natureza interpretativa, cujo processo consiste em inferir sobre o comportamento das soluções de EDO, por intermédio de interpretações geométricas, embora não seja fundamental resolvê-las.

Para tanto, a pesquisadora, citada acima, sugere a exploração de *campo de direções*. *Campo de direções* é um gráfico no qual são representados segmentos de retas, cada segmento refere-se a reta tangente a solução naquele ponto. Em outros termos, cada segmento informa o coeficiente angular da solução que possui o ponto. Este método potencializa a interpretação geométrica das soluções das EDO (caso existam) e o processo de visualização das EDO. Os *campos de direções* representam o comportamento global das soluções das EDO, sem exigir o tratamento algébrico para explicitar essas soluções. Acredita-se que utilizar *campos de direções* no processo de aprendizagem possibilita aos licenciandos analisar diferentes tipos de EDO e, consequentemente, poder trabalhar distintos modelos matemáticos. (JAVARONI, 2007).

Em uma de suas pesquisas, acerca do ensino qualitativo de EDO, com o auxílio de *campos de direções*, Javaroni e Soares (2012, p. 266) destacam que por meio do *campo de direções* os participantes da pesquisa

> [...] relacionaram as equações aos fenômenos; compreenderam o conceito de campos de direções e o relacionaram com o conceito de derivada; aprenderam a encontrar graficamente as soluções das equações a partir do campo de direções; interpretaram o comportamento das soluções das equações em termos do fenômeno; compararam as soluções analíticas das equações com suas representações gráficas.

Além disso, concorda-se com Javaroni e Soares (2012) no que tange à relevância das TIC (Tecnologias da Informação e Comunicação) no trabalho com EDO, sob a abordagem qualitativa, especificamente, as Tecnologias Digitais, como *softwares* matemáticos e planilhas eletrônicas. As pesquisadoras explicam que uma planilha eletrônica pode ser importante no cálculo dos coeficientes angulares necessários a construção do *campo de direções*, um *software gráfico* é um importante recurso para construção do *campo de direções* e, ainda, um *software algébrico* por permitir calcular a solução de uma EDO e compará-la com os resultados da análise qualitativa realizada por meio de campos de direções. É pertinente destacar que investigar a presença de TIC em atividades de livros didáticos e de que modo são propostas constitui-se como uma importante questão, especialmente, pelo fato de as TIC possibilitarem a resolução de diversos problemas.

Em vista disso, verifica-se que utilizar as TIC pode potencializar a exploração entre os diversos registros de representação, bem como a transição entre estes, especificamente, no estudo de EDO. As TIC auxiliam na transição entre os registros gráfico (representação da solução explícita), registro geométrico (campo de direções), algébrico (solução analítica expressa por meio de funções elementares) e numérico (valores dos coeficientes angulares). Para ampliar a discussão acerca de registros, busca-se subsídios na teoria dos Registros de Representação Semiótica, proposta por Duval (2003).

Este teórico ressalta que é essencial propor situações-problema que exijam a mobilização de diversos registros de representação semiótica e a mudança entre estes registros (denominada conversão), pois cada registro (sistema semiótico) revela um aspecto do conceito estudado, cada registro apresenta suas peculiaridades. Em relação às EDO, a conversão entre os registros contribui para análise qualitativa de sua solução, pois permite ao estudante inferir sobre o comportamento da EDO. Por exemplo, considerando uma EDO que não possui solução analítica, pode-se recorrer ao registro geométrico, pois este apresenta o comportamento de sua solução, já que o registro algébrico da solução não permite inferir sobre características, sobretudo acerca do comportamento da solução.

É importante destacar, também, as transformações cognitivas do tipo tratamento, as quais podem ser caracterizadas como uma mudança interna a partir de cada registro semiótico, por exemplo, o trabalho com EDO (considerando a representação algébrica) em que a solução é determinada por meio de manipulação e integração. Nesta atividade cognitiva é explorado, apenas, um registro, o algébrico.

Compreende-se que o futuro professor deve ser capaz de discutir os vários tipos de funções, tais como: lineares, racionais, polinomiais, periódicas, exponenciais e logarítmicas. Acredita-se que o ensino de EDO sob a ótica da abordagem qualitativa, especificamente, na perspectiva gráfica amplia os argumentos para discussão do conteúdo funções no Ensino Médio, pois como já foi enfatizado, o registro geométrico (como *campo de direções*) permite que o licenciando verifique o comportamento das soluções, em particular, potencializando o entendimento sobre o crescimento e decrescimento das funções elementares que expressam a solução. Desta forma, dando subsídios para problematizar as peculiaridades de cada tipo de função, presentes em livros didáticos, um dos principais recursos utilizados na prática docente.

3. PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Para esta pesquisa foram adotados os pressupostos da pesquisa qualitativa. Segundo Borba (2004, p. 2),

> [...] o que se convencionou a chamar de pesquisa qualitativa, prioriza procedimentos descritivos à medida em que sua visão de conhecimento explicitamente admite a interferência subjetiva, o conhecimento como compreensão que é sempre contingente, negociada e não é verdade rígida. [...]

Quanto aos procedimentos metodológicos, foram adotados pressupostos da Análise de Conteúdo. Conforme Bardin (1977), a Análise de Conteúdo possui 3 fases, a saber: *pré-análise*, *exploração do material* e *tratamento dos dados, inferência e interpretação*. A primeira fase, *pré-análise*, compreende dois outros momentos, que ocorrem sem ordem cronológica definida. Referem-se a *escolha dos materiais* e a *elaboração de categorias de análise*.

Para a primeira etapa, a *escolha dos materiais*, ou seja, a fonte de produção de dados, foi realizado um mapeamento nos PPC[8] de cursos de Licenciatura em Matemática na modalidade presencial de Instituições de Ensino Superior, de todo o Brasil, afim de identificar os 3 livros-texto mais escolhidos para compor as referências bibliográficas dos componentes curriculares que preveem a abordagem do conteúdo EDO.

Para realizar o mapeamento, recorreu-se ao *Cadastro e-MEC de Instituições e Cursos de Educação Superior*[9], base de dados oficial relativos às Instituições de Ensino Superior. Esta base de dados permite utilizar filtros para realização da busca. Primeiramente, precisava-se do número de cursos de Licenciatura em Matemática no Brasil, então os filtros utilizados são: Cursos de Licenciatura em Matemática, em atividade, em todos os estados brasileiros, na modalidade presencial. Foi gerada uma planilha com as informações solicitadas: estão registrados 714 cursos de Licenciatura em Matemática. A partir dos dados obtidos, pesquisou-se nos sites das instituições, e respectivos campus, o PPC dos cursos. Após o término da nova pesquisa, foram identificados 179 PPC, amostragem de 25,07% do total de cursos.

No que tange as disciplinas que possuem o conteúdo EDO na ementa dos PPC, 76,53% preveem o ensino deste conteúdo. Importante destacar que este dado inclui disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral que abordam Equações Diferenciais, bem como as disciplinas específicas de Equações Diferenciais.

Selecionados os PPC que preveem o ensino de Equações Diferenciais, foram analisadas as bibliografias de disciplinas que abordam o conteúdo EDO, a fim de averiguar quais os 3

[8] Projeto Pedagógico de Curso.
[9] Site: http://emec.mec.gov.br/

livros textos mais citados. Ressalta-se que as edições dos livros-texto, bem como o ano de elaboração dos PPC, também foram registrados.

O livro texto mais citado, especificamente 123 vezes, de acordo com o mapeamento realizado, é o *Equações Diferenciais Elementares com Problemas de Valores de Contorno*, de autoria de *William E. Boyce* e *Richard C. DiPrima*. Quanto à edição mais citada, esta refere-se à edição 8, citada em 16,26%. As porcentagens das outras edições são: edição 3, 2,44%; edição 6, 7,32%; edição 7, 8,13%; edição9, 9,76%; edição 10, 2,44%. Em 43,09%, a edição não foi informada.

O segundo livro texto, foi citado 64 vezes, é o *Equações Diferenciais*, cujos autores são *Dennis G Zill* e *Michael R Cullen.* A edição, deste livro-texto, mais citada é a 3ª edição, em 43,75%. A edição 1 é citada em 3,13% e a edição 2 é citada em 1,56%, nos demais casos (51,56%), no PPC não é especificada a edição do livro-texto.

E, o terceiro livro texto foi citado 26 vezes, a saber, *Equações Diferenciais com Aplicações em Modelagem*, escrito por *Dennis G Zill*. Em relação às edições mais citadas, as edições 2 e 9 são as mais citadas, cada uma foi citada 7,69%, a edição 1 foi citada apenas 1 vez, representando 3,85%. Em 76,92%, ou seja, em 20 PPC, a edição não foi citada.

O terceiro livro-texto não foi analisado, devido à limitação de tempo para realização desta pesquisa, logo, este é uma potente fonte de produção de dados para pesquisas futuras. No que tange o presente texto, as fontes de produção de dados foram os 2 livros textos mais citados nos PPC dos Cursos de Licenciatura em Matemática. As versões impressas destes livros-texto foram adquiridas pelas pesquisadoras nas edições disponíveis para compra.

O primeiro livro-texto analisado é o volume único de título *Equações Diferenciais Elementares com Problemas de Valores de Contorno*, em sua 10ª edição. De acordo com dados informados no *Prefácio* foi explicado que a estrutura geral do livro não sofreu modificações, exceto que foram inseridas e aprofundadas algumas notas de rodapé, algumas demonstrações foram expandidas, cerca de 6 figuras foram melhoradas e foram incluídos novos exemplos.

O segundo livro-texto foi a 3ª edição do volume 1 denominado *Equações Diferenciais*, cujo *Prefácio* possui uma seção intitulada *Mudanças nesta edição*. Em que se verificou que, nos capítulos analisados, houveram duas mudanças em relação às edições anteriores, a saber: a seção 1.2 (capítulo 1) foi organizada de modo que exclusivamente aborda o conceito de equação diferencial como um modelo matemático e a seção 3.1 (capítulo 3) a discussão sobre Trajetórias Ortogonais foi sintetizada.

Entende-se que as pesquisas que buscam analisar livros-texto são relevantes, pois podem verificar se esses recursos estão explorando os conteúdos de forma a contribuir no trabalho do futuro professor, se está de acordo com o que propõem as pesquisas na área da Educação Matemática e nas Diretrizes Curriculares Nacionais.

Em relação às categorias de análise, estas foram elaboradas à luz das concepções teóricas acerca do ensino e aprendizagem de EDO e as contribuições do estudo de EDO no trabalho do futuro professor ao ensinar funções. As categorias de análise podem ser, conforme Franco (2005, p.58), criadas *a priori*, pois “as categorias [...] são predeterminadas em função da busca a uma resposta específica do investigador”. Dessa forma, as categorias de análise foram elaboradas com intuito de responder a problemática que direciona esta pesquisa. As categorias foram:

- Análise de Modelos: Esta categoria foi elaborada com base nos entendimentos da pesquisadora Javaroni (2007). Por meio desta categoria, busca-se compreender se os autores organizaram seus respectivos livros textos utilizando a ideia de modelos matemáticos como ponto de partida para o ensino de equações. Também, busca-se verificar se as atividades propostas selecionadas são contextualizadas por situações reais.
- Abordagem Qualitativa: Esta categoria foi construída com base nos entendimentos de Dullius, Araújo e Veit (2011), Dullius, Veit e Araújo (2013), Javaroni e Soares (2012), Javaroni (2007), Filho, Laudares e Miranda, (2014) e Laudares e Miranda (2007). Sendo elaborada para verificar quais aspectos das EDO são explorados, por exemplo, o estudo do comportamento das soluções das EDO. Quer-se identificar se os livros textos são elaborados de forma a explorar aspectos investigativos do estudo de EDO.
- Teoria dos Registros de Representação Semiótica: Esta categoria de análise foi elaborada tendo em vista a teoria desenvolvida pelo pesquisador Raymond Duval, buscando analisar se os autores organizaram a explanação dos conceitos de EDO, bem como as atividades propostas, nos livros-texto, de modo a explorar os diversos registros de representação semiótica. Além disso, busca-se identificar quais Transformações Cognitivas, Conversões e/ou Tratamentos, são exigidos do futuro professor no estudo de Equações Diferenciais. Nesta categoria, também, busca-se identificar quais relações os autores estabelecem entre os *softwares* e seu papel no processo de visualização dos conhecimentos matemáticos, especificamente, Equações Diferenciais e Funções.

Por meio das categorias de análise elencadas, foram discutidos distintos aspectos ressaltados pelos livros textos acerca do conteúdo Equações Diferencias. No entanto, entende-se que é uma forma de organizar esta pesquisa, visto que as Análise de Modelos, a Abordagem Qualitativa e os Registros de Representação Semiótica possuem estreitas relações e quando articuladas, potencializam a aquisição dos conceitos matemáticos.

No que tange à fase *exploração do material*, esta caracteriza-se como a observação do material que constitui a fonte de produção de dados, neste caso, 2 livros-texto que abordam o conteúdo EDO. A *exploração do material* "não apenas pode como dever incluir técnicas sistemáticas de análise" (FRANCO, 2005, p.53), assim, a exploração é realizada tendo em vista as categorias de análise elencadas.

