

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO PAMPA
CAMPUS DE ITAQUI-RS
CURSO DE MATEMÁTICA - LICENCIATURA**

VERÔNICA PEREIRA STIVANIN

**DIFERENTES INTERPRETAÇÕES DO NÚMERO RACIONAL: UMA ANÁLISE DE
LIVROS DIDÁTICOS**

ITAQUI-RS

2016

VERÔNICA PEREIRA STIVANIN

**DIFERENTES INTERPRETAÇÕES DO NÚMERO RACIONAL: UMA ANÁLISE DE
LIVROS DIDÁTICOS**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado
como requisito parcial para conclusão do
Curso de Matemática - Licenciatura pela
UNIPAMPA - Campus Itaqui-RS.

Orientadora: Prof. Ma. Maria Arlita da Silveira
Soares

Co-orientador: Prof. Me. Leugim Corteze
Romio

ITAQUI-RS

2016

VERÔNICA PEREIRA STIVANIN

**DIFERENTES INTERPRETAÇÕES DO NÚMERO RACIONAL: UMA ANÁLISE DE
LIVROS DIDÁTICOS**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado
como requisito parcial para conclusão do
Curso de Matemática - Licenciatura pela
UNIPAMPA - Campus de Itaqui-RS.

Aprovada em _____ de _____ de _____

BANCA EXAMINADORA

Prof. Ma. Maria Arlita da Silveira Soares (orientadora)
UNIPAMPA – Caçapava do Sul-RS

Prof. Dra. Cátia Maria Nehring
DEFEM/UNIJUÍ – Ijuí-RS

Prof. Dra. Rita de Cássia Pistóia Mariani
UFSM – Santa Maria-RS

AGRADECIMENTOS

Um dia minha Avó Amália (*in memoriam*) me disse: “Estude minha filha, a única coisa que não é tirada de você é o estudo”. Isto sempre esteve comigo em minha caminhada acadêmica. Hoje concluo mais uma etapa nesta caminhada, meus agradecimentos são para as pessoas que estiveram sempre ao meu lado. A minha mãe que um dia me incentivou a fazer o ENEM, pagou e exigiu-me que fizesse a prova.

Ao meu marido Cláudio Pinto e meu filho Felipe Goulart pela compreensão, nas horas em que me fiz ausente do convívio familiar para poder estudar. A minha Tia/Mãe Fátima Stivanin pelas conversas e incentivos quando eu mais precisei de atenção.

As pessoas que a vida me trouxe, a Dienifer Ferner por ter a paciência, o carinho e as broncas que sempre dispôs a minha pessoa. A Mayara Lunardi e a Mariane Minhos pelas conversas, risadas e ensinamentos.

A minha professora/orientadora Maria Arlita da Silveira Soares e ao professor/coorientador Leugim Corteze Romio pela ajuda, dedicação, “puxões de orelhas”, incentivo e a inspiração pela profissão. Estas pessoas que mostram o amor pela sua profissão, na qual abrem mão de suas próprias vidas pela atividade acadêmica. Meu muito obrigado, a todas estas pessoas que estão sempre em minhas orações e meus pensamentos.

RESUMO

Este trabalho tem por objetivo analisar quais interpretações do número racional estão propostas nas coleções de livros didáticos para o Ensino Fundamental. Para tanto, buscou-se fundamentação teórica nas ideias de Lamon, quanto as diferentes interpretações do número racional e na teoria dos Registros de Representação Semiótica, em relação, as especificidades da aprendizagem Matemática. Os pressupostos metodológicos adotados seguem as orientações da pesquisa qualitativa e da análise documental. Também, utilizou-se para organizar e analisar os dados produzidos as etapas da análise de conteúdo. A fonte de produção de dados são duas coleções de livros didáticos de Matemática do Ensino Fundamental, escolhidas pelos professores de uma escola de um município da Fronteira Oeste do estado do Rio Grande do Sul. As análises realizadas permitem concluir que interpretação parte-todo é a mais enfatizada, seguida por operador multiplicativo e menos abordada é medida. Em relação aos invariantes operatórios do número racional (equivalência e ordem), constata-se que equivalência teve prioridade em relação a ordem. Quanto as operações com números racionais, prioriza-se as regras em detrimento aos invariantes (equivalência) e interpretações fundamentais (por exemplo, parte-todo, operador multiplicativo) essenciais para a atribuição de significado aos procedimentos realizados. No que tange as transformações cognitivas, verifica-se que foi dado prioridade para os tratamentos numéricos e as conversões priorizaram um único sentido, ou seja, do registro da língua natural para o numérico.

Palavras-Chave: Números Racionais; Análise de Livros Didáticos; Interpretações; Lamon; Registros de Representação Semiótica.

ABSTRACT

This work aims to analyze which interpretations of rational number are proposed in the collections of textbooks for elementary school. Therefore, it sought theoretical foundation in Lamon ideas, as different interpretations, the rational numbers and the theory of Semiotics Representation Registers, regarding the specifics of mathematics learning. The methodological assumptions adopted following the guidelines of qualitative research and document analysis. Also, we used to organize and analyze the data produced the steps of content analysis. The production data source are two collections of textbooks of mathematics of elementary school, chosen by teachers of a school in a municipality of the Border West of the state of Rio Grande do Sul. The analyzes support the conclusion that interpretation part-whole is more stressed, followed by multiplicative operator and less discussed is measured. Concerning operative invariants of rational numbers (equivalence and order), it appears that equivalence has priority over order. The operations with rational numbers, prioritizes the rules to the detriment of invariants (equivalence) and fundamental interpretations (eg, part-whole, multiplicative operator) essential for assigning meaning to the procedures performed. Regarding cognitive changes, it turns out that was given priority for numerical treatments and conversions prioritized one direction, ie the registration of the natural language for the number.

Keywords: Rational Numbers; Analysis Textbook; interpretations; Lamon; Semiotics Representation Registers.

LISTA DE QUADROS

Quadro 1: Organização das buscas quanto as revistas, quantidade de publicações e ano das mesmas	14
Quadro 2: Identificação das Revistas	15
Quadro 3: Interpretação e atividades sugeridas	17
Quadro 4: Interpretações do número racional	22
Quadro 5: Representações do número racional	23
Quadro 6: Categorias de análise do livro didático	30
Quadro 7: Organização da coleção	32
Quadro 8: Interpretações dos números racionais nos livros didáticos	33
Quadro 9: Invariantes operatórios e Operações	45
Quadro 10: Operação de multiplicação envolvendo registro figural	50

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Ponto racional/medida	18
Figura 2: Jogo construído por professores	19
Figura 3: Quadro de quantidade e covariância	27
Figura 4: Interpretação no número racional $\frac{3}{4}$	27
Figura 5: Capítulos dos livros didáticos	34
Figura 6: Capítulos dos livros didáticos	34
Figura 7: Exemplo de atividade retirada do livro didático	35
Figura 8: Atividade do livro didático abordando parte-todo	35
Figura 9: Atividade do livro didático abordando parte-todo	36
Figura 10: Atividade proposta por Lamon explorando o particionamento	36
Figura 11: Atividade do livro didático explorando parte-todo	37
Figura 12: Atividade do livro didático abordando parte-todo	37
Figura 13: Atividade do livro didático explorando parte-todo	37
Figura 14: Atividade do livro didático explorando medida	38
Figura 15: Atividade proposta por Lamon explorando a interpretação medida	38
Figura 16: Atividade do livro didático explorando operador	39
Figura 17: Atividade do livro didático explorando tratamento	40
Figura 18: Atividade proposta por Lamon abordando medida	40
Figura 19: Atividade do livro didático explorando tratamento numérico	41
Figura 20: Atividade do livro didático explorando tratamento (numérico e figural)	41
Figura 21: Atividade proposta por Lamon envolvendo razão	41
Figura 22: Atividade do livro didático explorando operador multiplicativo	42
Figura 23: Atividade proposta por Lamon explorando razão	42
Figura 24: Atividade do livro didático envolvendo tratamento numérico	43
Figura 25: Atividade proposta por Lamon explorando razão	43
Figura 26: Atividade do livro didático envolvendo geometria	44
Figura 27: Atividade do livro didático explorando comprimento de segmento	44
Figura 28: Atividade do livro didático ordem e equivalência	45
Figura 29: Atividade do livro didático envolvendo operador multiplicativo	46
Figura 30: Atividade do livro didático envolvendo operador multiplicativo	46
Figura 31: Atividade do livro didático envolvendo operador multiplicativo	46
Figura 32: Atividade proposta por Lamon explorando comparações	46
Figura 33: Atividade proposta por Lamon explorando comparações	47
Figura 34: Atividade do livro didático envolvendo comparações	48
Figura 35: Atividade do livro didático envolvendo operador multiplicativo	48
Figura 36: Atividade proposta por Lamon explorando equivalência	48
Figura 37: Atividade do livro didático abordando operações	49
Figura 38: Atividade do livro didático explorando operações	49
Figura 39: Atividade do livro didático envolvendo razão	50
Figura 40: Atividade proposta por Lamon abordando semelhança	51

SUMÁRIO

PROBLEMATIZAÇÃO	9
CAPÍTULO 1: NÚMERO RACIONAL: ALGUNS ENTEDIMENTOS QUANTO AOS SEUS DIFERENTES SIGNIFICADOS.....	14
1.1 MAPEAMENTO DAS PESQUISAS QUE ABORDAM OS DIFERENTES SIGNIFICADOS DO NÚMERO RACIONAL.....	14
1.2 INTERPRETAÇÕES DO NÚMERO RACIONAL: ALGUNS ETENDIEMNTOS A PARTIR DAS CONCEPÇÕES DE LAMON.....	20
CAPÍTULO 2: PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS	29
2.1 ANÁLISE DOCUMENTAL	29
2.2 CARACTERÍSTICAS GERAIS DAS COLEÇÕES ANALISADAS	30
CAPÍTULO 3: ANÁLISE DOS DADOS	33
3.1 ANÁLISE DOS LIVROS DIDÁTICOS QUANTO AS INTERPRETAÇÕES	33
3.2 ANÁLISE DOS LIVROS DIDÁTICOS QUANTO AOS INVARIANTES OPERATÓRIOS E OPERAÇÕES	45
CAPÍTULO 4: CONSIDERAÇÕES FINAIS	52
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	54

PROBLEMATIZAÇÃO

A partir de leituras realizadas e discutidas no grupo de pesquisas matE² (Educação e Educação Matemática) cujo objetivo é problematizar dimensões subjacentes às temáticas: currículo, trabalho docente, políticas públicas, gestão educacional e (trans)formação de professores, bem como das atividades realizadas no PIBID¹, percebeu-se que os estudantes apresentam dificuldades na compreensão dos diferentes significados do número racional. Além disso, constatou-se, também, que os estudantes, em geral, utilizam somente regras para a resolução de situações-problema com número racional, não atribuindo significado aos procedimentos utilizados.

A construção dos números racionais é uma das produções matemáticas mais importantes porque contribui na aprendizagem de vários conceitos da Matemática, por exemplo, proporcionalidade; de outras áreas do conhecimento; e, também, é utilizado em várias atividades humanas, especialmente, na atividade de medir, a qual faz parte da gênese dos números racionais.

Segundo Caraça (1951) os números racionais foram elaborados para representar medições de forma precisa, já que os números naturais nem sempre conseguem, buscando um número que adotasse uma unidade conforme as necessidades:

- 1) É possível exprimir sempre a medida dum segmento tomando outro como unidade; se, por exemplo, dividida a unidade em 5 partes iguais, cabem duas dessas partes na grandeza a medir, diz-se que a medida é o número $2/5$.
- 2) A divisão de números inteiros m e n agora pode sempre exprimir-se simbolicamente pelo número racional m/n - o quociente de 2 por 5 é o número racional fracionário $2/5$, o quociente de 10 por 5 é o número inteiro $10/5 = 2$. (CARAÇA, 1951, p.36)

Entende-se que para ensinar e aprender os números racionais é preciso ir além da sua definição como um corpo ordenado (definição esta utilizada pelos matemáticos ao mobilizarem o conceito de número racional). Na atividade matemática é essencial analisar as diversas situações (propostas em diferentes contextos) que dão sentido aos conceitos, os procedimentos (propriedades) e as várias representações (VERGNAUD, 2009). Quanto às representações do número racional, geralmente, no ensino há ênfase para as numéricas (porcentagem, decimal, fração) e figurais (círculos representando pizzas, retângulos), mas é relevante trabalhar as demais representações (por exemplo, geométricas - reta).

¹ Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência.

Em relação aos significados assumidos pela representação fracionária $\frac{a}{b}$ ($b \neq 0$) em diferentes contextos, pode-se afirmar que as pesquisas que buscam identificá-las e sugerir propostas para o ensino avançaram, em particular, a partir da publicação dos resultados do *The Rational Number Project*² e das produções de Lamon (2007, 2008). No Brasil, destacam-se os estudos de Onuchic e Allevato (2008), Campos e Magina (2008), Silva e Almouloud (2008), Soares (2007), Moreira e David (2005).

Além disso, a compreensão da equivalência e da noção de ordem (maior, menor, igual) é essencial para a aquisição do número racional e por consequência do desenvolvimento do raciocínio proporcional, visto que

pesquisadores educacionais têm percebido que o chamado raciocínio proporcional é uma consequência da compreensão da natureza dos números racionais. [...] Muitos estudiosos compartilham a visão de que o raciocínio proporcional é um processo de desenvolvimento de longo prazo em que a compreensão em um nível forma uma base para níveis mais elevados de entendimento [...]. (LAMON, 2007, p. 636, tradução nossa)

Assim, para a compreensão do raciocínio proporcional, torna-se necessário entender os números racionais, o que exige um trabalho articulado e intencional durante toda a Educação Básica.

No entanto, o trabalho com os números racionais tem se limitado a noção de fração, sem relacioná-la com a ideia de ser um dos subconjuntos dos racionais. Lamon (2007) afirma que a palavra fração é usada para expressar uma variedade de situações tanto dentro quanto fora da sala de aula. Seus muitos usos estão sujeitos a causar confusão, uma vez que esta palavra possui vários significados, dos quais nem todos são matemáticos, por exemplo, uma fração pode representar um pedaço de terra, uma parte de um alimento que está sendo dividido ou uma parte da população de uma cidade.

Outro fator relacionado à representação fracionária, que provoca dificuldades, é que nem sempre uma representação fracionária é um número racional, por exemplo, $\frac{\pi}{2}$, não é um número racional, mas está escrito na forma de fração. Contudo, todo número racional pode ser expresso na forma de fração. Além disso, cada fração não corresponde a um número racional diferente, pois um único número racional constitui a base de todas as formas equivalentes de uma dada fração, por exemplo, $\frac{2}{3}$, $\frac{6}{9}$, $\frac{10}{15}$, são frações equivalentes ao mesmo número racional.

Conforme já mencionado, os educadores matemáticos dedicaram-se a investigar aspectos acerca do ensino e aprendizagem dos números racionais. Os trabalhos de Kieren, Behr, Post e Lesh (apud LAMON, 2007) identificaram cinco subconstructos: parte-todo,

² Para maiores informações acessar: <<http://www.cehd.umn.edu/ci/rationalnumberproject/>>.

medida, quociente, operador e razão. Estes subconstructos sugerem aprendizagens locais a partir das quais as crianças podem obter compreensões sobre a natureza essencial dos números racionais.

