

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO PAMPA**

**ROSA ELAINE VARGAS DOS SANTOS**

**O CAOS NUMA MÁQUINA DE CATÁSTROFE**

**Itaqui  
2021**

**ROSA ELAINE VARGAS DOS SANTOS**

**O CAOS NUMA MÁQUINA DE CATÁSTROFE**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Matemática - Licenciatura da Universidade Federal do Pampa, como requisito parcial para obtenção do Título de Licenciada em Matemática.

Orientador: Karla Beatriz Vivian Silveira

**Itaqui  
2021**

Ficha catalográfica elaborada automaticamente com os dados fornecidos  
pelo(a) autor(a) através do Módulo de Biblioteca do  
Sistema GURI (Gestão Unificada de Recursos Institucionais).

S237c Santos, Rosa Elaine Vargas dos  
O Caos e a máquina de catástrofe / Rosa Elaine Vargas dos  
Santos.  
46 p.

Trabalho de Conclusão de Curso(Graduação)-- Universidade  
Federal do Pampa, MATEMÁTICA, 2021.  
"Orientação: Karla Beatriz Vivian Silveira".

1. Caos. 2. Funções Vetoriais. 3. Forças de Equilíbrio. 4.  
Torque. I. Título.

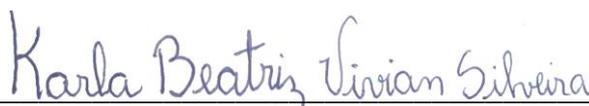
**ROSA ELAINE VARGAS DOS SANTOS**

**O CAOS NUMA MÁQUINA DE CATÁSTROFE**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Matemática - Licenciatura da Universidade Federal do Pampa, como requisito parcial para obtenção do Título de Licenciada em Matemática.

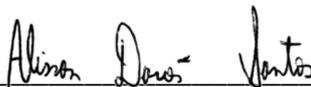
Trabalho de Conclusão de Curso defendido e aprovado em: 8 de maio de 2021.

Banca examinadora:



---

Profa. Ma. Karla Beatriz Vivian Silveira  
Orientador  
(UNIPAMPA)



---

Prof. Dr. Alisson Darós dos Santos  
(UNIPAMPA)



---

Prof. Me. Leonel Giacomini Delatorre  
(UNIPAMPA)

Dedico este trabalho ao meu esposo e  
filhos.

## AGRADECIMENTO

Agradeço primeiramente a Deus, por ter permitido que eu tivesse saúde e determinação para alcançar meus objetivos.

Ao meu pai (*in memoriam*) e minha mãe pelo carinho, compreensão e incentivo.

Aos meus irmãos e irmãs que me apoiaram nos momentos difíceis.

Ao meu esposo pelo amor e pela compreensão da minha ausência, enquanto me dedicava aos meus estudos. Muito obrigada por contribuir com o trabalho de conclusão de curso, fabricando a máquina de catástrofe para a realização do experimento.

Aos meus amados filhos, noras e neto, pela presença e amor incondicional na minha vida sempre.

A minha querida professora orientadora, que apesar da intensa rotina de sua vida acadêmica aceitou me orientar neste trabalho. As suas valiosas contribuições, que fizeram toda a diferença.

Também quero agradecer à Universidade Federal do Pampa (UNIPAMPA) e a todos os professores do meu curso pela elevada qualidade do ensino ofertado.

E a todos os meus amigos que fizeram parte da minha história, vibrando pela minha conquista.

“Os sonhos não determinam o lugar em que você vai estar, mas produzem a força necessária para tirá-lo do lugar em que está”.

Augusto Cury

## RESUMO

A presente pesquisa tem por objetivo investigar e analisar os pontos  $B_n$  que correspondem aos pontos de colapso produzidos na mudança brusca de posição de um ponto no disco de uma máquina de catástrofe, por meio da variação da trajetória horizontal do lápis no papel. Para tanto, buscou-se fundamentação teórica sobre o caos e a máquina de catástrofe, o movimento circular, considerando o movimento rotacional e o movimento no espaço. Neste sentido, buscou-se compreender as funções vetoriais e resolver integrais de linha, considerando a força elástica e o torque que agem na máquina de catástrofe. A metodologia adota pressupostos de uma pesquisa bibliográfica e experimental, inicialmente desenvolvida por análise dos dados coletados na máquina e, posteriormente, estudado 4 (quatro) casos envolvendo a integral de linha. No primeiro caso, priorizou-se a aplicação da segunda lei de Newton, usando a aceleração obtida por meio do experimento. No 2º caso, aplicou-se módulo do produto vetorial (torque) entre  $\vec{F}(t) = m \cdot \vec{a}(t)$  e  $\vec{u}(t) = \Delta\vec{r}$  na integral de linha. Em relação ao 3º caso, considerou-se a integral do produto do módulo da força resultante na segunda lei de Newton, tomando a função  $x(y(t))$ , no mesmo intervalo do ângulo  $\theta$  do disco. E, no 4º caso, aplicou-se novamente torque na integral de linha, porém, usando o módulo do produto vetorial entre  $\vec{F}(t) = m \cdot \vec{F}_{res}(t)$  e  $\vec{u}(t) = \Delta\vec{r}$ . A coleta de dados deu-se por meio de anotações das observações da pesquisadora durante o experimento e plotou-se os pontos no software GeoGebra. Quanto aos resultados, verificou-se que o torque determina uma catástrofe acentuada e que o ponto material sempre terá um único ponto de equilíbrio, além de um ponto de equilíbrio estável e instável no 1º e 4º quadrantes. Verificou-se que a força restauradora dos elásticos  $e_1$  e  $e_2$  contribuiriam para a existência do ponto de colapso. Concluiu-se que  $s\left(\frac{\theta}{\omega}\right) = 10 \cdot \theta \cdot \text{sen}\left(\frac{\theta}{\omega}\right)$  é a equação que melhor corresponde aos dados coletados na máquina de catástrofe. Também, se constatou a importância da aplicação desse experimento no ensino médio para trabalhar os conceitos relacionados aos vetores, modelar equações no software GeoGebra, trabalhando de forma interdisciplinar. Em relação a graduação, pode-se compreender a resolução e aplicabilidade da integral de linha, as relações entre a geometria analítica e o cálculo vetorial, sendo motivador e desafiador.

Palavras-Chave: Caos. Funções Vetoriais. Forças de Equilíbrio. Torque.

## ABSTRACT

This work has objective to investigate and analyze the points  $B_n$  that corresponds to the collapse points produced in the sudden change of position of a point on the disk of a catastrophe machine, through the variation of the horizontal trajectory of the pencil on paper. To this, a theoretical foundation was sought about chaos and the catastrophe machine, the circular movement, considering the rotational movement and the movement in space. In this sense, we sought to understand the vector functions and solve line integrals, considering the elastic force and torque acting on the catastrophe machine. The methodology adopts assumptions of a bibliographic and experimental research, initially developed by analyzing the data collected in the machine and, later, studied 4 (four) cases involving the line integral. In the first case, the application of Newton's second law was prioritized, using the acceleration obtained through the experiment. In the 2nd case, a vector product module (torque) was applied between  $\vec{F}(t) = m \cdot \vec{a}(t)$  and  $\vec{u}(t) = \Delta\vec{r}$  in the line integral. In relation to the 3rd case, we considered the product integral of the resultant force modulus in Newton's second law, taking the function  $x(y(t))$ , in the same interval of  $\theta$  of the disk. And, in the 4th case, torque was again applied to the line integral, however, using the vector product module between  $\vec{F}(t) = m \cdot \vec{F}_{res}(t)$  and  $\vec{u}(t) = \Delta\vec{r}$ . Data collection took place through notes of the researcher's observations during the experiment and the points were plotted in the GeoGebra software. As for the results, it was verified that the torque determines an accentuated catastrophe and that the material point will always have a single equilibrium point, in addition to a stable and unstable equilibrium point in the 1st and 4th quadrants. It was verified that the restoring strength of the elastics  $e_1$  and  $e_2$  contributed to the existence of the collapse point. It was concluded that  $s\left(\frac{\theta}{\omega}\right) = 10 \cdot \theta \cdot \text{sen}\left(\frac{\theta}{\omega}\right)$  is the equation that best corresponds to the data collected in the catastrophe machine. Also, the importance of applying this experiment in high school was found to work on concepts related to vectors, modeling equations on the GeoGebra software, working in an interdisciplinary way. Regarding graduation, one can understand the resolution and applicability of the line integral, the relationships between analytical geometry and vector calculus, being both motivating and challenging.

Keywords: Chaos. Vector Functions. Balance forces. Torque.

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO .....</b>	<b>11</b>
<b>2</b>	<b>REFERENCIAL TEÓRICO.....</b>	<b>15</b>
<b>2.1</b>	<b>O Caos e a máquina de catástrofe.....</b>	<b>15</b>
<b>2.2</b>	<b>Movimento Circular: vetores velocidade e aceleração.....</b>	<b>18</b>
<b>2.2.1</b>	<b>Movimento Rotacional de um Disco: velocidade angular e aceleração tangencial.....</b>	<b>20</b>
<b>2.2.2</b>	<b>Movimento no Espaço: Funções Vetoriais e a Integral de Linha.....</b>	<b>22</b>
<b>2.2.3</b>	<b>Força Elástica e o Torque.....</b>	<b>25</b>
<b>3</b>	<b>METODOLOGIA .....</b>	<b>28</b>
<b>4</b>	<b>APRESENTAÇÃO DA PESQUISA E ANÁLISE DOS RESULTADOS .....</b>	<b>32</b>
<b>5</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS .....</b>	<b>45</b>
	<b>REFERÊNCIAS.....</b>	<b>46</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Algumas equações não lineares se apresentam em sistemas conhecidos e são sensíveis às condições iniciais, visto que uma pequena perturbação pode gerar uma grande diferença em resultados posteriores. Morais (2014, p. 59) define o comportamento caótico por meio de duas propriedades fundamentais: aperiodicidade e a sensibilidade em situações iniciais.

A periodicidade caracteriza-se, essencialmente, na volta ao ponto inicial após um determinado número de iterações, podendo assim se fazer suposições a partir de condições iniciais. Por outro lado, os sistemas aperiódicos são considerados caóticos por não existir nem um tipo de padrão ou período, que dificulta realizar previsões futuras. Quanto à sensibilidade as condições iniciais, Morais (2014) reconhece esta como a mais importante da teoria do caos, porque os instrumentos utilizados para realizarem as medições são limitados, o que torna difícil saber com precisão o ponto inicial de um sistema – mesmo que se conheça o comportamento inicial.

A proposta deste trabalho final de curso consiste no desenvolvimento teórico e experimental da investigação na temática “A Equação não linear que determina pontos de colapso na máquina de catástrofe”. Trata-se de uma equação que envolve duas ou mais variáveis, por relacionar as grandezas vetoriais: tempo, distância, velocidade, aceleração, atrito, tensão,... As equações não lineares são aplicadas e estudadas na física, na química, na biologia, na medicina, entre outras áreas.

A máquina de catástrofe foi criada pelo matemático britânico Christopher Zeeman (Idem 1969) para realizar medições, porém observou-se que pequenas alterações iniciais provocavam grandes transtornos, verificando assim que houve uma catástrofe (idem, 2014, p. 72) e estes grandes transtornos proporcionavam o caos. O estudo do caos (ocorrido na década de 60) tornou-se necessário, pois a partir dele, iniciaram-se as pesquisas envolvendo equações não lineares, cujo comportamento das soluções é totalmente determinado pelas condições iniciais. Nesse sentido, Von Neumann (1963 apud FEYNMAN, 1989, p. 21) salientou que “[...] o carácter de equação [...] varia simultaneamente em todos os aspectos relevantes: tanto a ordem como o grau se modificam. Portanto devemos esperar grandes dificuldades matemáticas [...]”. As pequenas alterações na máquina de catástrofe podem ser descritas por uma equação que apresentam esses aspectos, sendo esta uma equação não linear.

O presente estudo se justificou pela curiosidade em modelar a equação não linear que representa o caos na máquina de catástrofe. A leitura da dissertação intitulada “Equações de diferenças, caos e fractais” foi motivadora para realizar a investigação sobre a máquina e o caos, e por meio dela, as equações não lineares obtidas pela integral de linha. Pesquisas registram que o estudo do caos aparentava ser uma ciência absurda e nem um pouco científica, principalmente por utilizar uma matemática imprópria e complexa e os especialistas em caos não eram bem vistos por alguns departamentos das Universidades.

Para Kuhn (1977 apud SPENDER, 1989, p. 33), as revoluções e o surgimento de uma nova ciência só acontecem quando as ações são interdisciplinares e “as suas principais descobertas vem de pessoas que se aventuram além de suas especialidades” (Idem, p. 33). As questões que inquietavam esses teóricos não eram consideradas vertentes de investigação autêntica. Nem eles próprios tinham certeza de que reconheceriam as soluções das questões, se a encontrassem.

Diversas situações na medicina confirmam que a teoria do caos está presente, tais como a arritmia cardíaca e modelos de turbulência, deixando os métodos clássicos de “lado”, devido ao corpo humano mostrar indícios em ser um sistema não linear, por ser aperiódico e sensível a condições iniciais. Desta forma Godoi (2003, p. 27 apud, MORAIS, 2014, p. 64) enfatiza que “[...] a medicina como um todo, por lidar com a interação de grande quantidade de fatores, deveria ser focalizada sob o aspecto da não linearidade, a qual seria uma de suas principais características” e desta forma, pode-se tomar como exemplos: a regeneração de tecidos no corpo humano – interno e/ou externo –, a reação da imunidade durante um tratamento de medicamentos, o sistema nervoso – responsável por movimentos que não são controlados pela nossa mente, permitindo a constante adaptação do organismo humano.

A partir dos anos 60, diversos pesquisadores realizaram experimentos que geraram o caos, percebendo que as equações obtidas eram aperiódicas e sensíveis a condições iniciais, como por exemplo, Lorenz, que testou métodos para uma nova sequência numérica. Porém, existiram estudiosos que antecederam estes, tais como: Arquimedes que verificou que dois corpos não ocupam o mesmo lugar no espaço enquanto se banhava; Newton que estudou a queda-livre da maçã; Galileu que percebeu irregularidade no movimento de uma lâmpada na igreja e, Navier e Stokes que determinaram equações do movimento das substâncias fluidas (SPENDER, 1989).

