UNIVERSIDADE FEDERAL DO PAMPA

ALINE PALMA MEIRELLES

INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA NA ABORDAGEM DE PROGRESSÕES: UMA ANÁLISE DOCUMENTAL

Bagé/RS
2019

ALINE PALMA MEIRELLES

INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA NA ABORDAGEM DE PROGRESSÕES: UMA ANÁLISE DOCUMENTAL

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Matemática – Licenciatura da Universidade Federal do Pampa, como requisito parcial para obtenção do Título de Licenciada em Matemática.

Orientadora: Prof.ª Dr.ª Sonia Maria da Silva Junqueira

Bagé/ RS
2019

Ficha catalográfica elaborada automaticamente com os dados fornecidos
pelo(a) autor(a) através do Módulo de Biblioteca do
Sistema GURI (Gestão Unificada de Recursos Institucionais) .

M514i Meirelles, Aline Palma
Investigação matemática na abordagem de progressões: uma análise documental / Aline Palma Meirelles.
57 p.

Trabalho de Conclusão de Curso(Graduação)-- Universidade Federal do Pampa, MATEMÁTICA, 2019.
"Orientação: Sonia Maria da Silva Junqueira".

1. Investigação matemática. 2. Progressão aritmética. 3. Progressão geométrica. 4. BNCC. I. Título.

ALINE PALMA MEIRELLES

INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA NA ABORDAGEM DE PROGRESSÕES: UMA ANÁLISE DOCUMENTAL

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Matemática - Licenciatura da Universidade Federal do Pampa, como requisito parcial para obtenção do Título de Licenciada em Matemática

Trabalho de Conclusão de Curso defendido e aprovado em: 03 de dezembro de 2019.

Banca examinadora:

Prof.ª Dr.ª Sonia Maria da Silva Junqueira
Orientadora
UNIPAMPA

Prof.ª Dr.ª Claudia Laus Angelo
UNIPAMPA

Prof.ª Dr.ª Dionara Teresinha Aragon Aseff
UNIPAMPA

RESUMO

O presente trabalho tem como motivação o fato de que muitas vezes a Matemática escolar parece limitada à memorização e aplicação de fórmulas e algoritmos. Na maioria das vezes, tem-se a impressão de que os estudantes apenas reproduzem uma sequência de procedimentos em repetidas tarefas. A Investigação Matemática mostra-se como alternativa a esse modelo, pois propõe tarefas que levam à participação ativa e colaborativa dos estudantes no seu processo de construção do conhecimento matemático, sobretudo promovendo a busca pelos significados dos conteúdos, e não a centralidade na repetição de exercícios e aplicação de fórmulas. Nesse sentido, o objetivo deste trabalho é verificar se a forma como se apresenta o estudo das progressões, em sequências didáticas de Ensino Médio, favorece a descoberta de relações e o estabelecimento de conjecturas, em um processo de Investigação Matemática. Para isso será realizada uma pesquisa qualitativa tendo como técnica a análise documental. Os documentos considerados nessa análise são cinco livros didáticos aprovados pelo Ministério da Educação, no ano de 2018, através do Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD). Pretende-se, nesse processo de investigação, verificar como são desenvolvidas as sequências didáticas que abordam o estudo das progressões e, com olhar para aspectos relacionados à Investigação Matemática, mostrar de que forma esses materiais acolhem definições curriculares presentes na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) para o Ensino Médio.

Palavras-Chave: Investigação matemática. Progressão aritmética. Progressão geométrica. BNCC.

ABSTRACT

The present work is motivated by the fact that school mathematics often seems limited to the memorization and application of formulas and algorithms. Most of the time, one gets the impression that students only reproduce a sequence of procedures on repeated tasks. Mathematical Investigation proves to be an alternative to this model, as it proposes tasks that lead to the active and collaborative participation of students in their process of building mathematical knowledge, especially promoting the search for the meanings of the contents, not the centrality in the repetition of exercises, and application of formulas. In this sense, the objective of this work is to verify in high school didactic sequences if the way they present themselves for the study of progressions favors the discovery of relationships and the establishment of conjectures, in a process of Mathematical Investigation. For this, a qualitative research will be conducted using the document analysis technique. The documents considered in this analysis are five textbooks approved by the Ministry of Education, in 2018, through the National Program of Books and Didactic Material (PNLD). The aim of this research process is to verify how the didactic sequences that approach the study of progressions are developed and, looking at aspects related to Mathematical Investigation, to show how these materials meet the curricular definitions of the Common National Curricular Base (BNCC) for high school.

Keywords: Mathematical investigation. Arithmetic progression. Geometric progression. BNCC.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BNCC – Base Nacional Comum Curricular

PA – Progressão Aritmética

PCN – Parâmetros Curriculares Nacionais

PG – Progressão Geométrica

PNLD – Programa Nacional do Livro e do Material Didático

RS – Rio Grande do Sul

SIPPEE – Sistema de Informação de Projetos de Pesquisa, Ensino e Extensão

TCC II – Trabalho de Conclusão de Curso II

UNIPAMPA – Universidade Federal do Pampa

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Este trabalho descreve uma pesquisa realizada na área de Educação Matemática, tendo como foco a Investigação Matemática na abordagem de progressões aritméticas e geométricas. Trata-se de um Trabalho de Conclusão de Curso (TCC II), vinculado ao projeto de pesquisa “Laboratório de Investigações Matemáticas”, cadastrado no Sistema de Informação de Projetos de Pesquisa, Ensino e Extensão (SIPPEE) registrado sob número 20170808161710 e desenvolvido no curso de Matemática-Licenciatura da Universidade Federal do Pampa (UNIPAMPA), campus Bagé.

A respeito do campo desta investigação, não é incomum a Matemática escolar ser percebida como uma disciplina em que fórmulas e algoritmos devam ser memorizados, e esse pode ser um dos motivos dela ser rotulada como difícil e sem sentido. Muitos estudantes demonstram não ver sentido algum quando utilizam uma fórmula para resolver uma situação problema e, na maioria das vezes, apenas reproduzem uma sequência de procedimentos em repetidas tarefas. Colaboram para essa interpretação, Segurado e Ponte (1998) acerca da visão empobrecida que se coloca sobre a Matemática escolar:

> A ênfase no trabalho em tarefas estruturadas e a pouca atenção à formulação de questões e à interpretação e validação de resultados, contribuem para criar nos alunos uma visão empobrecida do modo de trabalhar e aprender nesta disciplina. (SEGURADO; PONTE, 1998, p.3)

Nessa problemática que restringe a Matemática escolar ao desenvolvimento de fórmulas e algoritmos de forma mecânica, sem a compreensão do fato matemático em si, uma alternativa parece ser a de mudar a forma como as aulas de Matemática são vistas por esses alunos. Nessa direção, cabe repensar como levar para a sala de aula atividades que gerem interesse e mobilização, nas quais os alunos não apenas reproduzam procedimentos padronizados pelo professor, mas participem ativamente do processo de descoberta e construção de conceitos, por meio de tarefas coletivas e colaborativas com a finalidade de qualificar o processo de construção do conhecimento matemático.

Diante do exposto, a Investigação Matemática tem a finalidade de modificar a percepção mecanicista imposta sobre a Matemática escolar e, mostra-se como uma proposta diferenciada se comparada ao modelo tradicional, pois de acordo com Ponte, Brocardo e Oliveira (2009, p. 23) “[...] o envolvimento ativo do aluno é uma condição fundamental da aprendizagem”.

Nesse sentido, a Investigação Matemática surge como uma forma de trabalho que difere da aprendizagem mecânica e se distancia do modelo de ensino tradicional, pois possibilita aos estudantes a descoberta de relações e o estabelecimento de conjecturas, favorecendo, assim, a compreensão dos conceitos estudados, pois em uma abordagem que favorece a Investigação Matemática, os estudantes são convidados a participar de todo o processo, desde a formulação de questões, passando pelo estabelecimento de conjecturas e justificação, até a fase de discussão, em que é recomendável uma reflexão coletiva do trabalho realizado. Logo,

> O aluno é chamado a agir como um matemático, não só na formulação de questões e conjecturas e na realização de provas e refutações, mas também na apresentação de resultados e na discussão e argumentação com seus colegas e o professor. (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2009, p. 23)

Levando em conta a aprendizagem por repetição, os conteúdos de progressões aritméticas (PA) e progressões geométricas (PG), em geral, são apresentados na Matemática escolar sob uma abordagem mais mecânica, valorizando a aplicação de fórmulas desvinculadas de sentido para os alunos, o que não contribui para discussões pertinentes para a compreensão de conceitos relacionados a esse tema. Por exemplo, fórmulas que determinam o termo geral ou a soma de termos equidistantes de uma PA são memorizadas apenas para finalidade de sucesso em processos avaliativos, contudo não são compreendidas em seus significados e aplicações, sequer são remetidas à ideia de generalização de padrões, condição importante para que estudantes criem expressões algébricas ou recursos que favoreçam a ampliação da capacidade de raciocínio algébrico. Outro exemplo é identificar a relação existente entre a função exponencial e a progressão geométrica, que por vezes é deixada de lado, enquanto se valoriza a aplicação de fórmulas. Nesse sentido, a interpretação do crescimento geométrico poderia ser associada ao crescimento exponencial, permitindo uma melhor compreensão do conteúdo.

Desse modo, a Investigação Matemática pode favorecer a construção do conhecimento sobre o conteúdo, visto que, os alunos poderão descobrir relações e estabelecer padrões, levando-os até mesmo à autonomia de aprender a aprender, a fim de alcançar a compreensão dos conceitos que envolvem o estudo das progressões. Nesse processo, o professor não toma para si a centralidade da transmissão do conteúdo, mas assume o papel de mediar a atividade investigativa, caracterizada como um desafio capaz de garantir resultados fluidos e significativos aos estudantes, pois de acordo com Ponte, Brocardo e Oliveira (2009):

> No acompanhamento que o professor faz do trabalho dos alunos, ele deve procurar atingir um equilíbrio entre dois polos. Por um lado, dar-lhes a autonomia que é necessária para não comprometer a autoria da investigação e, por outro lado, garantir que o trabalho dos alunos vá fluindo e seja significativo do ponto de vista da disciplina de Matemática. (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2009, p. 47)

Acrescenta-se a esse cenário o destaque à Base Nacional Comum Curricular (BNCC), documento oficial que define os conhecimentos essenciais e os direitos de aprendizagem aos alunos da Educação Básica. Nesse documento encontram-se aspectos que norteiam os princípios da Investigação Matemática, o que pode ser verificado entre as dez Competências Gerais da Educação Básica.

> 2. **Exercitar a curiosidade intelectual** e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a **investigação**, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para **investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções** (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas. (BRASIL, 2018, p. 9, grifo nosso)

Analogamente, tais princípios também figuram entre as Competências Específicas de Matemática e suas Tecnologias para o Ensino Médio.

> 5. Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas. (BRASIL, 2018, p. 531)

Cabe destacar ainda, que para cada Competência Específica presente na BNCC, estão associadas habilidades a serem atingidas. Por exemplo, em relação à Competência Específica “5” estão relacionadas onze habilidades, e duas delas citam diretamente as progressões, conforme apresentado no Quadro 1:

Quadro 1 – Habilidades relacionadas às progressões aritméticas e geométricas de acordo com a BNCC

Objetos de Conhecimento	Habilidades segundo BNCC
Progressões aritméticas	**(EM13MAT507)** identificar e associar progressões aritméticas (PA) a funções afins de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.
Progressões geométricas	**(EM13MAT508)** identificar e associar progressões geométricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.