Onuchic e Allevato (2008) com base nas ideias dos pesquisadores do Projeto Número Racional (Behr, Post e Lesh) identificaram, o que denominaram de “personalidades”, seis ideias associadas ao número racional: ponto racional, quociente, fração, operador, razão e proporcionalidade. Percebe-se que as pesquisadoras compreendem a proporcionalidade como uma das personalidades do número racional, talvez porque ambos possuem uma natureza multiplicativa. Vale destacar que, nesta pesquisa, a proporcionalidade será tratada como um conceito que necessita do entendimento dos racionais, e que possui especificidades próprias.

Lamon (2008) não utiliza o termo subconstructos, optando por denominar, os diferentes significados assumidos pela representação $\frac{a}{b}$, “interpretações”. As interpretações, compreendidas por Lamon em relação a representação $\frac{a}{b}$, são: operador, medida, razão, taxa, quociente e comparação parte-todo. Nesta pesquisa, ao tratar dos significados do número racional para a representação $\frac{a}{b}$, será utilizada a denominação proposta por Lamon (2007, 2008), ou seja, *interpretações*. Optou-se por utilizar as concepções de Lamon (2007, 2008), pois esta pesquisadora deu continuidade aos trabalhos realizados pelos pesquisadores do Projeto Número Racional e, também, desenvolveu uma pesquisa longitudinal sobre o tema que culminou na elaboração do livro *Teaching fractions and ratios for understanding*³. Este livro foi traduzido pela autora desta pesquisa em parceria com seus orientadores.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), uma das propostas elaboradas para orientar a organização curricular no Brasil, enfatizam o trabalho com quatro diferentes significados do número racional: relação parte/todo, operador multiplicativo, quociente e razão, bem como o estudo das várias representações numéricas relacionadas ao número racional. Também, sugerem um trabalho ao longo da Educação Básica que esteja articulado a outros conceitos matemáticos:

[...] é possível alargar e aprofundar o conhecimento dos alunos sobre números e operações, mas não isoladamente dos outros conceitos, isto é, pode-se tratar os números decimais e fracionários, mas mantendo de perto a relação estreita com problemas que envolvem medições, cálculos aproximados, porcentagens, assim como os números irracionais devem se ligar ao trabalho com geometria e medidas. (BRASIL, 2002 p. 122)

A preocupação exposta nos PCN de relacionar as representações dos números racionais a outros conceitos justifica-se pelo fato de que a compreensão dos números racionais

³ Ensinando frações e razões para a compreensão (tradução nossa).

proporciona o princípio sobre o qual as operações algébricas elementares irão se basear mais tarde (MOREIRA, DAVID, 2005).

Em relação às pesquisas brasileiras relacionadas a compreensão do número racional, verificou-se que apenas Oliveira (2014) utilizou, como aporte teórico, as ideias de Lamón (2008). Primeiramente, definiram-se os periódicos a serem analisados: Bolema, Revemat, Gepem, Edumat, Revista da PUC/SP, Revista da ULBRA, Em Teia e Revista da SBEM. Estes periódicos foram escolhidos por estarem relacionados no site da Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM) e devido a sua importância quanto às publicações em Educação Matemática, além de disponibilizarem acesso *online* as publicações. Após, buscou-se as produções por meio do título em todos os volumes dos periódicos.

Para realização do mapeamento foram utilizados os descritores: raciocínio proporcional, fração, número racional, pensamento proporcional e proporcionalidade. Também, utilizou-se de variações linguísticas em relação a estes termos. Cabe destacar que foram utilizados os descritores raciocínio proporcional, pensamento proporcional e proporcionalidade uma vez que, na elaboração do projeto, o foco da pesquisa seria o Raciocínio Proporcional, pois, pretendia-se analisar protocolos de estudantes e realizar entrevista com professores do 5º e 6º ano, investigando a transição dos estudantes quanto a aprendizagem deste conceito. Contudo, em função do tempo para a produção e análise dos dados optou-se por investigar as questões relacionadas as diferentes interpretações do número racional em livros didáticos.

Na realização do mapeamento foram identificadas 20 produções que continham, no título, um dos descritores mencionados acima. Quanto ao número de produções mapeadas para os descritores raciocínio proporcional e pensamento proporcional, não foi identificada nenhuma produção. Para o descritor fração/frações foram identificadas 8 produções, assim como, para o descritor número racional/números racionais. Em relação ao descritor proporcionalidade, verificou-se 4 produções. A análise detalhada do mapeamento, no que tange ao número racional, será apresentada na seção 1.1 do Capítulo 1.

Diante deste contexto, a questão que orientou as atividades desta pesquisa é: *Quais interpretações do número racional estão propostas nas coleções de livros didáticos, aprovados pelo Plano Nacional do Livro Didático (PNLD), escolhidas pelos professores de uma escola estadual de Ensino Fundamental e Médio de um município localizado na fronteira oeste do Rio Grande do Sul?*

Para responder a questão de pesquisa elaborou-se o seguinte objetivo: Analisar quais interpretações do número racional estão propostas nas coleções de livros didáticos para o Ensino Fundamental.

Partindo dos pressupostos metodológicos da análise de conteúdo desenvolvida por Bardin, realizou-se o mapeamento das publicações e análises dos livros didáticos escolhidos pelos professores do 5º ano dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental e a coleção adotada pelos professores de matemática dos Anos Finais do Ensino Fundamental. Categorizando-se, as publicações mapeadas, segundo: ano de publicação, revista, objetivos, opções teórico-metodológicas, sujeitos/participante, fonte de produção de dados e interpretações dos números racionais. Nos livros didáticos foram adotadas as seguintes categorias de análise: interpretações do número racional, invariantes operatórios (equivalência e ordem), operação, tratamento e conversão.

Nos próximos capítulos serão explicitados o mapeamento, o referencial teórico que norteou este trabalho, a análise dos livros didáticos, bem como as considerações finais do trabalho desenvolvido.

CAPÍTULO 1

INTERPRETAÇÕES DO NÚMERO RACIONAL: ALGUNS ENTEDIMENTOS

Neste capítulo, são apresentados aspectos sobre o mapeamento das pesquisas relacionadas ao número racional, publicadas nos periódicos da área de Educação Matemática. Destaca-se, também, alguns entendimentos quanto as interpretações do número racional conforme as ideias de Lamon (2007, 2008).

1.1 MAPEAMENTO DE PESQUISAS QUE ABORDAM OS DIFERENTES SIGNIFICADOS DO NÚMERO RACIONAL

Para apresentar os dados produzidos em relação ao mapeamento, torna-se relevante retomar de que forma foram selecionados os periódicos utilizados no mapeamento. Primeiramente, definiram-se os periódicos a serem analisados, a saber: Bolema (Boletim de Educação Matemática), Revemat (Revista Eletrônica de Educação Matemática), Gepem (Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática), Edumat (Educação Matemática), Revista da PUC/SP (Educação Matemática Pesquisa.), Revista da ULBRA (Revista de Ensino de Ciências e Matemática), Em Teia (Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana) e Revista da Sociedade Brasileira em Educação Matemática (SBEM); os quais estão expostos no site da SBEM. Após, buscou-se, nas produções, por meio do título, em todos os volumes disponíveis dos periódicos.

Conforme já mencionado na problematização, foram identificadas 16 produções para os descritores fração e número racional (e suas variações linguísticas). Vale destacar que, o número de publicações para o descritor fração é igual ao número de publicações do descritor número racional, isto é, 8. Após a primeira análise das publicações, constatou-se que 9 publicações abordam, com mais detalhes, interpretações do número racional.

O Quadro 1 apresenta os periódicos que publicaram pesquisas acerca dos descritores selecionados, número de publicações e ano das produções (Quadro 1).

Quadro 1: Organização das buscas quanto as revistas, quantidade de publicações e ano das mesmas.

Revista	Quantidade	Ano
Bolema	5	2008 e 2014
Gepem	1	2005
Revemat	1	2007
PUC/SP	1	2006
SBEM	1	2013

Os dados do Quadro 1 indicam que o periódico que publicou o maior número de artigos relacionados aos descritores foi o Bolema, tendo cinco publicações, sendo três no ano de 2008 e dois em 2014. É importante salientar que no ano de 2008, o Bolema publicou uma edição especial dedicada aos números racionais devido à importância deste conceito e aos pedidos feitos pelos professores, à comissão editorial da revista, para o aprofundamento do tema. Com o intuito de facilitar a apresentação dos dados identificaram-se os artigos por letras maiúsculas do alfabeto (A, B, C, D, E, F, G, H e I). O Quadro 2 apresenta, por periódicos, os objetivos, opções teórico-metodológicas e fontes/sujeitos escolhidos pelos autores das produções mapeadas.

Quadro 2: Identificação das revistas

Trab.	Periódicos	Objetivos	Opções Teórico-metodológicas	Fontes/Sujeitos
A	Bolema	Abordar as diferentes “personalidades” do número racional e o conceito de proporcionalidade	Resolução de problemas (Van de Walle, Vergnaud)	Formação continuada de professores
B	Bolema	Revisão de literatura especializada do campo de Educação Matemática dos últimos 35 anos.	Análise Documental (Kieren)	Literatura especializada no campo de Educação Matemática
C	Bolema	Compreender como a fração esta sendo concebida, aprendida e ensinada nos estudantes do 2º ciclo	Pesquisa diagnóstica envolvendo protocolos que continham situações-problema (Vergnaud e Kieren)	Professores e estudantes
D	Bolema	Investigar quais interpretações são contempladas no ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio)	Análise Documental (Utilizou a teoria de Duval e os significados do número racional a partir dos conceitos de Romanatto e Gomes)	Provas do Enem de 1998 à 2011
E	Bolema	Estudo exploratório buscando compreender o desenvolvimento da capacidade dos estudantes em compararem e ordenarem os números racionais e de que forma é utilizados as representações e como se caracteriza os processos de raciocínio	Investigação qualitativa e interpretativa (Cobb, Confrey, Disessa, Lehrer e Schaube)	Estudantes do 5º ano, produzindo o material através de entrevistas e protocolo contendo atividades
F	Gepem	Apresentação de jogos que integram um livro e exploram a fração e relato sobre utilização de jogos com	Relato de experiência (Gimenez e	Formação continuada de professores

		professores, reflexão sobre características pedagógicas e aplicação.	Bairral)	
G	Revmat	Apresentar um aspecto de unidade dos números racionais no qual, envolviam atividades que continham as interpretações apresentadas tanto na língua natural quanto figural com três níveis de dificuldade.	Vygostsky e Vergnaud (Reflexão da prática)	Estudantes da antiga 8ª série e do 3º ano do Ensino Médio e Nível superior na área das exatas
H	PUC/SP	Professores analisarem os protocolos de estudantes de 1º a 4º ano, explicando como o estudante poderia ter raciocinado para resolver as situações problemas e dizer como fariam para ajuda-las a desenvolver o entendimento do conceito de fração.	Resolução de problemas (Vergnaud)	Formação de Professores não especialistas em matemática, de diferentes escolas públicas da rede estadual de SP
I	SBEM	Análise da abordagem em livros didáticos e recursos sugeridos nos mesmo para ensinar os conceitos do número racional	Análise de conteúdo (Vasconcelos, Belfort, Romanatto e Canova)	Livros didáticos aprovados no PNLD/2011

Ao analisar os dados do Quadro 2, constata-se que, quanto aos objetivos, 2 publicações (B e D) realizaram análise de livros didáticos e literatura especializada em Educação Matemática; 2 (C e E) realizaram estudo exploratório, buscando analisar a compreensão dos números racionais; 2 (A e G) identificaram as interpretações/significados dos números racionais com foco na resolução de problemas; 1 (D) realizou a análise de uma avaliação de larga escala, apontando quais interpretações/significados dos números racionais foram abordadas; 1 (H) analisou protocolos de estudantes quanto as suas resoluções e quais seriam possíveis intervenções para o entendimento do conceito; e, 1(F) destacou de que forma os jogos contidos em uma coleção publicada podem auxiliar os professores e relatou sobre a utilização de jogos com professores, reflexão sobre características pedagógicas e sua aplicação.

Quanto às opções teóricas, a publicação D utilizou a teoria de Duval e os significados do número racional a partir dos conceitos de Romanatto e Gomes. Os autores do artigo G optaram pelas teorias de Vygostsky e Vergnaud. Os artigos B e C utilizaram as ideias de Kieren e Vergnaud. F utilizou das ideias presentes no livro de Gimenez e Bairral. O artigo A baseou-se em Van de Walle e Vergnaud. H também utilizou a teoria de Vergnaud para sua fundamentação. Já, E usou Cobb, Confrey, Disessa, Lehrer e Schaub e I utilizou Vasconcelos, Belfort, Romanatto e Canova. Pode-se observar que, na maioria das publicações, foi utilizada a Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud.

Em relação às escolhas metodológicas, 3 (A, C e H) publicações optaram pela resolução de problemas (ensino-aprendizagem-avaliação); 3 (B, D e I) utilizaram

respectivamente a análise documental e de conteúdo para compor suas publicações; na publicação C a escolha foi por uma pesquisa diagnóstica e em E a opção foi por uma investigação qualitativa e interpretativa; F e G optaram por um relato de experiência e reflexão da prática respectivamente.

No que tange as fontes/sujeitos destas publicações, 3 (A, F e H) produziram os dados em cursos de formação continuada de professores; 2 (B e I) utilizaram livros didáticos e literatura especializada de Educação Matemática para produzir os dados; 3 (C, E e G) utilizaram protocolos produzidos por professores e/ou estudantes; e 1 (D) utilizou provas de avaliação de larga escala (Provas do ENEM de 1998 à 2011).

Das interpretações dos números racionais e atividades sugeridas, organizou-se o Quadro 3:

Quadro 3: Interpretações e atividades sugeridas

Trab.	Interpretações		Atividades/Sugestões
	Referencial Teórico	“Texto como um todo”	
A	Ponto racional, quociente, fração, operador, razão e proporcionalidade	Medida, quociente, operador, razão, taxa	Situações problema que envolve as interpretações dos números racionais
B	Operador	Parte-todo, razão, operador, quociente e medida	Não apresenta
C	Parte-todo	Parte-todo, quociente, medida,	Situações problemas envolvendo as interpretações de quociente, medida, parte-todo
D	Medida, parte-todo, quociente, razão, operador, probabilidade, medida e porcentagem	Medida, parte-todo, quociente, razão, operador, probabilidade, medida e porcentagem	Não apresenta
E	Parte-todo, quociente, medida e operador	Parte-todo, quociente, medida e operador	Atividades, resposta da estudante e trechos da entrevista
F	Parte-todo, razão, taxa	Parte-todo, razão, taxa	Jogos de cartas de abordam algumas interpretações do número racional
G	Quociente, medida	Quociente, medida	Situações problema que envolvem as representações da língua natural e figural.
H	Parte-todo, quociente, medida, fração como número, operador e taxa	Quociente, medida, parte-todo, taxa,	Protocolo com situações problema
I	Parte-todo, quociente, razão e operador e medida	Parte-todo, quociente, razão e operador e medida	Exemplos de atividades contidas nos livros didáticos

Das interpretações mais utilizadas no referencial teórico, constata-se que a comparação parte-todo esteve presente em 7 das 9 publicações. As interpretações quociente, operador e medida foram, também, abordadas na maioria das publicações. Já a interpretação taxa foi mencionada em, apenas, 2 das 9 publicações. Além disso, em alguns dos trabalhos foram

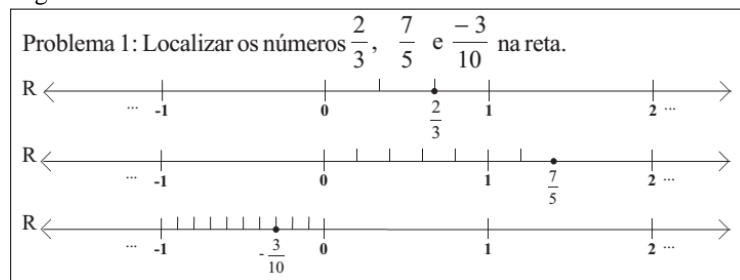
identificados a representação porcentagem, como sendo um dos significados do número racional bem como os conceitos de probabilidade e proporcionalidade. É importante destacar que, para Lamon (2007, 2008), estes não são considerados interpretações do número racional.