Para investigar a equação não linear na máquina de catástrofe, a pesquisa teve caráter bibliográfico e exploratório. Foram investigados o Caos e o sistema caótico por meio de livros, dissertações, teses e artigos; os principais métodos de resolução de integrais de linha, conceitos trigonométricos e vetoriais por meio de livros de Cálculo de Thomas; Weir; Hass (2012) e Stewart (2013). Também, foram estudados e revisados conceitos físicos relacionados ao movimento circular e rotacional de um disco rígido apresentados na dinâmica da máquina de catástrofe.

Na investigação exploratória obteve-se a coleta de dados relacionados ao ângulo  $\theta$  determinado no movimento circular do ponto material (partícula e/ou objeto), incluindo a sua velocidade e aceleração instantâneas num intervalo de tempo  $t$ . Além disso, aplicou-se as funções vetoriais nas integrais de linha, com plotagem das equações não lineares obtidas no software GeoGebra. As equações e respectivos gráficos foram analisados para responder o problema de pesquisa: **Quais pontos  $B_n$  correspondem aos pontos de colapso produzidos na mudança brusca de posição de um ponto material no disco de uma máquina de catástrofe, por meio da variação da trajetória horizontal do lápis no papel?** Dessa forma, priorizando responder essa problemática e, conseqüentemente, os questionamentos relacionados a ela, determinou-se como objetivo geral de pesquisa **investigar e analisar os pontos  $B_n$  que correspondem aos pontos de colapso produzidos na mudança brusca de posição de um ponto no disco de uma máquina de catástrofe, por meio da variação da trajetória horizontal do lápis no papel.**

Para tal, foi construída e testada uma máquina de catástrofe para coletar dados que contribuiriam na obtenção da equação não linear. Desta forma, tornou-se necessário determinar algumas hipóteses, tais como: *se existisse um movimento do lápis que cause um caos na máquina de catástrofe, a variação da trajetória não poderia ser horizontal para não coincidir com a direção do segmento orientado  $BA$ . O deslocamento aconteceu numa reta  $p$ , que contém segmento  $EG$ , paralela ao eixo  $y$ , num movimento linear de velocidade constante e sentido positivo e negativo do eixo  $y$ , sendo que o deslocamento do lápis é uma grandeza vetorial que “[...] possui um módulo e uma orientação [...]” (HALLIDAY; RESNICK; WALKER, 2008, p. 14). Em relação ao ponto de colapso,  $c$ , então não existiria o ponto de equilíbrio verificados nos elásticos  $e_1$  e  $e_2$ . Como o ponto  $C$  corre sobre a reta  $p$ , paralela ao eixo  $y$ , o ponto*

de colapso do ponto  $B$  se dá quando “[...] o equilíbrio muda de estável para instável, por princípio geral da estabilidade” (OLIVEIRA, 2010, p. 54).

Os fatores supracitados relacionados à investigação propiciaram como objetivos específicos: confeccionar a máquina de catástrofe; estudar a teoria envolvida na dinâmica da máquina de catástrofe; obter coordenadas vetoriais obtidas por meio da máquina de catástrofe e variação da trajetória horizontal do lápis no papel; analisar experimentalmente a máquina de catástrofe; investigar funções vetoriais que contribuam na obtenção do modelo e descrever graficamente os dados experimentais.

O trabalho de conclusão de curso possui três (3) capítulos, os quais o capítulo 1 apresenta fundamentação teórica, descrevendo o Caos e a máquina de catástrofe, os movimentos circular, rotacional e espacial, relacionando os vetores velocidade e aceleração às funções vetoriais e a integral de linha, bem como a força elástica e o Equilíbrio. O capítulo 2 evidencia os aspectos metodológicos: descrição do tipo de pesquisa, a especificação dos instrumentos e procedimentos para análise dos dados. Para a metodologia fez-se um estudo teórico sobre o método mais adequado para a obtenção da equação não linear que melhor responde a problemática de pesquisa. No capítulo 3 descreve a execução e análise dos resultados, embasados nos conceitos matemáticos e físicos do movimento rotacional de um ponto material num disco rígido da máquina de catástrofe e o trabalho se encerra com as considerações finais.

## 2 REFERENCIAL TEÓRICO

Segundo Morais (2014), a compreensão de catástrofe permitiu relacionar a mudança de posição estável de um ponto material com as pequenas perturbações iniciais em seu movimento, causando grandes transtornos. Assim, foi fundamental ter o conhecimento sobre o caos, funções vetoriais, integral de linha e equações não lineares. Dessa forma, este capítulo está subdividido em 3 seções: o Caos e a máquina de catástrofe, o Movimento Circular – sendo que esta seção apresenta as subseções: movimento rotacional e o movimento no espaço – e por último, a seção que trata do torque, da força elástica e o equilíbrio.

### 2.1 O Caos e a máquina de catástrofe

O Caos é o resultado de um colapso obtido por meio de um movimento aleatório e irregular e que, num instante inicial de um determinado evento, não temos como prever um padrão ou ordem que este poderá apresentar. Para Fey; Rosa (2012, p. 222) o Caos é “[...] um padrão de organização existente por trás da aparente casualidade”, apresentando-se como pequenas alterações, que muitas vezes provocam efeitos desproporcionais. Neste sentido, Moreira (1992, p. 2) confirma a advertência dada pelo físico Maxwell (1873) em relação à descrição probabilística com grande exatidão quanto à variação das condições iniciais em sistemas de medidas físicas, isto é, uma pequena imprecisão nesta condição levará o sistema a grandes alterações em seu comportamento posterior.

Em relação a estas grandes alterações, Feynman (1991, p. 13) enfatiza que Lorenz, após testar um novo método para analisar sequência numérica, percebeu que esta havia sido modificada, não sendo uma repetição fiel à anterior. A nova sequência e a original eram tão diferentes que em poucos meses não restaria nenhuma semelhança entre elas. A obtenção da nova sequência aconteceu devido Lorenz usar metade dos números da sequência padrão, em vez das “[...] seis casas decimais estavam armazenadas: 0,506127. Na impressão, para poupar espaço, apenas três apareciam: 0,506 [...]” (Idem, 1991, p. 14), ocasionando a conversão e redução dos números que já haviam sido impressos e por conta disso esqueceu-se de considerar a diferença de um para mil, tendo um grande impacto na sua teoria.

À medida que o processo inicial era minimamente alterado surgia uma nova escala, gerando um caos, provando assim, que um pequeno erro numérico causaria eventos catastróficos e não passaria despercebido como qualquer evento irrelevante que ocorre na natureza. Este pesquisador estudou as equações obtidas e percebeu que estas não apresentavam características de equações lineares. O novo resultado era complexo, dificultando a obtenção de uma solução e tornando caótico o seu entendimento.

Moreira (1992), Fey; Rosa (2012), Valerio (2014), entre outros pesquisadores, salientam que o caos determinístico se dá por uma equação que caracteriza o seu comportamento. E, os sistemas caóticos determinísticos mostram dinamismo, com regras não lineares bem determinadas, sem a presença de qualquer elemento aleatório externo. A maioria desses sistemas apresenta instabilidade nas trajetórias da região analisada, isto é, uma imprecisão pequena “[...] nas condições iniciais cresce exponencialmente com o tempo” (MOREIRA, 1992, p. 165), dificultando a previsão do comportamento no decorrer do tempo. Para a obtenção de resultados quantitativos estimados nestes sistemas, em geral, torna-se necessária à realização de uma descrição probabilística.

Feynman (1991, p. 21) expõe que Lorenz, por meio de seus estudos, pode verificar a não linearidade em determinados aspectos, tais como: fluídos e sistemas mecânicos. Neste último, por exemplo, percebeu que desprezando o atrito, determinaria uma equação linear simples, que exprime a quantidade de energia usada para acelerar um corpo. Quando Lorenz considerou este, verificou que a quantidade de energia se modificava de acordo com a velocidade em que o corpo se movia. Isso acontece porque não podemos atribuir valores constantes ao atrito devido ele depender da velocidade e esta, do atrito. Essa variabilidade de dependência torna difícil o cálculo da não linearidade, proporcionando comportamento de grande riqueza que jamais ocorrem em sistemas lineares.

Para Moreira, existem dois casos específicos para os sistemas dinâmicos não lineares – as mecânicas newtonianas e estatística –, sendo assim, “[...] os sistemas integráveis tradicionais [...] não apresentam comportamento caótico, enquanto que os sistemas ergódicos podem apresentar um tal grau de “caoticidade” que passam a admitir uma descrição probabilística razoavelmente simples [...]” (1992, p. 165, grifo do autor).

Os sistemas ergódicos são sistemas dinâmicos dotados de medidas invariantes, isto é, “[...] as medidas temporais e espaciais são iguais [...]”, podendo apresentar um modelo de dinâmica com tempo discreto ou contínuo (OLIVEIRA; VIANA, [2005?], p. iii-v) e na investigação dos dados verifica-se que a probabilidade de um ponto pertencer a um conjunto é a mesma da sua imagem pertencer a esse conjunto.

No que diz respeito a dinâmica dos fluídos, Feynman (1991, p. 21) salienta que a equação de Navier-Stokes é não-linear uma vez que associa “velocidade, pressão, densidade e viscosidade do fluído”, portanto, é complexo explicitar a estrutura dessas relações. Para ele, as equações não lineares apresentam um comportamento de difícil análise, isto é, “é como caminhar por um labirinto cujas paredes modificam sua disposição a cada passo que damos” (Idem, 1991, p. 21). Valerio (2014, p. 3) relata que a teoria do caos tem como finalidade encontrar princípios determinísticos e uniformes, estendendo as funções matemáticas a partir de situações iniciais. Sendo assim, bastaria manipular corretamente o ponto inicial dos sistemas e estes, os direcionariam ao estado desejado.

Supondo que pequenas diferenças na ordem dos elementos do sistema, no início de sua trajetória, teriam um resultado desprezado sobre a solução final. O mesmo serve para fatores extrínsecos, que causam erros em sua curta trajetória. No entanto, vários sistemas dinâmicos são governados por leis não lineares, em que um leve erro nas condições iniciais pode tornar-se uma enorme diferença a longo prazo. Para Valerio (2014), o comportamento caótico de alguns sistemas não lineares são imprevisíveis e caracterizados pela “sensibilidade às condições iniciais”.

Em investigações relacionadas às regularidades de comportamento de vários fenômenos, o matemático francês René Thom idealizou a teoria de Catástrofes por meio de um “[...] estudo da estrutura topológica de funções diferenciáveis e suas singularidades” (GOMIDE, 2015, p. 1), que apresentavam uma descontinuidade em relação às condições iniciais. Denominou catástrofe as reações distintas geradas pelas pequenas mudanças nestas condições. Este autor salienta que esta teoria visa analisar as famílias de funções diferenciais de dois ou mais parâmetros e que “[...] algumas famílias destacam-se por serem instrumentos de classificação de catástrofes, dentre elas, podemos citar a família que gera a bifurcação cúspide [...]” (GOMIDE, 2015, p. 1).

O matemático Erik Christopher Zeeman (1969) construiu a máquina de catástrofe para estudar sistemas aparentemente estáveis que apresentam certas descontinuidades (MORAIS (2014); GOMIDE (2015); OLIVEIRA (2010)). Morais (2014, p. 72-73) descreve a máquina como uma base de madeira ( $0,3 \times 1,3$  metros) contendo um disco fixo em seu centro – de raio  $0,1\text{ m}$  – e livre de atrito para girar. Toma-se um ponto  $A$ , com  $0,4\text{ m}$  de distância do centro do círculo, e um ponto  $B$ , fixo na borda (fronteira) deste. Dois elásticos de  $0,2\text{ m}$ , sendo que o elástico 1 liga os pontos  $A$  e  $B$  e elástico 2, tem uma extremidade em  $B$  e a outra livre para prender o lápis (ponto  $C$ ). A trajetória contínua descrita pelo lápis promove pequenas variações na posição do ponto  $B$ , tensionado pelos elásticos. À medida que o disco se movimenta, perde a estabilidade e altera bruscamente a posição de  $B$ , causando uma catástrofe. Para Oliveira (2010, p. 58) a catástrofe é um ponto de colapso que “[...] se dará quando com uma pequena perturbação, ou seja, uma pequena movimentação no disco, mudará completamente sua trajetória, [...], porém se com essa pequena movimentação o disco mudar de "quadrante" teremos um ponto de colapso”.

## 2.2 Movimento Circular: vetores velocidade e aceleração

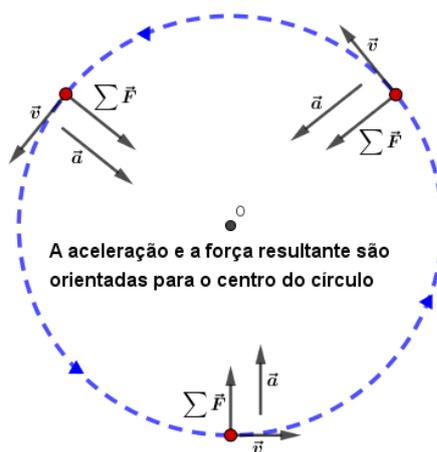
O movimento circular é o deslocamento de um ponto material (ou objeto, ou partícula) que apresenta uma trajetória circular, descrevendo uma circunferência ou um arco de circunferência. Quando a velocidade escalar do ponto material no disco é constante, este descreve um movimento circular uniforme (MCU) e por ser uma trajetória circular, a direção da velocidade se modifica, acelerando o movimento (HALLIDAY; RESNICK; WALKER (2008), YOUNG; FREEDMAN (2008)). No MCU (Fig. 1), o módulo dos vetores velocidade e aceleração permanece constante durante o movimento, variando continuamente a orientação.

O vetor velocidade tem o mesmo sentido que o movimento e a sua direção é sempre tangente à circunferência, enquanto que o vetor aceleração (aceleração centrípeta) tem a direção apontando para o centro da circunferência – direção radial (Fig. 1). A aceleração centrípeta do ponto material é fornecida por alguma força vetorial, ou uma soma de várias forças vetoriais ( $\sum \vec{F}$ ) orientada para o centro do círculo, sendo também, o seu módulo constante. Young e Freedman (2008, p.157) salientam que o movimento circular uniforme de um ponto material “[...] é governado

pela segunda lei de Newton [...]” e que ele “[...] não precisa se mover em torno de um círculo completo [...]”, sendo qualquer trajetória desenvolvida numa parte do arco circular validada pela equação  $\vec{F}_{\text{total}} = m \cdot \vec{a}_{\text{rad}}$ .