Fonte: Base Nacional Comum Curricular (2018, p. 541)

Diante disso, encontram-se argumentos na BNCC que permitem buscar relações entre a Investigação Matemática e o conteúdo de progressões. Assim, torna-se interessante verificar como esse conteúdo é abordado nos livros didáticos que talvez estejam sendo usados em escolas de Ensino Médio, considerando aspectos e características da Investigação Matemática.

Desse modo, o objetivo geral desta pesquisa é “verificar se a forma como se apresenta o estudo das progressões, em sequências didáticas de Ensino Médio, favorece a descoberta de relações e o estabelecimento de conjecturas, em um processo de Investigação Matemática”.

Considera-se relevante o fato de a BNCC servir como referência para a construção e adaptação dos currículos de todas as redes de ensino do país e, por conseguinte, entende-se como válido investigar de que forma os livros didáticos aprovados pelo Ministério da Educação no ano de 2018, através do PNLD, estão alinhados às definições propostas nesse documento.

Nesse sentido, configuram-se os seguintes objetivos específicos de pesquisa:

- Mostrar como os princípios da Investigação Matemática são considerados na BNCC;
- Reconhecer princípios da Investigação Matemática em conteúdos de progressões aritméticas e geométricas em sequências didáticas apresentadas para o Ensino Médio;

- Identificar em sequências didáticas de conteúdos de progressões aritméticas e geométricas nos livros didáticos relações abordadas que consideram processos de Investigação Matemática e de possibilidade de consolidação de competências esperadas na BNCC.
- Verificar se os livros didáticos contemplam definições previstas na BNCC, em relação à temática desta pesquisa, mesmo sendo anteriores ao documento.

A pesquisa será desenvolvida por meio da abordagem qualitativa que, conforme apontam Bogdan e Biklen (1994) remete à flexibilidade quanto às estratégias de investigação, possibilitando a exploração e interpretação dos dados de maneira descritiva e não estatística. Nessa abordagem qualitativa, pretende-se realizar uma análise documental, caracterizada como "[...] uma técnica valiosa de abordagem de dados qualitativos, seja complementando as informações obtidas por outras técnicas, seja desvelando aspectos novos de um tema ou problema" (LÜDKE; ANDRÉ, 1986, p. 38).

A análise documental será realizada a partir de sequências didáticas encontradas em livros didáticos destinados ao Ensino Médio, considerando os conteúdos de progressão aritmética e geométrica e os princípios da Investigação Matemática.

A organização deste trabalho está definida em capítulos. No capítulo 1, apresenta-se o contexto, a problemática e a justificativa da pesquisa, assim como, o objetivo geral, os objetivos específicos e a estrutura do trabalho. No capítulo 2 estão expostos os referenciais teóricos, nos quais são descritas as características e os processos envolvidos na Investigação Matemática e como esses podem ser verificados na BNCC. Nesse capítulo é apresentada inicialmente uma breve revisão da literatura em que se discorre sobre pesquisas pertinentes para a temática apresentada nesta pesquisa. No capítulo 3 é apresentada a metodologia da pesquisa, sendo adotada a pesquisa qualitativa, tendo como técnica a análise documental. No capítulo 4 são apresentados os resultados desta pesquisa, com base na BNCC e nos princípios da Investigação Matemática. No capítulo 5 estão expostas as considerações finais acerca das discussões apresentadas no capítulo anterior.

A seguir, apresentam-se as considerações teóricas, por meio da apresentação inicial de uma breve revisão da literatura e de conceitos gerais acerca da Investigação Matemática e da BNCC.

2 CONCEITOS GERAIS E REVISÃO DE LITERATURA

As escolhas e discussões teóricas apresentadas neste capítulo têm como fundamento as ideias abordadas pelo professor João Pedro da Ponte em diversas pesquisas relacionadas à Investigação Matemática e também na obra intitulada "Investigações Matemáticas na Sala de Aula" de Ponte, Brocardo e Oliveira (2009). Apresenta-se inicialmente uma breve revisão da literatura, e encerra-se o capítulo com uma discussão sobre como a temática da Investigação Matemática pode ser identificada na Base Nacional Comum Curricular.

2.1 Revisão de Literatura

Com o objetivo de "verificar se a forma como se apresenta o estudo das progressões, em sequências didáticas de Ensino Médio, favorece a descoberta de relações e o estabelecimento de conjecturas, em um processo de Investigação Matemática", realizou-se um levantamento inicial sobre pesquisas desenvolvidas nessa temática.

O levantamento da bibliografia foi realizado a partir de busca no Google Acadêmico das seguintes expressões ou palavras-chave: "Investigação Matemática no Ensino Médio", "Investigação Matemática e progressões".

Durante esse levantamento foram encontrados trabalhos relacionados não só ao Ensino Médio, mas também ao Ensino Fundamental. Porém, como o foco desta pesquisa é o Ensino Médio, foram selecionados três artigos e uma dissertação de mestrado, referentes à Investigação Matemática e voltados a essa etapa da Educação Básica. Como recorte temporal nessa busca, foram considerados os trabalhos publicados no período de 2011 a 2017. No Quadro 2 é possível conferir os trabalhos selecionados para essa revisão.

Essa revisão se faz importante para a pesquisa desenvolvida, pois colabora para a percepção de como foram realizadas diferentes abordagens investigativas das progressões aritméticas e geométricas no Ensino Médio, além de destacar em seus resultados as contribuições desses trabalhos para a Educação Matemática.

Quadro 2 – Trabalhos selecionados para a revisão de literatura

Título	Autor(es)	Ano	Gênero
Investigações Matemáticas	Daiana Katiúscia Santos Corradi	2011	Artigo
Investigações matemáticas em sala de aula: Contribuições de uma tarefa investigativa no 1º ano do Ensino Médio	Caroline Hellen Martendal dos Santos; Willian Bellini	2016	Artigo
Uma proposta didática para trabalhar sequências numéricas em sala de aula	Sidnei Fernandes de Souza; Cristiano Vaz Jacinto; Otávio Elias Gomes; Vitor da Silva Botelho; Paula Reis de Miranda	2017	Artigo
Ensino de logaritmos por meio de investigações matemáticas em sala de aula	Daniel Cergoli	2017	Dissertação

Fonte: Autora (2019)

No artigo “Investigações Matemáticas”, Corradi (2011) apresenta uma revisão sobre alguns aspectos e considerações relacionadas às Investigações. Esse artigo é um recorte de sua pesquisa de mestrado que está relacionada a uma Investigação Matemática no Ensino Médio sobre o estudo das funções seno e cosseno.

Corradi (2011) utiliza teóricos como Braumann (2002); Ponte, Brocardo e Oliveira (2006); Skovsmose (2008); Oliveira, Segurado e Ponte (1996); Fonseca, Brunheiras e Ponte (1999), para apresentar concepções sobre Investigação Matemática e sua relevância, assim como o papel do professor em aulas investigativas e o desenvolvimento dessas atividades em sala de aula. Além disso, traz um comparativo proposto por Ponte (2003) entre a Investigação Matemática e demais atividades, como os exercícios, os problemas e a exploração.

Em “Investigações Matemáticas em sala de aula: Contribuições de uma tarefa investigativa no 1º ano do Ensino Médio”, Santos e Bellini (2016) relatam uma pesquisa qualitativa no 1º ano do Ensino Médio. Esses autores apresentam uma atividade investigativa com o intuito de compreender os fenômenos emergentes do ensino e aprendizagem da Matemática.

Santos e Bellini (2016) trazem para a análise uma questão relacionada à progressão aritmética. Na atividade analisada os alunos deveriam estabelecer relações para encontrarem a razão e os termos seguintes da sequência. Durante toda a atividade os grupos fizeram registros escritos de suas descobertas, além de em cada grupo ter um gravador de áudio. Ambos os registros, registros escritos e áudio, foram usados para a análise, além da observação da turma durante a atividade.

Os autores relatam que apesar de os alunos inicialmente encontrarem dificuldades, a tarefa contribuiu na aprendizagem dos mesmos e no desenvolvimento de capacidades, como argumentar suas explorações, elaborar justificativas, interagir com os colegas, além de proporcionar a autonomia dos estudantes. Em relação ao conteúdo, a atividade proporcionou um melhor entendimento dos conceitos de progressão, que até então os alunos demonstravam certa dificuldade.

Os principais autores abordados por Santos e Bellini (2016) para apresentar os processos utilizados em uma aula de Investigação Matemática foram Ponte, Brocardo e Oliveira (2006) e Tudella (1999). E assim como Corradi (2011), Santos e Bellini (2016) também abordam a questão do posicionamento e do papel do professor em uma aula de Investigação Matemática.

Ao finalizar o artigo, Santos e Bellini (2016) salientam a importância do uso de atividades investigativas no ensino de Matemática e evidenciam o quanto é importante que os professores publiquem os resultados obtidos para a troca de experiências na área.

No artigo "Uma proposta didática para trabalhar sequências numéricas em sala de aula", Souza *et al.* (2017) apresentam a análise da aplicação de uma sequência didática investigativa, relacionando as progressões aritméticas e geométricas e suas representações gráficas. Os principais autores abordados nesta pesquisa foram Ponte (2002) e Fiorentini, Fernandes e Cristóvão (2005).

A sequência didática abordada no artigo de Souza *et al.* (2017) foi aplicada em uma turma de Licenciatura em Matemática de Minas Gerais, com o objetivo de instigar os alunos à dedução das fórmulas das progressões aritmética e geométrica. A primeira parte da atividade é composta pelo conteúdo relacionado à progressão aritmética, a segunda à progressão geométrica e na terceira parte, os autores apresentam relações entre as atividades anteriores. Sugerem nessa terceira parte que os alunos foram estimulados a procurar regularidades para assim chegar às fórmulas, e analisar a representação gráfica das progressões.

Souza *et al.* (2017) relatam que os alunos tiveram facilidade em associar a progressão aritmética com o gráfico de uma função afim. Porém, apresentaram dificuldades em relação ao comportamento do gráfico de uma progressão geométrica, o que os autores associaram à carência de atividades investigativas em sala de aula, contribuindo assim para uma aprendizagem mecânica.

Os autores finalizam o artigo expondo que a atividade também possibilitou aos futuros professores conhecerem uma das alternativas de se desenvolver uma aula diferenciada.

Em “Ensino de logaritmos por meio de investigações matemáticas em sala de aula”, Cergoli (2017) apresenta uma proposta de ensino de logaritmos diferente da tradicional, através da Investigação Matemática, verificando assim a eficácia dessa abordagem em sala de aula. Os principais autores trazidos na fundamentação teórica são Ponte (2003) e Ponte, Brocardo e Oliveira (2006). Além disso, Cergoli (2017) apresenta como a Investigação Matemática está presente em documentos oficiais, como os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), por exemplo, que estavam em vigor na época de sua pesquisa.

A pesquisa de Cergoli (2017) foi desenvolvida através de sequências didáticas investigativas, trabalhando com tabelas de progressões aritméticas e geométricas para o ensino de logaritmos e suas propriedades. Foram aplicadas duas sequências didáticas, a primeira voltada para professores e a segunda para alunos do Ensino Médio.