Na análise relacionada ao texto como um todo, a grande maioria das publicações, trata das mesmas interpretações presentes no referencial teórico, sendo que apenas a publicação B, em seu referencial teórico, trata de uma interpretação (operador), mas no decorrer do artigo aborda outras (parte-todo, razão, quociente e medida).

Das atividades e sugestões de atividades, somente as publicações B e D não sugerem nenhuma atividade, do restante, cinco (A, C, E, G, H e I) trazem no corpo do texto exemplos e atividades que foram desenvolvidas com professores e estudantes e uma (F) trás na composição do texto os jogos e suas regras.

A Figura 1 é um dos exemplos de atividades que abordam a interpretação ponto racional/medida em situações-problema contidas nas publicações mapeadas.

Figura 1: Ponto racional/ medida

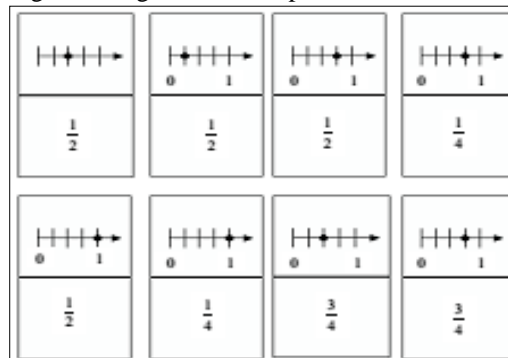


Fonte: Publicação A

Esta atividade explora a interpretação “medida” do número racional, a qual é muito importante, pois permite aos estudantes compreenderem que a representação $\frac{a}{b}$ com $b \neq 0$, indica um, e somente um, ponto posicionado na reta, independente de ser uma dízima periódica.

Na Figura 2, é apresentado o jogo de dominó confeccionado a partir das ideias de Gimenez e Bairral explorando a interpretação medida.

Figura 2: Jogo construído por Professores



Fonte: Publicação F

Verificamos que o jogo construído pelos professores é de grande importância e estimula o estudante a relacionar o ponto marcado na reta com sua, respectiva, representação fracionária. Desta forma, esta atividade pode contribuir também com o entendimento de equivalência de frações.

Diante desses dados, constata-se que ainda são poucas as publicações relacionadas ao número racional. Das identificadas, nenhuma utiliza as ideias de Lamon (2007, 2009) para fundamentar a escrita. Em relação aos objetivos das publicações, verifica-se que, grande parte, são análises documentais e atividades desenvolvidas com estudantes e professores. Já quanto às interpretações, nem todas exploram as cinco interpretações, algumas adotando somente uma ou algumas para abordar os números racionais, sendo a mais abordada a interpretação parte-todo e a menos abordada, taxa. É importante salientar, a necessidade de pesquisas que realizem estudos do conhecimento relacionados aos conceitos matemáticos, em especial, o conceito de número racional, visto que permitem identificar de que forma estão sendo realizadas investigações (aporte teórico-metodológico) bem como a frequência de publicações em periódicos da área de Educação Matemática. Em suma, estas publicações são de grande valia e através delas os autores de livros didáticos poderiam basear-se para a escrita de suas coleções. Dado o valor que este instrumento tem no planejamento do professor, buscou-se verificar de que forma as interpretações são abordadas nas coleções dos livros didáticos escolhidos, conforme as ideias de Lamon.

O mapeamento contribuiu para a definição de critérios de análise dos livros didáticos, uma vez que, a partir dele, foi possível verificar a falta de publicações quanto ao ensino e aprendizagem das interpretações dos números racionais nos periódicos brasileiros voltados à Educação Matemática.

1.2 INTERPRETAÇÕES DO NÚMERO RACIONAL: ALGUNS ENTENDIMENTOS A PARTIR DAS CONCEPÇÕES DE LAMON

A compreensão do número racional é de suma importância, pois permite o entendimento de outros conceitos matemáticos, a resolução de problemas de outras áreas do conhecimento e do cotidiano (SOARES, 2007; LAMON, 2007). Além disso, é essencial para o desenvolvimento de capacidades cognitivas que servirão de base para a aprendizagem de conceitos matemáticos e atividades científicas.

O pesquisador brasileiro Romanatto (apud SOARES, 2007) elaborou um modelo com elementos essenciais para a compreensão do número racional. Este modelo destaca as ideias de Behr et. al, Kieren, Ohlsson, entre outros e de modo figurativo assemelha-se a uma “teia de aranha”. Assim, no centro da teia está a notação $\frac{a}{b}$, com a e b inteiros e b diferente de zero. Deste ponto central, partem feixes de relações (medida, quociente, razão, operador multiplicativo, probabilidade e número), determinados pelo contexto em que se encontra a situação e, enredando os feixes de relações, estão as representações do número racional (fracionária, decimal, porcentagem, pictóricas). Cada representação carrega uma gama de significados e procedimentos específicos.

Em relação aos significados do número racional a serem trabalhados nos Anos Finais do Ensino Fundamental, verifica-se que os PCN sugerem: parte-todo, quociente, razão e operador.

A relação parte/todo se apresenta quando um todo (unidade) se divide em partes equivalentes. [...] A interpretação da fração como relação parte/todo supõe que o aluno seja capaz de identificar a unidade que representa o todo (grandeza contínua ou discreta), compreenda a inclusão de classes, saiba realizar divisões operando com grandezas discretas ou contínuas. Uma outra interpretação do número racional como quociente de um inteiro por outro ($a:b$, $b \neq 0$). Para o aluno, ela se diferencia da interpretação anterior, pois dividir uma unidade em 3 partes e tomar 2 dessas partes é uma situação diferente daquela em que é preciso dividir 2 unidades em 3 partes iguais. No entanto, nos dois casos, o resultado é dado pelo mesmo número: Uma interpretação diferente das anteriores é aquela em que o número racional é usado como um índice comparativo entre duas quantidades, ou seja, quando é interpretado como razão. Existe ainda uma quarta interpretação que atribui ao número racional o significado de um operador. (BRASIL, 1998, p. 102, grifo nosso)

No que tange as representações do número racional, os PCN afirmam que

[...] embora as representações fracionárias e decimais desses números sejam desenvolvidos nos ciclos iniciais, o que se constata é que os alunos chegam ao terceiro ciclo sem compreender os diferentes significados associados a esse tipo de número e tampouco os procedimentos de cálculo, em especial, os que envolvem os racionais na forma decimal. (BRASIL, 1998, p. 100)

Talvez estas dificuldades estejam relacionadas a forma como o ensino de número racional é proposta, tanto nos materiais didáticos (por exemplo, livros didáticos) quanto nos planejamentos dos professores, com ênfase no estudo de regras (SOARES, 2007).

O documento preliminar da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (BRASIL, 2015) sugere que os números racionais sejam abordados a partir do 5º ano. Para este ano o foco está na comparação e ordem dos números racionais positivos na reta numérica; identificação e representação de frações (maiores e menores que a unidade); associando as partes de um todo; e, divisão, bem como equivalência. Além disso, sugere-se o estudo das operações com número racional e a relação com a porcentagem.

Para o 6º ano o documento indica a abordagem da probabilidade de um evento, indicado por um número racional, sugere que os estudantes devam identificar e registrar números racionais positivos em suas diferentes representações, identificar equivalência e trabalhar a conversão em diferentes representações, comparar e ordenar racionais positivos na reta numérica, resolver e elaborar problemas com racionais e suas diferentes representações e diferentes operações (adição e subtração, multiplicação e divisão como multiplicador) e divisor natural. A BNCC propõe para o 7º ano o trabalho com diferentes significados do número racional (fração como partes de um inteiro, quociente, razão e operador) e com as ideias de equivalência e ordem. Além disso, sugere trabalhar com os números racionais negativos e positivos, comparar e ordenar (representação fracionária, decimal e com potências com expoentes inteiros) na reta numérica, sugere a elaboração e resolução de problemas envolvendo adição e subtração de frações. Já no 8º ano, é sugerido que os racionais sejam explorados com a comparação e ordenação na reta numérica, novamente; resolver e elaborar problemas que envolvam porcentagem; trabalhar a ideia de juros simples e determinação de taxa percentual.

Segundo Daro (2016) o entendimento de números racionais deve vir de uma progressão entre os diversos anos, tendo uma sequência de ensino para o êxito da aprendizagem. Começando com frações equivalentes, linha de número (números racionais posicionados na reta) e frações como números com propriedades, correspondências entre as operações com números naturais e operações com frações. Sem essa progressão, o pesquisador afirma que, os estudantes serão ensinados a repetir algoritmos e a resolução de problemas será vista como uma receita pronta, sendo um desperdício de tempo do professor. Ainda, sugere que, no 7º ano, seja incluída a compreensão de frações associadas ao conceito de unidade, do todo, quociente, razão (interpretações). A resolução de problemas que aparece

no documento da BNCC para o 8º ano e a comparação e ordenação na reta numérica deveriam ser exploradas nos anos anteriores.

Entende-se que o número racional pode e deve ser abordado na escola, de acordo com as ideias de Lamon (2007, 2008), ou seja, explorar todas as interpretações dos números racionais ao longo da educação. Isto porque as interpretações auxiliam na compreensão desses números e no desenvolvimento do raciocínio matemático, em especial, do raciocínio proporcional. Assim, torna-se relevante compreender como Lamon (2007, 2008) define as diferentes interpretações do número racional (razão, parte-todo/medida, quociente, operador e taxa). Para tanto, organizou-se o Quadro 4 com o intuito de expor as definições das interpretações do número racional, descritas por Lamon, seguidas de exemplos.

Quadro 4: Interpretações do Número Racional

Interpretação	Exemplo
Parte-todo: representação de uma quantidade x por y partes, o que representa uma relação, também uma medida na reta;	Um bolo foi dividido em pedaços iguais para serem vendidos na cantina da escola. Até agora foram vendidos 14 pedaços, o que representa $\frac{1}{3}$ do bolo. Quantos pedaços havia no bolo inteiro?
Quociente: divisão entre dois números;	Três barras de chocolate foram divididas igualmente para preparar 5 receitas de mousse. Quanto de chocolate será usado em cada receita? Para um trabalho de artesanato, será preciso cortar pedaços de tecido de $\frac{3}{4}$ de metro. Quantos pedaços será possível obter com 5 metros de tecido?
Operador: usada para modificar um número, pode ser para aumentar ou diminuir, faz-se b multiplicado por x e dividido por y ;	Você reduz uma figura para 85% de seu tamanho original e mais tarde percebe que deveria ter aumentado a figura em 25%. Sabendo que você não dispõe mais da figura original em mãos, o que deve ser feito para que a figura reduzida a 85% seja ampliada à 125% com relação a figura original?
Razão/Taxa: comparação entre as quantidades semelhantes, tamanho relativo a uma grandeza (de espécies semelhantes ou não);	Maria recebe, como salário, R\$ 60,00 mais 5% de comissão. Em uma semana que suas vendas somam R\$ 700,00, qual a razão entre seu salário base e sua comissão?
Medida: quantifica determinadas distâncias a partir do ponto zero, em termos de uma unidade de medida especificada.	Supondo que um intervalo de comprimento l esteja particionado em b subintervalos menores, indicados por $\frac{l}{b}$, a interpretação medida para a representação fracionária $\frac{a}{b}$ é: a intervalos de medida $\frac{1}{l}$



Fonte: Adaptado de Oliveira (2014)

Os PCN sugerem que o trabalho com o número racional esteja relacionado as interpretações parte-todo, quociente, operador e razão. O que para Lamon (2007, 2008), limita a aprendizagem dos estudantes e o desenvolvimento dos conceitos matemáticos relacionados a este conceito, por exemplo, Raciocínio Proporcional.

Conforme as ideias de Lamon (2008) a razão é uma comparação de grandezas de mesma espécie ou de espécies diferentes, mas ao trabalhar com espécies diferentes a autora denomina de taxa.

Segundo Campos e Magina (2008), fundamentadas nas ideias de Vergnaud, a formação do conceito de número racional é dada por uma terna, a saber: um conjunto de situações, um conjunto de invariantes operatórios e um conjunto de representações simbólicas. Quanto às situações, já mencionamos que há inúmeras situações matemáticas e científicas que requerem a mobilização do conceito de número racional, principalmente, as diferentes interpretações. No que tange aos invariantes operatórios, estes podem ser visíveis, isto significa que o estudante tem consciência do procedimento e das propriedades aplicadas, ou subentendido, quando o estudante não conhece as propriedades, mas utiliza-as corretamente para resolver situações problema. Os invariantes, no caso de números racionais, são a ordem e a equivalência. Em relação às representações, o Quadro 5 apresenta diferentes representações do número racional.

Quadro 5: Representações do Número Racional

Representação na Língua Natural	Representação Figural									
Um número racional na forma $\frac{a}{b}$ com $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{Z}^*$ está representado por uma fração.	<p style="text-align: center;">Contínuo</p> 									
Um número racional pode ser escrito seguindo as regras e convenções do Sistema Decimal de Numeração	<p style="text-align: center;">Discreto</p> 									
Representação Numérica	Representação Algébrica									
<table border="1" style="width: 100%;"> <tr> <td>Fracionário: $\frac{1}{3}$</td> </tr> <tr> <td>Decimal exato: 0,5</td> </tr> <tr> <td>Decimal não exato: 0,33 ...</td> </tr> <tr> <td>Potência de 10 ou Notação Científica</td> </tr> <tr> <td>Percentual: 20%</td> </tr> </table>	Fracionário: $\frac{1}{3}$	Decimal exato: 0,5	Decimal não exato: 0,33 ...	Potência de 10 ou Notação Científica	Percentual: 20%	<table border="1" style="width: 100%;"> <tr> <td>Fracionária: $\frac{a}{b}$, $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{Z}^*$</td> </tr> <tr> <td>Decimal: $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_nx^0$</td> </tr> <tr> <td>Potência $a10^n$ ou $a10^{-n}$</td> </tr> <tr> <td>Percentual $\frac{a}{100}$, $a \in \mathbb{Z}$</td> </tr> </table>	Fracionária: $\frac{a}{b}$, $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{Z}^*$	Decimal: $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_nx^0$	Potência $a10^n$ ou $a10^{-n}$	Percentual $\frac{a}{100}$, $a \in \mathbb{Z}$
Fracionário: $\frac{1}{3}$										
Decimal exato: 0,5										
Decimal não exato: 0,33 ...										
Potência de 10 ou Notação Científica										
Percentual: 20%										
Fracionária: $\frac{a}{b}$, $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{Z}^*$										
Decimal: $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_nx^0$										
Potência $a10^n$ ou $a10^{-n}$										
Percentual $\frac{a}{100}$, $a \in \mathbb{Z}$										

Fonte: Soares (2007)

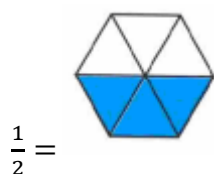
As representações matemáticas apresentadas no quadro foram organizadas a partir da teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval (2003). Para este pesquisador a

atividade matemática requer a mobilização e coordenação de diferentes registros de representação semiótica, porque os objetos matemáticos são abstratos e para acessá-los é preciso utilizar representações. As representações semióticas são diferentes das representações mentais (representações internas e conscientes do sujeito) e computacionais (representações internas e não conscientes do sujeito) porque permitem além da comunicação, a objetivação (entendimento para si) e o tratamento (cálculos).