Segundo Halliday; Resnick e Walker (2008, p. 95), “a força resultante que age

Figura 1 – Vetores

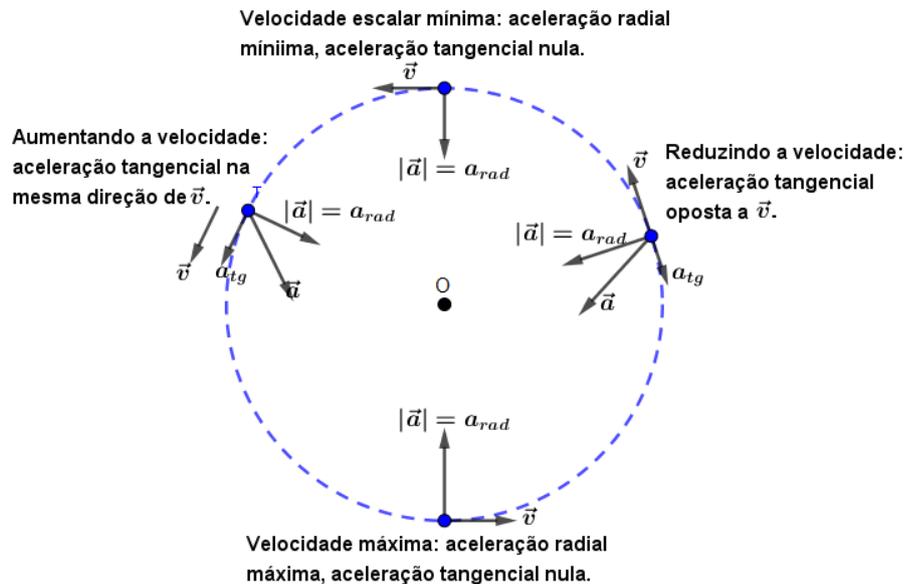


Fonte: das autoras

sobre um corpo é igual ao produto da massa do corpo pela aceleração” e é determinada pela equação  $\vec{F}_{\text{res}} = m \cdot \vec{a}$ , considerando quais forças atuam sobre o ponto material.

O movimento circular uniformemente variado (MCUV) é definido como a trajetória percorrida por um ponto material que apresenta sucessivas variações em sua velocidade escalar  $v$ , fazendo com que a aceleração radial  $\vec{a}_{\text{rad}}$  (centrípeta) não seja constante, assumindo “[...] o valor máximo no ponto da circunferência para o qual a velocidade escalar possui seu valor máximo” (YOUNG; FREEDMAN, 2008, p. 88). O MCV também apresenta o componente da aceleração ( $\vec{a}_{\text{tg}}$ ), que é tangente à circunferência e é determinado “[...] pela taxa de variação da velocidade escalar [...]”. O vetor aceleração é concedido pela soma vetorial dos componentes radial e tangencial da aceleração. Segundo estes autores, o componente tangencial (Fig. 2) da aceleração possui a mesma direção e sentido do vetor velocidade “[...] quando a velocidade escalar aumenta, e sentido contrário quando a velocidade escalar diminui” (Idem, 2008, p. 88).

Figura 2 – Movimento circular vertical



Fonte: das autoras

O MCU e MCV são deslocamentos bidimensionais de um ponto material no plano, formado pelas dimensões  $x = r \cdot \cos(\theta)$  e  $y = r \cdot \sin(\theta)$ , de modo que este passará pela posição inicial periodicamente, apresentando um movimento circular. No deslocamento tridimensional do movimento circular, o ponto material não precisa passar necessariamente pelo ponto inicial, mas manterá um movimento periódico nas proximidades desse ponto no espaço (CASALI, 2019).

### 2.2.1 Movimento Rotacional de um Disco: velocidade angular e aceleração tangencial

Um disco é um corpo rígido que pode sofrer movimentos de rotação, girando em torno de um eixo fixo, sem deformar e mudar de posição (sem transladar). Halliday; Resnick e Walker (2008, p. 249) afirmam que “[...] em uma rotação pura (movimento angular), todos os pontos do corpo se movem ao longo de circunferências cujo centro está sobre o eixo de rotação e todos os pontos descrevem o mesmo ângulo no mesmo intervalo de tempo [...]”. Assim, tomando uma reta de referência, fixa ao ponto material (ou corpo rígido) e perpendicular ao eixo de rotação, esta movimentar-se-á com o corpo. Estes autores salientam que “[...] a **posição angular** da reta é o ângulo que faz com uma direção fixa, que tomamos como a **posição angular zero**.

[...], a posição angular  $\theta$  é medida em relação ao semieixo  $x$  positivo [...]” (p. 250, grifo dos autores).

Na geometria,  $\theta$  é dado por

$$\theta = \frac{s}{r} \quad (\text{ângulos radianos}), \quad (1)$$

sendo  $s$  o comprimento de um arco de circunferência limitado pelo eixo  $x$  (posição angular zero) e a reta de referência e  $r$ , o raio da circunferência. Este ângulo é medido em radianos (*rad*) e como é a razão entre dois comprimentos (Eq. 1), o radiano é chamado de número puro por não ter dimensão. Young e Freedman (2008, p. 287) afirmam que “a coordenada angular  $\theta$  de um corpo rígido girando em torno de um eixo fixo pode ser positiva ou negativa [...]”, levando-se em consideração o sentido anti-horário e horário de rotação.

O movimento de um ponto material, por meio da rotação pura de um corpo rígido (um disco), é descrito por uma função  $\theta(t)$ , que é “[...] a posição angular da reta de referência do corpo em função do tempo” (HALLIDAY; RESNICK; WALKER, 2008, p. 250). Assim, a posição angular dessa reta varia de  $\theta_1$  para  $\theta_2$ , fazendo com que o corpo sofra um deslocamento angular  $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$ , podendo ser positivo ou negativo, no qual todos os pontos materiais do corpo também sofrem. Young e Freedman (2008, p. 287) definem a velocidade angular média  $\omega_{m_z}$  do corpo como a razão entre o deslocamento angular  $\Delta\theta$  e o intervalo de tempo  $\Delta t = t_2 - t_1$ , sendo que o índice  $z$  sinaliza a perpendicularidade entre o eixo  $z$  e o plano do  $xy$ , com rotação da reta de referência em torno do eixo  $z$ .

A velocidade angular instantânea  $\omega_z$  é o limite da velocidade angular média  $\omega_{m_z}$  quando o intervalo de tempo tende para zero ( $\Delta t \rightarrow 0$ ), ou seja, é a primeira derivada de  $\theta(t)$  em relação a  $t$  (Eq. 2):

$$\omega_z = \frac{d\theta}{dt}, \quad (2)$$

nos referindo a  $\omega_z$  apenas como velocidade angular. Conhecendo,  $\theta(t)$  podemos calcular a velocidade angular  $\omega_z$  por derivação. Young e Freedman (2008, p. 288) afirmam que “a velocidade angular  $\omega_z$  pode ser positiva ou negativa, dependendo da direção em que o corpo rígido está girando [...]” e que a velocidade escalar angular  $\omega$  “[...] é o módulo da velocidade angular [...]”. Desta forma, todos os pontos materiais do corpo rígido mantêm um movimento rotacional em torno do eixo  $z$  com a mesma

velocidade angular, podendo esta ser positiva (giro no sentido anti-horário) ou negativa (sentido horário).

Se a velocidade angular  $\omega_z$  de um ponto material varia, significa que ele possui uma aceleração angular, que pode ser uma aceleração angular média  $\alpha_{m_z}$ , determinada pela razão da variação da velocidade angular  $\Delta\omega_z$  pelo intervalo de tempo  $\Delta t$  ( $\alpha_{m_z} = \frac{\Delta\omega_z}{\Delta t}$ ). A aceleração angular (Eq. 3) instantânea  $\alpha_z$  é o limite da aceleração angular média  $\alpha_{m_z}$  quando o intervalo de tempo tende a zero ( $\Delta t \rightarrow 0$ ), ou seja, a primeira derivada da velocidade angular  $\omega_z$  em relação a  $t$ :

$$\alpha_z = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}. \quad (3)$$

Usa-se o radiano por segundo para indicar a unidade da velocidade angular  $\omega_z$ , denotado por *rad/s*. A unidade da aceleração angular  $\alpha_z$  é o radiano por segundo ao quadrado (*rad/s<sup>2</sup>*) e a revolução por segundo ao quadrado ( $\frac{rev}{s^2}$ ). O vetor velocidade angular  $\vec{\omega}$  tem  $\omega_z$  como componente  $z$  e o vetor aceleração angular  $\vec{\alpha}$  “[...] é a derivada de tempo do vetor velocidade angular  $\vec{\omega}$ , possuindo apenas uma componente  $z$ , que é  $\alpha_z$ , quando o ponto material sofre uma rotação em torno do eixo  $z$  (HALLIDAY; RESNICK; WALKER (2008), YOUNG; FREEDMAN (2008)). Assim,  $\vec{\alpha}$  aponta para a “[...] mesma direção de  $\vec{\omega}$  quando a rotação é acelerada e no sentido contrário quando a rotação é retardada [...]” (YOUNG; FREEDMAN, 2008, p. 290).

### 2.2.2 Movimento no Espaço: Funções Vetoriais e a Integral de Linha

Thomas; Weir e Hass (2012, p. 171) generalizam a definição de função vetorial, afirmando que “[...] uma **função vetorial** ou **função de valores vetoriais** sobre um domínio  $D$  é uma regra que associa um vetor no espaço a cada elemento em  $D$  [...]” (grifo dos autores), sendo  $D$  um conjunto de números reais e o conjunto imagem, um conjunto de vetores. Estes autores apontam que “os domínios são regiões no plano” e “as funções vetoriais representam superfícies no plano” (p. 171), dando origem a campos vetoriais. E, para diferenciar uma função vetorial de uma função a valores reais, esta última é chamada de funções escalares.

Veja que, quando um ponto material se desloca no espaço durante um intervalo de tempo  $T = [t_0, t_1]$ , existe um único vetor  $\vec{r}(t)$  (Eq. 4) para todo número  $t$

no domínio de  $\vec{r}(t)$ . As funções escalares  $f(t)$ ,  $g(t)$  e  $h(t)$  são os componentes do vetor  $\vec{r}(t)$  (STEWART, 2013, p. 779) e escrevemos

$$\vec{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t) \rangle = f(t)\vec{i} + g(t)\vec{j} + h(t)\vec{k}. \quad (4)$$

Assim, a equação (4) expressa o  $\vec{r}$  como uma função vetorial da variável  $t$  no intervalo  $T$ . A trajetória do ponto material é a curva no espaço determinada pelos pontos  $(x, y, z) = (f(t), g(t), h(t))$ ,  $t \in T$ , em que o vetor  $\vec{r}(t)$  é o vetor posição do ponto material a partir da origem até a posição da partícula no ponto  $(f(t), g(t), h(t))$  no instante  $t$  (THOMAS; WEIR; HASS, 2012).

Thomas; Weir e Hass (2012, p. 172, grifo dos autores) definem continuidade de funções vetoriais como:

### Definição 1:

Uma função vetorial  $\mathbf{r}(t)$  é **contínua em um ponto**  $t = t_0$  no seu domínio se  $\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t_0)$ . A função é **contínua** se for contínua em todos os pontos do seu domínio.

Dessa forma, se cada função componente  $f(t)$ ,  $g(t)$  e  $h(t)$  de  $\vec{r}(t)$  for contínua no ponto  $t = t_0$ , então a função vetorial  $\vec{r}(t)$  é contínua. Se as funções componentes  $f(t)$ ,  $g(t)$  e  $h(t)$  de  $\vec{r}(t)$  possuem derivadas em todos os pontos  $t$  do domínio da função vetorial  $\vec{r}(t)$ , então  $\vec{r}(t)$  é derivável em todo o seu domínio (THOMAS; WEIR; HASS (2012), STEWART (2013)).

Thomas; Weir e Hass (2012, p. 173, grifo dos autores) apresentam a definição de derivada de uma função vetorial a seguir:

### Definição 2:

A função vetorial  $\mathbf{r}(t) = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$  possui uma **derivada (é derivável) em  $t$**  se  $f$ ,  $g$  e  $h$  possuem derivadas em  $t$ . A derivada é a função vetorial

$$\mathbf{r}'(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t} = \frac{df}{dt}\mathbf{i} + \frac{dg}{dt}\mathbf{j} + \frac{dh}{dt}\mathbf{k}.$$

O vetor  $\vec{r}(t)$  traça uma curva suave se  $\frac{dr}{dt}$  for contínua e nunca nula, ou seja,  $f'(t) \neq 0$ ,  $g'(t) \neq 0$  e  $h'(t) \neq 0$  e contínuas. Assim, quando  $\Delta t \rightarrow 0$ , o vetor secante à curva traçada por  $\vec{r}(t)$  se aproxima de um vetor tangente à curva em um ponto

$(f(t_0), g(t_0), h(t_0))$ . Quando temos  $\vec{r}'(t) \neq 0$ , este é definido como sendo o vetor tangente à curva em  $(f(t_0), g(t_0), h(t_0))$ .

A reta tangente à curva que contém o vetor tangente em um ponto “[...] é definida como sendo a reta que passa pelo ponto paralelo a  $r'(t_0)$  [...]” (THOMAS; WEIR; HASS, 2012, p. 173), sendo necessário  $\frac{d\vec{r}}{dt} \neq 0$  para haver uma curva suave e que exista uma tangente em cada ponto. Se a curva é constituída por uma quantidade finita de curvas suaves interligadas ininterruptamente, esta será chamada de curva suave (lisa) por partes. Como a derivada  $\frac{d\vec{r}}{dt}$  é a taxa de variação da posição em relação ao tempo, esta sempre aponta na direção do movimento. Para cada curva suave, em que  $\frac{d\vec{r}}{dt} \neq 0$ , o ponto material não para seu movimento e nem inverte o seu sentido (THOMAS; WEIR; HASS, 2012).