Em cada uma das atividades que foram aplicadas, Cergoli (2017) descreve os objetivos que pretendia alcançar, além de acrescentar comentários pertinentes à cada atividade, o que possibilitou perceber como foi o progresso dos participantes durante o processo e as dificuldades enfrentadas.

A partir da observação da aplicação realizada com os professores, o autor destaca o quanto é importante o investimento na formação continuada desses profissionais, visto o despreparo de alguns docentes, que pode vir a refletir no desenvolvimento dos estudantes.

Cergoli (2017) relata também que seus objetivos foram atingidos, pois através de uma abordagem investigativa de tabelas de PA e PG os participantes conseguiram compreender a principal propriedade dos Logaritmos. E os professores participantes demonstraram interesse em aplicar atividades investigativas em suas aulas.

Esse autor apresenta ainda, uma reformulação da oficina aplicada com os professores, a fim de aperfeiçoá-la para uma aplicação posterior, pois percebeu que alguns conceitos iniciais precisavam ser incluídos para melhor compreensão das atividades. Após realizar a aplicação dessa oficina reformulada, o autor pretende transformar a experiência em um livro sobre logaritmos, contribuindo assim para a prática docente.

Através da revisão realizada foi possível perceber a importância da Investigação Matemática em sala de aula, visto que os autores relatam o quanto foi satisfatória a aplicação de atividades investigativas em suas aulas, proporcionando aos alunos não somente o conhecimento matemático, mas contribuindo também para o desenvolvimento da capacidade de argumentação e interação e, principalmente, a autonomia.

2.2 O Processo de Investigação Matemática

De acordo com Ponte, Brocardo e Oliveira (2009), em relação ao ensino e aprendizagem Matemática, investigar significa organizar e estudar questões que podem inicialmente serem confusas para os estudantes, o que não significa que sejam questões difíceis, mas sim, situações para as quais não há uma resposta imediata e que precisam ser buscadas por meio de um processo investigativo, que envolve conjecturar, testar, demonstrar. De acordo com os autores, “As investigações matemáticas envolvem, naturalmente, conceitos, procedimentos e representações matemáticas, mas o que mais fortemente as caracteriza é este estilo de conjectura-teste-demonstração” (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2009, p. 10).

Desse modo, a Investigação Matemática se opõe à metodologia de ensino tradicional, pois esta possui caráter expositivo em que os alunos geralmente reproduzem fórmulas para resolver questões prontas, chegando a um resultado comprovado como certo ou errado, sem desafiar para as competências de pensar e questionar o porquê daquela resposta.

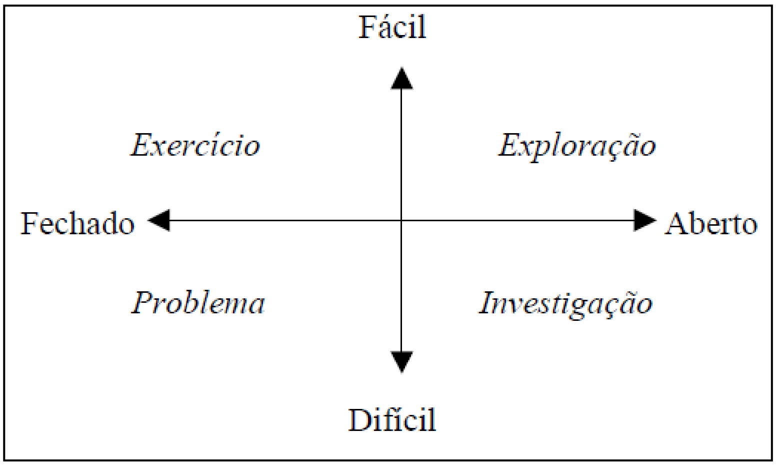
Nas atividades de Investigação Matemática os estudantes são estimulados a pensar e a formular questões, para assim chegar a generalizações, ou seja, não recebem nada pronto, pelo contrário, trabalham para a descoberta das regularidades. Nesse aspecto, favorece a autonomia dos estudantes.

Em abordagens direcionadas para a Investigação Matemática, o professor deixa de ser o transmissor de conhecimento, como no modelo tradicional, e passa a ser o mediador da atividade, intervindo e fornecendo informações quando necessárias, pois a iniciativa de formular as questões deve partir dos estudantes.

Nesse sentido, na abordagem de Investigação Matemática não existe uma questão inicial definida, da mesma forma que não se tem um ponto de chegada, ou seja, as questões são desenvolvidas ao longo do trabalho com os discentes, portanto pode ser que nem todos cheguem a um mesmo resultado, já que partiram de ideias diferentes. Por vezes, a Investigação Matemática pode ser confundida com outros tipos de tarefas, como por exemplo, as tarefas de exploração.

Em “Investigar, ensinar e aprender”, Ponte (2003, p. 5) apresenta um comparativo em relação ao grau de dificuldade e estrutura, entre exercício, exploração, problema e justificativa, conforme a Figura 1 a seguir:

Figura 1 – Comparativo entre Exercício, Exploração, Problema e Investigação



Fonte: Ponte (2003, p. 5)

Neste comparativo, Ponte (2003) propõe, em quatro quadrantes, tipos de atividades matemáticas que vão da mais fácil para a mais difícil e da mais aberta para a mais fechada. As tarefas de exploração são similares à investigação, porém possuem um grau de dificuldade considerado fácil, com tempo para a realização um pouco menor que na investigação e uma estrutura com questões mais abertas, na qual não há resolução imediata através de algoritmos conhecidos.

Na investigação, a estrutura também é mais aberta, pois de início não se tem uma questão bem definida, cabendo ao investigador defini-la. Porém, o grau de dificuldade é um pouco mais elevado que a exploração. Nas tarefas de investigação também não se dispõe de fórmulas para a resolução, cabe ao investigador descobrir caminhos para as situações que vão surgindo e, portanto, não existe uma resolução definida como certa ou errada, ou uma resposta pronta.

Os exercícios possuem questões fechadas e são considerados fáceis, pois nesse tipo de tarefa os alunos dispõem de um processo imediato para a resolução, e geralmente são usados para praticar o uso de fórmulas/algoritmos ensinados pelo professor.

As tarefas de resolução de problemas, geralmente são mais fechadas, ou seja, é possível definir através do problema o que é dado e o que é pedido. Essas tarefas possuem um grau de dificuldade maior se comparadas com os exercícios, pois exigem interpretação dos dados e não há uma imediata resolução através de métodos pré-definidos.

Dessa comparação, Ponte (2003) destaca que apesar de cada uma dessas tarefas possuírem suas características explicitadas no comparativo, cada pessoa as percebem de uma forma diferente, ou seja, “Uma mesma questão pode ser para uma pessoa um problema e para outra um exercício, etc.” (PONTE, 2003, p. 4). Portanto, cabe ao professor decidir que tipo de tarefa é mais pertinente realizar de acordo com o momento. Nessa direção:

> Há, sem dúvida, lugar para os exercícios, os problemas, os projetos e as investigações. O grande desafio é articular esses diferentes tipos de tarefa de modo a constituir um currículo interessante e equilibrado, capaz de promover o desenvolvimento matemático dos alunos com diferentes níveis de desempenho. (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2009, p. 24)

Ponte, Brocardo e Oliveira (2009) indicam que há três fases para o desenvolvimento de uma Investigação Matemática: a introdução, o desenvolvimento da investigação e a discussão dos resultados.

Em relação à fase de introdução, ou seja, na fase inicial do trabalho de investigação chamado por Ponte, Brocardo e Oliveira (2009, p 26) de "O arranque da aula" o professor deve certificar-se de que os alunos entenderam a proposta. De acordo com esses autores, "Essa fase, embora curta, é absolutamente crítica, dela dependendo todo o resto" (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2009, p. 26). Então, o professor deve ter cuidado estratégico nesta etapa, pois é a partir dessa introdução que os estudantes realizarão a tarefa, essa fase torna-se ainda mais importante quando os alunos não estão acostumados com esse tipo de atividade.

A próxima fase descrita por Ponte, Brocardo e Oliveira (2009) é o desenvolvimento da investigação. Essa fase está subdividida nas etapas citadas no Quadro 3 abaixo:

Quadro 3 – Momentos na realização de uma Investigação Matemática

Exploração e formulação de questões	• Reconhecer uma situação problemática • Explorar a situação problemática • Formular questões
Conjecturas	• Organizar dados • Formular conjecturas (e fazer afirmações sobre uma conjectura)
Testes e reformulação	• Realizar testes • Refinar uma conjectura
Justificação e avaliação	• Justificar uma conjectura • Avaliar o raciocínio ou o resultado do raciocínio

Fonte: Ponte, Brocardo e Oliveira (2009, p. 21)

De acordo com Ponte, Brocardo e Oliveira (2009), na exploração da situação ocorre a familiaridade com a tarefa, o que exige certo tempo e pode implicar algum nível de dificuldade aos estudantes, porém "[...] essa etapa é decisiva para que depois os alunos comecem a formular questões e conjecturas" (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2009, p. 30).

Em relação à formulação de conjecturas, Ponte, Brocardo e Oliveira (2009) afirmam que essas podem surgir de diferentes modos, como da observação de dados e da manipulação e/ou analogia. Essa última, por exemplo, costuma ocorrer quando os estudantes estão trabalhando em atividades nas quais procuram por padrões/regularidades. Nessa etapa é importante o registro dos dados, assim como, acompanhar a percepção dos estudantes ao longo da atividade.

Depois da formulação de conjecturas, os alunos devem testá-las, verificando se são verdadeiras ou não, pois de acordo com Ponte (2003, p. 2), “As conjecturas que resistirem a vários testes vão ganhando credibilidade, estimulando a realização de uma prova que, se for conseguida, lhes conferirá validade matemática”.

Nesse sentido, afirmam Ponte, Brocardo e Oliveira (2009), por vezes pode acontecer de os alunos tomarem uma conjectura como uma conclusão, esquecendo-se de justificá-las. Porém, esta é uma etapa muito importante dentro do processo investigativo, cabendo ao professor estimular os estudantes em relação à necessidade de se justificar uma conjectura, o que pode ser feito gradualmente, pois:

> À medida que os alunos vão interiorizando a necessidade de justificarem as suas afirmações e que as suas ferramentas matemáticas vão sendo mais sofisticadas, vai-se tornando mais fácil realizarem pequenas provas matemáticas. (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2009, p. 38)

E por último, mas não menos importante, está a fase de discussão dos resultados da investigação, descrita por Ponte, Brocardo e Oliveira (2009) como o momento em que ocorre a reflexão sobre o trabalho realizado, por meio da discussão e compartilhamento com os colegas das ideias e conclusões dos estudantes, estimulando assim, habilidades de comunicação e argumentação. Essa fase contribui tanto para o processo investigativo, quanto para o desenvolvimento de capacidades que muitas vezes não são exploradas em aulas de Matemática.

2.3 A Investigação Matemática na BNCC

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) é um documento norteador do ensino brasileiro, que tem como principal objetivo, servir de referência para a elaboração dos currículos escolares, da Educação Infantil ao Ensino Médio. A BNCC "[...] é um documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica [...]" (BRASIL, 2018, p. 7).