Nas fontes de produção de dados, foram analisados o capítulo introdutório e o capítulo referente ao estudo de Equações Diferenciais Ordinárias de 1ª ordem, pois compreende-se que nestes capítulos são estudados diversos conceitos que contribuem para o trabalho do futuro professor na Educação Básica. Para organizar os dados referentes as atividades propostas nos livros textos, foi construído uma tabela de forma a organizar os dados obtidos na presente fase, assim constam informações tais como: a localização de atividades categorizadas (capítulo, número de atividade e página), abordagem de modelos matemáticos, transformações cognitivas e o uso de softwares matemáticos. Destaca-se que quanto ao número de atividades, foram contabilizados também o item de cada atividade, pois entende-se que cada item pode abordar aspectos distintos das Equações Diferenciais. Além disso, todas as atividades presentes em cada capítulo analisado do livro-texto, foram organizadas no quadro, pois como todas abordam ED, é importante analisar em sua totalidade.

No Quadro 1 são apresentados os dados gerais sobre a estrutura dos 2 livros-texto analisados para a pesquisa:

Quadro 1: Estrutura geral dos dois livros-texto analisados

Livro-texto	Capítulos	Num. de Páginas	Num. de Atividades
Equações Diferenciais Elementares com Problemas de Valor Inicial	1-Introdução	24	128
	2-Equações Diferenciais de Primeira Ordem	89	441
	3-Equações Lineares de Segunda Ordem	70	357
	4-Equações Lineares de Ordem mais Alta	20	312
	5-Soluções em Série para Equações Lineares de Segunda Ordem	53	206
	6-A Transformada de Laplace	43	245
	7-Sistemas de Equações Lineares de Primeira Ordem	74	214
	8-Métodos Numéricos	34	125
	9-Equações Diferenciais Não Lineares e Estabilidade	77	163
	10-Equações Diferenciais Parciais e Séries de Fourier	71	199

	11-Problemas de Valores de Contorno e teoria de Sturm-Liouville	48	109
Equações Diferenciais	1-Introdução às Equações Diferenciais	37	101
	2-Equações Diferenciais de Primeira Ordem	56	341
	3-Aplicações de Equações Diferenciais de Primeira Ordem	46	121
	4-Equações Diferenciais Lineares de Ordem Superior	83	318
	5-Aplicações de Equações Diferenciais de Segunda Ordem: Modelos Vibratórios	48	154
	6-Equações Diferenciais com Coeficientes Variáveis	74	214
	7-Transformada de Laplace	72	309
	Apêndices	16	105

Fonte:(BOYCE, DIPRIMA, 2015; ZILL, CULLEN, 2001)

Na terceira fase, *tratamento dos dados, inferência e interpretação*, são realizadas interpretações, sobre os dados obtidos na fase anterior, considerando as categorias de análise e objetivos (BARDIN, 1977). Esta fase será apresentada no próximo capítulo.

4. ANÁLISE DOS DADOS

Neste capítulo são apresentadas a segunda e a terceira fases previstas na Análise de Conteúdo, respectivamente, *exploração do material* e *tratamento dos dados, inferência e interpretação*.

Em relação à fase *exploração do material*, o LTA[10] é composto de 11 capítulos, nos quais são abordados os conteúdos: EDO de 1ª ordem, EDO de 2ª ordem, EDO de ordem superior, solução em série de potência para EDO de 2ª ordem, Transformada de Laplace, Sistema de EDO, métodos numéricos para solucionar EDO, EDO não linear, EDP e séries de Fourier e problemas de valor de contorno e teoria de Sturm Liouville. Para esta pesquisa foram analisados o Capítulo 1 - Introdução e o Capítulo 2 - Equações Diferenciais de Primeira Ordem. O capítulo 1 aborda as ideias iniciais para a compreensão do conceito de EDO, bem como sua classificação. O capítulo 2 trabalha, especificamente, EDO de 1ª ordem, no que tange as técnicas para solucioná-la, teoremas da existência e unicidade da solução, modelagem com EDO e Equações de Diferenças de 1ª ordem.

Quanto ao LTB, este é formado por 7 capítulos, os quais abordam conteúdos tais como: ED de 1ª ordem e suas aplicações, ED lineares de ordem superior, aplicações de ED de 2ª ordem, ED com coeficientes variáveis e Transformada de Laplace. Há a seção denominada *Apêndices*, em que são apresentados conteúdos adicionais sobre Transformada de Laplace, Função Gama, Números Complexos e revisão sobre determinantes. Para pesquisa, foram analisados o Capítulo 1 – Introdução às Equações Diferenciais, o Capítulo 2 – Equações Diferenciais de Primeira Ordem e o Capítulo 3 – Aplicações de Equações Diferenciais de Primeira Ordem. No capítulo 1 são apresentadas definições e terminologia referentes ao conteúdo ED além de atividades propostas. No capítulo 2 os conteúdos expostos referem-se à métodos analíticos de resolução das equações e atividades propostas. O capítulo 3 foi escrito, especialmente, para abordar os modelos matemáticos que envolvem ED, atividades propostas e, no final apresenta um *Ensaio* sobre Dinâmica Populacional.

Na terceira fase da Análise de Conteúdo, *tratamento dos dados*, *inferência e interpretação*, são realizadas interpretações, sobre os dados obtidos na fase anterior, considerando as categorias de análise elencadas e objetivos (BARDIN, 1977). Neste sentido, a seguir são tratados os dados com intuito de apresentar as inferências e interpretações produzidas

[10] Nesta pesquisa, utiliza-se a notação LT ao fazer menção aos Livros-Texto. Dessa forma, LTA significa Livro Texto A.

ao ler as mensagens expostas nos dois livros-texto analisados. Optou-se por expor os resultados por categoria de análise.

No que tange a categoria Análise de Modelos, o LTA, na Introdução, apresenta primeiramente duas situações a serem modeladas. A primeira, refere-se a *"Um Objeto em Queda"*, no qual os autores propõem que o leitor formule uma EDO que descreva o movimento de um objeto qualquer que está caindo. A segunda situação, refere-se à interação entre ratos e corujas em um campo, quanto ao crescimento da população de ratos, considerando a presença de corujas (predador em relação aos ratos). Importante destacar que, o LTA constrói o modelo de forma a ressaltar quais conceitos estão envolvidos, sejam eles da Matemática ou de outra área. É importante destacar que os Modelos Matemáticos apresentados fazem parte das escolhas metodológicas dos autores, uma vez que as EDO modelam diferentes situações oriundas de diversas áreas do conhecimento (por exemplo, da Física e da Ecologia). De modo que, o ensino de EDO é enriquecido quando se faz de forma contextualizada, em outros termos, quando busca-se nas situações-problema de outras áreas da Ciência contexto para se abordar os conceitos matemáticos.

Além disso, os autores exploram os Modelos Matemáticos, inicialmente apresentados, para formalizar a resolução das equações diferenciais que modelam os dois fenômenos e posteriormente para generalizar a solução das EDO da forma $\frac{dy}{dx} = ay - b$. Ainda, para estudar a classificação das ED – linear ou não linear, parcial ou ordinária; ordem e sistema de EDO, os modelos matemáticos não são enfatizados, exceto como exemplo de ED não linear, sendo citado o problema do pêndulo.

Nesse capítulo foram categorizadas 128 atividades[11]. Destas, 49 se referem à modelos matemáticos, ou seja, 40% do total de atividades. Os modelos matemáticos envolvem conceitos de Química (desintegração de elementos químicos), Física (queda de objetos, Lei do Resfriamento de Newton[12], circuito elétrico, pêndulo e princípio da conservação de energia), Ecologia (presa-predador, elementos químicos em lagoas), Biologia (absorção de remédios no corpo).

O LTA apresenta algumas dicas sobre a construção de Modelos Matemáticos, relatando que esta atividade não é trivial, mas seguir alguns passos pode contribuir para verificar se o Modelo está consistente. Os passos indicados são: identificar qual(is) das variáveis envolvidas

---

[11] Os autores do LTA denominam as atividades propostas como problemas. Neste texto, não será utilizado o termo problema por entender que este termo refere-se a atividade proposta, cujo conteúdo matemático ainda não foi apresentado (ONUCHIC, ALLEVATO, 2011).

[12] A Lei do Resfriamento de Newton afirma que a temperatura de um objeto varia a uma razão proporcional à diferença entre sua temperatura e a temperatura ambiente.

é(são) independente(s) e dependente(s), ajustar as unidades das variáveis de forma coerente com o problema, conhecer o campo de aplicação do problema em questão, tal como estudar as leis e conceitos envolvidos no problema e expressar a lei que envolve estes conceitos nas variáveis envolvidas no problema.

No capítulo 2, *Equações Diferenciais de Primeira Ordem*, o LTA é composto por uma seção específica de Modelagem e Equações Diferencias Ordinárias de Primeira Ordem. Os autores do LTA afirmam que, os modelos matemáticos que envolvem EDO de Primeira Ordem são importantes, pois permitem a investigação de fenômenos de diversas áreas: ciências físicas, biológicas e sociais. Além disso, sugerem que a Modelagem Matemática pode ser compreendida como um processo que perpassa 3 etapas: *Construção do Modelo, Análise do Modelo e Comparação com Experimentos ou Observações*.

Na sequência, são expostos exemplos cujas situações são representadas por modelos que envolvem EDO de Primeira Ordem, por exemplo: mistura de componentes a taxa constante; juros compostos; e, velocidade.

Sublinha-se o problema sobre juros compostos, pois, neste exemplo, os autores do LTA enfatizam as conexões com conteúdos, geralmente, presentes no Ensino Médio (Função Exponencial, Matemática Financeira). Os autores apresentam uma EDO para modelar este problema, bem como sua solução, relacionando esta equação com a função de juros compostos. Entretanto, os autores não conectam o problema aos conteúdos estudados na Educação Básica. Defende-se que conectar funções, ao estudo de EDO enriquece e potencializa os argumentos utilizados para justificar o comportamento desta função, neste caso, é possível demonstrar, ao futuro professor, que as EDO trabalhadas do Ensino Superior, também, descrevem fenômenos amplamente discutidos no Ensino Médio.

Ainda, ao longo do capítulo 2, outros temas, discutidos no Ensino Médio, são abordados, por exemplo, o modelo de Malthus que descreve a dinâmica populacional, epidemias e administração de recursos renováveis, discutidos em Biologia. Também são explorados temas de Química, tais como: meia vida, decomposição e reação entre elementos químicos. Além disso, os modelos matemáticos, também, são enfatizados ao abordar o conteúdo Equações Autônomas[13], especialmente, os modelos de dinâmica populacional. Entretanto, no LTA, não são evidenciados momentos que realizem as conexões entre os modelos estudados e os conceitos abordados na Educação Básica. Característica esta, provável, pelo fato de o livro não

[13] São uma classe de EDO de 1ª ordem, cuja variável independente não aparece explicitamente, ou seja, da forma $\frac{dy}{dt} = f(y)$.

possuir como público alvo somente licenciandos e sim, acadêmicos matriculados em cursos de nível superior que preveem o ensino de EDO.

No que concerne às atividades propostas no capítulo 2, verifica-se que 30,3% utilizam modelos matemáticos para estudo de EDO. Em outros termos, 134 atividades de um total de 441 atividades destacam os modelos matemáticos. Sobre modelos que abordam conceitos de Química, destaca-se a datação por carbono, método utilizado na Arqueologia[14] para determinar a idade de fósseis, mostrado na Figura 1.

Figura 1: Exemplo de atividade proposta envolvendo conhecimentos de Química

13. Uma ferramenta importante em pesquisa arqueológica é a datação por carbono radioativo, desenvolvida pelo químico americano Willard F. Libby.[3] Essa é uma ferramenta para determinar a idade de determinados resíduos de madeira e plantas, e, portanto, de ossos de animais ou homens, ou artefatos encontrados enterrados nos mesmos níveis. A datação por carbono radioativo baseia-se no fato de que alguns restos de madeira ou plantas contêm quantidades residuais de carbono-14, um isótopo radioativo do carbono. Esse isótopo se acumula durante a vida da planta e começa a decair na sua morte. Como a meia-vida do carbono-14 é longa (aproximadamente 5.730 anos[4]), quantidades mensuráveis de carbono-14 permanecem depois de muitos milhares de anos. Se mesmo uma fração mínima da quantidade original de carbono-14 ainda está presente, então, através de medidas apropriadas em laboratório, pode-se determinar com precisão a *proporção* da quantidade original de carbono-14 que permanece. Em outras palavras, se $Q(t)$ é a quantidade de carbono-14 no instante t e Q_0 é a quantidade original, então a razão $Q(T)/Q_0$ pode ser determinada, pelo menos se essa quantidade não for pequena demais. Técnicas atuais de medida permitem o uso desse método por períodos de tempo de 50.000 anos ou mais.
(a) Supondo que Q satisfaz a equação diferencial $Q' = -rQ$, determine a constante de decaimento r para o carbono-14.
(b) Encontre uma expressão para $Q(t)$ em qualquer instante t, se $Q(0) = Q_0$.
(c) Suponha que determinados restos foram descobertos nos quais a quantidade residual atual de carbono-14 é 20% da quantidade original. Determine a idade desses restos.