Neste sentido, Thomas; Weir e Hass (2012, p. 174, grifos dos autores) apresentam as definições:

### **Definição 3:**

*Se  $r$  é o vetor posição de uma partícula que se move ao longo de uma curva suave no espaço, então.*

$$v(t) = \frac{dr}{dt}$$

*é o **vetor velocidade** da partícula, tangente à curva. Em qualquer instante  $t$ , a direção e sentido de  $v$  são a **direção e sentido de movimento**, a magnitude de  $v$  é a rapidez da partícula e a derivada  $a = dv/dt$ , quando existe, é o **vetor aceleração** da partícula. Em resumo,*

1. *A velocidade é a derivada de posição:  $v = \frac{dr}{dt}$ .*
2. *A rapidez é a magnitude da velocidade: Rapidez =  $|v|$ .*
3. *Aceleração é a derivada da velocidade:  $a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2r}{dt^2}$ .*
4. *O vetor unitário  $v/|v|$  é a direção e sentido de movimento no instante  $t$ .*

Podemos determinar a velocidade tomando a integração vetorial da aceleração, assim como a posição, quando a velocidade é conhecida. As integrais sobre uma

curva  $C$  no espaço, tais como curvas no plano  $xy$  (de coordenada  $z$  nula), são denominadas integrais de linha. Considerando as equações paramétricas <sup>1</sup>

$$x = x(t), \quad y = y(t) \text{ e } z = z(t), \quad (5)$$

Stewart (2013, p. 982, grifo do autor) apresenta a definição de integrais de linha por:

**Definição 4:**

*Se  $f$  é definida sobre uma curva lisa  $C$  dada pelas Equações 1, então a integral de linha de  $f$  sobre  $C$  é*

$$\int_C f(x, y) ds = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*, y_i^*) \Delta s_i$$

*se esse limite existir.*

Sendo  $f$  contínua, então o limite sempre existe, assim será aplicada a fórmula

$$\int_C f(x, y) ds = \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \quad (6)$$

A integral de linha dada na equação (6) é chamada de integral de linha com relação ao comprimento do arco e, em geral, dada a parametrização (Eq. 5), no intervalo  $T = [a, b]$ , determinamos uma orientação da curva  $C$ , com a orientação positiva correspondendo aos valores crescentes do parâmetro  $t$ . Para uma orientação negativa (em  $-C$ ), a curva é constituída pelos mesmos pontos do intervalo de  $C$  e o valor da integral de linha se mantém quando integramos em relação ao comprimento do arco, mesmo que se reverta a orientação da curva (Eq. 7). Assim,

$$\int_{-C} f(x, y) ds = \int_C f(x, y) ds. \quad (7)$$

### 2.3 Força Elástica e o Torque

Young e Freedman (2008, p. 222) afirmam que um corpo “[...] é **elástico** quando ele volta a ter a mesma forma e o mesmo tamanho que possuía antes da deformação” (grifo dos autores), tais como tiras de borracha, molas e cordas elásticas. Considerando uma corda elástica, fixa em uma de suas extremidades num objeto que age como um ponto material e presa em outra extremidade. À medida que puxarmos o objeto, a corda elástica será alongada, deformando.

---

<sup>1</sup> As equações paramétricas (5) são as Equações 1 mencionadas na definição 4.

Segundo Halliday, Resnick e Walker (2008, p. 154), se o objeto for puxado para a direita, a corda exercerá uma força elástica sobre ele, puxando-o para a esquerda. Empurrando o objeto para a esquerda, comprimindo a corda, esta empurrará o objeto para a direita. Porém, “[...] a força elástica da corda tende a restaurar [...]” (força restauradora) à proporção que soltarmos o objeto. Neste sentido, a força elástica é dada pela lei de Hooke,

$$\vec{F}_s = -k\vec{d}, \quad (8)$$

sendo que “[...] a força  $\vec{F}_s$  é proporcional ao deslocamento  $\vec{d}$  da extremidade livre a partir da posição que ocupa quando [...]” (HALLIDAY; RESNICK; WALKER, 2008, p. 154) é relaxado o estado de deformação da corda elástica. A Equação (8) apresenta o sinal negativo em virtude do sentido de deslocamento da extremidade livre da corda, sempre oposto ao sentido da força elástica e, a constante elástica  $k$  é uma medida da rigidez da corda e a sua unidade no SI é Newton por metro. Assim, quanto maior o valor de  $k$ , maior é a força que a corda exerce para promover um deslocamento do objeto.

Considerando que o objeto sofra um deslocamento para a direita (ou esquerda), apresentando duas posições distintas  $d_1$  e  $d_2$ , promovendo deformações na corda elástica. Quando o ponto de retorno muda de  $d_1$  para um ponto entre  $d_1$  e  $d_2$  e nenhuma força atue sobre o objeto, sejam energia cinética<sup>2</sup> e/ou potencial<sup>3</sup>, de modo que ele permaneça em repouso, assim consideramos que nesta situação este objeto está em equilíbrio. Porém, Halliday, Resnick e Walker (2008, p. 184), afirmam que, se o objeto “[...] for ligeiramente deslocado em qualquer sentido, uma força a empurrará no mesmo sentido e a partícula continuará a se mover, afastando-se cada vez mais do ponto inicial. Diz-se que uma partícula nesta situação está em equilíbrio instável. [...]”, podendo ou não haver um ponto de colapso entre  $d_1$  e  $d_2$ .

Em condições que mantenham o objeto impreciso numa posição, não podendo se mover para a direita e/ou esquerda por necessitar de uma energia cinética negativa e, empurrando-o ligeiramente para a esquerda ou para a direita, desponta uma força restauradora que o faz retornar ao ponto de equilíbrio ( $\vec{F}_s = 0$ ), sendo denominado equilíbrio estável.

---

<sup>2</sup> Energia cinética é a energia associada ao estado de separação entre dois objetos que se atraem mutuamente por meio da força gravitacional.

<sup>3</sup> Energia potencial é a energia associada à configuração de um sistema de objetos que exercem forças uns sobre os outros.

O estado de movimento de um corpo é determinado pelo torque  $\tau$ , que é uma força no movimento circular e por meio dela o ponto material (ou objeto) é posto em movimento circular a partir do repouso, ou alterando seu estado de movimento existente, fazendo com que sua velocidade angular  $\omega$  seja aumentada ou reduzida. Para Casali (2019), Halliday; Resnick; Walker (2008), Young; Freedman (2008) definem torque  $\tau$  como a variação temporal do produto vetorial  $\vec{v} \times \vec{F}$  e este, apontará para uma direção perpendicular ao plano formado pelos vetores da força  $\vec{F}$  e do raio  $\vec{r}$ . Casali (2019, p. 35) afirma que “[...] o torque é o resultado da aplicação de uma força  $\vec{F}$  a uma distância  $\vec{r}$  de um ponto pivô, com o objetivo de se colocar ou manter algum corpo em estado de movimento circular. [...]”. Além disso, produto vetorial  $\vec{r} \times \vec{F}$  formam um plano, determinado por esses vetores, mantendo ente si um ângulo  $\theta$ .

Sendo

$$\tau = \vec{r} \times \vec{F} = r \cdot F \cdot \text{sen}(\alpha), \quad (9)$$

em que o torque é a transcrição da força para o movimento circular uniformemente variável, em que a força tangente é definida como  $F_t = F \cdot \text{sen}(\alpha)$  e, em termos da componente tangencial da força  $\vec{F}$  atuante, temos:

$$F_t = m \cdot a_t \quad \Rightarrow \quad \tau = m \cdot r^2 \cdot \alpha. \quad (10)$$

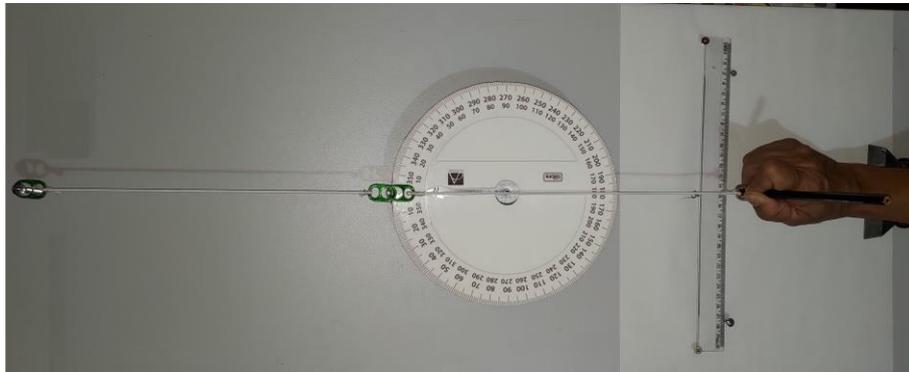
### 3 METODOLOGIA

O trabalho de conclusão de curso foi desenvolvido em três momentos, sendo o primeiro caracterizado como uma pesquisa bibliográfica e exploratória. De acordo com Otani e Fialho (2011, p. 38), a pesquisa bibliográfica nos permite obter dados por meio de materiais publicados. Neste sentido, desenvolveu-se uma pesquisa básica pura (ADELAIDE UNIVERSITY, 2008 apud GIL, 2010, p. 26-27), com ênfase apenas na ampliação do conhecimento relacionado ao: *Caos e a máquina de catástrofe, movimento circular e rotacional, considerando os vetores velocidade e aceleração, as funções vetoriais e a integral de linha, bem como a força elástica e torque* (grifo nosso).

O estudo teórico foi realizado por meio de livros, dissertações, teses e artigos. De um modo geral foram estudados e revisados os principais métodos de resolução de integrais de linha, conceitos trigonométricos e vetoriais segundo Thomas; Weir e Hass (2012) e Stewart (2013), bem como os conceitos físicos (HALLIDAY; RESNICK; WALKER (2008), YOUNG; FREEDMAN (2008)) envolvidos na dinâmica da máquina de catástrofe inventada por Zeeman, com vistas a obter a resolução do problema de pesquisa: **Quais pontos  $B_n$  correspondem aos pontos de colapso produzidos na mudança brusca de posição de um ponto no disco de uma máquina de catástrofe, por meio da variação da trajetória horizontal do lápis no papel?**, a partir das hipóteses formuladas e a obtenção da equação que norteou o problema de pesquisa.

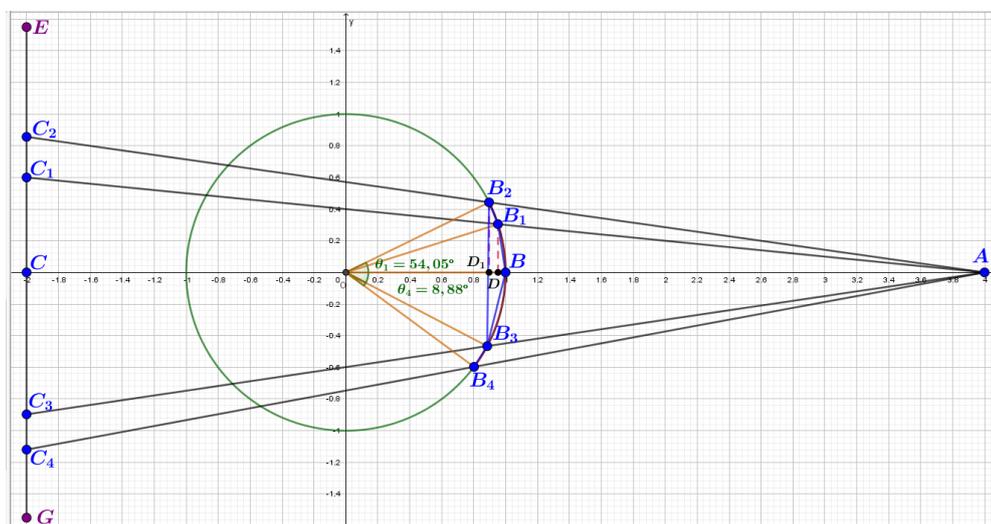
Em um segundo momento, desenvolveu-se uma investigação experimental do objeto físico construído, no caso a “máquina de catástrofe” a partir do modelo original de Zeeman (Fig. 3), tendo uma metodologia fundamentada no estudo desenvolvido por Oliveira (2010), Feynman (1991), Morais (2014) e Gomide (2015). Segundo GIL (2010, p. 32), “a pesquisa experimental consiste em determinar um objeto de estudo, selecionar as variáveis que seriam capazes de influenciá-lo, definir as formas de controle e de observação dos efeitos que a variável produz no objeto”. Neste sentido, por meio da máquina de catástrofe obteve-se coordenadas de pontos que foram plotadas no software GeoGebra e analisadas as linhas de curva, para verificar se os dados respondem ao problema de pesquisa.

Figura 3 – Máquina de catástrofe



Fonte: das autoras

Figura 4 – Esboço da Máquina de Catástrofe



Fonte: das autoras

Nesta fase experimental, estabeleceu-se hipóteses simplificadas e variáveis adequadas, de forma a obter uma equação que permita descrever os efeitos caóticos, observados experimentalmente. Para tanto, realizou-se simulações com a máquina de catástrofe para coleta de dados relacionados às  $n$  posições que o ponto material assumiu e os ângulos de rotação que se formaram no disco presente na máquina de catástrofe (Fig. 4), durante um intervalo de tempo e amplitude do movimento do lápis no papel, verificando se as mudanças de posição foram pequenas ou bruscas (catástrofe).

Por fim, no terceiro momento, aplicou-se o cálculo de integrais de linha, por serem apropriadas para determinar o trabalho  $W$  realizado em relação ao comprimento do arco da componente tangencial da força (torque), considerando 4 (quatro) casos relevantes a partir das percepções da trajetória do ponto material  $B$

desenvolvida no movimento de rotação do disco rígido fixo, num eixo sobre a prancha da máquina de catástrofe. Após a obtenção das equações, estas foram simuladas no software GeoGebra e analisadas graficamente, de modo a verificar a relevância dos resultados com as simulações presentes na bibliografia já existente.

Como hipóteses, a partir do experimento supracitado, considerou-se: se o movimento do lápis for constante e promove uma velocidade rotacional constante, então a aceleração angular é suficiente para se determinar o modelo da equação não linear que apresenta o ponto de colapso? Se aplicada a força resultante da velocidade e aceleração angulares, estas proporcionariam um modelo mais preciso? Se utilizar o torque de rotação – produto vetorial entre dois vetores –, este contribuirá na obtenção da precisão da equação procurada?