Uma das orientações presentes na BNCC é o estabelecimento de competências, definidas como "[...] a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho" (BRASIL, 2018, p. 8).

As primeiras competências que aparecem na BNCC devem ser desenvolvidas no decorrer das três etapas da Educação Básica (Educação Infantil, Ensino Fundamental e Ensino Médio). São ao todo dez competências e estão definidas como "Competências Gerais da Educação Básica", conforme Quadro 4 a seguir:

Quadro 4 – Competências Gerais da Educação Básica definidas pela BNCC

(continua)

1. Valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.
2. Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.
3. Valorizar e fruir as diversas manifestações artísticas e culturais, das locais às mundiais, e também participar de práticas diversificadas da produção artístico-cultural.
4. Utilizar diferentes linguagens – verbal (oral ou visual-motora, como Libras, e escrita), corporal, visual, sonora e digital –, bem como conhecimentos das linguagens artística, matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo.
5. Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva.
6. Valorizar a diversidade de saberes e vivências culturais e apropriar-se de conhecimentos e experiências que lhe possibilitem entender as relações próprias do mundo do trabalho e fazer escolhas alinhadas ao exercício da cidadania e ao seu projeto de vida, com liberdade, autonomia, consciência crítica e responsabilidade.
7. Argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis, para formular, negociar e defender ideias, pontos de vista e decisões comuns que respeitem e promovam os direitos humanos, a consciência socioambiental e o consumo responsável em âmbito local, regional e global, com posicionamento ético em relação ao cuidado de si mesmo, dos outros e do planeta.
8. Conhecer-se, apreciar-se e cuidar de sua saúde física e emocional, compreendendo-se na diversidade humana e reconhecendo suas emoções e as dos outros, com autocrítica e capacidade para lidar com elas.
9. Exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro e aos direitos humanos, com acolhimento e valorização da diversidade de indivíduos e de grupos sociais, seus saberes, identidades, culturas e potencialidades, sem preconceitos de qualquer natureza.

Quadro 4 – Competências Gerais da Educação Básica definidas pela BNCC

(conclusão)

10. Agir pessoal e coletivamente com autonomia, responsabilidade, flexibilidade, resiliência e determinação, tomando decisões com base em princípios éticos, democráticos, inclusos, sustentáveis e solidários.

Fonte: Base Nacional Comum Curricular (2018, p. 9-10)

Diante das dez Competências Gerais da Educação Básica expostas no Quadro 4 é possível perceber que, apesar de não se referirem explicitamente à Investigação Matemática, etapas dessa abordagem são sugeridas, por exemplo, na competência "2", quando o documento aponta "[...] investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções [...]" (BRASIL, 2018, p. 9).

Aspectos e características relacionadas à Investigação Matemática aparecem nas etapas do Ensino Fundamental e Médio. No entanto, nesta pesquisa, destacam-se as relacionadas à etapa do Ensino Médio.

2.3.1 A Investigação Matemática na etapa do Ensino Médio

Conforme se verifica na BNCC, as definições apresentadas no documento não se limitam à Investigação Matemática, mas também, referem-se aos outros tipos de tarefas que os professores podem desenvolver em suas aulas. De certo modo, essa orientação vai ao encontro do que apontam Ponte, Brocardo e Oliveira (2009) de que os professores não devem limitar-se apenas a determinados tipos de tarefas, mas buscar a ampliação tanto dos tipos, quanto da complexidade, nas diferentes formas de abordagem de conceitos, técnicas e aplicações matemáticas.

Em relação a área de Matemática e suas Tecnologias, verifica-se na etapa do Ensino Médio a ampliação dos recursos para a compreensão e resolução de problemas mais complexos.

> [...] os estudantes devem consolidar os conhecimentos desenvolvidos na etapa anterior e agregar novos, ampliando o leque de recursos para resolver problemas mais complexos, que exijam maior reflexão e abstração. Também devem construir uma visão mais integrada da Matemática, da Matemática com outras áreas do conhecimento e da aplicação da Matemática à realidade. (BRASIL, 2018, p. 471)

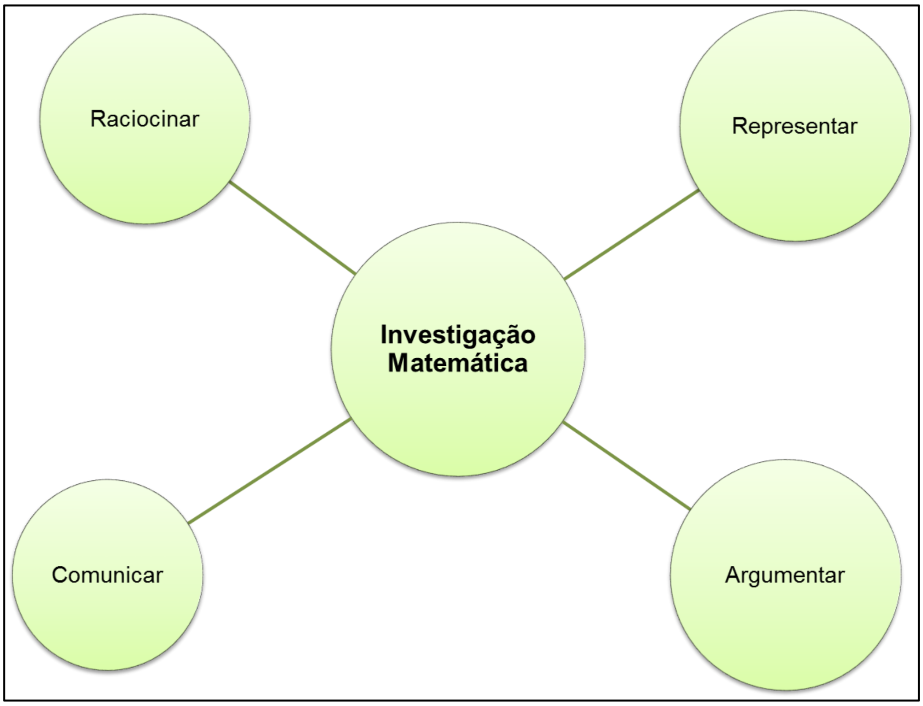
De acordo com essa orientação, os conhecimentos desenvolvidos no Ensino Fundamental devem ser ampliados e aprofundados no Ensino Médio, porém com grau de dificuldade e abstração maiores do que no nível anterior.

De acordo com a BNCC (BRASIL, 2018, p. 528, grifo nosso), na etapa do Ensino Médio "[...] destaca-se a importância do recurso a tecnologias digitais e aplicativos tanto para a **Investigação Matemática** como para dar continuidade ao desenvolvimento do pensamento computacional, iniciado na etapa anterior". Essa é a primeira orientação relacionada diretamente à Investigação Matemática na BNCC do Ensino Médio.

No documento para o Ensino Médio também são sugeridas articulações entre várias tarefas, como a resolução de problemas, a modelagem e também a investigação, para que assim os estudantes possam "[...] mobilizar seu modo próprio de raciocinar, representar, comunicar, argumentar e, com base em discussões e validações conjuntas, aprender conceitos e desenvolver representações e procedimentos cada vez mais sofisticados" (BRASIL, 2018, p. 529).

Nessa direção, verifica-se na Figura 2 que as competências referentes a **raciocinar, representar, comunicar e argumentar** estão interligadas e podem ser associadas à Investigação Matemática.

Figura 2 – Competências presentes na BNCC associadas à Investigação Matemática



Fonte: Autora (2019)

Para o desenvolvimento da competência de **raciocinar**, o trabalho com Investigações Matemáticas pressupõe que os estudantes sejam levados a refletir constantemente sobre as questões e conjecturas que devam ser elaboradas e validadas em tarefas colaborativas. Conforme aponta a BNCC, em relação às competências mobilizadas no ato de raciocinar:

> [...] é necessário que os estudantes possam, em interação com seus colegas e professores, investigar, explicar e justificar as soluções apresentadas para os problemas, com ênfase nos processos de argumentação matemática. Embora todos esses processos pressuponham o raciocínio matemático, em muitas situações são também mobilizadas habilidades relativas à **representação e à comunicação para expressar as generalizações, bem como à construção de uma argumentação consistente para justificar o raciocínio utilizado**. (BRASIL, 2018, p. 529, grifo nosso)

Para comunicar resultados e/ou conjecturas é preciso que os alunos utilizem diversas formas de **representação**. Nesse sentido, são apontadas na BNCC (BRASIL, 2018, p. 529), competências associadas a representar, com o intuito de fazer com que os alunos utilizem diversas formas para apresentar o objeto matemático.

Nesse sentido, segundo a BNCC (BRASIL, 2018, p. 530, grifo nosso), ao publicizar os resultados de suas investigações para os colegas é esperado que os estudantes sejam capazes de "[...] justificar suas conclusões não apenas com símbolos matemáticos e conectivos lógicos, mas também por meio da língua materna, realizando **apresentações orais dos resultados e elaborando relatórios, entre outros registros**", favorecendo igualmente o desenvolvimento da competência de **comunicar**. Outra forma de comunicação presente na BNCC e também na Investigação Matemática é a elaboração de relatórios para a comunicação de resultados. Segundo Ponte, Brocardo e Oliveira (2009):

> Os alunos podem ser convidados a referir no relatório não só as conclusões que tiraram da realização de uma tarefa de investigação, mas também os processos que usaram para chegar a essas conclusões. [...] O relatório poderá ser mais interessante se incluir alguma informação sobre esses aspectos, permitindo ao professor conhecer não só as conclusões a que os alunos chegaram, mas também os processos por eles utilizados. (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2009, p. 110)

Na Investigação Matemática também há a realização de apresentações orais ao final da atividade investigativa, permitindo ao professor uma avaliação em diferentes níveis e objetivos, incluindo; “[...] as atitudes e valores, a compreensão do processo de investigação, a pertinência das estratégias, os processos de raciocínio, o uso de conceitos, as competências de cálculo e a capacidade de comunicação oral” (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2009, p. 125).

E por fim, em relação à competência de **argumentar**, igualmente presente na BNCC (BRASIL, 2018, p. 530), “[...] seu desenvolvimento pressupõe também a formulação e a testagem de conjecturas, com a apresentação de justificativas, além dos aspectos já citados anteriormente em relação às competências de raciocinar e representar”. Percebe-se, portanto, uma relação consistente entre os argumentos apresentados na BNCC acerca das competências destacadas e a Investigação Matemática, pois tais pressupostos são confirmados e encontrados, tanto no texto da Base, quanto no referencial teórico da Investigação Matemática.

Para o Ensino Médio também são sugeridas competências vinculadas às Competências Gerais da Educação Básica, que devem ser desenvolvidas durante toda a etapa da Educação Básica. As Competências Específicas de Matemática e suas Tecnologias para o Ensino Médio estão descritas no Quadro 5:

Quadro 5 – Competências Específicas de Matemática e suas Tecnologias para o Ensino Médio definidas pela BNCC

(continua)

1. Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.
2. Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.
3. Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

Quadro 5 – Competências Específicas de Matemática e suas Tecnologias para o Ensino Médio definidas pela BNCC

(conclusão)

4. Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.
5. Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

Fonte: Base Nacional Comum Curricular (2018, p. 531)

Verifica-se no Quadro 5 que algumas características da Investigação Matemática estão explícitas na competência “5”, assim como podem ser encontradas nos demais itens da tabela. Quanto à competência 5, destaca-se o estabelecimento e validação de conjecturas, observação de padrões e demonstrações, pois:

> O desenvolvimento dessa competência específica pressupõe um conjunto de habilidades voltadas às capacidades de investigação e de formulação de explicações e argumentos, que podem emergir de experiências empíricas – induções decorrentes de investigações e experimentações com materiais concretos, apoios visuais e a utilização de tecnologias digitais, por exemplo. (BRASIL, 2018, p. 540)

Através desta e das demais orientações, percebe-se que a sugestão exposta na BNCC é o vínculo entre a Investigação Matemática e o uso de materiais que possam auxiliar o trabalho docente para esse tipo de tarefa.