Fonte: (BOYCE, DIPRIMA, 2015, p.52)

A Figura 1 apresenta um exemplo de modelo matemático que exige conhecimentos de Química, cujas noções são trabalhadas desde a Educação Básica. Entende-se que o estudo de EDO por meio de modelos enriquece a formação do futuro professor, pois amplia o campo de relações que o professor pode estabelecer quando ensina funções, neste caso, função exponencial. Ao solucionar a EDO apresentada na Figura 1, o sujeito deve perceber que o decaimento da quantidade de Carbono varia de forma exponencial e, portanto, é uma situação-problema que pode ser explorada ao ensinar função exponencial, relacionando aos conhecimentos de Química.

No LTA há modelos que abordam conhecimentos de Física, por exemplo, Princípio de Torricelli e movimento de corpos (Lançamento Vertical (Figura 2) e Queda Livre).

[14] Arqueologia é a Ciência que estuda a vida e a cultura dos povos antigos por meio de escavações ou através de documentos, monumentos, etc., deixados por eles.

Figura 2: Exemplo de atividade proposta que envolve conceitos de Física

20. Uma bola com massa de 0,15 kg é jogada para cima, com velocidade inicial de 20 m/s, do teto de um prédio com 30 m de altura. Não leve em consideração a resistência do ar.
(a) Encontre a altura máxima acima do solo alcançada pela bola.
(b) Supondo que a bola não atinge o prédio quando desce, encontre o instante em que ela bate no chão.

Fonte: (BOYCE, DIPRIMA, 2015, p.54)

Na figura 2, o modelo que aborda conhecimentos de Física (lançamento vertical para cima) que, são trabalhados no Ensino Médio. Ao solucionar a EDO que descreve o fenômeno, o futuro professor deve identificar que o comportamento da bola, lançada para cima, é parabólico, ou seja, a solução da EDO é uma função quadrática.

Corrobora-se com as autoras Onuchic e Allevato (2011, p. 90) ao afirmarem que: “Descobrir que tipos de relações do mundo real são representados por gráficos parabólicos é mesmo mais interessante e científico, até infinitamente mais valioso do que a habilidade em plotar a curva quando alguém lhe dá a equação”. Verifica-se que o estudo de EDO pode apresentar ao futuro professor vários fenômenos que podem ser modelados por gráficos parabólicos. As relações entre EDO e funções serão percebidas pelo acadêmico se este conectar o comportamento das situações representadas por EDO à função que as descreve. Além disso, é preciso compreender os conceitos e estruturas matemáticas presentes nas funções que modelam os fenômenos, por exemplo, padrões, proporcionalidade, conjuntos numéricos.

Alguns problemas da Física, apresentados no LTA, envolvem leis que não são enfatizados na Educação Básica, como a Lei do Resfriamento de Newton e Transferência de Calor segundo a Lei de Stefan-Boltzmann[15]. Contudo, o futuro professor pode utilizar tais situações em seu trabalho na Educação Básica, pois envolvem conceitos sobre temperatura, bastante presentes em discussões sobre fenômenos reais, um tema que permeia diversas áreas da Ciência como Matemática, Química, Biologia e a própria Física. Neste sentido, para abordar este tema, o futuro professor pode adaptar as situações e apresentar a função solução.

Foram identificadas no LTA situações envolvendo conceitos da Matemática Financeira, como investimentos, empréstimos e financiamentos. Destaca-se, que estes modelos são situações de capitalização contínua, ou seja, envolvem equações do tipo $\frac{dS}{dt} = rS$, em que r refere-se à taxa de juros e S ao montante no instante de tempo t. A solução, para os problemas deste tipo, é a função exponencial $S = S_0e^{rt}$, que na Educação Básica é denominada como a função para o cálculo de Juros Compostos, com S_0 representando o investimento inicial. Os

[15] Esta Lei descreve a transferência de calor de um objeto para o ambiente por radiação.

problemas de Juros Simples, modelados por função afim, não são abordados, ou seja, equações com derivadas constantes não são trabalhadas.

Também, são exploradas situações-problema cujo contexto é a própria Matemática, como área do círculo (Geometria Plana), área de superfície do cone e da esfera bem como seus respectivos volumes (Geometria Espacial) e o problema da Braquistócrona. Um problema histórico, do século XVII, que consiste em determinar uma curva ao longo da qual uma partícula desliza sem atrito em um tempo mínimo de um ponto dado P até outro ponto Q, em que o segundo ponto está mais baixo que o primeiro, mas não diretamente abaixo.

Dessa forma, nos capítulos analisados e nas atividades propostas, no LTA, os modelos matemáticos descrevem situações-problema sobre objetos em queda livre, meia vida de elementos químicos, crescimento/decrescimento populacional, drenagem de líquidos através de um orifício, problemas de Matemática Financeira, problemas envolvendo a variação de temperatura, epidemias. No que tange aos tipos de funções exploradas, por meio destes modelos, destaca-se que os autores do LTA selecionaram atividades que enfatizam a função exponencial. Alguns modelos envolvem funções trigonométricas e quadráticas. Contudo, verifica-se que a função logarítmica não é dada ênfase. Não realizar a conexão entre este tipo de função e as situações que são modeladas por ela pode limitar o conhecimento do futuro professor, no que tange as contextualizações que podem ser feitas entre a função logarítmica e fenômenos reais.

Em relação ao LTB, acerca da categoria Análise de Modelos, é possível verificar que, na segunda seção no capítulo 1, são apresentados alguns modelos matemáticos que envolvem Equações Diferenciais de 1ª ordem e Equações Diferenciais de 2ª ordem. Estes modelos referem-se a fenômenos que exigem conhecimentos, principalmente, de Física, por exemplo: ao estudar o modelo sobre corpos em queda livre, é abordada a segunda lei de Newton, que explica a força que um corpo exerce considerando a aceleração e a massa do objeto; é apresentado, também, o movimento de um pêndulo simples, que envolve os conceitos da segunda lei de Newton e aceleração angular.

O LTB não enfatiza que os conceitos envolvidos nos modelos supracitados, também, são estudados na Educação Básica, também verificado no LTA. Assim, cabe ao acadêmico realizar a conexão entre os conceitos e situações que envolvem EDO e o que poderá ser explorado no trabalho como professor. Para tal, é importante perceber que a função solução do modelo de corpos em queda livre é uma função quadrática, logo esta é uma situação que pode ser utilizada pelo futuro professor ao ensinar este tipo de função. Alguns exemplos, também estão presentes no LTA, como o modelo sobre a Lei do Resfriamento de Newton.

Também é apresentado o modelo sobre capitalização contínua, que envolve os conceitos de juros compostos. Destaca-se que, os autores do LTB enfatizam que este fenômeno possui o mesmo comportamento do crescimento populacional, ambos crescem/decrescem exponencialmente.

Além dessas, há outras situações reais, que para serem modeladas, exigem que o sujeito conheça conceitos de Física, a saber: modelo sobre o sistema massa-mola, que envolve conceitos de proporcionalidade, acerca da Lei de Hooke[16] e da Força F exercida sobre objetos; cujos conceitos são descritos conforme a segunda Lei de Newton; uma situação problema sobre circuitos simples em série, que envolve conceitos da segunda Lei de Kirchhoff[17]; modelo sobre drenagem de água através de um orifício, que utiliza ideias sobre hidrodinâmica e o Teorema de Torricelli. Dessa forma, verifica-se que os autores do LTB apresentam situações que envolvem EDO e conceitos que podem ser explorados pelo futuro professor de Matemática, pois estes conteúdos, geralmente, são abordados na disciplina de Física.

Em relação aos dados quantitativos, o capítulo possui 101 atividades propostas, destas 28 atividades abordam modelos matemáticos, ou seja, 27,72% das atividades. Nestes, as situações–problema propostas não precisam ser solucionadas, assim a função solução não é explorada. Entretanto, distintos fenômenos reais são apresentados, a saber: corpos em queda livre, circuitos em série, escoamento de líquidos, trajetória de projéteis, variação de compostos químicos no organismo, dentre outros. Destaca-se que grande parte destes fenômenos são retomados no capítulo 3, afim de explorar sua solução.

No capítulo 2, do LTB, são apresentados os métodos analíticos de resolução de EDO de 1º ordem. Optando por trabalhar o desenvolvimento teórico dos métodos. Apresentando apenas situações de referência. De modo a relacionar as EDO com fenômenos reais, porém, sem utilizá-las como ponto de partida para sistematizar a resolução da EDO.

Quanto aos dados quantitativos, foram contabilizadas 341 situações, de um total de 563, como pode ser corroborado através do Quadro 1. Permitindo inferir que, aproximadamente, 60,56% das atividades propostas não estão relacionadas à modelos.

O capítulo 3 do LTB apresenta aplicações das equações na própria matemática, por exemplo, trajetórias ortogonais, que refere-se a uma curva que intercepta uma dada família de funções em ângulo reto. Esta discussão é interessante, pois aborda os conceitos matemáticos de Geometria Plana (posição relativa entre retas) e Geometria Analítica, cujo estudo é

[16] Esta lei afirma que a força restauradora é proporcional ao deslocamento da mola quando esticada.
[17] Afirma que a diferença de potencial $E(t)$ em um circuito fechado é igual à soma das voltagens no circuito.

recomendado pelas propostas curriculares nacionais (BRASIL, 2002), relacionado aos conceitos de Cálculo, como reta tangente.

No capítulo 3, também, são expostas aplicações das equações em situações de outras áreas do conhecimento, por exemplo, situações de crescimento e decrescimento populacional, oriundos da Biologia e Ecologia. Fenômenos químicos também são abordados, em especial, meia-vida de substâncias radioativas; datação de fósseis por meio da quantidade de Carbono presente; mistura de soluções com concentrações distintas. É interessante que os professores das distintas áreas explorem os diversos aspectos de um mesmo conteúdo, neste caso, o professor de Química pode explorar as características dos elementos e compostos químicos e o professor de Matemática pode trabalhar com a elaboração de modelos relativos as reações químicas que podem ocorrer entre as substâncias. Modelos que podem ser calculados por EDO lineares ou EDO não lineares, de acordo com o nível de interação e as características de cada elemento presente na reação. A Figura 3, é um exemplo de modelo que descreve uma reação química entre dois compostos, originando um terceiro composto.

Figura 3: Exemplo de atividade proposta que envolve conceitos de Química

Um composto C é formado quando dois compostos químicos A e B são combinados. A reação resultante entre os dois compostos é tal que, para cada grama de A, 4 gramas de B são usados. É observado que 30 gramas do composto C são formados em 10 minutos. Determine a quantidade de C em qualquer instante se a taxa da reação é proporcional às quantidades de A e B remanescentes e se inicialmente havia 50 gramas de A e 32 gramas de B. Qual a quantidade do composto C que estará presente após 15 minutos? Interprete a solução quando $t \to \infty$.

Fonte: (ZILL, CULLEN, 2001, p.124)

O modelo representado na Figura 3 envolve uma EDO não linear que possui como solução, a função exponencial $X(t) = 1000\,\frac{1-e^{-0,1258t}}{25-4e^{-0,1258t}}$. Dessa forma, trabalhar com este modelo pode contribuir para que o futuro professor conheça um número maior de situações modeladas por função exponencial e possa explorá-las na sua prática profissional.

A critério de exemplo, na Figura 4, é mostrado um modelo matemático sobre a Lei do Resfriamento de Newton, cuja solução é exponencial. De modo que, é possível perceber a importância do estudo de EDO para resolução de problemas relacionados a, por exemplo, variação de temperatura.

Figura 04: Exemplo apresentado e discutido pelo LTB, envolvendo a Lei do Resfriamento de Newton

> Quando um bolo é retirado do forno, sua temperatura é de 300°F. Três minutos depois, sua temperatura passa para 200°F. Quanto tempo levará para sua temperatura chegar a 70 graus, se a temperatura do meio ambiente em que ele foi colocado for de exatamente 70°F?

Fonte: (ZILL, CULLEN, 2001, p.107)

Nas figuras 4 e 5, vê-se exemplos de situações que podem ser utilizadas para contextualizar funções exponenciais, envolvendo conceitos de Física. Em relação ao modelo na Figura 04, é possível trabalhar a função $T(t) = 70 + 230e^{-0,19018t}$, pois esta é a solução da EDO que descreve o modelo. No que concerne aos conceitos que podem ser abordados, além da Lei de Resfriamento de Newton, podem ser discutidos conceitos como escala termométrica, conversão entre as unidades de temperatura (Escalas Celsius, Fahrenheit e Kelvin), cuja conversão pode originar outra discussão, um modelo que envolve função afim.

Figura 05: Exemplo apresentado e discutido pelo LTB, modelo sobre eletromagnetismo

> Uma bateria de 12 volts é conectada a um circuito em série no qual a indutância é de 1/2 henry e a resistência, 10 ohms. Determine a corrente i se a corrente inicial é zero.

Fonte: (ZILL, CULLEN, 2001, p. 109)

Na Figura 5, pode-se verificar como é apresentado um modelo sobre eletromagnetismo. A função solução pode ser explorada pelo futuro professor, no Ensino Médio, pois envolve uma função exponencial $i(t) = \frac{6}{5} - \frac{6}{5}e^{-20t}$. Selecionar este tipo de situação é importante para que os estudantes consigam conectar os conceitos matemáticos aos conceitos de outras áreas do conhecimento, além disso, pode-se mostrar, de forma generalizada, a relação entre os conceitos de Voltagem ($E(t)$), Resistência (R), Corrente (i) e Indutância (L) por meio da função $i(t) = \frac{E_0}{R} - ce^{-(R/L)t}$, de modo que a solução obtida é denominada de solução geral (ou família de soluções), pois não há dados a serem substituídos e que permitiriam obter uma solução particular, conforme apresentado anteriormente no parágrafo.