Para tal, no 1º caso aplicou-se a integral do produto do módulo da força determinada pela 2ª lei de Newton – a força resultante que age sobre um corpo é igual ao produto da massa do corpo pela aceleração ( $\vec{F}(t) = m \cdot \vec{a}(t)$ ) – pela função  $x(y(t)) = r \cos(\omega t)$ , que determina o arco no disco rígido dentro do intervalo  $-\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ , sendo  $\theta = \omega t$ .

No 2º caso, desenvolveu-se a integral do produto da função  $x(y(t))$  pelo módulo do produto vetorial (torque) entre  $\vec{F}(t) = m \cdot \vec{a}(t)$  e  $\vec{u}(t) = \Delta \vec{r}$ , no intervalo  $-\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ . Sendo o vetor  $\vec{u}(t)$  representado pelo segmento orientado  $DB_1$ , que determina a distância de  $B_1$  perpendicular ao eixo  $x$ .

Em relação ao 3º caso, considerou-se a integral do produto do módulo da força resultante:  $\vec{F}_{res}(t) = \vec{v}(t) + \vec{a}(t)$ , aplicada na 2ª lei de Newton, pela função  $x(y(t))$ , no mesmo intervalo de  $\theta$ . E, no 4º caso, aplicou-se na integral de linha do produto da função  $x(y(t))$  pelo módulo do produto vetorial (torque) entre  $\vec{F}(t) = m \cdot \vec{F}_{res}(t)$  e  $\vec{u}(t) = \Delta \vec{r}$ .

Considerou-se um ponto móvel de massa  $m$  (desprezível) que se move em uma trajetória circular com velocidade angular constante  $\omega$  e tendo um valor posição dado por  $\vec{r}(t) = r \cos(\omega t) \vec{i} + r \sin(\omega t) \vec{j}$ , que é um vetor de posição. A velocidade e aceleração instantânea que o ponto móvel adquiriu com a força dos elásticos e que contribuíram na rotação do disco é dada, respectivamente, pelas equações

$$\vec{v}(t) = \vec{r}'(t) = -r\omega \sin(\omega t) \vec{i} + r\omega \cos(\omega t) \vec{j} \quad (11)$$

e

$$\vec{a}(t) = \vec{r}''(t) = -r\omega^2 \cos(\omega t) \vec{i} - r\omega^2 \sin(\omega t) \vec{j}. \quad (12)$$

Além disso, aplicou-se duas coordenadas de localização: ângulo  $\theta = \omega t$  e o tempo  $t$ , porém, na resolução das integrais de linha usou-se o parâmetro  $t$  e no resultado final, fez-se a substituição de  $\omega t$  por  $\theta$  e  $\omega$ , por  $\theta/t$ . Também, substituiu-se  $m$ ,  $r$  e  $t$  por valores apropriados a natureza do experimento. Nas construções gráficas, no software GeoGebra, o ângulo  $\theta$  variou no intervalo  $[-\pi/4, \pi/4]$ , conforme a rotação do ponto no disco rígido proporcionado pela trajetória do lápis.

#### 4 APRESENTAÇÃO DA PESQUISA E ANÁLISE DOS RESULTADOS

O experimento, a máquina de catástrofe (Fig. 5), foi construída com material reciclável: lateral de uma mesa de escritório, que foi utilizada para confeccionar a prancha (37 *cm* por 86 *cm*) e o disco rígido de 10 *cm* de raio; prendedor de papel para prancheta; duas cordas elásticas de 20 *cm* ( $e_1$  e  $e_2$ ); quatro lacres de latinhas de refrigerante; sete parafusos; um ponteiro de alumínio; folha A3 sulfite não pautada; um lápis preto e uma régua de acrílico de 30 *cm*.

Figura 5 – Máquina de Catástrofe



Fonte: das autoras

Na prancha, fixou-se a folha A3 no prendedor e nela, a régua para auxiliar na trajetória retilínea do lápis. O ponto médio  $C_0$  do segmento  $EG$  determinado pelo comprimento da régua, dista 20 *cm* à esquerda do centro  $O$  do disco rígido. O ponto  $B_0$ , à direita do centro  $O$ , é um ponto fixo pertencente à circunferência do disco. Tomando o sentido positivo do eixo  $Ox$  e pertencente a ele, os pontos  $C_0(-20, 0)$ ,  $O(0, 0)$ ,  $B_0(10, 0)$  e um ponto  $A(40, 0)$ , sendo este último fixo na prancha. A régua fixa na prancha, paralela ao eixo  $Oy$ , limita o comprimento do segmento  $EG$  de 30 *cm*, contido na reta  $p$ , que foi a trajetória máxima descrita pelo lápis – 15 *cm* acima do eixo  $Ox$  e 15 *cm* abaixo desse, assumindo o sentido positivo de  $Oy$ .

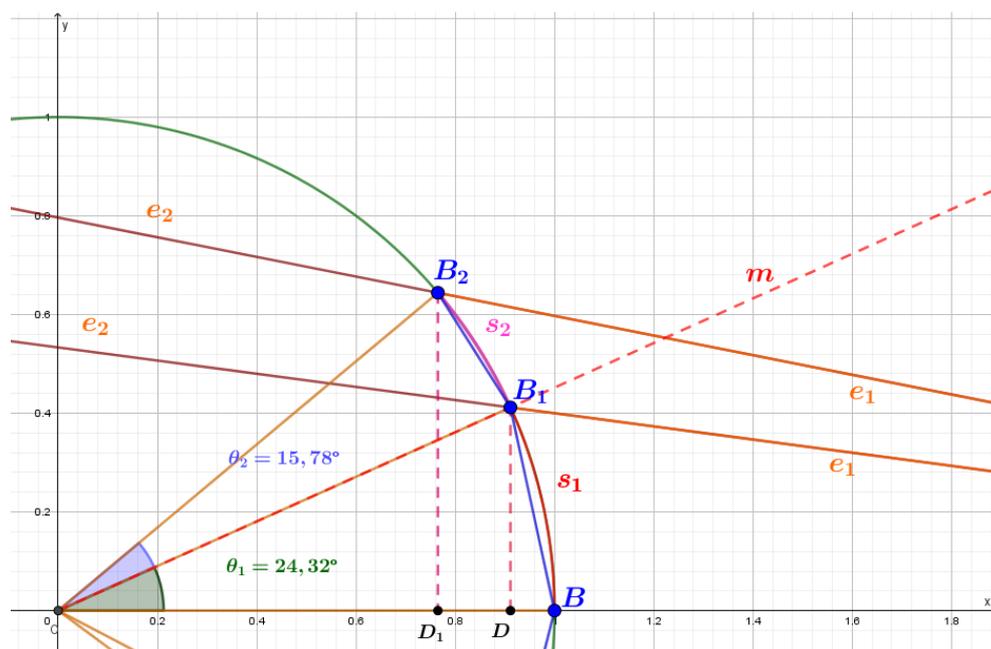
A corda elástica  $e_1$  teve uma de suas extremidades fixa no ponto  $A$  e a outra, em  $B_0$ . A corda elástica  $e_2$  teve uma extremidade fixa em  $B_0$  e a outra, livre para segurar o lápis, permitindo-o deslizar sobre o papel, rente a régua e perpendicular ao eixo  $Ox$ . Considerou-se  $B_0$  como o ponto material de massa  $m$  (desprezível) que se moveu em uma trajetória circular à medida que o lápis iniciou seu movimento retilíneo

sobre o segmento  $EG$ . O ponto material  $B_0(10,0)$  mudou a sua coordenada de localização para as posições  $B_1(x_1, y_1)$ ,  $B_2(x_2, y_2)$ ,  $B_3(x_3, y_3)$ ,  $B_4(x_4, y_4)$ , ..., determinando sobre a circunferência os arcos  $\widehat{B_0B_1}$ ,  $\widehat{B_1B_2}$ ,  $\widehat{B_2B_3}$ ,  $\widehat{B_3B_4}$ , ..., de comprimentos  $s_1, s_2, s_3, s_4, \dots$ , respectivamente.

Quando o lápis foi mantido em estado de repouso, com ponta posicionada em  $C_0(-20,0)$  sobre o segmento  $EG$ , no instante  $t_0 = 0$  s, promoveu uma deformidade em  $e_1$  e  $e_2$ , porém as forças elásticas  $\vec{F}_{e_1}$  e  $\vec{F}_{e_2}$  foram iguais e a energia potencial elástica foi nula, assim o ponto material  $B_0$  se manteve em repouso<sup>4</sup> (HALLIDAY; RESNICK; WALKER (2008), YOUNG; FREEDMAN (2008)). Cabe salientar que a velocidade inicial  $\vec{v}_0$  foi nula e  $\theta_0 = 0$  rad.

Na sequência, considerou-se o raio  $\overline{OB_1}$  contido numa reta de referência  $m$  (Fig. 6), que determinou o ângulo  $\theta_1$  com o eixo  $Ox$ , à medida que a trajetória do lápis assumia a posição  $C_1$  sobre o segmento  $EG$ , contido na reta  $p$ . Assim, coletou-se os dados:  $B_1(8,8; 4,7)$ ;  $C_1(-20; 9)$ ; a distância entre  $C_0$  e  $C_1$ , apresentada por  $d_{C_0, C_1} \approx 9,0$  cm;  $\theta_1 \approx 27,98^\circ \approx \frac{1399\pi}{9000}$  rad;  $t_1 \approx 1$  s.

Figura 6 – Reta de referência e o ponto de estabilidade  $B_1$

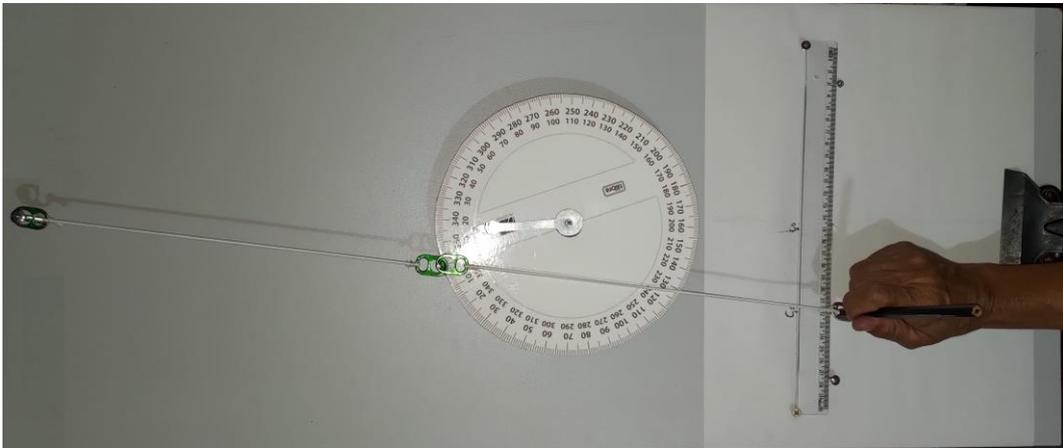


Fonte: das autoras

<sup>4</sup> A figura 3 apresenta o ponto material  $B_0$  em repouso quando o lápis se manteve na posição  $C_0$ .

No deslocamento de  $B_0$  para a posição  $B_1$  (Fig. 7), por construção obteve-se o triângulo  $DOB_1$ , retângulo em  $D$ . Sendo  $\overline{OD} = r \cdot \cos(\theta_1) = 10 \cdot \cos(\theta_1)$ ,  $\overline{OB_1} = r = 10 \text{ cm}$  e  $\overline{DB_1} = r \cdot \sin(\theta_1) = 10 \cdot \sin(\theta_1)$ . Por meio desses dados, pode-se calcular as medidas de  $d_{D,B_1} \approx 4,7 \text{ cm}$ ,  $s_1 \approx 4,9 \text{ cm}$ , em que  $s_1$  é o comprimento do arco  $\widehat{B_0B_1}$  percorrido por  $B_0$  e  $\Delta\vec{r}_1 = d_{B_0,B_1} \approx 4,8 \text{ cm}$ . Segundo Halliday, Resnick e Walker (2008, p. 63), o vetor  $\Delta\vec{r}_1$  é o deslocamento da partícula durante intervalo de tempo  $\Delta t$ , em que “[...] o vetor posição muda de  $\vec{r}_1$  para  $\vec{r}_2$  [...]”.

Figura 7 – Posição  $B_1$



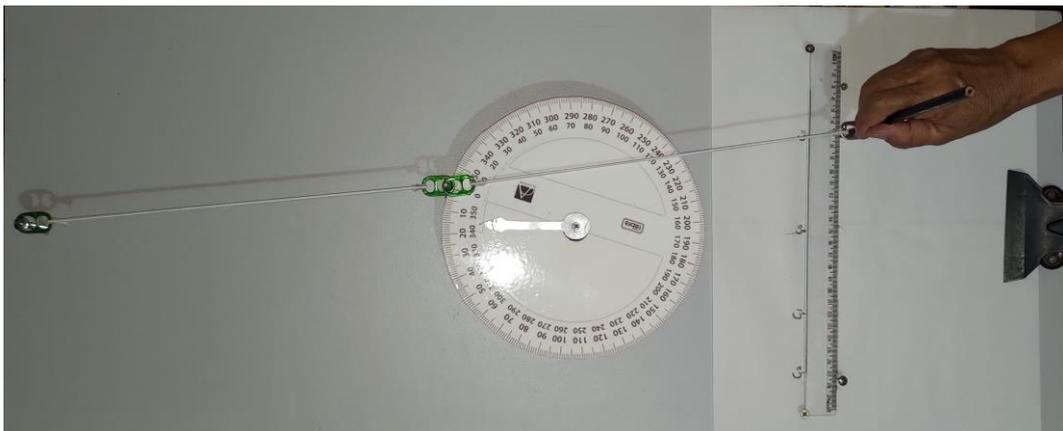
Fonte: das autoras

Quando a ponta do grafite assumiu a posição  $C_2(-20 ; 11)$ , considerou-se o raio  $\overline{OB_2}$  contido em  $m'$ , determinando  $\theta_2 \approx 7,84^\circ \approx \frac{49\pi}{1125} \text{ rad}$  com o  $\vec{r}_2$ . Assim,  $B_2(8,1 ; 5,9)$  no instante  $t_2 = 2 \text{ s}$  e  $d_{C_1,C_2} = 11 \text{ cm}$ ,  $d_{D_1,B_2} \approx 5,9 \text{ cm}$ , com  $\Delta\vec{r}_2 = d_{B_1,B_2} \approx 1,4 \text{ cm}$  e a medida de comprimento do arco  $\widehat{B_1B_2} = s_2 \approx 1,4 \text{ cm}$  (Fig. 8). O ponto material, na posição  $B_1$  ficou estável quando saiu dessa posição para a posição  $B_2$ , pois os elásticos  $e_1$  e  $e_2$  ficaram alinhados e verificou-se que a velocidade reduziu, enquanto que a aceleração aumentou. Em relação a força elástica, também se percebeu que  $\vec{F}_{e_1} > \vec{F}_{e_2}$ , resultando na restauração do elástico  $e_1$  e fazendo com que o ponto material retornasse ao ponto de equilíbrio estável em  $B_1$ , mesmo que o grafite tenha concluído a sua trajetória de  $C_2$  até o ponto  $E$  (CASALI, 2019).