Com relação à formulação e validação de conjecturas, a orientação presente na BNCC é de que:

> Ao formular conjecturas com base em suas investigações, os estudantes devem buscar contraexemplos para refutá-las e, quando necessário, procurar argumentos para validá-las. Essa validação não pode ser feita apenas com argumentos empíricos, mas deve trazer também argumentos mais ‘formais’, incluindo a demonstração de algumas proposições. (BRASIL, 2018, p. 540)

Nesse sentido Ponte, Brocardo e Oliveira (2009) afirmam que o papel exercido pelo professor neste momento de formulação e teste é fundamental para que os estudantes compreendam que as conjecturas necessitam de uma validação, pois apesar de muitas vezes resistirem a variados testes, somente isso não confere a validade de uma conjectura. E, portanto, “À medida que os alunos vão interiorizando a necessidade de justificarem as suas afirmações e que as suas ferramentas matemáticas vão sendo mais sofisticadas, vai-se tornando mais fácil realizarem pequenas provas matemáticas” (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2009, p. 38).

Ainda, de acordo com a BNCC (BRASIL, 2018, p. 540), “[...] é indispensável que os estudantes experimentem e interiorizem o caráter distintivo da Matemática como ciência, ou seja, a natureza do raciocínio hipotético-dedutivo, em contraposição ao raciocínio hipotético-indutivo [...]”. Nesse sentido, as habilidades que são desenvolvidas em tarefas investigativas, “[...] têm importante papel na formação matemática dos estudantes, para que construam uma compreensão viva do que é a Matemática, inclusive quanto à sua relevância” (BRASIL, 2018, p. 540).

Portanto, a Matemática deve ser percebida pelos estudantes como “[...] um conjunto de conhecimentos inter-relacionados, coletivamente construídos, com seus objetos de estudo e métodos próprios para investigar e comunicar seus resultados teóricos ou aplicados” (BRASIL, 2018, p. 540). Ou seja, uma atividade humana, e portanto, “[...] sujeita a acertos e erros, como um processo de buscas, questionamentos, conjecturas, contraexemplos, refutações, aplicações e comunicação” (BRASIL, 2018, p. 540).

Destaca-se ainda, que para o desenvolvimento da competência específica “5” descrita no Quadro 5, são propostas onze habilidades conforme mostra o Quadro 6.

Quadro 6 – Habilidades relacionadas à competência específica “5” definidas pela BNCC

(continua)

(EM13MAT501) Investigar relações entre números expressos em tabelas para representa-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 1º grau.
(EM13MAT502) Investigar relações entre números expressos em tabelas para representa-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 2º grau do tipo $y = ax^2$.

Quadro 6 – Habilidades relacionadas à competência específica “5” definidas pela BNCC

(conclusão)

(EM13MAT503) Investigar pontos de máximo ou de mínimo de funções quadráticas em contextos envolvendo superfícies, Matemática Financeira ou Cinemática, entre outros, com apoio de tecnologias digitais.
(EM13MAT504) Investigar processos de obtenção da medida do volume de prismas, pirâmides, cilindros e cones, incluindo o princípio de Cavalieri, para a obtenção das fórmulas de cálculo da medida do volume dessas figuras.
(EM13MAT505) Resolver problemas sobre ladrilhamento do plano, com ou sem apoio de aplicativos de geometria dinâmica, para conjecturar a respeito dos tipos ou composição de polígonos que podem ser utilizados em ladrilhamento, generalizando padrões observados.
(EM13MAT506) Representar graficamente a variação da área e do perímetro de um polígono regular quando os comprimentos de seus lados variam, analisando e classificando as funções envolvidas.
(EM13MAT507) Identificar e associar progressões aritméticas (PA) a funções afins de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.
(EM13MAT508) Identificar e associar progressões geométricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.
(EM13MAT509) Investigar a deformação de ângulos e áreas provocada pelas diferentes projeções usadas em cartografia (como a cilíndrica e a cônica), com ou sem suporte de tecnologia digital.
(EM13MAT510) Investigar conjuntos de dados relativos ao comportamento de duas variáveis numéricas, usando ou não tecnologias da informação, e, quando apropriado, levar em conta a variação e utilizar numa reta para descrever a relação observada.
(EM13MAT511) Reconhecer a existência de diferentes tipos de espaços amostrais, discretos ou não, e de eventos, equiprováveis ou não, e investigar implicações no cálculo de probabilidades.

Fonte: Base Nacional Comum Curricular (2018, p. 541, grifo nosso)

Percebe-se, portanto, a ampla variedade de habilidades que podem ser desenvolvidas em uma abordagem de Investigação Matemática, desde os mais variados conteúdos e unidades temáticas. Verifica-se ainda, que duas dessas habilidades estão relacionadas com as progressões aritméticas e geométricas, conteúdos que se pretende investigar neste trabalho de pesquisa.

3 METODOLOGIA

A metodologia da pesquisa está embasada na abordagem qualitativa, devido à flexibilidade quanto às estratégias de investigação, possibilitando a exploração e interpretação dos dados de maneira descritiva, e não estatística. Dessa forma, de acordo com Bogdan e Biklen (1994, p. 209) “As questões a se investigar não se estabelecem mediante a operacionalização de variáveis, sendo, outrossim, formuladas com o objetivo de investigar os fenómenos em toda a sua complexidade e em contexto natural”.

Para Creswell (2010, p. 209) “A pesquisa qualitativa é uma forma de investigação interpretativa em que os pesquisadores fazem uma interpretação do que enxergam, ouvem e entendem”. Dessa forma, na abordagem qualitativa os dados são explorados pelo pesquisador através dos métodos e teorias pertinentes aos objetivos de investigação, sendo o processo de interpretação de grande importância, pois:

> A abordagem da investigação qualitativa exige que o mundo seja examinado com a idéia de que nada é trivial, que tudo tem potencial para constituir uma pista que nos permita estabelecer uma compreensão mais esclarecedora do nosso objecto de estudo. (BOGDAN; BIKLEN, 1994, p. 49)

Como método para a coleta de dados, a pretensão inicial era realizar uma entrevista semiestruturada com professores atuantes nas escolas de Ensino Médio de Bagé/RS, com a principal finalidade de realizar o levantamento das sequências didáticas (livros, apostilas, notas de aula, ...) utilizadas para o desenvolvimento do conteúdo de progressões. Contudo, essa etapa não ocorreu de maneira satisfatória, visto que em algumas escolas houve certa resistência por parte da gestão, impossibilitando o contato com os professores.

Assim, devido ao insucesso das entrevistas, houve a necessidade de buscar outros meios para a coleta de dados para assim dar prosseguimento à pesquisa. Dessa forma, optou-se pela realização de uma pesquisa na *internet* com o intuito de verificar os livros didáticos de Matemática para o Ensino Médio mais recentes aprovados pelo Ministério da Educação. Através da pesquisa, foi possível encontrar o Guia PNLD com os livros didáticos de Matemática aprovados no ano de 2018.

Nesse material (Guia PNLD) é possível encontrar a apresentação de oito livros didáticos de Matemática aprovados pelo Ministério da Educação, selecionados para que as escolas fizessem sua escolha.

A partir desse material, realizou-se uma nova busca na *internet*, a fim de encontrar esses livros juntamente com o Manual do Professor. Assim, dos oito livros apresentados no Guia PNLD, cinco deles foram encontrados e utilizados nesta pesquisa.

Portanto, os livros didáticos de Matemática utilizados para análise documental estão dispostos no Quadro 7:

Quadro 7 – Livros didáticos de Matemática em análise

Título	Autor(es)	Ano
Matemática: Contexto & aplicações	Luiz Roberto Dante	2016
Matemática: Ciência e aplicações	David Degenszajn Gelson Iezzi Nilze de Almeida Osvaldo Dolce Roberto Périgo	2016
Matemática: interação e tecnologia	Rodrigo Balestri	2016
Matemática para compreender o mundo	Kátia Stocco Smole Maria Ignez Diniz	2016
Conexões com a Matemática	Fábio Martins de Leonardo	2016

Fonte: Autora (2019)

A análise documental é descrita por Lüdke e André (1986, p. 38) como "[...] uma técnica valiosa de abordagem de dados qualitativos, seja complementando as informações obtidas por outras técnicas, seja desvelando aspectos novos de um tema ou problema".

Acrescenta-se que, de acordo com Caulley (1981 *apud* LÜDKE; ANDRÉ, 1986, p. 38), "[...] a análise documental busca identificar informações factuais nos documentos a partir de questões ou hipóteses de interesse".

O tratamento dos dados está embasado na análise argumentativa, que tem como objetivo "[...] documentar a maneira como afirmações são estruturadas dentro de um texto discursivo, e avaliar sua solidez" (LIAKOPOULOS, 2015, p. 219). O texto discursivo considerado, refere-se nesta pesquisa, às sequências didáticas e manuais direcionados aos professores encontrados nos livros didáticos mencionados no Quadro 7.

Assim, os livros didáticos de Matemática selecionados foram analisados, levando-se em conta se sequências didáticas de Ensino Médio, elaboradas para o estudo de progressões, favorecem a descoberta de relações e o estabelecimento de conjecturas, em um processo de Investigação Matemática. Assim como, considerou-se relevante investigar se tais livros, em relação à temática investigada, contemplam proposições da BNCC para o Ensino Médio, uma vez que desse modo podem estar alinhados às orientações curriculares mais recentes e em vigência no país.

4 APRESENTAÇÃO DA PESQUISA E ANÁLISE DOS RESULTADOS

O objetivo principal desta análise é verificar se a forma como se apresenta o estudo das progressões, em sequências didáticas de Ensino Médio, favorece a descoberta de relações e o estabelecimento de conjecturas, em um processo de Investigação Matemática.

A pesquisa se constitui na análise documental de cinco livros didáticos de Matemática para o Ensino Médio (Quadro 7) que constam no Guia PNLD e foram aprovados pelo Ministério da Educação no ano de 2018. Todos são destinados ao 1º ano do Ensino Médio e anteriores à BNCC, visto que são edições de 2016 e a BNCC para o Ensino Médio foi homologada em 2018.

Nesse sentido, considera-se válido nesta pesquisa, verificar se os livros analisados contemplam definições previstas na BNCC para a etapa do Ensino Médio, pois desse modo, tem-se garantia da viabilidade de seu uso mesmo em tempo de implantação da nova Base Comum Curricular.

Para organização da análise, considerou-se o conteúdo de progressões aritméticas e geométricas e as orientações didáticas presentes no Manual do Professor no final de cada livro. Os aspectos analisados foram estruturados em duas seções, a primeira em relação ao material apresentado no Manual do Professor e a segunda, em relação à forma como os livros apresentam o conteúdo de progressões.