Em relação às atividades propostas neste capítulo, 65,28% (79 atividades de um total de 121) abordam modelos matemáticos. As principais situações reais exploradas referem-se àquelas já abordadas no decorrer das explanações dos conteúdos. A função mais abordada é a exponencial seguida da quadrática. As atividades que não foram categorizadas como modelos, 34,71%, propõem, em geral, que o acadêmico determine as trajetórias ortogonais para uma dada família de funções. Porém, nesta pesquisa assume-se que os modelos envolvem situações de outras áreas do conhecimento, a qual esta situação não se aplica.

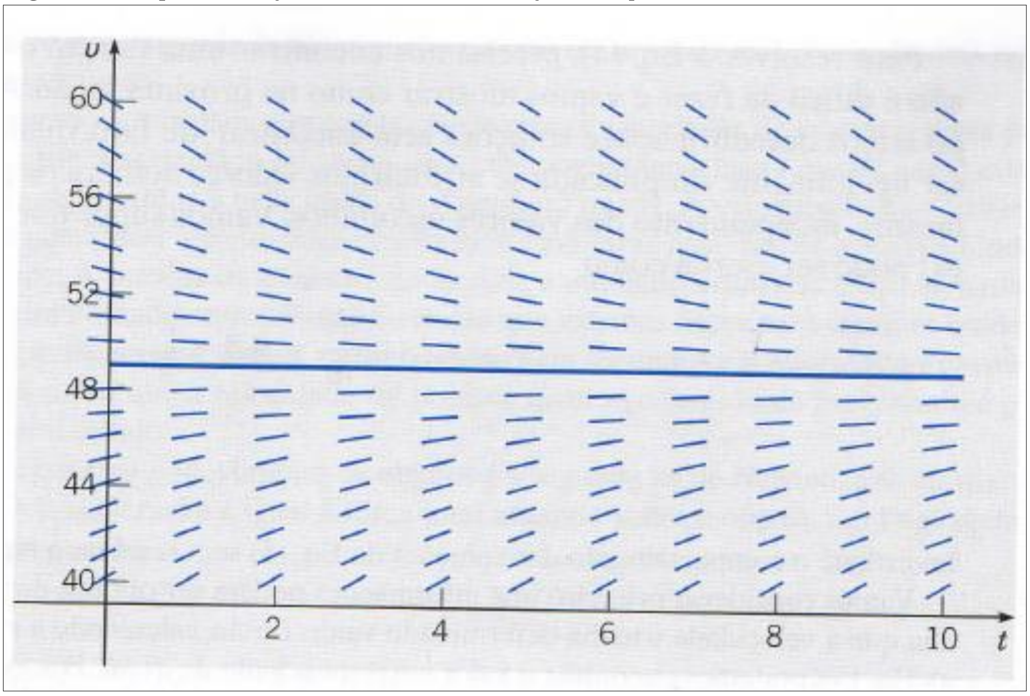
Do total de atividades propostas nos 3 capítulos analisados, 19,01% são atividades que envolvem modelos matemáticos. Estas situações são oriundas de áreas do conhecimento como a Química, com modelos sobre reações químicas e meia vida de elementos químicos; a Física, com modelos sobre objetos em queda livre, circuitos em série, drenagem de líquidos; a Biologia, no que concerne à problemas sobre eliminação de medicamentos do corpo humano, crescimento/decrescimento de populações; a Economia, como a capitalização contínua; e, a Psicologia, ao explorar situações sobre memorização e esquecimento.

As funções exploradas, nos 3 capítulos analisados e atividades propostas, são geralmente as exponenciais. Em algumas situações, há a abordagem de situações que são expressas por funções quadráticas. No que tange a função logarítmica, assim como os autores do LTA, os autores do LTB não a enfatizam como uma função que também modela situações reais.

No que concerne a categoria Abordagem Qualitativa de EDO no LTA, verifica-se que esta abordagem está presente logo nas primeiras páginas, nos dois primeiros modelos apresentados, citados na discussão sobre a categoria Análise de Modelos. A Abordagem Qualitativa revela-se, conforme Javaroni (2007), quando o objetivo é investigar o comportamento das soluções da EDO. Dessa forma, o cerne da atividade matemática não constitui-se em resolver a EDO por meio de algum método analítico. Como foi mencionado, o LT A propõe a discussão do que a EDO representa acerca do modelo, para tanto, os autores do LTA inserem no contexto de análise dos modelos a representação geométrica das EDO, utilizando um *campo de direções* do modelo a ser analisado (Figuras 6 e 7). Por meio do campo de direções, os autores destacam características e comportamentos dos modelos, como as *soluções de equilíbrio*[18].

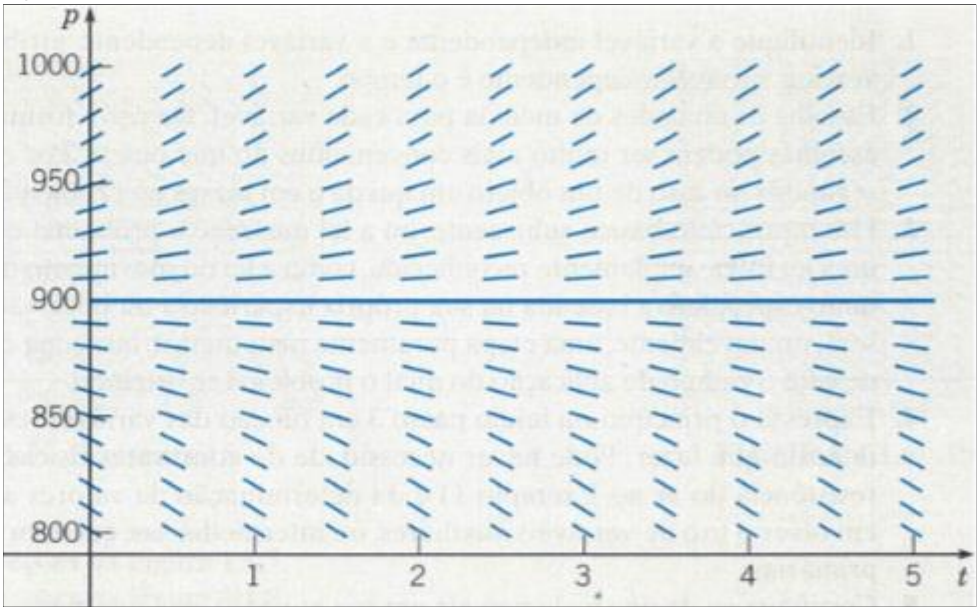
[18] Soluções de Equilíbrio são soluções constantes, necessariamente a derivada é nula. Ou seja, o coeficiente angular da reta que a caracteriza é nulo.

Figura 6: Campo de Direções sobre o modelo “objeto em queda”



Fonte: (BOYCE, DIPRIMA, 2015, p.4)

Figura 7: Campo de Direções sobre o modelo “interação entre ratos e corujas em um campo”



Fonte: (BOYCE, DIPRIMA, 2015, p. 5)

No campo de direções apresentado na Figura 6 é representado o comportamento das soluções da EDO, ou seja, os segmentos não são as curvas integrais da EDO em estudo e sim aproximações. Por meio do campo de direções é possível obter a solução de equilíbrio do modelo ($v = 49m/s$). Ainda, percebe-se que todos as soluções tendem para $v = 49m/s$, pois valores menores do que $v = 49m/s$ tendem a aumentar até essa velocidade, enquanto que o valores maiores do que $v = 49m/s$ tendem a diminuir até atingirem a solução de equilíbrio, portanto pode-se inferir que as soluções convergem. Na figura 07, através do campo de direções, verifica-se a existência de certo equilíbrio em valores próximos a $p = 900$. Entretanto, diferentemente do representado na Figura 6, neste caso as soluções divergem, ou seja, para valores menores de $p = 900$, as soluções decrescem e valores maiores de $p = 900$ crescem (a medida que o tempo passa). Situações semelhantes às do campo direções podem ser trabalhadas em situações-problema abordadas na Educação Básica, por exemplo, ao ensinar funções em que, também, é possível realizar a análise qualitativa do gráfico da função.

Outro importante conceito matemático, por suas relações com outros conteúdos matemáticos e outras áreas do conhecimento, é abordado, o conceito de *proporcionalidade*, denominado nesta seção por taxa constante ou taxa de crescimento. Este conceito é evidente, por exemplo, na Figura 01 cuja atividade propõe a resolução da equação $\frac{dQ}{dt} = -rQ$. Pode-se inferir que o parâmetro r representa a taxa de decaimento da quantidade de Carbono em determinado fóssil; o futuro professor precisa compreender que a derivada significa uma variação entre as grandezas envolvidas, a quantidade de Carbono em relação ao tempo, e esta variação ocorre de acordo com a taxa de variação, neste caso, constante (r). Para descobrir a quantidade Q em um tempo t, é útil trabalhar com a função $Q(t)$, a ser determinada resolvendo a EDO. A função $Q(t)$ é um importante objeto de estudo na Educação Básica, pois é uma função exponencial, como foi destacado anteriormente.

Ainda no capítulo introdutório, os autores realizam a sistematização das soluções dos modelos apresentados inicialmente, como exemplos, da forma $\frac{dp}{dt} = rp - k$. Enfatizando o comportamento das soluções e destacando que cada parâmetro que compõe a lei da EDO influencia no comportamento da solução da EDO, considerando que a equação possui solução que pode ser expressa por funções elementares. Verifica-se isto no Quadro 02 que apresenta um excerto do LTA, em que p_0 refere-se a população inicial de ratos, k a taxa predatória e r a taxa de crescimento da população.

Quadro 2: Excerto sobre o comportamento de soluções de acordo com os parâmetros envolvidos

Se $p_0 = \frac{k}{r}$, então segue da Eq(19), que $p = \frac{k}{r}$ para todo t; essa é a solução constante, ou de equilíbrio. Se $p_0 \neq \frac{k}{r}$, então o comportamento da solução depende do sinal do coeficiente $p_0 - \left(\frac{k}{r}\right)$ no termo exponencial na Eq 19. Se $p_0 > \frac{k}{r}$, então p cresce exponencialmente com o tempo t; se $p_0 < \frac{k}{r}$, então p decresce e acaba se tornando nulo, o que ocorre a extinção dos ratos. Valores negativos de p, embora sendo possíveis na expressão (19), não fazem sentido no contexto desse problema particular.

Fonte: (BOYCE, DIPRIMA, 2015, p.11)

A Abordagem Qualitativa é verificada em atividades do capítulo introdutório, pois é proposto ao futuro professor resolver problemas que consistem em perguntas com caráter investigatório, por exemplo o exposto no Quadro 02. Na categoria Análise de Modelos foi defendida a importância do professor conhecer o maior número possível de situações reais para ensinar funções, entretanto é fundamental que o futuro professor consiga abordar as situações propostas aos estudantes sob a ótica qualitativa, pois assim podem ser exploradas as propriedades e características do fenômeno estudado ressaltando um dos aspectos da Matemática, Ciência que possui ferramentas para modelar fenômenos reais.

Quadro 3: Excerto sobre a abordagem de campos de direções em atividades propostas

"[...] desenhe um campo de direções para a equação diferencial dada. Baseado no campo de direções, determine o comportamento de y quando $t \to \infty$. Se esse comportamento depender do valor inicial de y em t=0, descreva essa dependência. [...]"

Fonte: (BOYCE, DIPRIMA, 2015, p.7)

No Quadro 3, percebe-se que os autores do LTA entendem que é importante analisar o comportamento das soluções de EDO, sem resolvê-la. Para tanto, propõe a análise através do campo de direções. Ressalta-se que muitas das EDO, principalmente, as equações que modelam fenômenos reais, não possuem solução que pode ser obtida por meio de uma sequência finita de passos de tratamento algébrico e integração e consequentemente expressa por funções elementares. Para resolver este problema, Javaroni (2007, p.187) afirma que é possível *"investigar o comportamento das soluções sem de fato encontrar as soluções analiticamente"* por meio de um campo de direções.

A Figura 8 representa um exemplo de atividade do capítulo 1 do LT A proposta sob a ótica da Abordagem Qualitativa:

Figura 8: Exemplo de atividade proposta sob a ótica da abordagem qualitativa

3. Considere a equação diferencial

$$dy/dt = -ay + b,$$

em que a e b são números positivos.
(a) Encontre a solução geral da equação diferencial.
(b) Esboce a solução para diversas condições iniciais diferentes.
(c) Descreva como a solução muda sob cada uma das seguintes condições:
i. a aumenta;
ii. b aumenta;
iii. Ambos a e b aumentam mas a razão b/a permanece constante.

Fonte: (BOYCE, DIPRIMA, 2015, p.14)

Na Figura 8 constata-se que é proposta a resolução da EDO, porém não somente. É exigido que o futuro professor consiga estabelecer relações entre os parâmetros da EDO e suas soluções. Esta percepção é importante, pois quando a EDO modela fenômenos, o sujeito deve entender que a variação dos parâmetros envolvidos interfere diretamente na solução da EDO (solução do modelo/problema a ser resolvido).