Figura 8 – Posição em  $B_2$ 

Fonte: das autoras

Quando a ponta do lápis retornou do ponto  $E$  para  $C_0$ , com o ponto material estável em  $B_1$ , executando um leve movimento até o grafite passar por  $C_1$ . Logo em seguida, com  $\vec{F}_{e1} < \vec{F}_{e2}$ ,  $B_1$  perdeu a estabilidade e tornou-se instável. De acordo com Oliveira (2010), gerando um ponto de colapso (catástrofe). A partir daí, assumindo a posição  $B_3(8,8; -4,7)$  no instante  $t_3 = 3 s$ , com o lápis em  $C_3(-20; -9)$  (Fig. 9). O que resultou:  $\theta_3 \approx 55,74^\circ \approx \frac{929\pi}{3000} rad$ ;  $d_{C_1,C_3} \approx 18 cm$ ;  $d_{D_2,B_3} \approx d_{D,B_1} \approx 4,7 cm$ ;  $\Delta\vec{r}_3 = d_{B_1,B_3} \approx 9,3 cm$ ;  $S_3 \approx 9,73 cm$ .

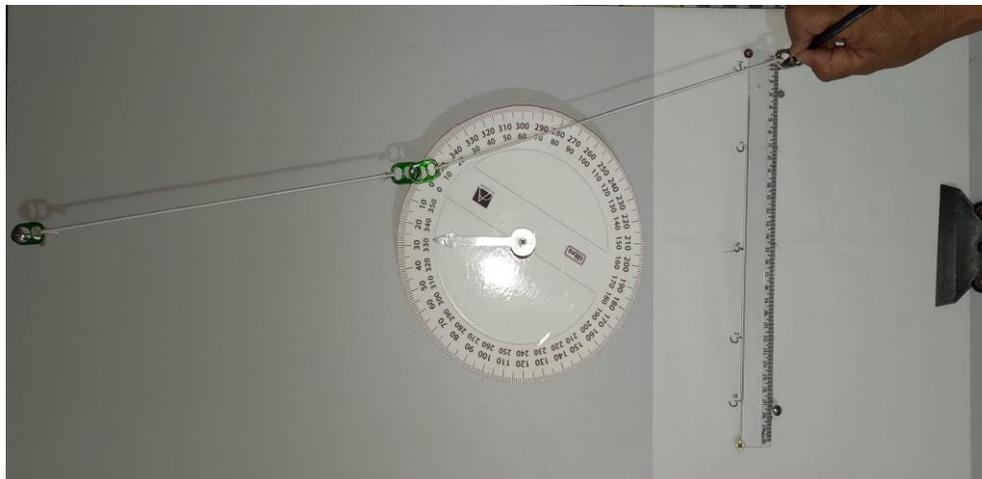
Figura 9 – Posição em  $B_3$ 

Fonte: das autoras

O ponto material voltou ao equilíbrio estável em  $B_3$  e se mantendo nesta condição em  $B_4(8; -6)$  (Fig. 10) e  $G$ , donde o lápis tomou a posição  $C_4(-20; -11,2)$  em  $t_4 = 4 s$ , determinando um  $\theta_4 \approx 8,88^\circ \approx \frac{111\pi}{4500} rad$ ;  $d_{B_3,B_4} \approx 1,5 cm$ ;  $d_{C_3,C_4} \approx d_{C_1,C_2} \approx 2,2 cm$  e conseqüentemente, obtendo  $S_4 \approx 1,6 cm$ . O lápis, ao retornar para  $E$ ,

encontrou dois pontos de colapso, em  $C_3$  e  $C_1$ , fazendo com que o ponto material sofresse catástrofes que geram o **caos** (OLIVEIRA, 2010, grifo nosso).

Figura 10 – Posição em  $B_4$



Fonte: das autoras

À medida que o lápis foi descrevendo a sua trajetória sobre a reta  $p$ , do ponto  $E$  até  $G$ , num intervalo de tempo  $T = [t_0, t_1]$ , os pontos materiais  $B_n$  passaram por momentos de equilíbrio, equilíbrio estável e instável, em algum instante  $t_n$  segundos. Porém, plotando as coordenadas dos pontos  $B_n$ , estes se apresentaram sobre a curva de uma circunferência de equação  $x^2 + y^2 = 100$ . Também, verificou-se que  $|\Delta\vec{r}_1| \rightarrow s_1$ ;  $|\Delta\vec{r}_2| \rightarrow s_2$ ;  $|\Delta\vec{r}_3| \rightarrow s_3$ ;  $|\Delta\vec{r}_4| \rightarrow s_4$ ;  $\dots$ ;  $|\Delta\vec{r}_n| \rightarrow s_n$  num intervalo de tempo  $T = [t_0, t_1]$ .

Desta forma, houve a necessidade de buscar um método que determinasse uma equação que correspondesse ao problema de pesquisa, devendo esta ser mais aproxima das condições que se trabalhou com a máquina de catástrofe. Para tal, aplicou-se as “integrais de linha” como ferramenta para obter a equação não linear que descreva a mudança brusca de posição de um ponto  $B_n$  no disco da máquina de catástrofe, visto que “[...] as integrais de linha são utilizadas para encontrar o trabalho realizado por uma força ao movimentar um objeto ao longo de uma trajetória [...]” (Thomas; Weir; Hass, 2012, p. 362).

Assim, considerou-se 4 (quatro) casos de resolução de integrais de linha, desenvolvidos abaixo, conforme a equação (6) (THOMAS; WEIR; HASS (2012), STEWART (2013)).

**1º Caso:** Considerou-se a segunda lei de Newton, dada pela equação  $\vec{F}(t) = m \cdot \vec{a}(t)$  e a função  $x(y(t))$ , que é o arco que contém as possíveis posições  $B_n$ . Assim, aplicou-

se o vetor posição  $\vec{r}(t) = r \cdot \cos(\omega t)\vec{i} + r \cdot \sin(\omega t)\vec{j}$  para determinar o vetor aceleração. Sendo que:

$$\vec{v}(t) = \vec{r}'(t) = -r \cdot \omega \cdot \sin(\omega t)\vec{i} + r \cdot \omega \cdot \cos(\omega t)\vec{j}, \quad (1)$$

$$\vec{a}(t) = \vec{v}'(t) = \vec{r}''(t) = -r \cdot \omega^2 \cdot \cos(\omega t)\vec{i} - r \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega t)\vec{j}. \quad (2)$$

Pela 2ª Lei de Newton:

$$\vec{F}(t) = m \cdot [-r \cdot \omega^2 \cdot \cos(\omega t)\vec{i} - r \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega t)\vec{j}]$$

$$\vec{F}(t) = -m \cdot r \cdot \omega^2 \cdot \cos(\omega t)\vec{i} - m \cdot r \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega t)\vec{j}$$

$$\begin{aligned} |\vec{F}(t)| &= \sqrt{[-m \cdot r \cdot \omega^2 \cdot \cos(\omega t)]^2 + [-m \cdot r \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega t)]^2} \\ &= \sqrt{m^2 \cdot r^2 \cdot \omega^4 \cdot \cos^2(\omega t) + m^2 \cdot r^2 \cdot \omega^4 \cdot \sin^2(\omega t)} \\ &= \sqrt{m^2 \cdot r^2 \cdot \omega^4 (\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t))} = \sqrt{m^2 \cdot r^2 \cdot \omega^4} = m \cdot r \cdot \omega^2. \end{aligned}$$

No intervalo  $I = \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ , com  $\theta \in I$ , tem-se  $\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t) = 1$  e uma curva  $x(y) = \sqrt{r^2 - y^2}$  e para  $y(t) = r \cdot \sin(\omega t)$ . Assim,

$$\begin{aligned} x(y(t)) &= \sqrt{r^2 - (r \cdot \sin(\omega t))^2} = \sqrt{r^2 - r^2 \cdot \sin^2(\omega t)} = \sqrt{r^2 \cdot (1 - \sin^2(\omega t))} \\ &= \sqrt{r^2 \cdot \cos^2(\omega t)} = r \cdot \cos(\omega t). \end{aligned}$$

Seja

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_C f(x, y) ds = \int_{t_0}^{t_1} x(y(t)) \cdot |\vec{F}(t)| dt = \int_{t_0}^{t_1} r \cdot \cos(\omega t) \cdot (m \cdot r \cdot \omega^2) dt \\ &= m \cdot r^2 \cdot \omega^2 \cdot \int_{t_0}^{t_1} \cos(\omega t) dt. \end{aligned}$$

Resolvendo a integral por substituição, com  $\theta = \omega t$  e  $dt = d\theta/\omega$ . Substituindo o limite inferior de integração  $t_0 = \frac{\theta_0}{\omega}$  e o limite superior de integração  $t_1 = \frac{\theta_1}{\omega}$ , temos:

$$\begin{aligned} s(t) &= m \cdot r^2 \cdot \omega^2 \cdot \frac{1}{\omega} \int_{\frac{\theta_0}{\omega}}^{\frac{\theta_1}{\omega}} \cos(\theta) d\theta = m \cdot r^2 \cdot \omega \cdot \sin(\theta) \Big|_{\frac{\theta_0}{\omega}}^{\frac{\theta_1}{\omega}} \\ &= m \cdot r^2 \cdot \omega \cdot \left[ \sin\left(\frac{\theta_1}{\omega}\right) - \sin\left(\frac{\theta_0}{\omega}\right) \right] \end{aligned}$$

Resultando um número representado pela equação não linear:

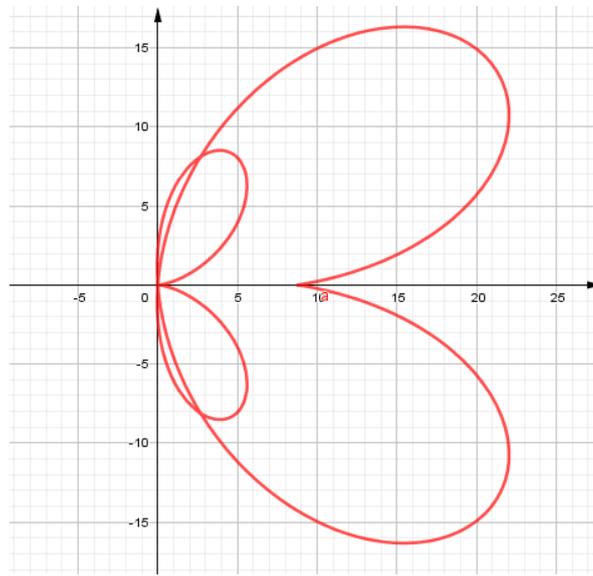
$$s(t) = m \cdot r^2 \cdot \frac{\theta}{t} [\sin(t_1) - \sin(t_0)] \quad (3)$$

E, aplicando-se a medida do raio do disco da máquina de catástrofe igual a  $r = 10 \text{ cm}$ , massa do ponto material igual a  $m = 0,1 \text{ g}$ , bem como,  $\theta = \pi/6 \text{ rad}$ ,  $t_0 = 0 \text{ s}$  e  $t_1 = 1 \text{ s}$ . Assim, para  $t = t_1 - t_0 = 1 \text{ s}$ ,  $s(t)$  igual a:

$$s(1) = 0,1 \cdot 100 \cdot \frac{\pi}{6} [\text{sen}(1) - \text{sen}(0)] \approx 4,41,$$

então a equação (3) corresponde ao caos produzido na mudança brusca de posição de um ponto móvel  $B_n$  no disco de rotação da máquina de catástrofe, sendo  $\tau = m \cdot \frac{\theta}{t} \cdot \text{sen}(\theta)$  o torque aplicado no ponto material. Considerando parâmetro  $\theta$  no intervalo  $I = (-\pi, \pi)$  e se este variar, pode-se reescrever a equação (3) como sendo  $s\left(\frac{\theta}{\omega}\right) = 10 \cdot \theta \cdot \text{sen}\left(\frac{\theta}{\omega}\right)$ . Com período  $t = 1 \text{ s}$  e  $\omega = \pi/6 \text{ rad/s}$ , graficamente (Fig. 9) essa equação apresenta o comportamento dado pela curva:

Figura 3 – Curva da Equação 3



Fonte: das autoras

**2º Caso:** Nesse, considerou-se o produto vetorial entre os vetores  $\vec{F}(t) = m \cdot \vec{a}(t)$  e  $\vec{u}(t) = \Delta \vec{r}$ . Depois, integrou-se o produto  $x(y(t)) \cdot |\vec{F}(t) \times \vec{u}(t)|$ , para  $x(y(t)) = R \cos(\omega t)$ :

$$\vec{F}(t) = -m \cdot r \cdot \omega^2 \cdot \cos(\omega t) \vec{i} - m \cdot r \cdot \omega^2 \cdot \text{sen}(\omega t) \vec{j}$$

$$\vec{u}(t) = \Delta \vec{r} = (r - r \cdot \cos(\omega t)) \vec{i} - r \cdot \text{sen}(\omega t) \vec{j}$$

$$\begin{aligned} \vec{F}(t) \times \vec{u}(t) &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -m \cdot r \cdot \omega^2 \cdot \cos(\omega t) & -m \cdot r \cdot \omega^2 \cdot \text{sen}(\omega t) & 0 \\ r - r \cdot \cos(\omega t) & -r \cdot \text{sen}(\omega t) & 0 \end{vmatrix} \\ &= mR^2 \omega^2 \text{sen}(\omega t) \vec{k} \end{aligned}$$

$$|\vec{F}(t) \times \vec{u}(t)| = \sqrt{(m \cdot r^2 \cdot \omega^2 \cdot \text{sen}(\omega t))^2} = m \cdot r^2 \cdot \omega^2 \cdot \text{sen}(\omega t).$$