Conforme Duval (2003), as representações semióticas⁴ utilizadas na atividade matemática são: língua natural (língua materna), representação geométrica (utilização de figuras geométricas planas ou espaciais); sistemas de escrita e cálculo (numéricos, algébricos, simbólicos); e, representação gráfica (utilizando sistemas de coordenadas). O termo registro foi utilizado pelo teórico para diferenciar um sistema que potencializa a comunicação, a objetivação e o tratamento dos que apenas comunicam ideias, por exemplo, placas de trânsito.

Ao analisar a atividade matemática, Duval (2003) identifica dois tipos de operações que podem ser realizadas com as representações, a saber: no interior de um mesmo registro, denominada de tratamento – ou transitando entre registros diferentes, intitulada de conversão. Por exemplo, se utilizarmos a fração $\frac{1}{2}$, e realizarmos um tratamento dentro do mesmo registro, teríamos: $\frac{1}{2} = 0,5$.

Com a mesma fração, poder-se-ia realizar uma conversão da representação da língua natural para a figural.



Pode-se observar que, em relação ao ensino e a aprendizagem, normalmente, dá-se ênfase aos tratamentos, seja numérico ou algébrico, permanecendo sempre no mesmo registro. Tratamentos no registro gráfico são menos frequentes, muitas vezes inexistentes. A utilização de exaustivos tratamentos algébricos não contribui para o entendimento dos estudantes quanto ao conceito abordado conduzindo ao uso da técnica pela técnica, o que acaba estimulando, somente, a memorização (BONOMI, 2015).

Retomando a discussão acerca do número racional, Lamon (2007) sublinha que os estudantes que obtêm os entendimentos desse número têm uma percepção intuitiva do tamanho relativo dos números racionais e capacidade de estimar, pensar qualitativamente e

⁴ Ciência que estuda os sistemas de signos, ou seja, a linguagem formal (SOARES, 2007).

multiplicativamente, de resolver problemas que envolvam proporções, identificar interpretações e representações coerentes e tomar decisões e julgamentos razoáveis.

Outros pesquisadores (Case, 1985, 1992; Hart, 1981, 1984; Inhelder & Piaget, 1958; Kieren, 1988, 1993; Lesh et al., 1988; Noelting, 1980a, 1980b) compartilham, à longo prazo, que a compreensão do número racional é base para outros entendimentos mais complexos:

[...] ‘O domínio representa um momento crítico no qual muitos tipos de conhecimentos matemáticos são chamados em jogo e um ponto além do qual a compreensão do aluno nas ciências matemáticas será muito dificultada se a coordenação conceitual de todos os domínios que contribuem não é alcançada’ (LAMON, 2007, p. 637, tradução nossa)

Estes conceitos que se desenvolvem, a longo prazo, possibilitam aos estudantes resolver problemas de comparação e de valor faltante que são trabalhados no Ensino Fundamental e tendo seu aprofundamento no Ensino Médio através da álgebra, trigonometria, estatística, física, entre outras disciplinas. Suas aplicações estão relacionadas ao estudo do tratamento de dados como, por exemplo, inflação, força, densidade, óptica e ondas sonoras (LAMON, 2007).

Ainda, conforme Lamon (2007), o número racional e raciocínio proporcional desenvolvem-se por meio de estruturas centrais do conhecimento⁵ matemático que se correlacionam formando uma rede de conceitos, essas estruturas são: medição, partilha e comparação, raciocínio relativo, quantidade e covariação, raciocínio progressivo e regressivo, interpretações e unitização. Assim, torna-se fundamental descrever as estruturas centrais de acordo com as ideias da Lamon (2007, 2008).

A *medição* relaciona-se a compreensão dos números racionais por meio dos princípios de medição que interpretam estes números como medida e comparações parte-todo com a unitização. Por exemplo, suponha que você está trabalhando em um projeto, no qual precisa determinar o comprimento de uma tira de metal em centímetros, tentando ser o mais preciso possível. Neste caso, o comprimento situa-se entre $1\frac{7}{16}$ e $1\frac{8}{16}$, pode-se chamá-lo de $1\frac{15}{32}$ (LAMON, 2008).

Em relação a *Partilha*, esta constitui-se no processo de dividir um objeto ou objetos em um número de partes separadas, exaustivamente. Conforme Lamon (2008) o processo de particionamento situa-se no coração da compreensão número racional (frações e decimais são ambos formados por particionamento). Quanto a *comparação* ou compreensão de

⁵ Estruturas conceituais centrais são sistemas críticos- conectados e sujeitos a um desenvolvimento tetos, e em parte alimentado através do ensino- incluindo conteúdo, ação, associações com contextos apropriados, representações, e uma teia de relações conceituais tanto dentro como entre eles. (LAMON, 2007, p. 652, tradução nossa)

equivalência, esta é uma noção matemática que se aplica muito mais amplamente do que somente na fração, no qual são colocadas ao realizar diferentes partições que resultam nas mesmas quantidades relativas, é fundamental para a produção de quantidade, de conceitos matemáticos e de raciocínio e operações. Estas estruturas multiplicativas centrais podem ser observadas no seguinte exemplo: *se oito pessoas compartilham três pizzas, igualmente, e outras três pessoas compartilhar uma pizza, igualmente, quem fica com mais pizza? Quanto a mais?* (LAMON, 2008).

O *Raciocínio relativo*, refere-se a capacidade de analisar mudanças, tanto em termos absolutos quanto em termos relativos. Este raciocínio é essencial para o ensino do número racional e importante para o desenvolvimento do Raciocínio Proporcional. Uma situação que revela a mobilização deste raciocínio é descrita a seguir: *pense no espaço que cinco pessoas ocupam em um elevador que comporta oito pessoas. Agora, imagine o espaço ocupado pelas mesmas pessoas em um estádio de futebol, e da mesma forma, o espaço que elas ocupam dentro de um carro que comporta duas pessoas.* Neste caso, os valores acerca do espaço serão relativos, conforme o lugar que é representado na situação descrita. (LAMON, 2008).

No que se refere à estrutura *Quantidade e Covariação*, denota-se como a capacidade de identificar e quantificar grandezas, além de reconhecer de que forma essas quantidades variam ou co-variavam entre si. Uma das características desta estrutura é desenvolver a capacidade do estudante de olhar para uma situação, diferenciar as características quantificáveis importantes e observar se as quantidades estão ou não mudando. O método de identificar, quantificar grandezas e analisar quais delas sofrem ou não alterações, e de que forma essas alterações acontecem possibilita o desenvolvimento do raciocínio que vai além da percepção de informações óbvias nos contextos analisados (OLIVEIRA, 2014).

Um exemplo para quantidades é: *ontem você compartilhou alguns biscoitos com alguns amigos. Hoje, você compartilhou menos biscoitos com mais amigos. Vocês vão receber mais, menos ou a mesma quantidade que receberam ontem?* (LAMON, 2008). Obviamente, percebe-se que todos irão receber menos biscoitos hoje, mesmo não sabendo a quantidade de pessoas e quantos biscoitos você possui. Esta estrutura pode ser simples de compreender para os estudantes, visto que eles podem utilizar suas próprias experiências e conhecimentos para resolver esta questão. Pode-se utilizar uma tabela de quantificação para explorar um pouco mais esta situação (Figura 3).

Figura 3: Quadro de quantidade e covariância

Mudança na quantidade de biscoitos por pessoa			
	Mudança no número de pessoas		
Mudança no número de biscoitos	+	-	0
+			
-			
0			

Fonte: Oliveira (2014 p. 203)

Este tipo de representação torna-se útil, pois permite analisar as variações nas quais ocorrem as mudanças.

Um problema envolvendo covariação é: *Se nós mostrarmos uma figura de uma criança assistindo um balão subir no céu.* A figura é estática, mas, a partir das experiências anteriores, os alunos podem imaginar o tipo de mudança que ocorre. O balão se move para mais longe e mais alto no céu e, à medida que se afasta, parece menor em seu tamanho (OLIVEIRA, 2014). É relevante destacar que os currículos nem sempre exploram estas quantidades variáveis e co-variáveis.

Como as interpretações do número racional já foram mencionadas neste capítulo, optou-se, pela relevância do exemplo, em apresentar a organização elaborada por Lamon para o número racional $\frac{3}{4}$ (Figura 4):

Figura 4: Interpretações do número racional $\frac{3}{4}$

Interpretações de $3/4$	Significado	Seleção de atividades da Sala de Aula
Comparações parte-todo com Unitização "3 partes de 4 partes iguais"	3/4 significa três partes fora de quatro partes iguais da unidade, com frações equivalentes encontradas pelo pensamento das partes em termos de maior ou menor pedaços. $\frac{3 \text{ (whole pies)}}{4 \text{ (whole pies)}} = \frac{12 \text{ (quarter pies)}}{16 \text{ (quarter pies)}} = \frac{1\frac{1}{2} \text{ (pair of pies)}}{2 \text{ (pair of pies)}}$	Unitização a produção de frações equivalentes e comparar frações
Medida "3(1/4 unidades)"	3/4 significa uma distância de 3 (1/4 -unidades) de 0 na linha de número ou 3 (1/4 -unidades) de uma determinada área.	Particionamentos sucessivos, leitura medidas e indicadores
Operador "3/4 de algo"	3/4 é uma regra que diz como para operar em uma unidade (ou sobre o resultado de uma operação anterior): multiplicar por 3 e dividir o resultado por 4 ou dividir por quatro e multiplicar o resultado por 3. Isto resulta em múltiplos significados para 3/4: 3 (1/4 - unidades), 1 (3/4 - unidade), e 1/4 (3-unidade).	Máquinas, dobragem de papel, copiado de maneira, o desconto, a área modelos para a multiplicação e divisão
Quociente "3 dividido por 4"	3/4 é a quantia que cada pessoa recebe quando quatro pessoas compartilham um 3-unidade de alguma coisa.	Particionamento
Razão "3 de A são comparados a 4 de B"	3: 4 é uma relação em que 3 A's são comparadas, numa multiplicativo, em vez de num sentido aditivo, a 4 de B's.	Atividades de chips bicolores

Fonte: Adaptação de Lamon (2008, p. 654 tradução nossa).

O *Pensamento progressivo e regressivo* está diretamente ligado a *Unitização* e ao conceito de equivalência de frações. A unitização caracteriza-se como o processo de reorganização de grandezas, formando novos grupos, em que as unidades referenciais

continuam as mesmas, mas são representadas por formas fracionárias diferentes (frações equivalentes). Já o pensamento progressivo e regressivo é um procedimento mental que calcula, a partir de qualquer fração (unitização), as relações de proporcionalidade para quaisquer outras frações a partir das relações já encontradas. Por exemplo, *Antônio comeu 12 pedaços de pizza e Daniel comeu 15 pedaços. "Eu comi $\frac{1}{4}$ a mais", disse Daniel. "Não! Eu comi $\frac{1}{5}$ a menos", disse Antônio. Por que o argumento?* (LAMON, 2008).

Com base no referencial teórico, elencaram-se critérios de análise para os livros didáticos escolhidos. Estes critérios são expostos a seguir nas opções metodológicas.

CAPÍTULO 2

PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Neste capítulo, expõem-se os procedimentos metodológicos adotados para realização e organização deste trabalho.

2.1 OPÇÕES METODOLÓGICAS

Dentre as possibilidades de realizar-se uma pesquisa qualitativa, optou-se pela análise documental. Conforme Gil (1989) esta análise assemelha-se a pesquisa bibliográfica, importante em qualquer estudo, independente das escolhas teórico-metodológicas. Para este pesquisador, a diferença entre pesquisa bibliográfica e documental está na natureza da fonte dos dados. A pesquisa bibliográfica baseia-se na contribuição de diversos autores sobre determinado assunto, já a pesquisa documental, as fonte de dados são documentos que ainda não receberam análise, tais como protocolos dos estudantes.

O processo escolhido para a organização e análise dos dados produzidos, nesta pesquisa, é análise de conteúdo, desenvolvido por Bardin (1977, p. 45). Segundo esta autora, a análise de conteúdo identifica-se como

[...] um conjunto de técnicas de análise das comunicações visando obter, por procedimentos sistemáticos e objetivos de descrição do conteúdo das mensagens, indicadores (quantitativos ou não) que permitam a inferência de conhecimentos relativos às condições de produção/recepção [...] destas mensagens.

A análise de conteúdo é formada por três etapas: a pré-análise, a exploração do material e o tratamento dos resultados e interpretação.

A *pré-análise* é definida como a fase de organização, na qual podem ser utilizados vários procedimentos, tais como: leitura flutuante, hipóteses, objetivos e elaboração de indicadores que fundamentem as análises (BARDIN, 1977). Nesta fase, foram organizadas as ideias iniciais, ou seja, foi constituído o *corpus* documental da pesquisa. Para tanto, foram selecionados o livros didáticos adotados pela escola, a saber: um livro da coleção Bem-me-quer (5º ano) Anos Iniciais e a coleção dos Anos Finais denominada Vontade de Saber (6º, 7º, 8º e 9º ano).

Na segunda fase, *exploração do material*, analisou-se as coleções selecionadas conforme as categorias de análise descritas no Quadro 6.

Quadro 6: Categorias de análise dos livros didáticos:

Categoria	Descrição
Interpretações	Quais interpretações são abordadas nas atividades propostas nos livros didáticos
Invariantes operacionais (ordem, equivalência) e operação	Quais procedimentos os estudantes podem mobilizar para realizar as atividades propostas pelos livros didáticos.
Tratamento e Conversão	Quais tratamentos e conversões (bem como, o sentido das conversões) são necessários para a resolução das atividades propostas pelos livros didáticos.

Fonte: Autoria Própria

No *tratamento dos resultados e interpretação* foi realizada a análise dos dados produzidos a partir da categorização. Para tal, o conceito de emparelhamento foi utilizado. Nesta última fase, foi realizado o emparelhamento, que consiste em associar os dados segundo suas semelhanças e por diferenciação, com posterior reagrupamento, em função de características comuns certificando-se que os dados analisados correspondem com a teoria que deu embasamento a esta pesquisa.

2.2 CARACTERÍSTICAS GERAIS DAS COLEÇÕES ANALISADAS

Nesta sessão, são apresentadas as características gerais das coleções analisadas. Para tanto, busca-se respaldo nas avaliações organizadas pelo PNLD/2010 e PNLD/2014 expostas no guia do Livro Didático.