4.1 Apresentação dos livros de acordo com o Manual do Professor

Dante (2016) pretende, através da coleção *Matemática: contexto & aplicações*, proporcionar aos estudantes conhecimentos que permitam a interpretação e a resolução de problemas do mundo real, contribuindo para o desenvolvimento de capacidades "[...] de raciocinar, de resolver problemas, generalizar, abstrair e de analisar e interpretar a realidade que nos cerca, usando para isso o instrumental matemático" (DANTE, 2016, p. 297).

Para Iezzi *et al*. (2016), a coleção *Matemática: Ciência e aplicações* tem a intenção de possibilitar aos alunos "[...] conhecimentos básicos que lhe permitam continuar seus estudos em cursos de tecnologia ou universitários, além de adquirir uma formação científica geral" (IEZZI *et al.,* 2016, p. 293).

Assim, ambos os autores têm como propostas para suas coleções o aprofundamento dos conhecimentos adquiridos no Ensino Fundamental, com a intenção de contribuir para a autonomia intelectual dos estudantes, preparando-os para desafios que possam vir a enfrentar.

Com relação à metodologia, Balestri (2016) e Dante (2016) têm como foco o processo de ensino-aprendizagem centrado no aluno, fazendo com que participem de forma mais ativa do processo de construção do conhecimento, atribuindo significados àquilo que aprendem e evitando a simples mecanização de procedimentos. Para Ponte, Brocardo e Oliveira (2009), a participação ativa dos estudantes favorece o processo de ensino-aprendizagem, tanto em Matemática quanto em qualquer outra disciplina escolar, pois "O aluno aprende quando mobiliza os seus recursos cognitivos e afetivos com vista a atingir um objetivo" (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2009, p. 23).

Desse modo, Balestri (2016) pretende através dos conteúdos, a exploração de diversas habilidades, tais como, "[...] argumentar, expressar-se por meio da escrita e da oralidade, justificar, conjecturar, estabelecer relações e investigar [...]" (BALESTRI, 2016, p. 300). Já, Dante (2016), com o intuito de atribuir aos alunos um papel mais ativo, orienta que através de interações com o texto os alunos procurem "[...] responder perguntas, confrontar soluções, verificar regularidades, refletir e tirar conclusões" (DANTE, 2016, p. 291).

Balestri (2016) ainda propõe que o professor tenha uma postura mediadora, fornecendo informações quando necessárias e incentivando a autonomia dos alunos, contribuindo assim, para a construção do conhecimento, pois de acordo com o autor, na perspectiva tradicional "[...] se avalia não o aprendizado, mas a capacidade de memorização do aluno" (BALESTRI, 2016, p. 296). Sendo assim, propõe aos professores que criem em sala de aula um ambiente propício à reflexão, análise, descobertas e diálogo, com a intenção de favorecer a construção do conhecimento e a aprendizagem significativa.

Assim, percebe-se através da orientação dada pelos autores, uma estreita relação com a Investigação Matemática, visto que as habilidades citadas também são desenvolvidas através de propostas investigativas, atribuindo aos alunos um papel mais ativo no processo de ensino-aprendizagem. Essas habilidades também podem ser evidenciadas através de competências previstas na BNCC para a etapa do Ensino Médio.

Com relação à produção de significados, Dante (2016) sugere orientações que podem contribuir nesse processo, como por exemplo, desenvolver inicialmente os conteúdos de maneira intuitiva, e só depois introduzir a linguagem matemática, assim como estimular os alunos "[...] a pensar, raciocinar, criar, relacionar ideias, descobrir e ter autonomia de pensamento" (DANTE, 2016, p. 305).

Ainda em relação à produção de significados, Dante (2016) sugere o trabalho com a história da Matemática, os temas transversais, a utilização de jogos, a resolução de problemas e também a abordagem investigativa. Esta última com a intenção de despertar nos alunos a curiosidade e o "fazer Matemática", através das etapas que constituem uma aula investigativa, contribuindo para "[...] encorajar os alunos a explorar, desenvolver, levantar hipóteses, testar, discutir e aplicar ideias matemáticas" (DANTE, 2016, p. 307), criando, desta forma, um ambiente de busca e produção de significados.

Leonardo (2016), ao apresentar a coleção *Conexões com a Matemática* também cita características e etapas da Investigação Matemática, como a formulação de hipóteses e conjeturas, a reflexão e a comunicação de suas conclusões, como meio para que os alunos percebam "[...] a Matemática como uma ciência com métodos próprios de construção de conhecimento" (LEONARDO, 2016, p. 274). O autor ainda destaca a importância da clareza e do rigor matemático, como forma de colaborar para o desenvolvimento do pensamento e raciocínio dedutivo.

A coleção *Matemática para compreender o mundo* tem como principal característica o desenvolvimento das competências leitora e interpretativa dos estudantes, pois, segundo as autoras, no Ensino Médio os alunos devem dominar os códigos e a linguagem matemática e saber interpretar diversas situações em Matemática, ou seja, conseguir "[...] analisar e compreender a situação por inteiro, decidir sobre a melhor estratégia para resolvê-la, argumentar, expressar-se e fazer registros" (SMOLE; DINIZ, 2016, p. 293).

Balestri (2016) também descreve a importância de se utilizar diversos registros de representação matemática, ou seja, representar uma mesma situação através da escrita, imagens, gráficos, entre outros. Pois, o uso de diversas linguagens e representações "[...] auxilia os alunos na compreensão dos conteúdos, propiciando a construção de significados e a aplicação desses conteúdos em outras situações, o que dá a eles condições de compreender e transformar o mundo à sua volta." (BALESTRI, 2016, p. 298).

Diante da perspectiva apresentada, pode-se considerar as competências da BNCC, tanto em relação aos diversos registros matemáticos de representação, quanto em relação à atuação dos alunos na sociedade em que vivem. Assim, ainda é possível destacar a importância do desenvolvimento dessas competências para a Investigação Matemática, visto que dominar a linguagem matemática e saber interpretar e representar diversas situações podem colaborar para a construção de significados.

Logo, os autores têm a intenção de priorizar a contextualização, porém mantendo o rigor matemático adequado, assim como uma linguagem acessível ao nível dos estudantes, proporcionando o desenvolvimento da autonomia, da abstração e do raciocínio, características relevantes no contexto investigativo e previstas na BNCC.

Os autores também destacam a utilização de recursos digitais em sala de aula, como meio de contribuir para a aprendizagem. Dessa forma, defendem tanto o uso de *softwares* e calculadoras quanto o uso do celular, de maneira consciente, a fim de favorecer o ensino-aprendizagem da Matemática, também em tarefas investigativas. Essas sugestões vêm ao encontro de uma das propostas da BNCC, na qual se destaca a importância do uso de recursos digitais como auxiliares no ensino de Matemática e no desenvolvimento do pensamento computacional.

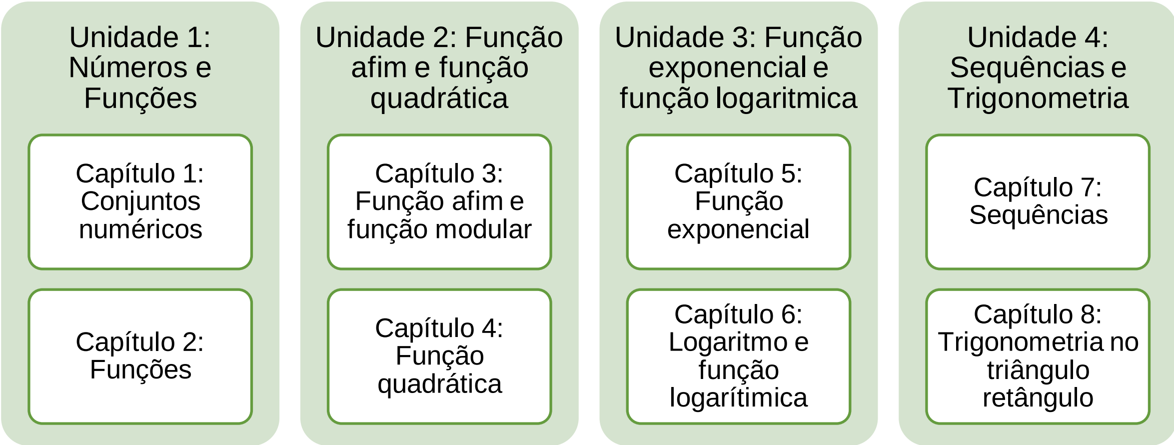
O uso de recursos digitais como auxiliares no ensino de Matemática também é evidenciado por Ponte, Brocardo e Oliveira (2009), quando enfatizam a utilização de *softwares* como forma de contribuir para a organização de dados e a exploração de conjecturas em aulas investigativas.

Concluindo, através das orientações presentes no Manual do Professor de cada livro analisado, percebem-se significativas relações com os princípios da Investigação Matemática e também com as orientações propostas para o Ensino Médio através da BNCC.

4.2 O capítulo destinado às Progressões Aritméticas e Geométricas

O volume 1 da coleção *Matemática: contexto & aplicações* está organizado em quatro unidades, cada uma possui dois capítulos, dispostos de acordo com a Figura 3.

Figura 3 – Organização do livro didático Matemática: contexto & aplicações



Fonte: Dante (2016, p. 6-7)

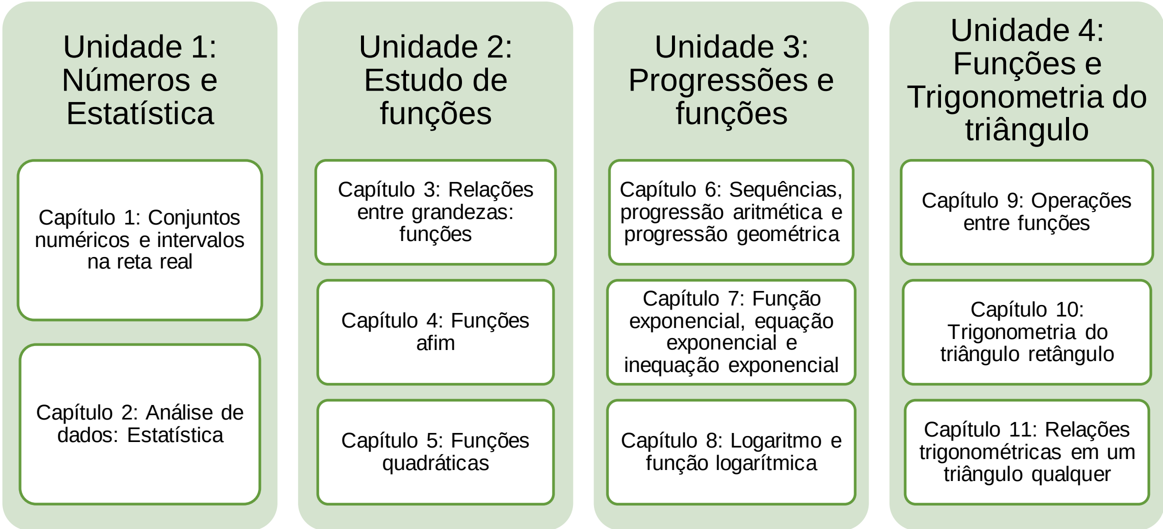
A partir da Figura 3 é possível perceber que o capítulo 7 é destinado ao estudo das sequências, porém tópicos desse conteúdo também são abordados em capítulos anteriores, como nos capítulos 2, 3, 4 e 5, intitulados funções, função afim e função modular, função quadrática e, função exponencial, respectivamente.