No intervalo  $I = \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ , com  $\theta \in I$ , seja:

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_C f(x, y) ds = \int_{t_0}^{t_1} x(y(t)) \cdot |\vec{F}(t) \times \vec{u}(t)| dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} r \cdot \cos(\omega t) \cdot (m \cdot r^2 \cdot \omega^2 \cdot \text{sen}(\omega t)) dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} m \cdot r^3 \cdot \omega^2 \cdot [\cos(\omega t) \cdot \text{sen}(\omega t)] dt. \end{aligned}$$

Aplicou-se a fórmula do ângulo duplo para  $\cos(\omega t) \cdot \text{sen}(\omega t) = \frac{1}{2} \text{sen}(2\omega t)$  e integrou-se por substituição, com  $\theta = 2\omega t$  e  $dt = \frac{1}{2\omega} d\theta$ , empregando o limite inferior de integração  $t_0 = \frac{\theta_0}{2\omega}$  e o limite superior de integração  $t_1 = \frac{\theta_1}{2\omega}$ . Assim:

$$\begin{aligned} s(t) &= m \cdot r^3 \cdot \omega^2 \cdot \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{2} \text{sen}(2\omega t) dt = m \cdot r^3 \cdot \omega^2 \cdot \frac{1}{4\omega} \cdot \int_{\frac{\theta_0}{2\omega}}^{\frac{\theta_1}{2\omega}} \text{sen}(\theta) d\theta \\ &= -\frac{1}{4} \cdot m \cdot r^3 \cdot \omega \cdot \cos(\theta) \Big|_{\frac{\theta_0}{2\omega}}^{\frac{\theta_1}{2\omega}} = -\frac{1}{4} \cdot m \cdot r^3 \cdot \omega \cdot \left[ \cos\left(\frac{\theta_1}{2\omega}\right) - \cos\left(\frac{\theta_0}{2\omega}\right) \right] \end{aligned}$$

Resultando um número representado pela equação não linear:

$$s(t) = -\frac{1}{4} \cdot m \cdot r^3 \cdot \omega \cdot [\cos(t_1) - \cos(t_0)].$$

Como o produto  $-\frac{1}{4} \cdot m \cdot r^3 \cdot \omega = -\frac{1}{4} \cdot 0,1 \cdot 10^3 \cdot \omega = -25 \cdot \omega$  é uma constante,  $\theta = \omega t$  e  $\omega = \frac{\theta}{t}$ , então o deslocamento de um ponto  $B_n$  determinado pela trajetória de um lápis é a curva determinada por

$$s(t) = -25 \cdot \frac{\theta}{t} \cdot [\cos(t_1) - \cos(t_0)]. \quad (4)$$

A equação (4) corresponde ao caos produzido na mudança brusca de posição de um ponto móvel  $B_n$  no disco de rotação da máquina de catástrofe. Para os valores atribuídos ao raio  $r = 10 \text{ cm}$ , a massa do ponto material sendo  $m = 0,1 \text{ g}$  e o deslocamento rotacional  $\theta = \pi/6$  rad obtido no período  $t = 1 \text{ s}$ , com  $t_0 = 0 \text{ s}$  e  $t_1 = 1 \text{ s}$ ,  $s(t)$  será a medida

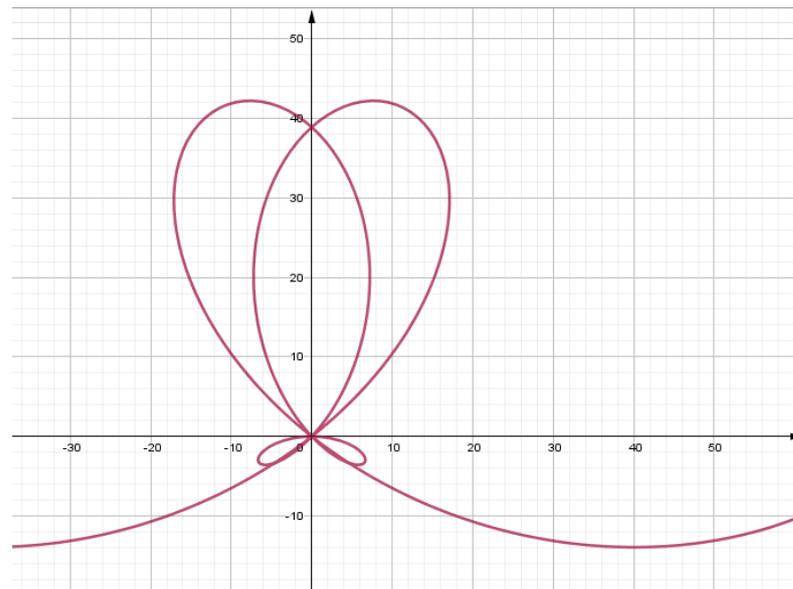
$$s(1) = -\frac{25}{6} \pi \cdot [\cos(1) - \cos(0)] \approx 6,02.$$

A integral definida do torque,  $\tau = m \cdot \frac{\theta}{t} \cdot \text{sen}(\theta)$ , é o trabalho  $W$  executado em uma rotação de um ponto material, devido o torque acelerar o disco rígido que gira em

torno de um eixo e fazendo variar a energia cinética rotacional deste (HALLIDAY; RESNICK; WALKER, 2008, p. 271).

Considerando parâmetro  $\theta$  como variável independente no intervalo  $I = (-\pi, \pi)$ , pode-se reescrever a equação (4) como sendo  $s\left(\frac{\theta}{\omega}\right) = -25 \cdot \theta \cdot \cos\left(\frac{\theta}{\omega}\right)$ . Usando o período de tempo  $t = 1$  s e  $\omega = \pi/6$  rad/s, graficamente (Fig. 10) essa equação apresenta o comportamento dado pela curva:

Figura 4 – Curva da Equação 4



Fonte: das autoras

**3º Caso:** Para esse, aplicou-se a força resultante:  $\vec{F}_{res}(t) = \vec{v}(t) + \vec{a}(t)$ , o módulo da força correspondente a segunda lei de Newton, aplicou-se a integral do produto  $|\vec{F}(t)|$  e  $x(y(t)) = r \cdot \cos(\omega t)$ . Para a força resultante:  $\vec{F}_{res}(t) = \vec{v}(t) + \vec{a}(t)$ .

$$\vec{F}_{res}(t) = -r \cdot \omega \cdot [\text{sen}(\omega t) + \omega \cdot \text{cos}(\omega t)]\vec{i} + r \cdot \omega \cdot [\text{cos}(\omega t) - \omega \cdot \text{sen}(\omega t)]\vec{j}$$
 e, usou-se a  $\vec{F}_{res}(t)$  em vez da aceleração.

$$\vec{F}(t) = m \cdot \vec{F}_{res}(t)$$

$$\vec{F}(t) = -m \cdot r \cdot \omega \cdot [\text{sen}(\omega t) + \omega \cdot \text{cos}(\omega t)]\vec{i} + m \cdot r \cdot \omega \cdot [\text{cos}(\omega t) - \omega \cdot \text{sen}(\omega t)]\vec{j}.$$

Assim:

$$|\vec{F}(t)| = m \cdot r \cdot \omega \cdot \sqrt{1 + \omega^2}.$$

No intervalo  $I = \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ , com  $\theta \in I$ , calculou-se:

$$s(t) = \int_C f(x, y) ds = \int_{t_0}^{t_1} x(y(t)) \cdot |\vec{F}(t)| dt = \int_{t_0}^{t_1} r \cdot \text{cos}(\omega t) \cdot m \cdot r \cdot \omega \cdot \sqrt{1 + \omega^2} dt$$

$$= m \cdot r^2 \cdot \omega \cdot \sqrt{1 + \omega^2} \cdot \int_{t_0}^{t_1} \cos(\omega t) dt.$$

Integrou-se por substituição, com  $\theta = \omega t$  e  $dt = \frac{1}{\omega} d\theta$ , empregando  $t_0 = \frac{\theta_0}{\omega}$  como limite inferior de integração e  $t_1 = \frac{\theta_1}{\omega}$ , como limite superior de integração. Assim:

$$\begin{aligned} s(t) &= m \cdot r^2 \cdot \omega \cdot \sqrt{1 + \omega^2} \cdot \int_{t_0}^{t_1} \cos(\omega t) dt = m \cdot r^2 \cdot \omega \cdot \frac{1}{\omega} \cdot \sqrt{1 + \omega^2} \cdot \int_{\frac{\theta_0}{\omega}}^{\frac{\theta_1}{\omega}} \cos(\theta) d\theta \\ &= m \cdot r^2 \cdot \sqrt{1 + \omega^2} \cdot \text{sen}(\theta) \Big|_{\frac{\theta_0}{\omega}}^{\frac{\theta_1}{\omega}} = m \cdot r^2 \cdot \sqrt{1 + \omega^2} \cdot \left[ \text{sen} \left( \frac{\theta_1}{\omega} \right) - \text{sen} \left( \frac{\theta_0}{\omega} \right) \right] \\ &= m \cdot r^2 \cdot \sqrt{1 + \omega^2} \cdot [\text{sen}(t_1) - \text{sen}(t_0)] \end{aligned}$$

Para  $\omega = \frac{\theta}{t}$  e atribuindo ao raio  $r$  o valor de 10 cm e a massa  $m$  do ponto material a medida 0,1 g, o deslocamento de um ponto  $B_n$  determinado pela trajetória de um lápis é a curva representada pela equação não linear:

$$s(t) = 10 \cdot \sqrt{1 + \frac{\theta^2}{t^2}} \cdot [\text{sen}(t_1) - \text{sen}(t_0)], \quad (5)$$

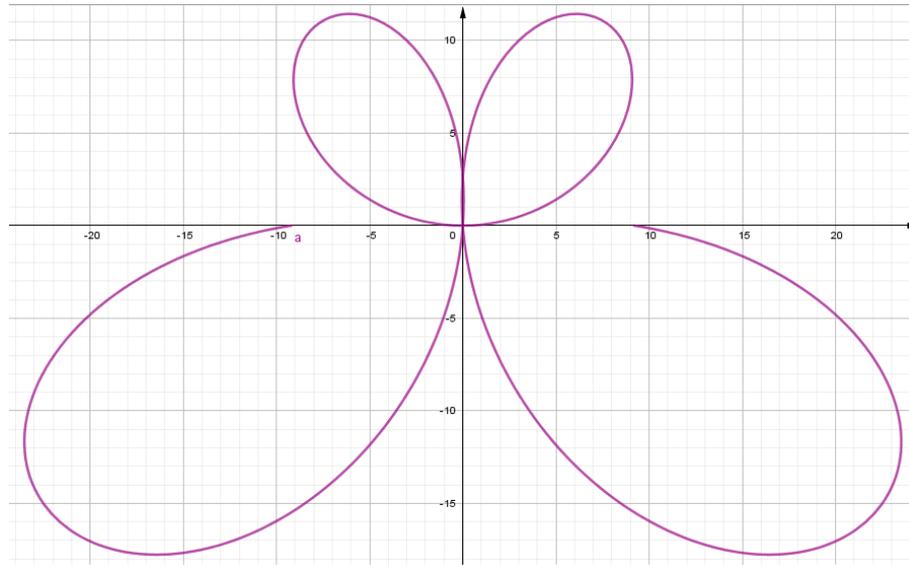
dentro do intervalo aberto  $I$ ,  $-\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ .

Com a equação (5) determinamos pontos que correspondem ao caos produzido na mudança brusca de posição de um ponto móvel  $B_n$  no disco de rotação da máquina de catástrofe. Com deslocamento rotacional  $\theta = \pi/6$  rad obtido no período  $t = 1$  s, com  $t_0 = 0$  s e  $t_1 = 1$  s,  $s(t)$  será a medida

$$s(1) = 10 \cdot \sqrt{1 + \frac{\left(\frac{\pi}{6}\right)^2}{1^2}} \cdot [\text{sen}(1) - \text{sen}(0)] \approx 9,498.$$

Considerando, no intervalo  $I = (-\pi, \pi)$ , o parâmetro  $\theta$  como variável independente, pode-se reescrever a equação (5) como  $s\left(\frac{\theta}{\omega}\right) = 10 \cdot \sqrt{1 + \theta^2} \cdot \text{sen}\left(\frac{\theta}{\omega}\right)$  e, aplicando o período de tempo  $t = 1$  s, com  $\omega = \pi/6$  rad/s, graficamente (Fig. 11) essa equação apresenta o comportamento dado pela curva:

Figura 5 - Curva da Equação 5



Fonte: das autoras

**4º Caso:** Considerou-se a força resultante:  $\vec{F}_{res}(t) = \vec{v}(t) + \vec{a}(t)$  para determinar o produto vetorial entre os vetores  $\vec{F}(t) = m \cdot \vec{F}_{res}(t)$  e  $\vec{u}(t) = \Delta\vec{r} = (r - r \cdot \cos(\omega t))\vec{i} - r \cdot \sin(\omega t)\vec{j}$ . Na sequência, calculou-se a integral do produto  $x(y(t)) \cdot |\vec{F}(t) \times \vec{u}(t)|$ :

Para

$$\vec{F}_{res}(t) = -r \cdot \omega \cdot [\sin(\omega t) + \omega \cdot \cos(\omega t)]\vec{i} + r \cdot \omega \cdot [\cos(\omega t) - \omega \cdot \sin(\omega t)]\vec{j}$$

aplicada em  $\vec{F}(t) = m \cdot \vec{F}_{res}(t)$ , ficando:

$$\vec{F}(t) = -m \cdot r \cdot \omega \cdot [\sin(\omega t) + \omega \cdot \cos(\omega t)]\vec{i} + m \cdot r \cdot \omega \cdot [\cos(\omega t) - \omega \cdot \sin(\omega t)]\vec{j}$$

e, determinou-se

$$\vec{F}_{res}(t) \times \vec{u}(t)$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -m \cdot r \cdot \omega \cdot \sin(\omega t) - m \cdot r \cdot \omega^2 \cdot \cos(\omega t) & m \cdot r \cdot \omega \cdot \cos(\omega t) - m \cdot r \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega t) & 0 \\ r - r \cdot \cos(\omega t) & -r \cdot \sin(\omega t) & 0 \end{vmatrix}$$

$$= [m \cdot r^2 \cdot \omega - m \cdot r^2 \cdot \omega \cdot \cos(\omega t) + m \cdot r^2 \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega t)]\vec{k}$$

Daí, tem-se:

$$|\vec{F}_{res}(t) \times \vec{u}(t)| = m \cdot r^2 \cdot \omega - m \cdot r^2 \cdot \omega \cdot \cos(\omega t) + m \cdot r^2 \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega t)$$

Para o intervalo  $I = \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ , com  $\theta \in I$  e aplicando a curva  $x(y(t)) = r \cdot \cos(\omega t)$ .