2.2.1 Livro do 5º ano (Coleção Bem-me-quer)

Conforme o PNLD/2010, nesta coleção, há um “predomínio marcante do campo números e operações em detrimento dos demais, e foi dada atenção excessiva aos algoritmos e procedimentos, com prejuízo à construção dos conceitos” (BRASIL, 2009 p. 91). As atividades propostas são precedidas de apresentações de “formas de registro, nomenclatura matemática e seus símbolos, ou das estratégias de cálculo e resolução de problemas” (BRASIL, 2009 p. 91).

O livro do 5º ano é composto por 288 páginas, distribuídas em 11 capítulos. Destes 11 capítulos, foi analisado o Capítulo 7, intitulado *Frações, Porcentagem e Probabilidade*. Este capítulo foi analisado por tratar do tema escolhido para esta pesquisa. Além disso, nos demais capítulos não são identificadas atividades envolvendo números racionais na representação fracionária.

Conforme o PNLD/2010 os conteúdos são abordados por meio de explicações que “contêm definições, descrição de procedimentos, nomenclatura e exemplos de questões resolvidas” (BRASIL, 2009, p. 250). O livro didático propõe atividades que primam pela aplicação do conteúdo apresentado, geralmente, não dando oportunidade ao estudante de levantar conjecturas e criar estratégias para a resolução das situações propostas. Há articulação entre a Matemática e outras áreas do conhecimento e atividades contextualizadas em práticas sociais, no entanto, algumas relações são artificiais.

2.2.2 Coleção Vontade de Saber

Nesta coleção, segundo o PNLD/2014, “a metodologia adotada segue o modelo em que os conteúdos são apresentados por explicação teórica, seguida de exercícios de aplicação” (BRASIL, 2013 p. 88). Os conteúdos “são retomados e ampliados, com variação de contextos, utilização de diferentes recursos didáticos e de diferentes tipos de linguagem” (BRASIL, 2013 p. 88).

Os volumes estão divididos em capítulos, iniciados com uma apresentação do tema e uma seção intitulada *Conversando sobre o assunto*. Os capítulos são organizados em itens, no qual consta uma explicação sobre o tema, cada item ainda inclui atividades propostas. Cabe destacar que, dentro das atividades propostas, o livro apresenta os itens: *Desafio*, *Cálculo Mental*, *Contexto*, *Tratamento da Informação* e *Calculadora*. No final de cada capítulo, há as seções *Refletindo sobre o Capítulo*, *Revisão* e *Testes*, que propiciam a retomada dos conteúdos e a auto avaliação. Na conclusão de alguns capítulos, pode-se encontrar a seção *Explorando o tema*, que trata da história da Matemática ou de outras áreas do conhecimento como *Acessando tecnologias*, que apresenta sites e outros recursos tecnológicos.

Ao final de cada volume, há *Ampliando seus conhecimentos*, que traz sugestões de livros e de sites; *Respostas* das atividades propostas; e *Bibliografia*. A obra contém oito Objetos Educacionais Digitais (OED): uma hipermídia, um infográfico, três simuladores e três jogos, distribuídos nos volumes 6, 8 e 9.

Os volumes desta coleção são constituídos pelo número de páginas e capítulos expostos no Quadro 7.

Quadro 7: Organização da coleção

Ano	Páginas	Capítulos
6º	352	14
7º	320	12
8º	320	13
9º	272	10

Fonte: Brasil (2013)

No livro do 6º ano, nossa análise centrou-se nos capítulos 6 (*Frações*), 9 (*Números decimais*), 11 (*Medidas de comprimento e medidas de tempo*), 12 (*Medidas de superfície*), 13 (*Medidas de capacidade e medidas de massa*) e 14 (*Tratamento da Informação*). Nestes capítulos foram identificadas todas as atividades propostas que envolvem interpretações do número racional. A escolha destes capítulos tanto quanto dos outros, não foi aleatória, eles foram elencados porque suas atividades poderiam apresentar formalmente e intuitivamente as interpretações do número racional.

No livro do 7º ano os capítulos analisados são: 1 (*Frações*), 2 (*Números Decimais*), 5 (*Tratamento da Informação*), 7 (*Grandezas e unidades de medida*), 10 (*Proporcionalidade*) e 12 (*Medidas de volume*). Cabe salientar que, em específico, neste livro, identifica-se um capítulo exclusivo sobre proporcionalidade. Este capítulo possui 26 páginas e sua análise compõe os dados desta pesquisa, pois este é considerado um conceito importante da Matemática e sua compreensão depende do entendimento das interpretações do número racional.

Analisando o livro do 8º ano, os capítulos identificados para a análise são: 8 (*Regra de três*), 9 (*Tratamento da Informação*) e 12 (*Medidas de superfície*). Neste livro, há um capítulo específico de regra de três, no qual a proporcionalidade e os números racionais estão inseridos implicitamente. Este conceito que relaciona a razão entre quantidades, no qual os estudantes apresentam dificuldades em interpretar qual quantidade esta relacionada a que, é importante para o desenvolvimento do raciocínio proporcional (LAMON, 2007, 2008).

No livro do 9º ano, os capítulos analisados são: 3 (*Matemática Financeira*), 5 (*Funções*), 6 (*Semelhança*), 8 (*Tratamento da informação*) e 10 (*Medidas de volume*). Neste volume da coleção, há um capítulo denominado *funções*, em que a proporcionalidade e os números racionais também estão presentes implicitamente nas atividades. Na função, pode ser encontrada, intuitivamente, a interpretação operador multiplicativo, no qual o número racional é tratado como uma função, responsável por alongar ou encurtar segmentos, aumentar ou diminuir o número de itens ou figuras geométricas, por exemplo (LAMON, 2007, 2008).

A seguir são apresentadas as análises das fontes de produção de dados escolhidas para o desenvolvimento desta pesquisa.

CAPÍTULO 3

ANÁLISE DOS DADOS

No capítulo anterior, foram descritos os procedimentos metodológicos utilizados para o desenvolvimento desta pesquisa. Com base nesses procedimentos, o presente capítulo tem a intenção de apresentar a análise das fontes de produção de dados.

3.1 ANÁLISE DOS LIVROS DIDÁTICOS QUANTO AS INTERPRETAÇÕES

Antes de expor as atividades categorizadas é importante ressaltar que, em todos os volumes, não foram contabilizadas as atividades de cunho pessoal, pois o autor não apresenta, no manual do professor, quais procedimentos espera que os estudantes mobilizem. Também não foram categorizadas atividades que não envolviam números racionais na representação fracionária, pois, como mencionado anteriormente, os capítulos dos livros didáticos selecionados apresentam atividades que envolvem números racionais, por exemplo, no livro do 7º ano, o capítulo denominado *Proporcionalidade* ou no livro do 9º ano, o capítulo chamado *Funções*.

O Quadro 8 apresenta as atividades identificadas na análise da categoria interpretações do número racional.

Quadro 8: Interpretações dos números racionais nos livros didáticos

Livro	Parte-todo	Quociente	Medida	Op. Multiplicativo	Razão	Total de Interpretações no ano
5º ano	62	25	17	79	34	217
6º ano	99	20	1	87	3	210
7º ano	63	11	0	56	4	134
8º ano	0	0	0	0	1	1
9º ano	0	0	0	0	19	19
Total ao longo da Educação Básica	224	56	18	222	61	581

Conforme os dados do Quadro 8, pode-se observar como as interpretações foram abordadas ao longo dos anos do Ensino Fundamental nos livros didáticos. Destaca-se a interpretação parte-todo, esta é a mais explorada, mas, não em todos os anos, diferente da interpretação razão que consta em todos os anos, porém numericamente inferior as interpretações parte-todo e operador multiplicativo.

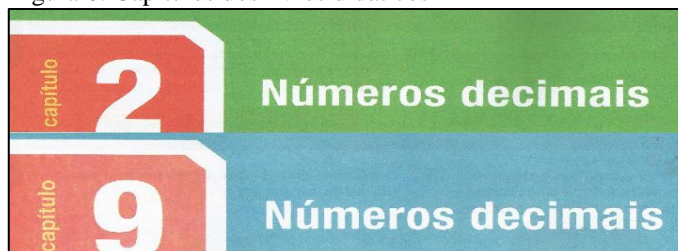
Os livros didáticos analisados tratam o número racional como fração e número decimal. Há 2 capítulos para Fração (Figura 5), 2 capítulos para Número Decimal (Figura 6) e nenhum para Número Racional (dedicado a abordar as propriedades do conjunto numérico). Assim, as interpretações do número racional são abordadas no Capítulo de fração, na maioria das vezes de forma implícita.

Figura 5: Capítulos dos livros didáticos



Fonte: Coleção Vontade de Saber (6º ano, p. 124; 7º ano, p.8)

Figura 6: Capítulos dos livros didáticos



Fonte: Coleção Vontade de Saber (6º ano, p. 206; 7º ano, p.40)

Lamon (2007, 2009) afirma que esta atitude prejudica a compreensão do número racional e por consequência de várias capacidades, em especial, o desenvolvimento do raciocínio proporcional. Isto porque o termo fração $\left(\frac{a}{b}, b \neq 0\right)$ pode ser usado de diferentes formas (interpretações) e se for reduzido a ideia de fração (parte-todo) não contribuindo no desenvolvimento cognitivo dos estudantes.

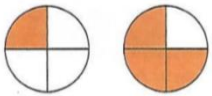
Outros pesquisadores (OLIVEIRA, 2014; SOARES, 2007) corroboram com as concepções de Lamon (2007, 2009) ao enfatizarem que a restrição do ensino dos números racionais à interpretação parte-todo empobrece a noção de número racional. Bem como, no desenvolvimento de outros conhecimentos matemáticos que requerem o estabelecimento de relações com o número racional, por exemplo, a capacidade de estimar, resolver problemas de proporção e pensar de forma flexível entre as interpretações e representações do número racional.

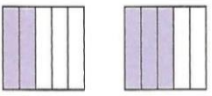
Analisando as atividades do 5º, 6º e 7º ano, quanto a interpretação parte-todo (Figura 7), verifica-se que na maioria das vezes elas tem a mesma característica, sendo situações-

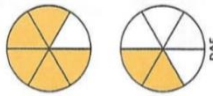
problema que envolvem figuras geométricas (divididas em partes iguais), pizzas (geralmente, representadas por um círculo, o que dificulta representar, por exemplo, $\frac{1}{3}$), embalagens contendo líquidos. A unidade particionada é, na maioria das vezes, uma pizza, um quadrado, um chocolate, ou seja, um inteiro a ser particionado. Estas atividades exigem dos estudantes apenas contar o número de partições e quantas partes foram tomadas (dupla contagem). Em outras palavras, as atividades não exigem dos estudantes a compreensão de que as partes devem ter o mesmo tamanho (equivalência de área). Pode-se afirmar que as atividades não alteram o grau de exigência para os diferentes anos de escolaridade.

Figura 7: Exemplo de atividade retirada do livro didático

1. Continue comparando as frações com os símbolos < ou >.

a)  $\frac{1}{4}$ e $\frac{3}{4}$

b)  $\frac{2}{5}$ e $\frac{3}{5}$

c)  $\frac{5}{6}$ e $\frac{2}{6}$

Fonte: Coleção Bem Me Quer (5º ano, p. 147)

Com base no Quadro 8, pode-se afirmar que o 6º ano possui o maior número de atividades envolvendo a interpretação parte-todo em relação aos demais. Uma justificativa para este resultado está relacionada a transição entre os Anos Iniciais e Finais do Ensino Fundamental, sendo que essas atividades podem ter caráter de retomada dos conceitos. Vale salientar que, as atividades possuem as mesmas características das que são propostas no livro do 5º ano, conforme Figura 8 e Figura 9. Observa-se que as atividades não apresentam grau maior de complexidade para seu desenvolvimento, pois o raciocínio mobilizado é o mesmo.

Entende-se que retomar conteúdos/conceitos pode ser realizado ao propor outras situações que envolvam os conteúdos/conceitos já abordados. A ideia de ampliar refere-se a atividade de relacionar o conceito que se está retomando a outros conceitos em situações que exijam a mobilização de outros registros e diferentes transformações cognitivas.

Figura 8: Atividade do livro didático abordando parte-todo

2. Luana comprou um chocolate e já comeu $\frac{3}{4}$ dele.


a) Desenhe o chocolate e pinte a parte que representa o que ela comeu.

b) Que fração ainda resta?

Fonte: Coleção Bem Me Quer (5º ano, p. 129)

Figura 9: Atividade do livro didático abordando parte-todo

5 O bolo a seguir foi dividido em 20 pedaços iguais e alguns deles já foram vendidos.
Peça aos alunos que considerem o bolo dividido em partes iguais, o que não ocorre na prática.



a) Quantos pedaços do bolo foram vendidos? 6 pedaços

b) Que fração representa os pedaços do bolo que já foram vendidos? $\frac{6}{20}$


c) Que fração representa os pedaços do bolo que ainda não foram vendidos? $\frac{14}{20}$

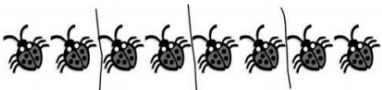
Fonte: Coleção Vontade de Saber (6º ano, p. 128)

As atividades que envolvem a interpretação parte-todo, conforme as Figura 11, 12 e 13, exploram normalmente figuras, pizzas ou bolos, nas quais, conforme Lamon (2009), os estudantes não possuem maturidade suficiente para observar figuras de tamanhos diferentes e relacionar sua equivalência, podendo haver equívocos quanto a relação estabelecida entre a representação figural e a fração representativa. Estes equívocos podem prejudicar a aprendizagem dos estudantes quanto ao tamanho e equivalência de números racionais.

A pesquisadora citada acima sugere que sejam exploradas atividades que contenham a mesma unidade, mas com tipos diferentes, pois se o estudante somente relaciona o particionamento de uma pizza, não conseguirá particionar um retângulo da mesma forma. Estes diferentes tipos de unidade oferecem aos estudantes novos desafios. Como na Figura 10, na qual a unidade não é um objeto e, sim 10 joaninhas.

Figura 10: Atividade proposta por Lamon explorando o particionamento

*  = $\frac{4}{5}$ das joaninhas estão na miha árvore. Quantas joaninhas estão na árvore?

Pensei: 

Diga: 8 joaninhas = $\frac{4}{5}$
2 joaninhas = $\frac{1}{5}$
10 joaninhas = $\frac{5}{5}$ ou 1.

Lamon (2008, p. 64, tradução nossa)

Os dados do Quadro 7 indicam que a interpretação operador multiplicativo é bastante explorada nos livros didáticos analisados. Este fato pode estar relacionado ao seu caráter operatório, pois ao longo destes livros há situações-problema que solicitam que o estudante determine qual a quantidade do todo, uma certa fração representada. Estas atividades, assim como na interpretação parte-todo, possuem o mesmo grau de complexidade nos diferentes anos de escolaridade, o que muda é o inteiro escolhido (pizza, figuras geométricas, bolo).

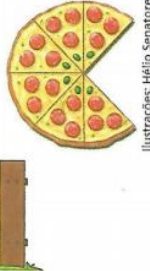
Figura 11: Atividade do livro didático explorando parte-todo

Resolva em seu caderno.

1. Observe os desenhos e responda:

a) Que fração da pizza foi retirada? Quanto ainda resta?

b) Que fração da cerca já foi pintada de amarelo?
Que fração ainda falta pintar?