Dante (2016) afirma que muitos dos problemas resolvidos através da função afim podem ser solucionados também por progressões aritméticas, assim como problemas resolvidos com função exponencial e logarítmica, podem ser vistos por progressões geométricas. Dessa forma, é importante que os alunos percebam as relações envolvidas nesses conteúdos, para que possam constatar “[...] que as ferramentas não são excludentes. Pelo contrário, dominar mais de uma ferramenta é fundamental para poder escolher qual é a melhor para cada situação” (DANTE, 2016, p. 330).

Assim, Dante (2016) e Balestri (2016) apresentam relações existentes entre a progressão aritmética e as funções afim e quadrática e, a progressão geométrica e a função exponencial. Além de que, em todos os livros analisados os autores abordam a representação gráfica de cada uma das progressões, relacionando a progressão aritmética com o gráfico da função afim e a progressão geométrica com o gráfico da função exponencial, ambas com domínios discretos. Logo, essa abordagem permite atender às habilidades EM13MAT507 e EM13MAT508 descritas na BNCC e apresentadas no Quadro 6.

Smole e Diniz (2016) também apresentam o volume 1 da coleção *Matemática para compreender o mundo* em capítulos separados por unidades, conforme a Figura 4.

Figura 4 – Organização do livro didático Matemática para compreender o mundo



Fonte: Smole e Diniz (2016, p. 6-7)

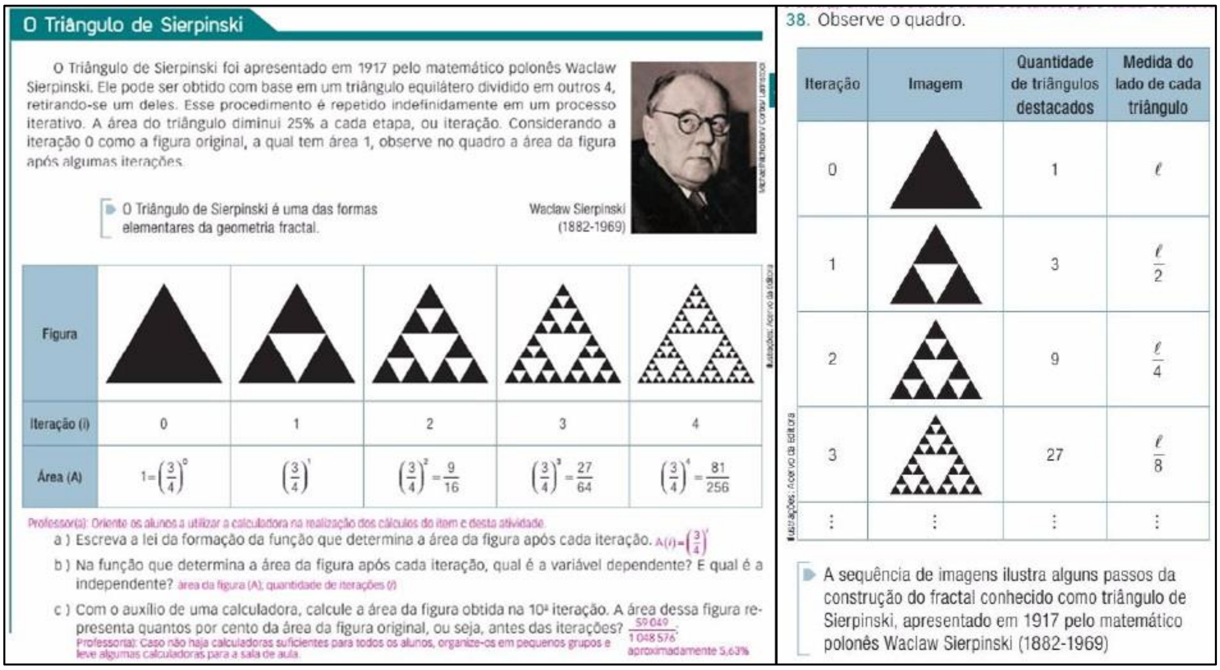
Verifica-se na Figura 4 que na obra de Smole e Diniz (2016) há um capítulo destinado ao estudo das sequências e progressões que antecede o estudo das funções logarítmica e exponencial. Segundo essas autoras, os motivos são,

> [...] permitir ao estudante conhecer funções cujos domínios são conjuntos discretos. [...] dar maior significado ao crescimento exponencial e compreensão da função exponencial. [...] a partir das progressões aritméticas e geométricas e de seu desenvolvimento na história da Matemática, é possível mostrar ao estudante o significado dos logaritmos e seu valor para a realização de cálculos que hoje são executados com o simples teclar em uma calculadora científica. (SMOLE; DINIZ, 2016, p. 299)

Desse modo, tanto Dante (2016) quanto Smole e Diniz (2016) têm a intenção de favorecer a integração e relação entre tópicos da Matemática, possibilitando a percepção dos conteúdos de maneira interligada e menos fragmentada.

Nesse sentido, Balestri (2016) afirma que os conteúdos devem ser abordados de forma que conexões possam ser estabelecidas entre as diferentes áreas e dentro da própria Matemática. Um exemplo disso pode ser percebido através do fractal Triângulo de Sierpinsk, que considera uma abordagem com sequências e aparece de formas distintas nos capítulos. Primeiramente, no capítulo destinado às funções que tem como objetivo que os estudantes percebam as relações existentes entre as iterações realizadas e a área da figura. Já no capítulo destinado ao estudo das funções modular, exponencial e logarítmica a abordagem é realizada através da medida do lado de cada triângulo. Ambas na Figura 5 abaixo.

Figura 5 – Triângulo de Sierpinsk



O Triângulo de Sierpinski

O Triângulo de Sierpinski foi apresentado em 1917 pelo matemático polonês Waclaw Sierpinski. Ele pode ser obtido com base em um triângulo equilátero dividido em outros 4, retirando-se um deles. Esse procedimento é repetido indefinidamente em um processo iterativo. A área do triângulo diminui 25% a cada etapa, ou iteração. Considerando a iteração 0 como a figura original, a qual tem área 1, observe no quadro a área da figura após algumas iterações.

O Triângulo de Sierpinski é uma das formas elementares da geometria fractal.

Waclaw Sierpinski (1882-1969)

Figura					
Iteração (i)	0	1	2	3	4
Área (A)	$1=\left(\frac{3}{4}\right)^0$	$\left(\frac{3}{4}\right)^1$	$\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{9}{16}$	$\left(\frac{3}{4}\right)^3=\frac{27}{64}$	$\left(\frac{3}{4}\right)^4=\frac{81}{256}$

Professor(a): Oriente os alunos a utilizar a calculadora na realização dos cálculos do item c desta atividade.

a) Escreva a lei da formação da função que determina a área da figura após cada iteração. $A(i)=\left(\frac{3}{4}\right)^i$

b) Na função que determina a área da figura após cada iteração, qual é a variável dependente? E qual é a independente? área da figura (A); quantidade de iterações (i)

c) Com o auxílio de uma calculadora, calcule a área da figura obtida na 10ª iteração. A área dessa figura representa quantos por cento da área da figura original, ou seja, antes das iterações? $\frac{59\,049}{1\,048\,576}$; aproximadamente 5,63%

Professor(a): Caso não haja calculadoras suficientes para todos os alunos, organize-os em pequenos grupos e leve algumas calculadoras para a sala de aula.

38. Observe o quadro.

Iteração	Imagem	Quantidade de triângulos destacados	Medida do lado de cada triângulo
0		1	ℓ
1		3	$\frac{\ell}{2}$
2		9	$\frac{\ell}{4}$
3		27	$\frac{\ell}{8}$
⋮	⋮	⋮	⋮

A sequência de imagens ilustra alguns passos da construção do fractal conhecido como triângulo de Sierpinski, apresentado em 1917 pelo matemático polonês Waclaw Sierpinski (1882-1969)

Fonte: Adaptado de Balestri (2016, p. 41 e p. 149)

Verifica-se através da Figura 5 que as propostas apresentadas podem propiciar um trabalho investigativo, visto que os alunos deverão explorar diversos aspectos da formação do fractal, para assim conseguir chegar à conclusão. Percebe-se também que as propostas além de envolverem sequências, envolvem conceitos de geometria, contribuindo para que relações possam ser estabelecidas. Assim, as atividades permitem o desenvolvimento de diversas habilidades, entre elas interpretação e raciocínio.

Além disso, os fractais também são explorados em diversos momentos nos livros, tanto como meio de motivar os estudantes para o assunto abordado, como é o caso do Cubo de Sierpinsk, apresentado por Balestri (2016), e a curva do floco de neve de Koch explorada por Smole e Diniz (2016), quanto em atividades propostas durante o capítulo, inclusive envolvendo a tecnologia, como abordam Smole e Diniz (2016) na seção *Foco na tecnologia*, com a intenção de promover a discussão sobre a criação de fractais através do computador.

Para a exploração do termo geral de uma sequência, a maioria dos autores traz uma abordagem mais tradicional, através de simples exemplos de sequências. Porém, Dante (2016) apresenta uma contextualização através de um exemplo com moedas, estabelecendo relação com o conteúdo de Probabilidade, mesmo que isso ocorra de maneira indireta, conforme a Figura 6.

Figura 6 – Exemplo para o desenvolvimento do termo geral de uma sequência

d) Ao lançarmos uma moeda, temos dois resultados possíveis: cara ou coroa. Se lançarmos duas moedas diferentes, por exemplo, uma de R$ 0,10 e outra de R$ 0,50, teremos quatro possibilidades: (cara, cara), (cara, coroa), (coroa, cara) e (coroa, coroa). Se lançarmos três moedas diferentes, serão oito resultados possíveis, e assim por diante. Confira:

Moedas.

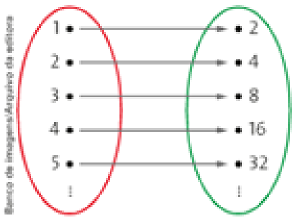
A relação entre o número de moedas e o número de resultados mostrada na tabela abaixo é uma função: a cada número de moedas corresponde um único número de resultados.

Lançamento de moedas

Número de moedas	1	2	3	4	5	⋮
Número de resultados	2	4	8	16	32	⋮

Fonte: Dados experimentais.

Observe o diagrama abaixo. Nesse caso, $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$ é definida por $f(1) = a_1 = 2$, $f(2) = a_2 = 4$, $f(3) = a_3 = 8$, etc., e a sequência é representada por (2, 4, 8, 16, 32, ...).



Para refletir
Explicite os oito resultados no caso de três moedas.

(ca, ca, ca); (ca, ca, co); (ca, co, ca); (ca, co, co); (co, ca, ca); (co, ca, co); (co, co, ca); (co, co, co).