Logo,

$$s(t) = \int_C f(x, y) ds = \int_{t_0}^{t_1} x(y(t)) \cdot |\vec{F}_{res}(t) \times \vec{u}(t)| dt$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{t_0}^{t_1} r \cdot \cos(\omega t) \cdot [m \cdot r^2 \cdot \omega - m \cdot r^2 \cdot \omega \cdot \cos(\omega t) + m \cdot r^2 \cdot \omega^2 \cdot \text{sen}(\omega t)] dt \\
&= m \cdot r^3 \cdot \omega \cdot \int_{t_0}^{t_1} \cos(\omega t) dt - m \cdot r^3 \cdot \omega \cdot \int_{t_0}^{t_1} \cos^2(\omega t) dt + m \cdot r^3 \cdot \omega^2 \\
&\quad \cdot \int_{t_0}^{t_1} \text{sen}(\omega t) \cdot \cos(\omega t) dt
\end{aligned}$$

Sendo  $\theta = \omega t$  e  $t = \frac{\theta}{\omega}$ , tem-se  $dt = \frac{1}{\omega} d\theta$ , empregando  $t_0 = \frac{\theta_0}{\omega}$  como limite inferior de integração e  $t_1 = \frac{\theta_1}{\omega}$ , como limite superior de integração. Além disso, resolveu-se a última integral por substituição  $u = \text{sen}(\theta)$  e  $du = \cos(\theta)d\theta$ . Assim,

$$\begin{aligned}
s(t) &= m \cdot r^3 \cdot \omega \cdot \frac{1}{\omega} \cdot \int_{\frac{\theta_0}{\omega}}^{\frac{\theta_1}{\omega}} \cos(\theta) d\theta - m \cdot r^3 \cdot \omega \cdot \frac{1}{\omega} \cdot \int_{\frac{\theta_0}{\omega}}^{\frac{\theta_1}{\omega}} \cos^2(\theta) d\theta + m \cdot r^3 \cdot \omega^2 \cdot \frac{1}{\omega} \\
&\quad \cdot \int_{\frac{\theta_0}{\omega}}^{\frac{\theta_1}{\omega}} \text{sen}(\theta) \cdot \cos(\theta) d\theta \\
&= m \cdot r^3 \cdot \text{sen}(\theta) \Big|_{\frac{\theta_0}{\omega}}^{\frac{\theta_1}{\omega}} - m \cdot r^3 \cdot \left[ \frac{1}{2} \theta + \frac{1}{4} \text{sen}(2\theta) \right]_{\frac{\theta_0}{\omega}}^{\frac{\theta_1}{\omega}} + m \cdot r^3 \cdot \omega \cdot \left[ \frac{1}{2} \text{sen}^2(\theta) \right]_{\frac{\theta_0}{\omega}}^{\frac{\theta_1}{\omega}} \\
&= m \cdot r^3 \cdot \left[ \text{sen} \left( \frac{\theta_1}{\omega} \right) - \text{sen} \left( \frac{\theta_0}{\omega} \right) \right] - \frac{1}{2} \cdot m \cdot r^3 \cdot \left[ \frac{\theta_1}{\omega} - \frac{\theta_0}{\omega} \right] - \frac{1}{4} \cdot m \cdot r^3 \\
&\quad \cdot \left[ \text{sen} \left( \frac{2\theta_1}{\omega} \right) - \text{sen} \left( \frac{2\theta_0}{\omega} \right) \right] + \frac{1}{2} \cdot m \cdot r^3 \cdot \omega \cdot \left[ \text{sen}^2 \left( \frac{\theta_1}{\omega} \right) - \text{sen}^2 \left( \frac{\theta_0}{\omega} \right) \right] \\
&= m \cdot r^3 \cdot [\text{sen}(t_1) - \text{sen}(t_0)] - \frac{1}{2} \cdot m \cdot r^3 \cdot [\omega t_1 - \omega t_0] - \frac{1}{4} \cdot m \cdot r^3 \\
&\quad \cdot [\text{sen}(2t_1) - \text{sen}(2t_0)] + \frac{1}{2} \cdot m \cdot r^3 \cdot \omega \cdot [\text{sen}^2(t_1) - \text{sen}^2(t_0)]
\end{aligned}$$

Com  $\omega = \frac{\theta}{t}$  e substituindo  $r$  por 10 cm e  $m$  pela medida 0,1 g, o deslocamento de um ponto  $B_n$  determinado pela trajetória de um lápis é a curva representada pela equação não linear:

$$\begin{aligned}
s(t) &= -50 \cdot \frac{\theta}{t} \cdot [t_1 - t_0] + 100 \cdot [\text{sen}(t_1) - \text{sen}(t_0)] - 25 \cdot [\text{sen}(2t_1) - \text{sen}(2t_0)] + 50 \cdot \\
&\quad \frac{\theta}{t} \cdot [\text{sen}^2(t_1) - \text{sen}^2(t_0)], \tag{6}
\end{aligned}$$

dentro do intervalo aberto  $I$ ,  $-\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ .

Com a equação (6) obtém-se pontos que corresponde ao caos produzido na mudança brusca de posição de um ponto móvel  $B_n$  no disco de rotação da máquina

de catástrofe. Com deslocamento rotacional  $\theta = \pi/6$  rad obtido no período  $t = 1$  s, com  $t_0 = 0$  s e  $t_1 = 1$  s,  $s(t)$  será a medida

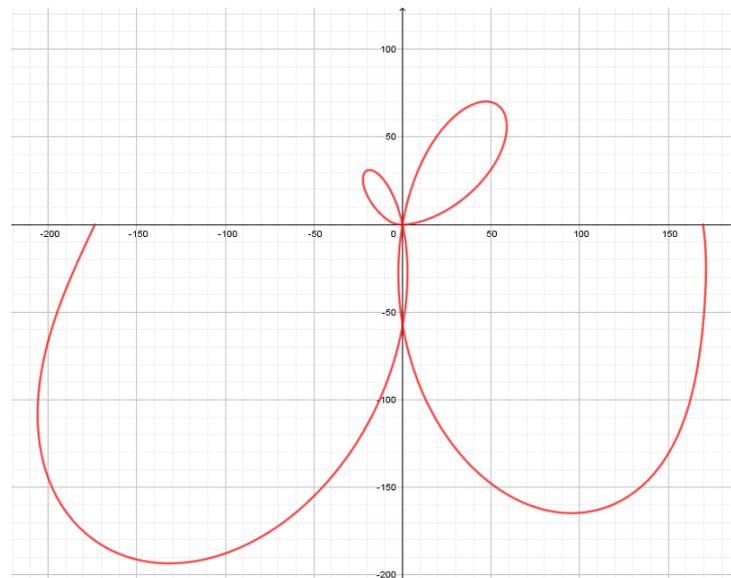
$$s(t) = -50 \cdot \frac{\pi}{6} \cdot [1 - 0] + 100 \cdot [\text{sen}(1) - \text{sen}(0)] - 25 \cdot [\text{sen}(2) - \text{sen}(0)] + 50 \cdot \frac{\pi}{6} \cdot [\text{sen}^2(1) - \text{sen}^2(0)] \approx 56,88$$

Considerando, no intervalo  $I = (-\pi, \pi)$ , o parâmetro  $\theta$  como variável independente, pode-se reescrever a equação (6) como

$$s\left(\frac{\theta}{\omega}\right) = -50 \cdot \theta + 100 \cdot \text{sen}\left(\frac{\theta}{\omega}\right) - 25 \cdot \text{sen}\left(\frac{2\theta}{\omega}\right) + 50 \cdot \theta \cdot \text{sen}^2\left(\frac{\theta}{\omega}\right)$$

e, aplicando o período de tempo  $t = 1$  s, com  $\omega = \pi/6$  rad/s, graficamente (Fig. 12) essa equação apresenta o comportamento dado pela curva

Figura 6 - Curva da Equação 6



Fonte: das autoras

Cabe salientar que observou-se nas equações não lineares 4 e 6, que os modelos obtidos não corresponderam aos dados coletados no movimento do ponto móvel  $B_n$  no disco de rotação da máquina de catástrofe, devido os produtos vetoriais usados serem o torque e esses desenvolveram uma catástrofe acentuada, pois a variação temporal do produto vetorial apontou para uma direção perpendicular ao plano formado pelos vetores da força  $\vec{F}$  e do  $\Delta\vec{r}$  (CASALI (2019), HALLIDAY; RESNICK; WALKER (2008), YOUNG; FREEDMAN (2008)).

## 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Concluiu-se que a equação não linear  $s\left(\frac{\theta}{\omega}\right) = 10 \cdot \theta \cdot \text{sen}\left(\frac{\theta}{\omega}\right)$  é a equação que melhor corresponde aos dados coletados na máquina de catástrofe. Cabe salientar que a equação (6),  $s\left(\frac{\theta}{\omega}\right) = -50 \cdot \theta + 100 \cdot \text{sen}\left(\frac{\theta}{\omega}\right) - 25 \cdot \text{sen}\left(\frac{2\theta}{\omega}\right) + 50 \cdot \theta \cdot \text{sen}^2\left(\frac{\theta}{\omega}\right)$  é a que melhor expressa a catástrofe que representa a mudança brusca de posição de um ponto material no disco da máquina, devido apresentar as forças: elástica, inércia e torque. A força elástica está representada  $F_x = -50 \cdot \theta$  e o torque equivale a  $\tau = +100 \cdot \text{sen}\left(\frac{\theta}{\omega}\right) - 25 \cdot \text{sen}\left(\frac{2\theta}{\omega}\right)$ , confirmando a variação do ângulo  $\theta$  entre os pontos  $B_1$  e  $B_3$ .

Em relação a força elástica, concluiu-se que as forças elásticas  $\vec{F}_{e_1} = \vec{F}_{e_2}$  determinam um ponto de equilíbrio. Que as forças  $\vec{F}_{e_1} > \vec{F}_{e_2}$ , resultando na restauração do elástico  $e_1$ , fazendo com que o ponto material retorne ao ponto de equilíbrio estável em  $B_n$ . Com  $\vec{F}_{e_1} < \vec{F}_{e_2}$ ,  $B_n$  perde a estabilidade e torna-se instável, obtendo um ponto de colapso (catástrofe).

Em referência à graduação, este trabalho pode contribuir para que os acadêmicos entendam as relações entre os conceitos matemáticos desenvolvidos no curso. A abordagem interdisciplinar foi importante, pois através dela podem-se compreender os conceitos físicos envolvidos na dinâmica da máquina de catástrofe e na matemática a resolução e aplicabilidade da integral de linha, as relações entre a geometria analítica e o cálculo vetorial, sendo assim motivador e desafiador. Também, verificou-se a importância de trabalhar de forma interdisciplinar no ensino médio com esse experimento podendo compreender os conceitos relacionados aos vetores, bem como modelar equações do software GeoGebra.

## REFERÊNCIAS

- FEYNMAN, R. P. **O Efeito Borboleta**. In: James Gleick (org.). *Caos: a criação de uma nova ciência*. 17. reimpr. Rio de Janeiro: Elsevier, 1989. p. 09-30.
- FREY, F.; ROSSA, J. A. da. **Teoria do caos: a ordem na não-linearidade**. Universo Acadêmico, Taquara, v. 5, n. 1, jan./dez., 2012.
- GIL, A. C. **Como Elaborar Projetos de Pesquisa**. 5. ed. São Paulo: Atlas, 2010.
- GLEICK, J. **A criação de uma nova ciência**. 4. ed., Rio de Janeiro: Campus, 1991
- GOMIDE, O. M. L. **A bifurcação cúspide e sua realização na máquina de Zeeman**. 2015. Disponível em: <http://www.ime.unicamp.br/~rmiranda/wordpress/wp-content/uploads/2015/06/otavio.pdf>. Acesso em: 25 out. 2019.
- HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J. **Fundamentos da física: Mecânica**, v. 1, 9. ed., Livros Técnicos e Científicos. Rio de Janeiro, LTC, 2008.
- MORAIS, L. **Equações de Diferenças, Caos e Fractais**. Dissertação. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/bitstream/handle/123456789/123200/326928.pdf>. Acesso em: 30 out. 2019.
- MOREIRA, I. de C.; OLIVEIRA, K; VIANA, M. **Fundamentos da Teoria Ergódica**. [2005?] Disponível em: <http://www.sbfisica.org.br/rbef/pdf/vol15a18.pdf>. Acesso em: 17 ago. 2019.
- SPENDER, S. **Revolução**. In: James Gleick (org.). **Caos: a criação de uma nova ciência**. 17. reimpr. Rio de Janeiro: Elsevier, 1989. p. 31-78.
- STEWART, J. **Cálculo**. v. 2. São Paulo: Cengage Learning, 2013.
- THOMAS, G. B.; WEIR M. D.; HASS, J. **Cálculo**. v. 2. 12. ed. São Paulo: Pearson, 2012.
- VALERIO, L. R. **Dinâmica Não-Linear e Caos: O circuito de Chua**. <https://www.unifal-mg.edu.br/fisica/files/file/TCCs/ValerioLR.pdf>. Acesso em: 25 out.2019.
- YOUNG, H. D.; FREEDMAN, R. A. **Física I: Mecânica**. 12 ed., São Paulo: Addison Wesley, 2008.