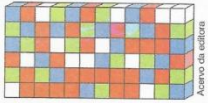


Ilustrações: Hélio Senatore

Fonte: Coleção Bem Me Quer (5º ano, p. 129)

Figura 12: Atividade do livro didático abordando parte-todo

62 Observe a pilha de cubos.



a) Em relação à pilha, escreva uma fração para representar o número de cubos:

- azuis $\frac{17}{72}$
- verdes $\frac{15}{72}$ ou $\frac{5}{24}$
- vermelhos $\frac{7}{72}$ ou $\frac{7}{18}$

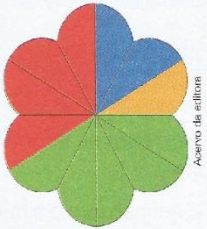
b) Que fração representa o número de cubos da pilha que não são brancos? $\frac{60}{72}$ ou $\frac{5}{6}$

Acervo da editora

Fonte: Coleção Vontade de Saber (6º ano, p. 145)

Figura 13: Atividade do livro didático explorando parte-todo

21 Observe a figura.



a) Escreva uma fração para representar a parte da figura em:

- amarelo
- verde
- azul
- vermelho

b) Escreva as frações obtidas no item a em ordem crescente utilizando o símbolo $<$.

Acervo da editora

Fonte: Coleção Vontade de Saber (7º ano, p. 17)

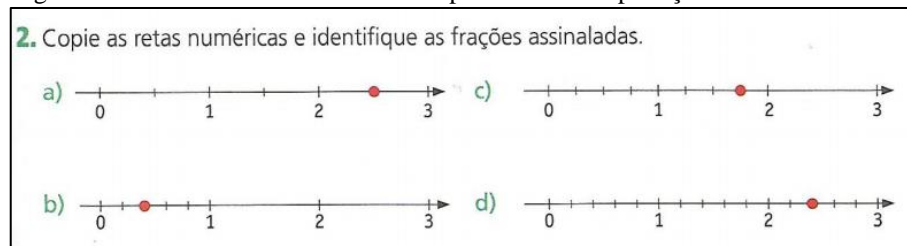
Santos (apud SOARES, 2007) já apontava em suas análises que as atividades que exploram a interpretação operador multiplicativo tem uma ocorrência mais acentuada porque suas resoluções envolvem um “conjunto de técnicas operatórias e procedimentos para a resolução”, dando ênfase para os algoritmos em detrimento da natureza da interpretação, em outras palavras, encolher e ampliar, contrair e expandir ou multiplicar ou dividir. As atividades envolvendo ampliação e redução de figuras são excelentes situações para explorar a natureza dessa interpretação, pois relacionam os números racionais com o raciocínio proporcional.

Quanto à interpretação medida, verifica-se que é pouco explorada ao longo do Ensino Fundamental (Quadro 8). Entende-se que esta escolha limita a compreensão do número racional, pois, conforme Lamon (2007), os estudantes que se apropriam desta interpretação desenvolvem fortes noções de unidade e subintervalos, equivalência, ordem e densidade nos

números racionais. A falta de atividades que exigem a mobilização de ideias, relacionadas a essa interpretação, prejudica o entendimento dos aspectos históricos da criação dos números racionais, ou seja, a necessidade de medir.

O livro didático que propõe um número maior de atividades dessa interpretação é o do 5º ano. A atividade apresentada na Figura 14 exemplifica uma das questões, proposta neste volume, que aborda a interpretação medida.

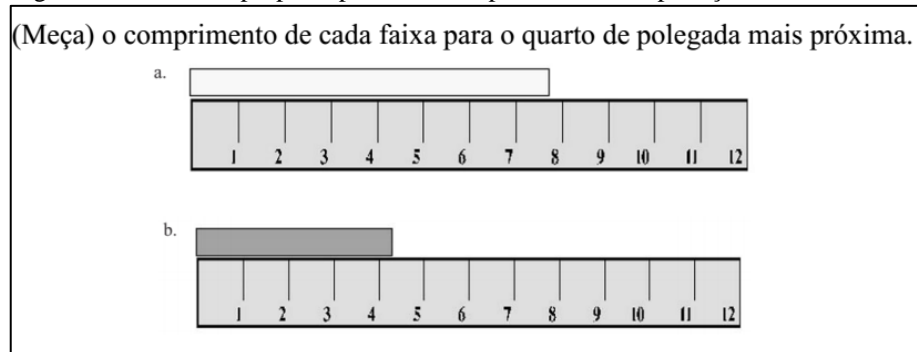
Figura 14: Atividade do livro didático explorando a interpretação medida



Fonte: Coleção Bem Me Quer (5º ano p.139)

Buscaram-se, no livro elaborado por Lamon (2008), atividades que poderiam assemelhar-se com as propostas nos livros didáticos. A atividade apresentada na Figura 15 também aborda a interpretação medida e explora o re-particionamento e a unitização, pois é necessário reorganizar as grandezas para que ocorra a correta medição.

Figura 15: Atividade proposta por Lamon explorando a interpretação medida



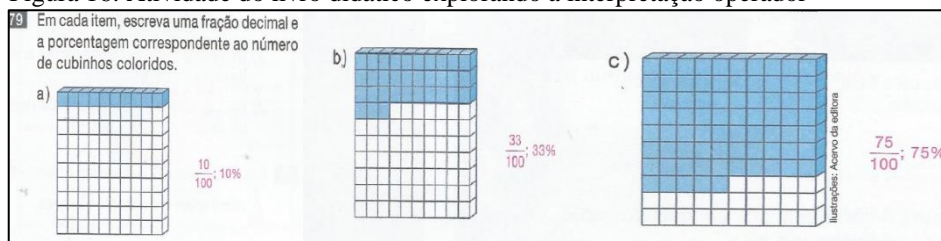
Fonte: Lamon (2008, p. 44, tradução nossa)

A interpretação razão é outra que, também, é explorada em maior número nos livros do 5º e 9º anos, mesmo assim considera-se esta quantidade pequena em função da importância desta interpretação para a aprendizagem de vários conceitos matemáticos (proporcionalidade, trigonometria, teorema de Tales) e aplicação em outras áreas do conhecimento (densidade). Ela é uma interpretação que compara grandezas do mesmo tipo e grandezas de tipos diferentes. Quando isto ocorre, Lamon (2008) a denomina de taxa. A pesquisadora defende que a interpretação razão deve ser compreendida pelos estudantes antes mesmo da

interpretação parte-todo, pois o conhecimento intuitivo de comparações desenvolve uma compreensão mais rica dos números racionais, possibilitando o desenvolvimento do raciocínio proporcional mais cedo.

A porcentagem, uma importante representação numérica dos números racionais, na perspectiva de Lamon (2007), está relacionada a interpretação operador e razão. Na interpretação razão, a primeira quantidade está sempre relacionada a uma segunda quantidade centesimal(100). Um exemplo desta interpretação, retirada de um dos volumes, é a Figura 16.

Figura 16: Atividade do livro didático explorando a interpretação operador



Fonte: Coleção Vontade de Saber (6º ano p. 151)

Entende-se que a análise detalhada de como as interpretações são abordadas, em cada livro didático, é relevante para responder a questão orientadora desta pesquisa. Assim, neste momento, passa-se a apresentar os dados e análises de cada livro didático. No livro do 5º ano, do total de 331 atividades que compunham o capítulo 7 (*Frações, porcentagem e probabilidade*), foram categorizadas 217 atividades quanto às interpretações, sendo 18,73% corresponde à interpretação parte-todo, 7,55% a quociente, 5,31% a medida, 12,69% ao operador multiplicativo e 10,27% a razão. A quantificação dos dados permite afirmar que neste livro, a interpretação com maior ênfase é a parte-todo e a de menor ênfase é a medida. Nas atividades que abordam a interpretação parte-todo, geralmente, há figuras divididas em partes iguais, solicitando ao estudante relacionar ou escrever a fração correspondente, conforme já afirmado.

Quanto aos tratamentos e conversões, verifica-se que o tratamento mais enfatizado, neste livro, foi o numérico, mas algumas atividades exploravam tanto o tratamento numérico quanto o figural, sendo, no tratamento figural, geralmente, solicitado aos estudantes que representem as partes divididas de um todo numericamente a partir de uma figura (Figura 17). Em relação a conversão, a mais exigida foi conversão da representação da língua natural para a numérica, representando 48,33% do total. A partir dos dados, pode-se afirmar que o livro didático prima pela execução de algoritmos em suas atividades.

Figura 17: Atividade do livro didático explorando tratamento

Registre em seu caderno.

1. Quero dividir igualmente 5 folhas entre 2 pessoas.
 - a) Por meio de um desenho, mostre como ficará a distribuição.
 - b) Escreva a divisão que representa a situação acima.
 - c) Escreva o resultado da divisão acima na forma de:
 - número misto;
 - fração.

Fonte: Coleção Bem Me Quer (5º ano p. 141)

Lamon (2009) afirma que estudantes do 5º ano podem facilmente resolver situações-problema como a apresentada na Figura 18. Para tanto, devem ser desenvolvidas e aprofundadas as ideias de medição ou medida⁶. Estas ideias precisam ser abordadas ao longo da Educação Básica.

Figura 18: Atividade proposta por Lamon que aborda medida

1. Na xícara A, misturei 10 colheres de chá de açúcar com 8 colheres de chá de vinagre. Na xícara B, misturei 8 colheres de chá de açúcar com 6 colheres de chá de vinagre. Qual xícara contém a mistura mais azeda? Como você mede o azedume?

Fonte: Lamon (2009 p. 42, tradução nossa)

Ao analisar o livro do 6º ano, constata-se que das 1033 atividades que compõem os capítulos 6 (*Frações*), 9 (*Números decimais*), 11 (*Medidas de comprimento e medidas de tempo*), 12 (*Medidas de superfície*), 13 (*Medidas de capacidade e medidas de massa*) e 14 (*Tratamento da Informação*), foram analisadas 210 quanto às interpretações. Destas 210 atividades, 9,58% exploram parte-todo, 1,94% quociente, 0,09% medida, 8,42% operador multiplicativo e 0,29% razão. Os dados quantitativos estabelecem que a interpretação mais abordada neste livro didático é a parte-todo, seguida por operador multiplicativo e a menor explorada é a medida.


Quanto aos tratamentos, pode-se observar, nas análises, que o tratamento mais abordado foi o numérico (Figura 19), mas algumas atividades exploram tanto o numérico quanto o figural (Figura 20). Nas conversões, 75,39 % exigem a conversão da representação da língua natural para a numérica.

⁶ Para Lamon (2008) medir é realizar a escolha de uma unidade de medida e deslocando-a sem sobreposição ou intervalos vazios e medição está relacionado a comparações parte-todo com unitização.

6,08% operador multiplicativo e 0,43% razão. Verifica-se que a representação mais utilizada, neste livro didático, foi parte-todo, seguida de operador multiplicativo (Figura 22) e a menos explorada foi razão.

Figura 22: Atividade do livro didático explorando o operador multiplicativo

33 Um pintor, para obter 20 L de tinta de certa tonalidade, misturou três cores. Sabendo que da mistura obtida $\frac{9}{20}$ eram de tinta branca, $\frac{1}{4}$, de tinta vermelha, e $\frac{3}{10}$, de tinta azul, quantos litros de cada cor de tinta o pintor misturou?



Fonte: Coleção Vontade de Saber (7º ano, p. 23)

Quanto aos tratamentos e conversões, o tratamento no qual foi dada mais ênfase é o numérico, e as conversões partiram da representação da língua natural para a numérica, sendo 87,85%.

Lamon (2009) afirma que, estudantes de 7º e 8º ano, geralmente, no início do estudo da álgebra, devem ser incentivados a analisar situações como a apresentada na Figura 23. Se o estudante teve oportunidade de resolver situações envolvendo as diferentes interpretações do número racional, bem como atribuiu significado para a noção de equivalência, ele não precisará de um algoritmo para resolver essa situação. Basta organizar os dados da situação da

<i>Impostos</i>	<i>Dólares</i>	
seguinte forma:	1,30	20
	?	50

por $\frac{50}{20}$ para determinar o imposto a pagar quando se tem 50 dólares, ou seja, devem ser pagos $1,30 \frac{50}{20} = 3,25$.

Figura 23: Atividade proposta por Lamon explorando razão

*Foi cobrado de mim US \$ 1,30 para impostos sobre as vendas quando passei 20 dólares. Quanto imposto sobre as vendas que pagaria em uma compra de US \$ 50?

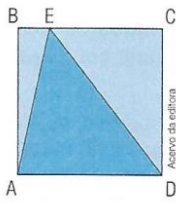
Fonte: Lamon (2008 p. 96, tradução nossa)

No livro do 8º ano, das 366 atividades que compunham os capítulos 8 (*Regra de três*), 9 (*Tratamento da Informação*) e 12 (*Medidas de superfície*), foi identificada somente uma atividade (Figura 24) que envolve razão, representando 0,27% do total de atividades dos capítulos analisados. Esta atividade exige tratamento numérico e envolve o Teorema de Tales. Vale destacar que, esta atividade é categorizada pelo autor da coleção como um “*Desafio*”, apresentado no item *Testes*.

Figura 24: Atividade do livro didático envolvendo tratamento numérico

Desafio

34 (FGV-SP) Na figura abaixo, a razão entre as áreas do triângulo AED e do quadrado ABCD é igual a: b



a) $\frac{3}{2}$ d) $\frac{3}{4}$
 b) $\frac{1}{2}$ e) $\frac{3}{5}$
 c) $\frac{2}{3}$

Fonte: Coleção Vontade de Saber (8º ano p. 283)

Conforme Lamon (2008) pesquisas evidenciam que quando estudantes trabalham com a interpretação razão no sentido intuitivo de comparação, eles desenvolvem uma compreensão acentuada de número racional e utilizam o raciocínio proporcional antes mesmo de estudarem formalmente os conceitos a eles relacionados.

A atividade exposta na Figura 25 é um dos exemplos propostos por Lamon (2008) para o trabalho com a interpretação razão. Para resolver esta atividade o estudante pode representar as razões envolvidas e compará-las por meio da noção de equivalência de número racional. Também pode analisar como as grandezas variam da seguinte forma:

Concentrado *Água*

12 30 , verificando que as razões são diferentes, mobilizando a unitização.
 16 36

Figura 25: Atividade proposta por Lamon explorando razão

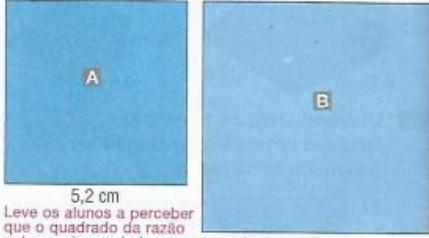
A Companhia Flavorful possui vários sucos de frutas. Um pequeno barril de suco de maçã é misturado com 12 latas de concentrado de maçã e 30 latas de água. Um grande barril de suco de framboesa é misturado com 16 latas de framboesa concentrada e 36 latas de água. Qual barril será mais concentrado de frutas?

Fonte: Lamon (2008 p. 178, tradução nossa)

No livro do 9º ano, das 599 atividades propostas nos capítulos 3 (*Matemática Financeira*), 5 (*Funções*), 6 (*Semelhança*), 8 (*Tratamento da informação*) e 10 (*Medidas de volume*), somente 19 delas envolvem alguma interpretação dos números racionais, em específico, a interpretação razão, representando 3,17% do total de atividades presentes nos respectivos capítulos. Quanto ao tratamento, todas as atividades envolvem tratamentos numéricos. Estas atividades estão relacionadas a geometria (tamanho de figuras geométricas) (Figura 26) e ao comprimento de segmentos (Figura 27).