No *item* a da atividade (Figura 8), a solução esperada é $y = ce^{-at} + \frac{b}{a}$. Verifica-se que o comportamento da solução cresce/decresce exponencialmente, em que a e b são os parâmetros envolvidos na EDO cuja variação influencia na solução, t a variável independente, e c representa a constante de integração. Neste caso, a atividade não propõe a resolução de um Problema de Valor Inicial[19], então c indica toda a família de funções que satisfazem a EDO. A resposta do *item* b, refere à construção do gráfico (Registro Gráfico) das soluções, na qual os autores sugerem que sejam elencados pontos para substituir a constante c por um número específico, de modo que a solução particular contenha o ponto desejado.

No *item* c, espera-se, como resposta à atividade, o entendimento de que quando o parâmetro a aumenta, as soluções decrescem mais rapidamente, pois este parâmetro está intrinsecamente relacionado à e. Quanto às solução pode-se inferir que, quanto maior o valor numérico de a, mais baixo será o valor de equilíbrio da solução. Em relação ao parâmetro b, quando há seu aumento, apenas o valor de equilíbrio das soluções é alterado, o crescimento/decrescimento não se altera, pois não há alteração do parâmetro a. No que se refere a razão $\frac{b}{a}$ constante, significa que os parâmetros a e b variam proporcionalmente, ou seja, o equilíbrio da solução não se altera, mas como há a variação de a, a solução decresce mais rapidamente.

O capítulo 2 do LTA, é dedicado ao estudo de métodos analíticos para resolução de EDO de primeira ordem como Equações Lineares, Equações Separáveis e Equações Exatas e o Método de Euler. Percebe-se que, em cada seção, os autores apresentam exemplos para aplicação do método que está sendo estudado com a análise das soluções da EDO. Por exemplo, a Figura 9:

[19] A solução de uma EDO, quando existe, refere-se a uma família de funções. Resolver um Problema de Valor Inicial (PVI) significa determinar, por meio de um ponto fornecido que necessariamente deve pertencer a solução, uma função específica que é solução da EDO.

Figura 9: Exemplo apresentado e discutido pelos autores do LTB para aplicação de método analítico

Encontre a solução geral da equação diferencial

$$\frac{dy}{dt} - 2y = 4 - t$$

e desenhe gráficos de diversas soluções. Discuta o comportamento das soluções quando $t \to \infty$.

Fonte: (BOYCE, DIPRIMA, 2015, p.29)

Ainda, o capítulo 2, além das atividades mencionadas anteriormente, apresenta uma seção específica com exemplos que se referem a modelos de diversas áreas do conhecimento. Estes exemplos são explorados, sob a ótica da abordagem qualitativa, pois além de ser proposta a construção de uma EDO que modele o fenômeno, é realizada uma discussão acerca da influência dos parâmetros no comportamento da solução.

Figura 10: Exemplo de como a abordagem qualitativa é realizada no LTA

$$Q(t) = 25 + (Q_0 - 25)e^{-rt/100}, \qquad (6)$$

ou

$$Q(t) = 25(1 - e^{-rt/100}) + Q_0 e^{-rt/100}. \qquad (7)$$

Da Eq. (6) ou da Eq. (7), você pode ver que $Q(t) \to 25$ (lb) quando $t \to \infty$, de modo que o valor limite Q_L é 25, confirmando nossa intuição física. Além disso, $Q(T)$ se aproxima desse limite mais rapidamente quando r aumenta. Ao interpretar a solução (7), note que o segundo termo à direita do sinal de igualdade é a porção do sal original que permanece no tanque no instante t, enquanto o primeiro termo fornece a quantidade de sal no tanque em consequência da ação dos fluxos. Gráficos das soluções para $r = 3$ e diversos valores de Q_0 estão ilustrados na Figura 2.3.2.

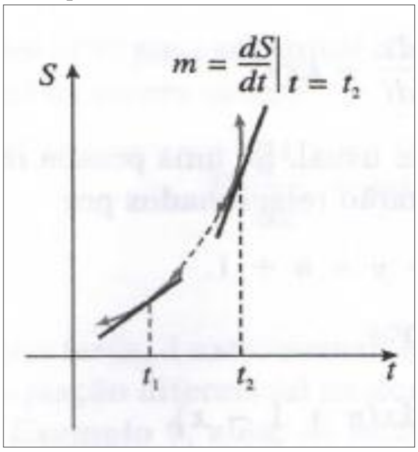
Fonte: (BOYCE, DIPRIMA, 2015, p. 45)

Pode-se afirmar que a abordagem qualitativa é explorada tanto nos exemplos que referem-se à modelos matemáticos (Figura 10) quanto em exemplos que envolvem apenas equações sem aplicação direta (Figuras 8 e 9). Entretanto, verifica-se que a maioria dos modelos são trabalhados sob esta ótica, mostrando que os autores possuem o entendimento de que o ensino de EDO aliado à abordagem qualitativa enriquece e potencializa o aspecto *Unificador* do Cálculo.

Em relação ao capítulo introdutório do LTB, percebe-se que a seção que aborda os modelos matemáticos possui alguns traços desta abordagem, pois é uma tarefa investigativa o movimento de representar a situação real por meio de Equações Diferenciais. Entretanto, os autores, do LTB, apresentam uma breve discussão referente a resolução do problema em si, com o objetivo de chegar a uma equação que resolva o problema, sem que ocorra a discussão dos possíveis meios para resolução das equações, portanto, a análise do comportamento da função solução dos modelos não é realizada.

Por exemplo o modelo sobre capitalização contínua, descrito pela equação $\frac{dS}{dt} = rS$, cujo gráfico é apresentado na Figura 7, expressa o comportamento das retas tangentes, em dois tempos arbitrários t_1 e t_2, representando a relação entre o comportamento exponencial da solução da equação e a inclinação da reta tangente a cada um dos pontos.

Figura 11: Exemplo de gráfico apresentado no LTB para discutir o comportamento de um modelo



Fonte: (ZILL, CULLEN, 2001, p.30)

Os autores, do LTB, destacam que quando a taxa de crescimento r for “grande”, o capital S também o será, pois a variação entre as grandezas é proporcional. Dessa forma, quando o capital for um número “grande” a reta tangente terá inclinação que se aproxima cada vez mais do eixo S. Para este modelo, são discutidas diferentes características, presentes no registro geométrico das equações, relacionadas ao comportamento da solução, sem que seja apresentada a solução propriamente dita. Os campos de direções não são ressaltados ao estudar as EDO, em detrimento da atividade de investigar o comportamento das equações sem necessariamente expressar a solução das equações por meio de funções elementares, visto que, em diversas EDO não é possível expressá-las.

No que concerne às atividades do capítulo 1, pode-se afirmar que possuem caráter investigativo, pois propõem ao estudante a investigação de uma equação que expressa a situação apresentada. Em outras palavras, há atividades que não solicitam que o acadêmico solucione a EDO. Na Figura 12, é mostrado um exemplo de atividade do capítulo, evidenciando a solicitação para expressar a atividade por meio de uma EDO, sem a necessidade de solucioná-la. A equação que modela este fenômeno é $\frac{dx}{dt} = r - kx$, em que r significa a taxa constante que o medicamento é injetado, k a constante de proporcionalidade e $x(t)$, a quantidade de remédio no instante t.

Figura 12: Exemplo de atividade proposta em que é necessário representa-la por meio de uma equação

Uma droga é injetada na corrente sangüínea de um paciente a uma taxa constante de r gramas por segundo. Simultaneamente, a droga é removida a uma taxa proporcional à quantidade $x(t)$ de droga presente no instante t. Determine a equação diferencial que governa a quantidade $x(t)$.

Fonte: (ZILL, CULLEN, 2001, p. 32)

Quanto ao capítulo 2, verifica-se que o ensino de EDO está centrado na manipulação algébrica, ou seja, os autores encaminham o estudo de EDO apresentando métodos analíticos de resolução. O comportamento das soluções não é discutido neste capítulo. Ao contrário do exposto no LTA, em que verificou-se a realização da análise das soluções das EDO em todos os capítulos, mesmo que as equações não estivessem associadas a fenômenos reais.

No que se refere à abordagem qualitativa nas atividades propostas no capítulo 2, pode-se inferir que não é realizada, pois foram selecionadas atividades que visam aplicação de métodos analíticos para resolver EDO, sem preocupar-se no comportamento que a função solução possui, bem como a influência de parâmetros que compõe a função.

No capítulo 3, é aprofundada a análise de modelos que envolvem EDO, destacando e justificando o comportamento de suas soluções. Ou seja, somente neste capítulo é possível perceber uma abordagem qualitativa para o trabalho com os modelos matemáticos. No Quadro 4, é mostrado um excerto sobre a análise da função exponencial $N(t) = N_0(e^k)^t$.

Quadro 4: Excerto sobre a abordagem qualitativa no LTB

[...] A função exponencial e^{kt} cresce com o tempo quando $k > 0$, e decresce quando $k < 0$. Logo, problemas que descrevem crescimentos, como a população, bactéria ou mesmo capital, são caracterizados por um valor positivo de k; por outro lado, problemas envolvendo decrescimento, como desintegração radioativa, conduzem a um valor negativo de k.

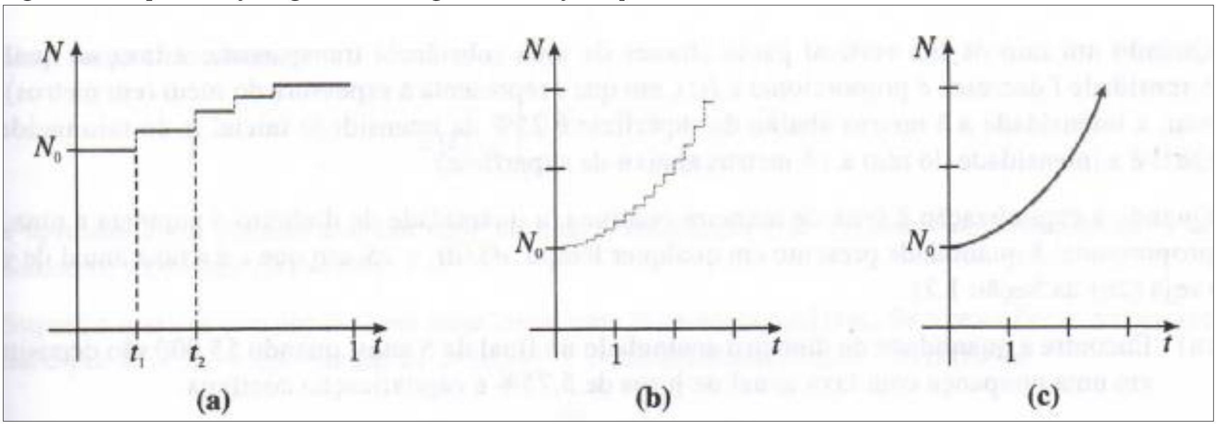
Fonte: (ZILL, CULLEN, 2001, p. 104)

Neste excerto, é discutido o comportamento e as situações as quais esta função modela. A função $N(t)$ é solução da equação $\frac{dN}{dt} = kN$, em que k refere-se a taxa de crescimento do fenômeno e N, a população em qualquer instante t. Realizar a análise sobre as soluções é importante, pois, por meio desta, são destacadas características sobre o problema modelado. No que tange ao acadêmico e futuro professor, potencializa suas justificativas matemáticas ao trabalhar, em sala de aula, fenômenos reais.

Estudar os modelos sob a ótica da abordagem qualitativa é importante para que o sujeito consiga responder questionamentos, tais como o limite de funções. O futuro professor precisa conseguir discutir estes aspectos, pois quando a função está relacionada a problemas reais, as variáveis dependentes nem sempre irão crescer ou decrescer infinitamente. Nesta perspectiva, traz-se as funções $T(t) = 70 + 230e^{-0,19018t}$ e $i(t) = \frac{6}{5} - \frac{6}{5}e^{-20t}$, soluções dos modelos das figuras 3 e 4, respectivamente. É necessário ressaltar que à medida que a variável independente t cresce, as variáveis T e i aproximam-se de valores limites, respectivamente 70º Fahrenheit e $\frac{6}{5}$ Ampère.

No LTB, é apresentada uma reflexão sobre a precisão dos modelos matemáticos quando comparados a fenômenos reais. Os autores do livro destacam que, em muitos contextos, as funções que modelam os fenômenos podem representa-los de forma aproximada. Por exemplo, em um modelo sobre crescimento populacional de bactérias, a função exponencial pode modelar este fenômeno. Entretanto, na realidade, há um intervalo de tempo $[t_1, t_2]$ que a quantidade de indivíduos não aumenta. Disso, pode-se inferir que a população não necessariamente cresce de forma continua. Na Figura 13 são mostrados 3 gráficos de funções exponenciais.

Figura 13: Representações gráficas de algumas situações que não crescem de forma contínua



Fonte: (ZILL, CULLEN, 2001, p. 113)

O gráfico a é uma representação mais realista do comportamento da população de bactérias, no qual percebe-se que há intervalos de tempo que não há crescimento populacional. Os gráficos b e c, são funções exponenciais e representam o mesmo fenômeno, macroscopicamente, desconsiderando o intervalo de tempo de não crescimento, em outras palavras, realizando aproximações em relação a uma situação real.