Figura 26: Atividade do livro didático envolvendo geometria

32 De acordo com os quadrados, resolva.



Leve os alunos a perceber que o quadrado da razão entre quaisquer lados correspondentes de dois polígonos semelhantes é igual à razão entre suas áreas.

5,2 cm

6,5 cm

a) Qual a razão de semelhança entre os quadrados A e B? E a razão entre suas áreas? $\frac{5,2}{6,5} = \frac{4}{5} = 0,8$; $\frac{27,04}{42,25} = \frac{16}{25} = 0,64$

b) Construa outros dois quadrados e calcule a razão de semelhança entre eles e a razão entre suas áreas. Resposta pessoal.

c) De acordo com os resultados obtidos nos itens a e b, o que você pode perceber?

c) Resposta esperada: a razão entre a área de dois quadrados é igual ao quadrado da razão de semelhança entre eles.

Fonte: Coleção Vontade de Saber (9º ano, p. 136)

Figura 27: Atividade do livro didático explorando comprimento de segmentos

Determine a razão entre os segmentos:

a) AB = 5 cm e BC = 15 cm $\frac{5}{15} = \frac{1}{3} = 0,333..$

b) CD = 4 cm e DE = 10 cm $\frac{4}{10} = \frac{2}{5} = 0,4$

c) AC = 20 cm e CD = 4 cm $\frac{20}{4} = 5$

d) EF = 8 m e FG = 16 m $\frac{8}{16} = \frac{1}{2} = 0,5$

e) EG = 24 m e CD = 4 m $\frac{24}{4} = 6$

f) FG = 16 cm e AC = 20 cm $\frac{16}{20} = \frac{4}{5} = 0,8$

Fonte: Coleção Vontade de Saber (9º ano, p. 125)

Entende-se que os livros didáticos podem explorar mais as interpretações razão e taxa por meio de atividades que abordem relações quantitativas como distância, tempo e velocidade, quantidades estas que não podem ser medidas de forma direta, isto é, necessitam de comparações, uma relação entre duas grandezas.

Diante das análises, pode-se afirmar que há ênfase para a interpretação parte-todo, assim como, indicam as pesquisas mapeadas (Capítulo 1) em detrimento das demais interpretações. Ressalta-se a necessidade de rever o ensino de número racional na forma fracionária, visto que, conforme Lamon (2008), se o trabalho inicia-se pela interpretação razão, os estudantes teriam mais facilidade no entendimento das outras interpretações e no desenvolvimento de raciocínios matemáticos, por exemplo, raciocínio proporcional.

Os alunos que estudaram as razões e taxas como sua primeira interpretação dos números racionais desenvolveram uma noção muito forte de classes de equivalência e de proporcionalidade em geral. Eles facilmente mudavam entre razão e comparações parte-todo e não tinham problemas com a adição e subtração de frações. A maioria deles desenvolveram suas próprias formas de raciocínio sobre a multiplicação e divisão. Por exemplo, para multiplicar $\frac{3}{8} \cdot \frac{2}{3}$, eles usaram o raciocínio proporcional. (LAMON, 2008, p.210, tradução nossa)

Constata-se, também, que situações envolvendo interpretações do número racional são abordadas em números menores ao longo da Educação Básica, mostrando que tenta-se finalizar as abordagens dos conceitos/conteúdos em um único ano e quando há retomadas, estas apresentam situações equivalentes, sem variação do grau de complexidade e do tipo de

representação utilizada. Destaca-se, também, ênfase para o tratamento numérico e conversões da representação da língua natural para a numérica.

3.2 ANÁLISE DOS LIVROS DIDÁTICOS QUANTO AOS INVARIANTES OPERATÓRIOS E OPERAÇÕES

Para apresentar os dados quanto aos invariantes operatórios e operações, organizou-se o Quadro 9. Cabe ressaltar que algumas situações categorizadas no Quadro 8 também foram categorizadas em relação aos invariantes operatórios e/ou operações, pois o contexto da situação exigia a identificação da interpretação do número racional.

Quadro 9: Invariantes Operatórios e Operações

Livro	Ordem	Equivalência	Operação	Operações					
				Adição	Subtração	Multiplicação	Divisão	Potenciação	Radiciação
5º ano	1	53	128	7	16	69	36	0	0
6º ano	41	59	149	22	19	90	18	0	0
7º ano	29	34	220	21	14	125	56	3	1
8º ano	0	0	1	0	0	0	1	0	0
9º ano	0	7	12	0	0	0	12	0	0

Com base nos dados apresentados no Quadro 9, verifica-se que há ênfase para as operações, confirmando assim a predominância dos tratamentos numéricos, conforme destacado pelo PNLD, exposto no Capítulo 2.

Quanto aos invariantes operatórios, cabe salientar que algumas atividades também envolveram ordem, sendo categorizado tanto neste invariante quanto em outro. Estas atividades, em sua maioria, solicitam que os estudantes determinem a equivalência dos números racionais para então colocar em ordem, seja ela crescente ou decrescente (Figura 28).

Figura 28: Atividade do livro didático ordem e equivalência

49 Em cada item, escreva as frações em ordem crescente. Para isso, utilize o símbolo < entre as frações.

a) $\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{5}{4}, \frac{11}{4}, \frac{7}{4}, \frac{1}{4} < \frac{3}{4} < \frac{5}{4} < \frac{7}{4} < \frac{11}{4}$

b) $\frac{13}{13}, \frac{1}{13}, \frac{0}{13}, \frac{27}{13}, \frac{6}{13}, \frac{0}{13} < \frac{1}{13} < \frac{6}{13} < \frac{13}{13} < \frac{27}{13}$

c) $\frac{50}{25}, \frac{37}{25}, \frac{14}{25}, \frac{250}{25}, \frac{5}{25}, \frac{5}{25} < \frac{14}{25} < \frac{37}{25} < \frac{50}{25} < \frac{250}{25}$

d) $\frac{7}{18}, \frac{18}{18}, \frac{21}{18}, \frac{3}{18}, \frac{1}{18}, \frac{1}{18} < \frac{3}{18} < \frac{7}{18} < \frac{18}{18} < \frac{21}{18}$

Fonte: Coleção Vontade de Saber (6º ano, p.140)

No livro do 5º ano, pode-se afirmar que, quanto aos invariantes, 29,12% das atividades explora a equivalência e 0,55% ordem. As operações são verificadas em 70,33% das atividades categorizadas. Dentre estas atividades, 5,45% solicitam que os estudantes resolvam

as situações por meio de uma adição, 12,5% subtração, 53,90% multiplicação e 28,15% divisão. Constata-se que a adição é a operação que foi menos abordada e a multiplicação é a que mais foi abordada. Isto se dá porque as atividades que envolvem a interpretação de operador multiplicativo utilizam esta operação para a resolução (Figuras 29, 30, 31).

Figura 29: Atividade do livro didático envolvendo operador multiplicativo

Resolva em seu caderno.

1. Na semana passada, Carlos ganhou uma caixa com 24 bombons. Já comeu $\frac{2}{3}$ dos bombons. Quantos bombons Carlos já comeu? E quantos restam?

Fonte: Coleção Bem Me Quer (5º ano, p. 133)

Figura 30: Atividade do livro didático envolvendo operador multiplicativo

2. Ígor arrumou 24 bolinhas em 4 saquinhos, pondo a mesma quantidade em cada um.

a) Quantas bolinhas ele colocou em cada saquinho?

b) Quanto é: $\frac{1}{4}$ de 24 bolinhas?

c) Quanto é: $\frac{2}{4}$ de 24 bolinhas?

d) Quanto é: $\frac{3}{4}$ de 24 bolinhas?

e) Quanto é: $\frac{4}{4}$ de 24 bolinhas?

Fonte: Coleção Bem Me Quer (5º ano, p. 130)

Figura 31: Atividade do livro didático envolvendo operador multiplicativo

2. Calcule as frações dos números abaixo e, depois, mostre como pensou para resolvê-las.

a) $\frac{2}{3}$ de 9 *6* c) $\frac{2}{5}$ de 50 *20* e) $\frac{3}{8}$ de 16 *6*

b) $\frac{3}{4}$ de 20 *15* d) $\frac{5}{7}$ de 21 *15* f) $\frac{9}{10}$ de 30 *27*

Fonte: Coleção Bem Me Quer (5º ano, p. 132)

Lamon (2009) sugere também situações-problemas que envolvam comparações, conforme a Figura 32. Pode-se observar que é abordada uma situação na qual o estudante deve comparar os números racionais e verificar a diferença entre os números naturais, explorando assim os invariantes operatórios de forma diferente de atividades do tipo calcule, ordene, compare, entre outros.

Figura 32 Atividade proposta por Lamon envolvendo comparações

3. Ty, na terceira série, disse que 9 é maior do que 5, $\frac{1}{9}$ é maior do que $\frac{1}{5}$. O que ele não entende, e o que você vai dizer a ele?


Fonte: Lamon (2008 p. 42, tradução nossa)

Outra forma de abordar comparações de quantidades, sugerida por Lamon (2008), é exemplificada na Figura 33. Nesta atividade os estudantes devem criar estratégias para escolher o grupo que tem mais cookies na sacola. Esta situação é um exemplo de invariante operatório, pois o estudante deve comparar os pacotes de cookies e verificar qual deles ele deve escolher.


Figura 33: Atividade proposta por Lamon explorando comparações

7. Tom e três amigos estão compartilhando os cookies do pacote de Tom. Jenny e seus quatro amigos estão compartilhando os biscoitos que Jenny tem em sua bolsa. O professor diz-lhe para se juntar a um dos grupos.

Tom's bag



Jenny's bag



a. Qual grupo é melhor para você?
 b. O que poderia melhor dizer?
 c. Encontre uma maneira de medir o que significa ser o melhor grupo.

Fonte: Lamon (2008, p.43)

Esta atividade proporciona ao estudante reorganizar grandezas, pois como as quantidades de cookies são diferentes em cada pacote e o número de pessoas em que será dividido, também, não é o mesmo, o estudante deve encontrar uma fração equivalente para cada pacote e realizar a comparação. Assim, o estudante pode responder aos questionamentos da atividade.

No livro didático do 5º ano, quando as operações são abordadas, o autor parte de uma situação-problema que somente serve para ilustrar e apresentar o algoritmo, em seguida, são propostas atividades do tipo calcule, ou seja, ênfase no algoritmo.


Para Lamon (2007, 2008) as situações devem remeter significado a operação, sendo mais que apenas o emprego de um algoritmo. A pesquisadora sugere que antes de introduzir o algoritmo de adição ou subtração, uma forma de trabalhar estas operações seria na reta numérica ou com o Frac Soma 235⁷, por exemplo, destacando o invariante equivalência e não apenas o cálculo do mínimo múltiplo comum.







Conforme os dados dos invariantes e operações presentes no livro do 6º ano, 16,47% exploram ordem e 23,69% equivalência. As operações estão presentes em 59,84% das atividades. Destas, 14,76% envolvem adição, 12,75% subtração, 60,40% multiplicação e 12,09% divisão. A partir dos dados, pode-se afirmar que, como no livro do 5º ano, há mais atividades envolvendo operações. Vale salientar que, neste volume, verifica-se o aumento de

⁷ Material manipulável utilizado para o ensino de frações e operações com as mesmas.

atividades sobre ordem, isso se dá porque atividades como as expostas nas Figuras 34 e 35 são muito presentes.

Figura 34: Atividade do livro didático explorando comparação

48 Copie os itens substituindo cada  pelo símbolo > ou <.

a) $\frac{3}{7}$  $\frac{5}{7}$ <
 b) $\frac{9}{4}$  $\frac{1}{4}$ >
 c) $\frac{5}{12}$  $\frac{7}{12}$ <
 d) $\frac{2}{37}$  $\frac{4}{37}$ <
 e) $\frac{49}{30}$  $\frac{19}{30}$ >
 f) $\frac{81}{51}$  $\frac{18}{51}$ >

Fonte: Coleção Vontade de Saber (6º ano, p. 140)

Figura 35: Atividade do livro didático envolvendo a operação de multiplicação

75 Efetue os cálculos e simplifique o resultado quando possível.

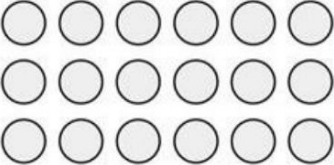
a) $\frac{69}{70} \cdot \frac{52}{18} \cdot \frac{299}{105}$ d) $\frac{9}{35} \cdot \frac{30}{9} \cdot \frac{6}{7}$ b) $\frac{81}{52} \cdot \frac{26}{117} \cdot \frac{9}{26}$ e) $\frac{84}{165} \cdot \frac{7}{12} \cdot \frac{99}{189} \cdot \frac{7}{45}$
 c) $\frac{9}{28} \cdot \frac{49}{15} \cdot \frac{21}{20}$ f) $7 \cdot \frac{69}{70} \cdot \frac{52}{18} \cdot \frac{299}{15}$

Fonte: Coleção Vontade de Saber (6º ano p. 149)

Outra forma de trabalhar os invariantes operatórios, conforme Lamon (2008), é explorando a noção de unitização, pois esta desempenha um papel importante em vários dos processos necessários para compreender números racionais, especialmente, no particionamento (dividir uma quantidade em outras quantidades exaustivamente) e na equivalência. A Figura 36 mostra uma sugestão de atividade na qual se pode explorar tal conceito. Segundo a pesquisadora, estudantes que compreendem o conceito de equivalência desenvolvem, mais rápido, o entendimento de números racionais como quocientes.

Figura 36: Atividade proposta por Lamon explorando a equivalência

Os pontos na imagens são outra atividade de unitização. Mais uma vez, visualização e raciocínio são importantes, bem como raciocinando em voz alta.



*Diga-me como ver 1/3.
 *Diga-me como ver 1/9.
 *Diga-me como ver 1/36.

Fonte: Lamon (2008, p. 76, tradução nossa)

As operações com os números racionais são apresentadas no livro didático do 6º ano da mesma forma que no livro do 5º ano, por meio de uma situação-problema do cotidiano, cujo objetivo é a apresentação do algoritmo. As atividades propostas sugerem o emprego do

algoritmo para resolução. Assim como as atividades propostas no livro do 5º ano, verifica-se que a maioria é do tipo calcule.

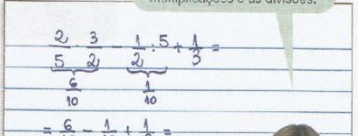
No livro do 7º ano, constata-se que 10,25% das atividades exploram o invariante ordem, 12,01% equivalência e 77,74% operações. Em relação as operações, 9,55% estão relacionadas a adição, 6,36% subtração, 56,82% multiplicação, 25,45% divisão, 1,36% potenciação e 0,46% radiciação. Estas são, em sua maioria, do tipo calcule e envolvem expressões numéricas, conforme exemplos nas Figuras 37 e 38.

Figura 37: Atividade do livro didático abordando operações

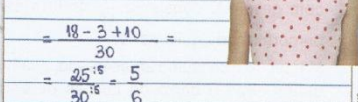
49 Observe como Janete resolveu a expressão

$$\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{2} - \frac{1}{2} : 5 + \frac{1}{3}$$

Inicialmente, resolvo as multiplicações e as divisões.



Em seguida, efetuo as adições e subtrações. Por fim, simplifico o resultado.



De maneira semelhante, resolva as expressões.

a) $\frac{6}{7} \cdot \frac{1}{3} + \frac{9}{4} : \frac{3}{2} - \frac{5}{14}$

b) $\frac{4}{3} + \frac{6}{5} \cdot \frac{5}{9} + \frac{1}{4} : \frac{3}{8}$

c) $\frac{7}{2} : \frac{21}{6} - \frac{7}{8} + \frac{9}{10} \cdot \frac{5}{6}$

d) $\frac{1}{2} \cdot \frac{16}{3} - \frac{3}{4} : \frac{5}{8} - \frac{7}{15}$

e) $\frac{12}{7} : \frac{3}{14} + \frac{6}{11} - \frac{18}{5} \cdot \frac{20}{9}$

f) $\frac{17}{3} - \frac{3}{4} : \frac{1}{6} + \frac{3}{10} : \frac{9}{5}$

Fonte: Coleção Vontade de Saber (6º ano p. 28)

Figura 38: Atividade do livro didático explorando operações

54 Observe como podemos resolver a expressão

$$\left(\frac{3}{4} + \frac{2}{5} : \frac{8}{10}\right)^3$$

Inicialmente, resolvemos os cálculos internos aos parênteses. Em seguida, calculamos a potência.

$$\left(\frac{3}{4} + \frac{2}{5} : \frac{8}{10}\right)^3 = \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\right)^3 = \left(\frac{5}{4}\right)^3 = \frac{5^3}{4^3} = \frac{125}{64}$$

De maneira semelhante, resolva as expressões.

a) $\left(\frac{2}{3} \cdot \frac{15}{6} - \frac{1}{3}\right)^4$

b) $\left(\frac{5}{6} - \frac{3}{4} : \frac{9}{2}\right)^5$

c) $\left(\frac{4}{3} \cdot \frac{5}{16} + \frac{7}{4}\right)^2$

d) $\left(\frac{1}{9} + \frac{6}{15} : \frac{3}{5}\right)^3$

e) $\left(\frac{7}{8} : \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right)^4$

f) $\left(\frac{3}{4} \cdot \frac{8}{3} - \frac{5}{12} : \frac{10}{3}\right)^2$

Fonte: Coleção Vontade de Saber (6º ano p. 30)

Nas atividades expostas nas Figuras 37 e 38, pode-se verificar que o autor do livro didático apresenta um exemplo de como se deve resolvê-las. Assim, os estudantes somente seguem o passo a passo, não atribuindo significado ao que está sendo proposto, tornando-se uma atividade repetitiva, limitando a possibilidade de serem apresentadas diferentes estratégias de resolução.

As operações exploradas, no livro do 7º ano, seguem a mesma proposta apresentada no livro do 6º ano, no qual o autor, nas atividades seguintes a explanação do conceito, apresenta

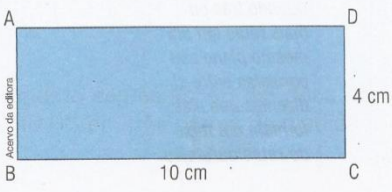
um exemplo de resolução da atividade e prima pelo emprego do algoritmo. Este volume expõe situações diversificadas, por exemplo, atividades que envolvem dados populacionais relacionados a frações para explorar as operações, sendo este um diferencial do volume em relação ao 6º ano.

Nos capítulos analisados do livro didático do 8º ano, verifica-se apenas uma atividade envolvendo a operação de divisão. Esta atividade é apresentada na Figura 24. Como este livro didático não apresenta um capítulo específico de números racionais, não há proposta para o ensino de operações com os mesmos.

No livro do 9º ano, verifica-se que 36,84% envolvem equivalência e 63,16% estão relacionadas a operações. É importante ressaltar que todas as operações são de divisão, conforme exemplo observado na Figura 39.

Figura 39: Atividade do livro didático envolvendo razão

Observe o retângulo ABCD.



a) Qual a razão entre a medida do lado maior (comprimento) e a do lado menor (largura) desse retângulo? $\frac{10}{4} = 2,5$

b) Se aumentarmos 3 cm em cada lado desse retângulo, a razão entre o comprimento e a largura permanecerá a mesma? Justifique. Não, pois $\frac{13}{7} \neq \frac{10}{4}$.

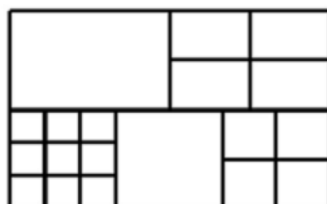
c) Calcule a largura de um retângulo com 60 cm de comprimento de modo que a razão entre o comprimento e a largura seja igual à do retângulo ABCD. 24 cm

Fonte: Coleção Vontade de Saber (9º ano p. 125)

Em relação às operações de multiplicação e divisão com número racional, Lamon (2008) sugere que no início do trabalho sejam apresentadas, aos estudantes, situações que envolvam o registro figural (Quadro 10).

Quadro 10: Operação de multiplicação envolvendo registro figural

Você pode ver $\frac{1}{4}$ de $\frac{1}{3}$ de $\frac{1}{2}$? Sombreie e, então, indique o produto $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}$.



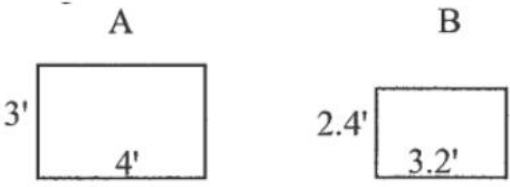
Fonte: Lamon (2008 p. 149, tradução nossa)

Na coleção de livros didáticos analisada não foram verificadas atividades deste tipo. As atividades, em sua maioria, destacavam o registro numérico.

Lamon (2008), também, sugere que é possível trabalhar os invariantes do número racional, relacionando com a geometria, como mostra a atividade reproduzida na Figura 40. Vale destacar que o capítulo que trata de semelhança de figuras, contido no volume 4 da coleção, não foi analisado, mas acreditava-se que nos demais volumes seriam identificadas atividades que explorassem a ampliação e redução de figuras ao tratar de número racional, no entanto, estas atividades não foram propostas pelo autor.

Figura 40: Atividade proposta por Lamon abordando semelhança

- Encolher o retângulo A utilizando um fator escalar de 0,8.



The diagram shows two rectangles, A and B, positioned side-by-side. Rectangle A is on the left and has a vertical side labeled '3'' and a horizontal side labeled '4''. Rectangle B is on the right and has a vertical side labeled '2.4'' and a horizontal side labeled '3.2''. The rectangles are drawn with thin black lines and are not filled.

Fonte: Lamon (2008 p. 196, tradução nossa)

Conforme os dados apresentados pode-se observar que os livros didáticos analisados deixam a desejar pela forma que exploram os invariantes operatórios e as operações em função da ênfase dada aos algoritmos nas operações e nos invariantes.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho teve como objetivo analisar quais interpretações do número racional estão presentes nas coleções de livros didáticos aprovados pelo Plano Nacional do Livro Didático (PNLD), escolhidas em uma escola estadual de Ensino Fundamental e Médio de um município da fronteira oeste do Rio Grande do Sul. Para cumprir este objetivo, buscou-se realizar um mapeamento em periódicos da Educação Matemática e a elaboração de um referencial teórico-metodológico.

Os subsídios teóricos fundamentaram-se nas ideias de Lamon quanto a interpretações dos números racionais, sendo estas de suma importância para o desenvolvimento de diversos raciocínios matemáticos, por exemplo, o raciocínio proporcional (Capítulo 1).

Optou-se por realizar uma análise de conteúdos fundamentada na teoria de Bardin, sendo que, na pré-análise, foi realizada a escolha de quais coleções de livros didáticos seriam analisadas. Na exploração do material, foram elencados os critérios de análises para as coleções e no tratamento dos resultados e interpretações, os dados foram organizados em quadros e seus percentuais dispostos no corpo do texto (Capítulo 2).

No tratamento dos resultados, pode-se observar que a interpretação parte-todo é a que possui maior ênfase, porém não é abordada em todos os volumes. Já a interpretação razão, apesar de possuir menor ênfase, foi explorada em todos os volumes.

Pode-se observar que, nos livros didáticos, há poucas atividades que requerem conversões nos dois sentidos, pois a transformação cognitiva valorizada é o tratamento, com destaque ao numérico, conforme pontuado no Plano Nacional do Livro Didático. Estes tratamentos, normalmente, encontram-se nas atividades do tipo calcule que não abordam nenhuma interpretação dos números racionais e focam nos algoritmos, o que pode limitar a resolução das atividades e elaboração de conjecturas.

Quanto aos invariantes operatórios e operações, observou-se que os invariantes mais abordados são ordem e comparação. Em relação as operações, a maioria das atividades envolve multiplicação, isto porque as atividades que abordam a interpretação operador multiplicativo foram categorizadas como operação de multiplicação.

Acredita-se que da forma como as atividades são propostas e organizadas nas coleções, a compreensão dos números racionais fica prejudicada. Considera-se que esta forma não contribui para o desenvolvimento, entre outros conceitos matemáticos, do raciocínio proporcional.

Observou-se que alguns nós da Rede de conceitos elaborada por Lamon não foram abordados nos livros didáticos analisados, por exemplo, o Raciocínio Progressivo e Regressivo em função da ênfase dada à utilização de algoritmos.

Devido a importante temática do trabalho além do baixo índice de produções relacionadas a ele, pretende-se, como futuras pesquisas, analisar protocolos de estudantes do 5º e 6º Anos, quanto a sequências de ensino, abordando as diferentes interpretações dos números racionais.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BARDIN, L. *Análise de Conteúdo*. Editora Persona: Lisboa, 1977.

BOLETIM DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. Rio Claro:UNESP. Quadrimestral. 1985-. Disponível em: <<http://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/index>> Acessado em: Setembro/2015.

BOLETIM: GRUPO DE ESTUDOS E PESQUISAS EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. Rio de Janeiro:UFRJ. Semestral. 1976-. Disponível em: <<http://www.ufrj.br/SEER/index.php?journal=gepem&page=index>> Acessado em: Setembro/2015.

BONOMI, M. C. **Dificuldades no Ensino-Aprendizagem de Matemática: A Semiótica pode ajudar?** In: Mostra do CAEM 2015, 2015, São Paulo. Mostra do CAEM 2015 - 30 anos de formação continuada de professores de Matemática. São Paulo: IME-USP, 2015. v. 1. p. 1-10.

BORDEAUX, A. L. [et al.]. **Novo Bem-me-quer Matemática: 5º ano**. 2ª Ed. São Paulo: Editora do Brasil, 2010.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Ministério da Educação. Brasília, 2015.

_____. **Guia de Livros Didáticos: PNLD 2010. Alfabetização Matemática e Matemática**. Brasília : Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2009.

_____. **Guia de livros didáticos : PNLD 2014 : matemática**. – Brasília : Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2013.

_____. **Ministério da Educação e do Desporto**. Parâmetros Curriculares Nacionais-Matemática 5ª a 8ª série. Brasília: SEF, 1998.

_____. **PCN+ Ensino Médio-Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais**. Ciência da Natureza, Matemática e Tecnologia. Brasília: MEC/Semtec, 2002.

_____. **Secretaria de Educação Fundamental**. Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática / Secretaria de Educação Fundamental. – Brasília: MEC/SEF, 1997.

CARAÇA, Bento de Jesus. **Conceitos Fundamentais da Matemática**. Tipografia da Matemática. Lisboa, 1951.

DARO, Phil. **Base Nacional Comum Curricular**. Comentários sobre a organização do documento. Ministério da Educação. Brasília, 2016.

DUVAL, R. **Registros de Representação Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática**. IN: Machado, Silvia Dias Alcântara (org.). *Aprendizagem em Matemática: registros de representação semiótica*- Campinas, São Paulo. Papyrus, pp. 11-33, 2003.

EDUCAÇÃO MATEMÁTICA EM REVISTA. Canoas: SBEM/RS. Semestral. 2009-. Disponível em: <http://sbemrs.org/revista/index.php/2011_1/index> Acessado em: Setembro/2015.

GIL, A. C. **Métodos e técnicas de pesquisa social**. São Paulo: Atlas, 1989.

GARNICA, A. V. M. **Pesquisa qualitativa e Educação (Matemática): de regulações, regulamentos, tempos e depoimentos**. *Mimesis*, Bauru, v. 22, n. 1, p. 35- 48, 2001.

LAMON, S. J. Rational Numbers and Proportional Reasoning: Toward a Theoretical Framework for Research. In: LESTER, F. K. (org.). **Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning: a Project of the National Council of Teachers of Mathematics**. Charlotte:IAP/NCTM, 2007.

_____. **Teaching Fractions and Ratios for Understanding: Essential Content Knowledge and Instructional Strategies for Teachers**. 2. ed. Londres:Lawrence Erlbaum Associates, 2008.

MAGINA, S.; CAMPOS, T. **A Fração nas Perspectivas do Professor e do Aluno dos Dois Primeiros Ciclos do Ensino Fundamental**. Boletim de Educação Matemática, vol. 21, núm. 31, pp. 23-40. Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho Rio Claro, Brasil, 2008.

MOREIRA, P. C.; DAVID, M. M. M. S. **A formação matemática do professor: licenciatura e prática escolar**. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

OLIVEIRA, L. M. C. P. de. **Aprendizagens no Empreendimento Estudo do Raciocínio Proporcional**. Londrina:UEL. 2014. 206 p. Dissertação. (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) Centro de Ciências Exatas, Universidade Estadual de Londrina.

ONUCHIC, L. de la Rosa; Gomes ALLEVATO, N. S.: **As Diferentes "Personalidades" do Número Racional Trabalhadas através da Resolução de Problemas**. Boletim de Educação Matemática, vol. 21, núm. 31, pp. 79-102. Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho Rio Claro, Brasil, 2008.

REVISTA DE ENSINO D CIÊNCIAS E MATEMÁTICA. Canoas/RS: ULBRA. Quadrimestral. 1999-. Disponível em: <<http://www.periodicos.ulbra.br/index.php/acta/index>>. Acessado em: Setembro/2015.

REVISTA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA E TECNOLOGIA IBEROAMERICANA. Recife: UFPE. Quadrimestral. 2010-. Disponível em: <<http://www.gente.eti.br/revistas/index.php/emteia/index>> Acessado em: Setembro/2015.

REVISTA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA PESQUISA. São Paulo: USP. Quadrimestral. 1999-. Disponível em: <<http://revistas.pucsp.br/index.php/emp/index>>. Acessado em: Setembro/2015.

REVISTA ELETRÔNICA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. Florianópolis: UFSC. Semestral. 2006-. Disponível em: <<https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/index>>. Acessado em: Setembro/2015.

SILVA, M. J. F., ALMOULOUD, S. A. **As operações com números racionais e seus significados a partir da concepção parte-todo.** IN: Bolema, Rio Claro, ano 21, nº 31, 2008, p. 55 a 78.

SOARES, M. A. da S. **Os Números Racionais e os Registros de Representação Semiótica: Análise de Planejamentos das Séries Finais do Ensino Fundamental.** Dissertação a título de Mestrado em Educação nas Ciências da Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul (Unijuí), 2007.

SOUZA, J. R de [et al.]. **Vontade de Saber Matemática.** 6º, 7º, 8º e 9º ano. 2ª Ed. São Paulo: FTD, 2012

VERGNAUD, G. **A criança, a Matemática e a Realidade:** Problemas do Ensino da Matemática na Escola Elementar. Tradução Maria Lucia Faria Moro. Curitiba: UFPR, 2009a. 322 p.