Quanto as atividades propostas do capítulo 3, infere-se que estas são abordadas sob a ótica qualitativa. As atividades exploram alguns aspectos da solução da equação. Em comparação ao LTA, no LTB a abordagem qualitativa é evidenciada em atividades que envolvem modelos matemáticos. O estudo do comportamento da solução não é realizado em EDO que não está associada à fenômenos matemáticos. Um exemplo desta abordagem é evidenciado na Figura 14, em que aparece um exemplo de como as atividades são propostas.

Figura 14: Exemplo de atividade em que é exigido que o acadêmico expresse a situação por meio de EDO

Uma força eletromatriz (fem) de 30 volts é aplicada a um circuito em série *L-R* no qual a indutância é de 0,5 henry e a resistência, 50 ohms. Encontre a corrente *i*(*t*) se *i*(0) = 0. Determine a corrente quando *t* → ∞.

Fonte: (ZILL, CULLEN, 2001, p. 114)

Neste exemplo, é proposto ao acadêmico que seja expressa uma equação diferencial e que esta seja resolvida. A EDO desta situação-problema é $\frac{1}{2}\frac{di}{dt} + 50i = 30$ e sua solução refere-se a $i(t) = \frac{3}{5} - \frac{3}{5}e^{-500t}$A solução da EDO deve ser analisada de modo a determinar a corrente $i(t)$ quando $t \to \infty$, cujo valor corresponde à $i(t) = \frac{3}{5}$. O LTB não explora atividades sobre a análise dos parâmetros envolvidos e a influência destes no comportamento da solução.

No que concerne a categoria Registros de Representação Semiótica, no capítulo introdutório do LTA, verifica-se que os modelos, inicialmente apresentados, são representados por meio de distintos registros, a saber: algébrico (equação), geométrico (campo de direções) e língua natural (interpretação das soluções). Encaminhar o estudo de Equações Diferenciais por meio do maior número de registros é importante, pois conforme Damm[20] (2010, p. 175) "[...]o ensino/aprendizagem de qualquer conhecimento está estreitamente vinculado à compreensão de diferentes registros de representação". Durante sua formação inicial, é importante que o futuro professor compreenda que objeto matemático é abstrato e para ser acessado precisa ser escrito por meio de registros de representação, esse entendimento contribui para que em seu trabalho explore os diversos registros de representação semiótica dos objetos matemáticos e a articulação entre estes registros.

Além disso, no capítulo 1, é inserido o registro gráfico (gráfico da solução da EDO) nas discussões acerca dos modelos, sendo explicitado o comportamento das funções, sublinha-se que é importante comparar os aspectos da solução em distintos registros, como o campo de

[20]Autora que pesquisa acerca da teoria dos Registros de Representação Semiótica, proposta por Raymond Duval, cuja teoria foi discutida no Capítulo 1 desta pesquisa.

direções. Assim, o acadêmico pode verificar que cada registro ressalta propriedades distintas de um mesmo objeto matemático. Sublinha-se que, dentre os registros utilizados, o geométrico é o mais enfatizado, uma vez que, os autores dedicam um certo tempo para justificar as potencialidades deste registro. No quadro 05, é mostrado um excerto no qual afirmam que:

Quadro 5: Excerto que evidencia o entendimento sobre campo de direções (registro geométrico)

Campos de direções são ferramentas poderosas no estudo de soluções de equações diferenciais. [...] Cada segmento de reta é tangente ao gráfico de uma solução contendo aquele ponto. Um campo de direções desenhado em uma malha razoavelmente fina fornece uma boa ideia do comportamento global das soluções de uma equação diferencial. [...] A construção de um campo de direções é, muitas vezes, um primeiro passo bastante útil na investigação de uma equação diferencial.

Fonte: (BOYCE, DIPRIMA, 2015, p. 4)

Os autores do LTA, também, destacam o importante papel que *softwares* possuem no estudo de EDO, indicando o uso de computadores para expressar as EDO no registro geométrico e gráfico. Dessa forma, pode-se afirmar que os autores compreendem que o uso de computadores, em particular *softwares* programados para plotar gráficos, são úteis no que tange a interpretação das informações expostas em determinado registro. Percebe-se este fato, no excerto do Quadro 6.

Quadro 6: Excerto em que é explicitado a importância dos *softwares*

Com programas apropriados, é fácil mostrar graficamente a solução de uma equação diferencial, quer ela tenha sido obtida numericamente ou como resultado de um procedimento analítico de alguma espécie. [...] Em particular, você deve tentar combinar métodos numéricos, gráficos e analíticos de modo a obter a maior compreensão possível sobre o comportamento da solução e dos processos subjacentes que o problema modela.

Fonte: (BOYCE, DIPRIMA, 2015, p. 20)

Com base no Quadro 6, é possível perceber o entendimento dos autores quanto a importância da exploração dos diferentes registros de representação semiótica, de um mesmo objeto, para o estudo de EDO, pois contribuem para o estudo sob a ótica da abordagem qualitativa, ou seja, o estudo do comportamento das soluções de uma EDO e o, respectivo, significado em relação a situação real modelada.

Conforme explicitado na Metodologia, procura-se nas atividades verificar se são exigidas as transformações cognitivas, conversão e tratamento, para resolução das situações. Em relação as atividades propostas no capítulo introdutório, estas correspondem a 128 atividades. Nesta pesquisa, denota-se por registro de partida, com base em Duval (2003, 2013), o registro no qual as situações problemas são apresentadas. Sendo, em relação ao total de atividades do capítulo, representadas por meio dos registros de partida algébrico, cerca de

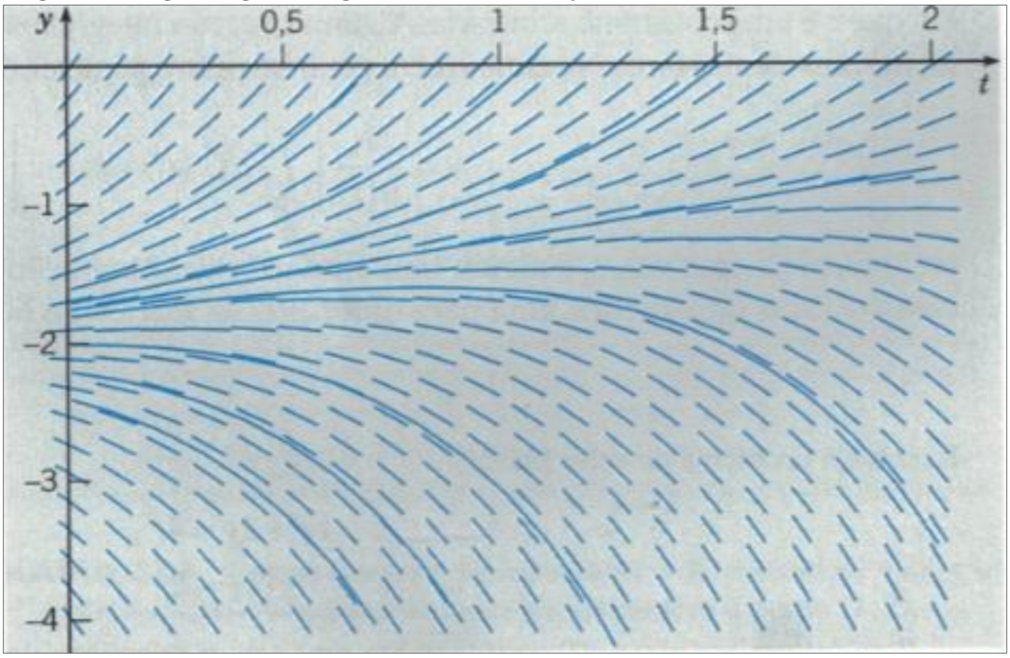
78,90%. O registro de partida língua natural, é o segundo mais abordado, cerca de 15, 62% das atividades; enquanto que o registro numérico em 3,90% das atividades; e por meio do registro gráfico, 1,56%. Por meio dos dados quantitativos apresentados, pode-se inferir que os autores selecionaram atividades que mobilizam distintos registros de representação.

Além disso, de modo geral, há equilíbrio entre as transformações cognitivas tratamento e conversão, visto que os tratamentos são exigidos em 50,78% das atividades, enquanto que as conversões são exigidas em 49,22% das situações. Destaca-se que todos os tratamentos são algébricos, em outros termos, há uma mudança interna no registro algébrico, por exemplo, as atividades que os autores exigem apenas que o acadêmico determine as possíveis soluções, se existirem, de uma EDO. Nas conversões, são exigidos diferentes registros de representação, a saber: algébrico, língua natural, geométrico, o numérico e o gráfico. O registro tabular não é explorado nas atividades nem nos momentos dedicados à explicação dos conteúdos. Entretanto, há ênfase no registro geométrico, nas atividades propostas.

Assim como no capítulo introdutório, o capítulo 2, do LTA, também aborda diferentes registros de representação semiótica. Além disso, são bastante enfatizados os tratamentos algébricos, provavelmente por este capítulo prever a sistematização da resolução de EDO por meio de métodos analíticos. Nas figuras 6 e 7, são mostrados exemplos de como as conversões são abordadas.

A Figura 15 traz um exemplo de conversão entre os registros geométrico (campo de direções) e o registro gráfico (gráfico da solução). A maneira como são apresentados os dois registros no mesmo plano cartesiano, permite que sejam realizadas comparações entre os distintos registros que representam um mesmo objeto, identificando quais aspectos são ressaltados em cada um. A equação representada é dada por $\frac{dy}{dt} - 2y = 4 - t$, cuja solução geral é $y = -\frac{7}{4} + \frac{1}{2}t + ce^{2t}$. O registro geométrico explicita o comportamento que a solução possui, sem a necessidade de calcular a solução particular. Neste exemplo, são divergentes e crescem/decrescem exponencialmente, exceto quando o parâmetro c é nulo (comportamento linear); o registro gráfico é um registro das soluções da EDO, que são funções, e corrobora com as conjecturas levantadas no registro geométrico.

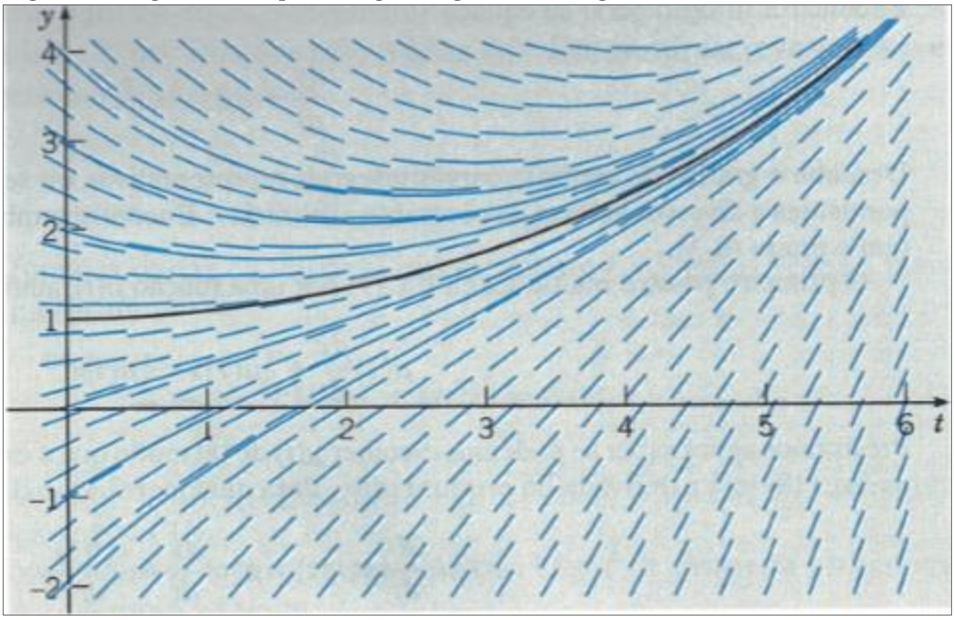
Figura 15: Registros gráfico e geométrico, de um objeto matemático, na mesma malha



Fonte: (BOYCE, DIPRIMA, 2015, p. 29)

A Figura 16 também mostra um exemplo de conversão entre os registros geométrico e gráfico. A equação representada é $\frac{dy}{dt}+\frac{1}{2}y=\frac{1}{2}e^{\frac{t}{3}}$, que possui solução geral $y=\frac{3}{5}e^{\frac{t}{3}}+ce^{-\frac{t}{2}}$. Distintamente do exemplo anterior, percebe-se que as soluções particulares são convergentes. Assim como no exemplo anterior, afirma-se que utilizar os diferentes registros de representação, potencializa a aquisição de conhecimentos acerca do objeto matemático, bem como a relação entre os parâmetros da equação e o comportamento das soluções.

Figura 16: Segundo exemplo de registros geométrico e gráfico, na mesma malha



Fonte: (BOYCE, DIPRIMA, 2015, p.28)

No capítulo 2, há 441 atividades propostas. Em relação ao registro de partida, o mais explorado, é o algébrico, em aproximadamente 85,94% (379 situações) das atividades propostas são apresentadas por meio de equação. Seguido do registro na língua natural, com 13,60% (60 situações) das atividades, este consistindo na apresentação de uma situação problema, ou seja, a descrição de um modelo matemático, não apresentando a equação. Em uma atividade, a situação é apresentada pelo registro geométrico (0,23%) e outra situação é apresentada por meio do registro tabular (0,23%).

No que concerne aos registros geométrico e gráfico, estes estão presentes[21] em 102 situações, correspondendo a 23,13% do total de atividades do capítulo 2. Destas situações, que de algum modo envolvem os registros gráfico e geométrico, em 69,61% é recomendado que os *softwares* matemáticos sejam utilizados na construção do gráfico da solução e/ou do campo de direções. Assim, compreende-se que os autores entendem que os *softwares* contribuem no processo de visualização do objeto matemático. No que tange ao processo de aprendizagem do futuro professor, utilizar os recursos tecnológicos auxilia no entendimento de que a atividade central não refere-se a construção de gráficos e campos de direções, mas sim o que estes registros podem representar em relação a determinado problema.

Embora seja percebido certo "enclausuramento" nos registros de partida, as transformações cognitivas envolvem diversos registros intermediários [22]e de chegada[23]. Deste modo, pode-se destacar a seleção de atividades que valorizam a diversidade de representações matemáticas no estudo de EDO.

Figura 17: Exemplo de atividade proposta que aborda distintos registros intermediários

Em cada um dos problemas de 21 a 23:
(a) Desenhe um campo de direções para a equação diferencial dada. Como parece que as soluções se comportam quando t assume valores grandes? O comportamento depende da escolha do valor inicial a? Seja a_0 o valor de a no qual ocorre a transição de um tipo de comportamento para outro. Estime o valor de a_0.
(b) Resolva o problema de valor inicial e encontre precisamente o valor crítico a_0.
(c) Descreva o comportamento da solução correspondente ao valor inicial a_0.

21. $y' - \frac{1}{2}y = 2\cos t, \qquad y(0) = a$
22. $2y' - y = e^{t/3}, \qquad y(0) = a$
23. $3y' - 2y = e^{-\pi t/2}, \qquad y(0) = a$

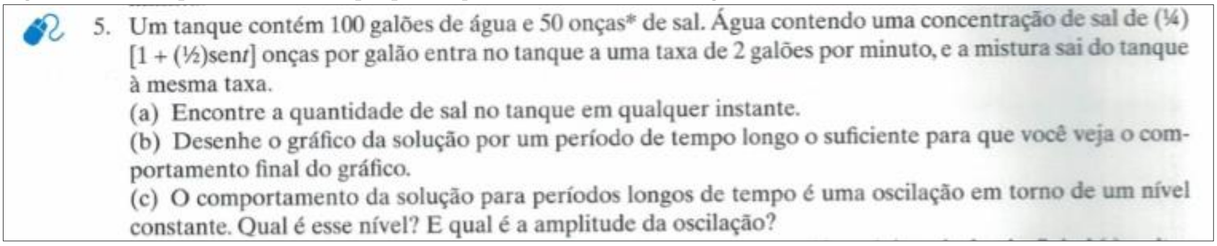
Fonte: (BOYCE, DIPRIMA, 2015, p.33)

Na Figura 17, são apresentadas atividades propostas no capítulo 2 que exigem a conversão: $RA -> RGEO \rightarrow RLN$, em que o registro de partida é o algébrico, o registro

[21] Este é um dado geral, ou seja, os registros podem ser intermediários ou de chegada.
[22] São registros abordados entre os registros de partida e os registros de chegada.
[23] Registro final mobilizado na transformação cognitiva.

intermediário é o campo de direções e o registro de chegada é o da língua natural. Assim, percebe-se que os distintos registros de representação são complementares entre si. Ao realizar esta atividade, o registro geométrico revela o comportamento das soluções da equação, ao converter para o registro língua natural, o sujeito precisa interpretar o que lhe é mostrado no campo de direções. Esta atividade também envolve a transformação cognitiva Tratamento, ao propor *"Resolva o problema de valor inicial"*. Destaca-se a importância dos tratamentos algébricos para solucionar as EDO, entretanto, trabalhar somente com esta transformação, pode impossibilitar o entendimento de EDO.

Figura 18: Exemplo de atividade proposta que envolve distintos registros



5. Um tanque contém 100 galões de água e 50 onças* de sal. Água contendo uma concentração de sal de (¼) [1 + (½)sen*t*] onças por galão entra no tanque a uma taxa de 2 galões por minuto, e a mistura sai do tanque à mesma taxa.
(a) Encontre a quantidade de sal no tanque em qualquer instante.
(b) Desenhe o gráfico da solução por um período de tempo longo o suficiente para que você veja o comportamento final do gráfico.
(c) O comportamento da solução para períodos longos de tempo é uma oscilação em torno de um nível constante. Qual é esse nível? E qual é a amplitude da oscilação?

Figura: (BOYCE, DIPRIMA, 2015, p.51)

Na Figura 18, há um modelo matemático sobre misturas proposto no capítulo 2. Essa situação, no item a, exige a conversão: $RLN \rightarrow RA$, em que o registro de partida é o língua natural, o registro de chegada é o algébrico. Para solucionar este modelo, é preciso escrever a situação apresentada em linguagem matemática, esta não é uma ação trivial. Entretanto, é uma atividade que pode ser explorada pelo professor na Educação Básica. O segundo item da atividade, propõe que seja realizada a conversão: $RA -> RGRA$ (registro algébrico para o registro gráfico), ou seja, inicialmente é envolvido um tratamento algébrico para o cálculo das soluções e, após, representá-las no plano cartesiano. Por meio deste registro, é possível responder o item c), pois o comportamento das curvas integrais (função solução) é explicitado, auxiliando na interpretação e, assim, inferir sobre a situação real proposta. Importante ressaltar que a situação apresentada na Figura 18 é um exemplo de atividade proposta que envolve uma função com comportamento trigonométrico e exponencial, dada pela lei $Q(t) = \frac{63{,}150}{2501}e^{-t/50} + 25 - \frac{625}{2501}\cos(t) + \frac{25}{5002}sen(t)$.

No que concerne à transformação cognitiva tratamento, verifica-se que é exigida em 57,59% das atividades propostas neste capítulo, ou seja, em 254 situações. Em todas estas situações é explorado o tratamento algébrico, que significa que não há mudanças externas, ou seja, não há conversão do registro algébrico para outro (registro de chegada). Esta transformação ocorre quando, por exemplo, é proposta somente a aplicação de métodos analíticos para a resolução de EDO (Figura 19).

Figura 19: Exemplo de atividade que exige tratamento algébrico

Em cada um dos problemas de 1 a 8, resolva a equação diferencial dada.

1. $y' = x^2/y$
2. $y' = x^2/y(1 + x^3)$
3. $y' + y^2 \operatorname{sen} x = 0$
4. $y' = (3x^2 - 1)/(3 + 2y)$
5. $y' = (\cos^2 x)(\cos^2 2y)$
6. $xy' = (1 - y^2)^{1/2}$
7. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x - e^{-x}}{y + e^y}$
8. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2}{1 + y^2}$

Fonte: (BOYCE, DIPRIMA, 2015, p.40)

A Figura 19 apresenta um exemplo de atividade proposta no capítulo 2 em que o futuro professor necessita encontrar a solução geral da equação apresentada. Por meio destas equações é previsto que o sujeito as resolva pelo método analítico denominado de “equações separáveis”. Neste caso, ocorrendo apenas o tratamento algébrico. Foi destacado o papel fundamental que as conversões possuem para a aquisição do conhecimento matemático. Entretanto, é importante reconhecer que a resolução de EDO utilizando-se apenas tratamentos, também, permite inferir acerca de fenômenos que são modelados por elas.

Nas atividades categorizadas como tratamentos algébricos, também verifica-se que são inseridos alguns métodos analíticos para resolução de EDO e suas propriedades, a saber: Variação dos parâmetros e estudo da convergência do método de Euler; bem como são apresentadas algumas classes de EDO, a saber: Equações de Ricatti, Equação de Diferenças Logísticas, Coeficientes Descontínuos, Equações de Bernoulli e Equações Homogêneas.

No que tange às atividades categorizadas no LTA, nos capítulos 1 e 2, estas referem-se à 569 atividades propostas. Destas, 44,1% exigem que se realize a conversão entre os registros. Realizar a conversão entre os registros, nos quais a EDO pode ser representada, contribui para que o futuro professor perceba que cada registro mobiliza diferentes aspectos de um mesmo objeto matemático, ressaltando a parcialidade dos registros entre si. Além disso, a conversão entre registros, ao estudar EDO, é fundamental para que o futuro professor consiga relacionar os conceitos matemáticos presentes nas EDO.

Em relação ao LTB, no capítulo introdutório, verifica-se que os registros mais enfatizados, para representar as Equações Diferenciais, são os registros algébrico, quando são apresentados os tipos de ED; o registro língua natural, para apresentar as situações reais a serem modeladas; o gráfico, utilizado para representar as soluções das EDO; e o figural, no qual, geralmente, são expressas ideias envolvidas em determinado fenômeno.

Ambos os livros textos, não foram organizados conforme a teoria dos Registros de Representação Semiótica, esta teoria norteia uma das categorias de análise desta pesquisa. Entretanto, é evidenciado nestes livros, que os autores compreendem a importância de mobilizar e articular os diferentes registros de um mesmo objeto/conteúdo/conceito matemático.

Acerca do registro língua natural, este é explorado ao apresentar uma situação ao sujeito, bem como para expressar uma equação. Esta ideia, pode ser verificada no Quadro 7, em que é apresentada a Lei do Resfriamento de Newton representada pelo registro língua natural, também destacado pelos autores.

Quadro 7: Excerto sobre o registro língua natural, apresentado no LTB

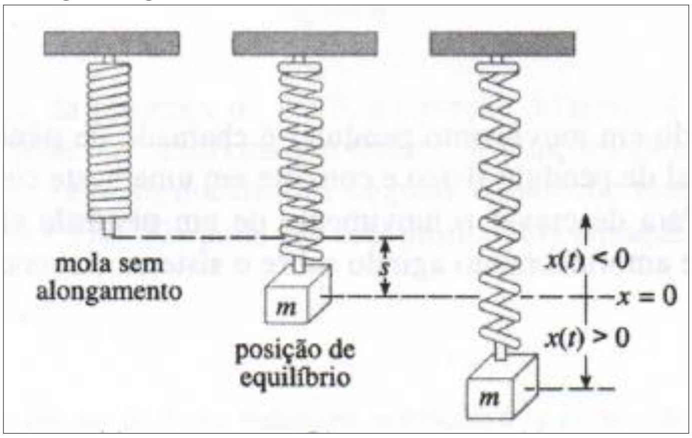
Uma xícara de café fica quase intragável se esfriar até chegar à temperatura ambiente. Uma lei empírica de resfriamento atribuída a Isaac Newton assegura que a taxa de resfriamento de um corpo é proporcional à diferença entre a temperatura do corpo e a temperatura do meio. A frase acima é uma descrição verbal de uma equação diferencial

Fonte: (ZILL, CULLEN, 2001, p.22)

Neste capítulo, ao apresentar os modelos matemáticos, o registro geométrico *campo de direções* poderia evidenciar o comportamento da solução sem conhecer sua lei de formação potencializando o estudo dos fenômenos apresentados. Entretanto, em detrimento, da atividade investigativa, este registro não é mobilizado neste capítulo. Não abordar este registro, pode comprometer algumas relações importantes a serem estabelecidas, por exemplo, o conceito de derivada como taxa de variação e a importância da reta tangente para interpretar a solução da equação.

Os autores utilizam o registro figural na discussão dos modelos matemáticos, por exemplo na Figura 20. Nesta, é apresentado o comportamento de uma mola em movimento, cujo deslocamento é a variável dependente $x(t)$ em função do tempo t. Na extremidade está preso um objeto de massa m, que influencia o deslocamento, por isso a denominação de *sistema massa-mola*.

Figura 20: Exemplo de quais informações podem ser destacadas no registro figural



Fonte: (ZILL, CULLEN, 2001, p.15)

Abordar o conteúdo por meio deste registro contribui para o entendimento do fenômeno a ser expresso por uma EDO, pois este registro, revela aspectos do conteúdo não tão destacados em outros como, por exemplo, o da língua natural.

Quanto às Transformações Cognitivas, as conversões envolvem os registros $RLN-> RFIG-> RA$, ou seja, a conversão do registro língua natural para o registro figural para o registro algébrico. Em relação aos tratamentos, estes são algébricos e estão presentes nas explanações sobre a classificação das Equações Diferenciais, quanto ao tipo (EDO ou EDP), a ordem (primeira ou segunda ou terceira, sucessivamente) e a linearidade ou não linearidade.

Nas atividades propostas no capítulo 1, os registros de representação mais enfatizados são o língua natural e o algébrico. O registro da língua natural é mais enfatizado como registro de partida, por exemplo, nas situações que exploram fenômenos reais presentes neste capítulo. O registro algébrico é bastante explorado como registro de chegada. No que tange à transformação cognitiva conversão, percebe-se que os autores enfatizam a conversão do registro língua natural para o registro algébrico ($RLN-> RA$), cerca de 13,86%. Há também conversões que envolvem como registro intermediário, o registro figural, aproximadamente 7,92% de atividades.

Na Figura 21 está exposto um exemplo de como as atividades, neste capítulo, exploram a transformação cognitiva Conversão. A atividade em questão exige que o sujeito realize a conversão $RLN \rightarrow RA$ (registro língua natural para o registro algébrico).

Figura 21: Exemplo de atividade em que não é solicitado que a EDO seja solucionada

1. **Em certas circunstâncias, um corpo B de massa m em queda, como o pára-quedista mostrado na Figura1.15, encontra resistência do ar proporcional à sua velocidade v. Use a segunda lei de Newton para encontrar a equação diferencial para a velocidade v do corpo em qualquer instante. Lembre-se de que a aceleração é $a = dv/dt$. Suponha neste caso que a direção positiva é para baixo.**

Fonte: (ZILL, CULLEN, 2001, p. 31)

A transformação cognitiva tratamento é bastante destacada, especificamente, o tratamento algébrico (78,21%). Estes índices indicam que os autores do LTB, neste capítulo, destacam o registro algébrico, pois como as atividades abordam tratamentos, os registros intermediário e de chegada também são o algébrico.

No capítulo 2, os registros mobilizados são o algébrico e o gráfico. Neste capítulo, para discutir os conceitos de EDO e métodos analíticos de resolução, os autores propõem exemplos, introduzidos com o termo *"Resolva a seguinte equação"*, como mostrado na Figura 22, em que a equação é apresentada pelo registro algébrico e, após solucionada, pelo método de Variáveis Separáveis, é representada por meio do registro gráfico (Figura 23). Evidenciando a conversão entre esses registros ($RA -> RGRA$).

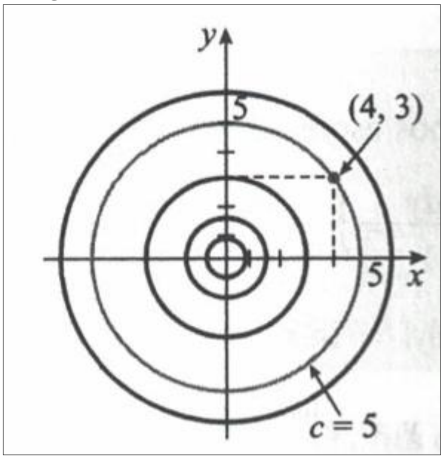
Figura 22: Exemplo de um tratamento algébrico

Resolva o problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}, \quad y(4) = 3.$$

Fonte: (ZILL, CULLEN, 2001, p.46)

Figura 23: Registro gráfico da equação da Figura 22



Fonte: (ZILL, CULLEN, 2001, p.46)

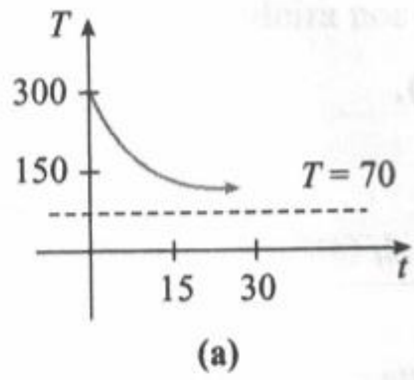
Neste capítulo, os registros numérico, tabular, geométrico e figural não são explorados, verificando-se que há "enclausuramento" quanto aos registros mobilizados. Dessa forma, as conversões envolvem apenas os registros algébrico e gráfico, como mostrado nas Figuras 22 e 23. Como, no capítulo 2, o objetivo dos autores é apresentar os métodos analíticos de resolução, é possível perceber grande ênfase ao tratamento algébrico e as demonstrações. Compreende-se que esta abordagem pode limitar a compreensão de EDO como um objeto matemático potencializador dos aspectos *Unificador, Algorítmico* e *Variedade de representações.*

No capítulo 2, as atividades propostas envolvem, em sua grande maioria, o registro algébrico (99,41%). Desta forma, registros como língua natural, numérico, gráfico, geométrico, tabular, figural não são abordados. A opção de não abordá-los, bem como não trabalhar com a conversão entre estes, pode limitar a compreensão dos conceitos inerentes a EDO, como reta tangente, taxa de variação, influência dos parâmetros na solução e padrões.

No que concerne ao capítulo 3, os registros de representação mais mobilizados são o língua natural, o gráfico, o algébrico, o figural e o tabular. Em comparação aos capítulos 1 e 2, neste capítulo, percebe-se maior variedade de registros no estudo das equações. Entretanto, o registro geométrico não é abordado, concluindo-se que, nos 3 capítulos analisados no LTB, os autores não o exploram para representar as EDO.

Distintamente do LTA, neste livro é bastante enfatizado o registro tabular, importante pois, por meio deste, é possível verificar o limite da função, ou seja, o valor ao qual a grandeza dependente se aproxima. Um exemplo de como este registro é explorado, é mostrado na Figura 24

Figura 24: Exemplo de como o registro tabular e o registro gráfico são apresentados



T(t)	t(minutos)
75°	20.1
74°	21.3
73°	22.8
72°	24.9
71°	28.6
70.5°	32.3

(b)

Fonte: (ZILL, CULLEN, 2001, p.108)

Na Figura 24 são mostrados os registros tabular e gráfico do modelo que envolve a Lei de Resfriamento de Newton (Figura 4). Abordar os problemas por meio de diferentes registros ressalta que os objetos matemáticos não possuem apenas um registro de representação. Além disso, contribui para que o acadêmico não confunda o conteúdo com a sua representação.

Quanto aos registros utilizados para abordar EDO, nas atividades propostas no capítulo 3, foram identificados os registros língua natural, algébrico, gráfico e numérico. Os registros geométrico e tabular não são explorados neste capítulo.

No que concerne as conversões, destaca-se que o registro de partida mais explorado é língua natural, em aproximadamente 24,79% das atividades deste capítulo. Esta porcentagem refere-se às conversões $RLN \rightarrow RA$, $RLN \rightarrow RFIG \rightarrow RA$, $RLN \rightarrow RA \rightarrow RN$ e $RLN \rightarrow RA \rightarrow RLN$. O segundo registro de partida mais enfatizado é o RA, abordado em 6,61% das atividades do capítulo. Este registro está associado às conversões $RA -> RLN$, $RA -> RN$, $RA -> RGRA$ e $RA -> RGRA -> RLN$.

Nesta categoria de análise, também procura-se identificar se os autores apontam *softwares* matemáticos como recurso para o estudo de EDO. No que tange ao LTB, os autores não recomendam, no decorrer dos 3 capítulos analisados, o uso de *softwares*, seja como recurso na construção de gráficos da solução da EDO, construção de campos de direções ou criação de planilhas (registro tabular), no qual poderiam ser calculados valores das derivadas em determinadas abscissas. Os recursos tecnológicos não são "facilitadores" no estudo de conteúdos matemáticos, mas potencializam a "visualização" simultânea dos diferentes registros, por exemplo, numérico, algébrico, tabular, gráfico e geométrico. O Quadro 8 sintetiza os dados apresentados, discutidos e interpretados no Capítulo 3 desta pesquisa.

Quadro 8: Síntese dos dados produzidos pelos 2 livros-texto

Livros-texto	Total de Atividades	Análise de Modelos		Transformações Cognitivas		Softwares matemáticos	
		Sim	Não	Conversão	Tratamento	Sim	Não
LTA	569	183	386	250	319	60	259
LTB	563	107	456	63	500	0	563

Fonte: Elaborado pela autora.

Estes dados referem-se às categorias teoria dos Registros de Representação Semiótica e Análise de Modelos, bem como os dados sobre a indicação ou não de *softwares* matemáticos ao estudar EDO.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

No que tange à menção (ou não) aos *softwares* matemáticos, foi discutido que o LTA destaca a importância deste recurso ao estudar EDO e o LTB não o faz. No entanto, este fato não é um indicativo de que os autores no LTB ignoram a importância dos softwares, pois como já explicado, o LTA é de 2015 e o LTB de 2001. A diferença de tempo é significativa, pois no período de 14 anos, houve o desenvolvimento de novos softwares bem como o estudo relacionado às potencialidades e limitações do uso de recursos tecnológicos no ensino e aprendizagem de conteúdos matemáticos.

Realizar esta pesquisa revelou algumas possibilidades para o grupo de pesquisa MatE² de continuação sobre a investigação das contribuições do estudo das Equações Diferenciais Ordinárias na atividade pedagógica. É uma possibilidade, principalmente, continuar esta pesquisa tendo como fonte de produção de dados o terceiro livro-texto mais citado nos PPC das universidades brasileiras. Também, questiona-se sobre investigar acerca das contribuições do estudo das Equações Diferenciais de 2ª Ordem, visto que este conteúdo também é estudado em cursos de Licenciatura em Matemática.

Tendo que aprofundar os entendimentos acerca do estudo de Equações Diferenciais Ordinárias, dentre outras questões, é uma possibilidade construir uma pesquisa sobre o conhecimento de licenciandos acerca das contribuições do estudo de EDO ao seu trabalho como professor.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BARDIN, L. **Análise de Conteúdo.** Edições 70, 1977.

BARUFI, M.C.B. **A Construção/Negociação de Significados no Curso Universitário Inicial de Cálculo Diferencial e Integral.** 1999. Tese (Faculdade de Educação e Programa de Pós-Graduação em Educação Nível: Doutorado) – Universidade de São Paulo. São Paulo.

BARUFI, M.C.B. **O Cálculo no Curso de Licenciatura em Matemática.** Educação Matemática em Revista – Edição Especial: Formação de Professores, ano 9, n. 11ª, p. 69-72. Abril/2002.

BOYCE, W.E.; DIPRIMA, R.C.; **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno,** tradução e revisão técnica Valéria de Magalhães Iorio – 10 ed. Rio de Janeiro: LTC, 2015

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais + (PCN+)** – Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC, 2002.

BRASIL. **Orientações curriculares para o ensino médio; ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília**: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2006. (Orientações curriculares para o ensino médio; volume 2).

DAMM, R.F. **Registros de Representação.** In: Educação Matemática: Uma (nova) introdução. Sílvia Dias Âlcantara Machado (org.) – 3 ed. Revisada, 1 reimpr. – São Paulo: EDUC, 2010

DULLIUS, M.M.; ARAÚJO, I.S.; VEIT, E.A. **Ensino e Aprendizagem de Equações Diferencias com Abordagem Gráfica, Numérica e Analítica: uma experiência em cursos de Engenharia.** Bolema, Rio Claro (SP), v.24, n.38, p.17-42, abril 20011.

DUVAL, R. **Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática**. In: MACHADO, S. (Org.). Aprendizagem em matemática: Registros de representação semiótica. Campinas, SP: Papirus, 2003.

FIORENTINI, D. A **Formação Matemática e Didático-Pedagógica nas Disciplinas da Licenciatura em Matemática**. Revista em Educação, PUC – Campinas, Campinas, n.18, p.107-115, junho 2005.

FRANCO, M.L.P.B. **Análise de Conteúdo**/Maria Laura Puglisi Barbosa Franco. Brasília, 2ª ed. Líber Livro Editora, 2005

JAVARONI, S. L. **Abordagem geométrica: possibilidades para o ensino e aprendizagem de Introdução às Equações Diferenciais Ordinárias**. 2007. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro.

JAVARONI, S.L.; SOARES, D.S. **Modelagem matemática e Análise de Modelos Matemáticos na Educação Matemática.** Acta Scientiae, Canoas, v.14, n.2, maio/ago. 2012.

LAUDARES, J.B.; MIRANDA, D.F. **Investigando a iniciação à modelagem matemática nas ciências com equações diferenciais**. Educação Matemática Pesquisa, São Paulo, v.9, n.1, p.103-120, 2007.

MACHADO, N.J. **Matemática por assunto: noções de Cálculo**. São Paulo: Scipione, 1988.

ONUCHIC, L.R.; ALLEVATO, N.S.G.; **Pesquisa em Resolução de Problemas, caminhos, avanços e novas perspectivas.** Bolema, Rio Claro (SP), v. 25, n. 41, p. 73-98, dez. 2011.

SBEM. **Documento Base da Sociedade Brasileira de Educação Matemática: Subsídios para a Discussão de Propostas para os Cursos de Licenciatura em Matemática, No Seminário Nacional De Licenciaturas Em Matemática.** Salvador. Abril/2003.

SBEM. **Boletim SBEM/Sociedade Brasileira de Educação Matemática.** n.21, Fevereiro/2013. Disponível em <http://www.sbembrasil.org.br/files/Boletim21.pdf>.

SBM**. Diretrizes Curriculares para o Ensino de Matemática: Proposta da Sociedade Brasileira da Matemática**. s/d. Disponível em <http://www.sbm.org.br/wp-content/uploads/2015/01/Contribui%C3%A7%C3%A3o_da_SBM_Licenciatura_FINAL.pdf>

SILVA, M. A., PIRES, C. M. C. **As riquezas nos currículos da Matemática do Ensino Médio: em busca de critério para seleção e organização de conteúdos**. Unicamp v. 21. n. 39; 2013.

ZILL, D.G., CULLEN, M.R. **Equações Diferenciais,** volume 1/tradução Antonio Zumpano, revisão técnica: Antonio Pertence Jr. São Paulo: Pearson Makron Books, 2001.