Nesse exemplo observe que $2 = 2^1$; $4 = 2^2$; $8 = 2^3$; $16 = 2^4$; $32 = 2^5$; etc. Então, se n é o número de moedas, o número de resultados é dado por 2^n. Nesse caso, temos $f(n) = a_n = 2^n$. Essa expressão, $\boldsymbol{a_n = 2^n}$, é chamada **lei de formação** ou **termo geral** da sequência (2, 4, 8, 16, 32, ...), pois fazendo $n = 1, 2, 3, \ldots$ obtemos os termos $a_1 = 2$, $a_2 = 4$, $a_3 = 8$, etc., da sequência.

Fonte: Dante (2016, p. 209)

Para o contexto apresentado na Figura 6, o autor não sugere de que forma deve ser realizada essa abordagem em sala de aula. Porém, verifica-se uma proposta envolvendo a Probabilidade com moedas, um material de fácil acesso e que pode ser levado para a sala de aula, permitindo ao professor explorar essa proposta de forma investigativa, possibilitando aos próprios alunos explorar as situações, formular questões, elaborar e testar conjecturas e justificá-las, perpassando, desse modo, por todas as etapas de uma Investigação Matemática, descritas por Ponte, Brocardo e Oliveira (2009). Assim, possibilita também atender às Competências Específicas 3 e 5, de Matemática e suas Tecnologias para o Ensino Médio definidas pela BNCC e que podem ser encontradas no Quadro 5.

Ainda em relação ao termo geral de uma sequência, Leonardo (2016) sugere uma proposta envolvendo planilhas eletrônicas, permitindo que seja realizada uma abordagem diferente da tradicional, através do uso da tecnologia, que conforme apontam Ponte, Brocardo e Oliveira (2009) pode contribuir de maneira positiva para o processo de Investigação Matemática, uma vez que pode facilitar a busca por regularidades e a exploração de conjecturas.

Iezzi *et al.* (2016) sugerem que o trabalho com as progressões propicie o desenvolvimento de algumas habilidades, tais como, "[...] observação de regularidades em padrões numéricos, investigação, levantamento e validação de conjecturas, argumentação e generalizações" (IEZZI *et al.*, 2016, p. 326). Assim, tais habilidades podem ser exploradas através de Investigação Matemática, além de estarem conectadas a algumas competências definidas pela BNCC, como por exemplo, a 5ª competência específica de Matemática e suas Tecnologias para o Ensino Médio, encontrada no Quadro 5.

Nesse sentido, apresentam a seção *Troque ideias*, com o objetivo de fazer com que os alunos participem ativamente do processo de construção de conhecimentos através de situações investigativas, favorecendo a autonomia e interação entre alunos e professor. A proposta apresentada para introduzir o conteúdo de progressão aritmética é *Observação de regularidades* (Figura 7).

Atividades como a destacada na Figura 7, envolvendo construções com palitos e similares, também são evidenciadas pelos demais autores. Como exemplo, Dante (2016) descreve esse tipo de atividade como "[...] um problema aberto em que o aluno é convidado a desenvolver a modelagem necessária para encontrar a solução" (DANTE, 2016, p. 351), pretendendo, dessa forma, através da observação de padrões e regularidades encontradas nas figuras, que os estudantes reflitam e construam conjecturas para obter suas conclusões.

Figura 7 – Observação de regularidades

TROQUE **IDEIAS**

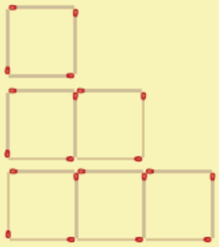
Observação de regularidades

As figuras seguintes mostram a construção de quadrados justapostos usando palitos.

1ª figura:

2ª figura:

3ª figura:



Consulte as respostas nas Orientações Didáticas.

a) Mantendo o padrão apresentado, desenhe, em seu caderno, a 4ª, 5ª e 6ª figuras.

b) Construa a sequência correspondente à quantidade de palitos usados na construção de cada figura. Qual é a regularidade que você observa?

c) Obtenha o termo geral dessa sequência.

d) Quantos palitos são usados na construção da 25ª figura?

e) Qual é a posição da figura feita com 493 palitos?

Fonte: Iezzi *et al.* (2016, p. 174)

Já para o conteúdo de progressão geométrica, a proposta é intitulada *A propagação de uma notícia* (Figura 8).

Figura 8 – A propagação de uma notícia

TROQUE **IDEIAS**

A propagação de uma notícia

Você já imaginou a velocidade com que uma notícia, corrente, foto, vídeo ou boato podem ser multiplicados pelas redes sociais?

Suponha que, em certo dia, dois amigos criaram um blogue sobre saúde e bem-estar, com dicas, receitas de comidas saudáveis, relatos de experiências pessoais etc.

No dia seguinte, cada um desses amigos convidou três novos amigos para visitar o blogue. Cada um desses três novos amigos convidou, no outro dia, três outros amigos para visitar o blogue e assim sucessivamente.

Faça o que se pede a seguir.

Suponha que esse padrão seja mantido e que ninguém seja convidado a visitar o blogue por mais de um amigo. Consulte as respostas nas Orientações Didáticas.

a) Começando pelo dia em que o blogue foi criado, escreva a sequência que representa o número diário de visitantes do blogue.

b) Responda: qual é a regularidade que você observa nessa sequência?

c) Obtenha um termo geral dessa sequência.

d) Responda: em quantos dias (considere o dia 1 o dia da criação do blogue) o número de visitas diárias ao blogue terá superado 1 milhão? Use uma calculadora.

Fonte: Iezzi *et al.* (2016, p. 182)

Segundo Iezzi *et al.* (2016), as atividades introdutórias apresentadas nas Figuras 7 e 8, tem como objetivo despertar a curiosidade dos alunos, levando-os a "[...] identificar, caracterizar e levantar propriedades das progressões aritmética e geométrica bem como determinar o termo geral dessas sequências, antes mesmo de qualquer apresentação ou formalização" (IEZZI *et al.*, 2016, p. 331).

Desse modo, percebe-se que a orientação é para que essas propostas sejam desenvolvidas através da Investigação Matemática, possibilitando aos alunos levantar hipóteses, questionar, argumentar, fazer descobertas e interagir com os colegas e o professor. Além disso, os autores ainda salientam que o papel do professor deve ser o de mediar a atividade, intervindo somente quando for necessário, evitando comprometer o processo investigativo.

Com o intuito de complementar as propostas apresentadas nas Figuras 7 e 8, os autores propõem mais uma atividade investigativa, com os objetivos de "Observar regularidades em padrões geométricos, formular conjecturas, levantar hipóteses e realizar testes, escrever o termo geral de uma sequência e socializar diferentes soluções para um mesmo problema" (IEZZI *et al.*, 2016, p. 340).

O termo geral das progressões é abordado de maneira similar em todos os materiais. Assim, os autores não apresentam exemplos, porém é realizada a dedução termo a termo até que a fórmula seja encontrada. Desse modo, mesmo que não haja uma contextualização inicial, através da dedução da fórmula termo a termo os alunos conseguem estabelecer um raciocínio, fazendo com que compreendam a construção das fórmulas, ao invés de receberem a estrutura pronta. Dante (2016) sugere que seja evidenciada a simetria existente entre as fórmulas, fazendo com que os alunos percebam que a soma existente na fórmula da PA, é multiplicação na fórmula da PG e, o termo que está multiplicando a razão na PA, transforma-se em expoente na razão da PG.

A soma dos termos de uma PA é apresentada em todos os livros através de um contexto envolvendo a História da Matemática. Assim a fórmula é apresentada/demonstrada através do raciocínio utilizado por Carl Friedrich Gauss para somar os números de 1 a 100, assim como apresentado na Figura 9.

Figura 9 – Raciocínio apresentado por Carl Friedrich Gauss

Fórmula da soma dos termos de uma PA finita

Carl Friedrich Gauss é considerado um dos maiores matemáticos de todos os tempos. Nascido em Brunswick, Alemanha, de família muito simples, foi uma criança prodígio.

Conta-se que antes de completar 10 anos de idade, em uma aula, seu professor, querendo manter os alunos por um bom tempo em silêncio, pediu que somassem todos os números de 1 a 100, isto é, $1 + 2 + 3 + 4 + ... + 99 + 100$. Para surpresa do professor, depois de alguns minutos Gauss disse que a soma era 5 050. Para descobrir o resultado tão rapidamente, Gauss utilizou o seguinte raciocínio:

Ao agrupar os termos dessa adição de forma conveniente, o resultado dá sempre 101.

$$1 + 2 + 3 + ... + 98 + 99 + 100$$

50 parcelas de 101

$$50 \cdot 101 = 5050$$

Assim, $1 + 2 + 3 + 4 + ... + 99 + 100 = 5050$.

Gravura de Gauss (1777-1855), matemático alemão.

Fonte: Dante (2016, p. 218)

Alguns autores não evidenciam de que forma deve ser realizada essa abordagem em sala de aula. Já outros, sugerem que o professor proponha aos estudantes o mesmo problema apresentado por Gauss, como é o caso de Balestri (2016) e Dante (2016). Este último sugere que os alunos resolvam apenas com os números de 1 a 10, para que assim, juntamente com o professor, possam deduzir a fórmula da soma dos termos de uma PA.

Desse modo, percebe-se uma abordagem propícia para ser desenvolvida através de Investigação Matemática, uma vez que os alunos estarão envolvidos na aprendizagem, participando do processo de "descoberta" da fórmula, formulando questões e conjecturas, pois como afirmam Ponte, Brocardo e Oliveira (2009) não é necessário trabalhar com problemas difíceis, apenas formular "[...] questões que nos interessam, para as quais não temos resposta pronta, e procuramos essa resposta de modo tanto quanto possível fundamentado e rigoroso" (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2009, p. 9).

Para a soma dos termos de uma PG finita os autores apresentam a fórmula e sua demonstração. Dante (2016) apresenta ainda uma aplicação envolvendo a soma dos termos de uma PG finita, o problema 79 do Papiro de Rhind (Figura 10).

Figura 10 – Problema 79 do Papiro de Rhind

Há sete casas; em cada casa há sete gatos; cada gato mata sete ratos; cada rato comeu sete grãos de cevada; cada grão teria produzido sete "hekats" de cevada. Qual é a soma de todas as coisas enumeradas?

Em primeiro lugar, o enunciado fala em "hekats de cevada". Não sabemos exatamente o que era isso. No Egito antigo, um "hekat" era uma porção de alguma coisa que era referida, ora ao peso, ora ao volume. Estima-se que 1 hekat de cevada seja uma porção de um pouco mais do que 3 kg de farinha de cevada.

Em segundo lugar, o que surpreende é o cálculo que o escriba mostra para calcular a soma de todas as coisas. Em notação moderna Ahmes escreve que a soma de todas as coisas enumeradas é:

$$\frac{7 \cdot 16\,806}{6} = 19\,607$$

O que significa esse cálculo?

Pelo enunciado, o número total de coisas envolvidas é igual a:

$$7 + 7^2 + 7^3 + 7^4 + 7^5 = 7 + 49 + 343 + 1\,401 + 16\,807 = 19\,607$$

O resultado está certo, mas como o escriba Ahmes fez outra conta que resultou no mesmo valor?

Imagine calcular essa soma pela fórmula da soma dos termos da PG que você aprendeu neste livro: $S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$.

Com essa fórmula temos que:

$$7 + 7^2 + 7^3 + 7^4 + 7^5 = \frac{7(7^5 - 1)}{7 - 1} = \frac{7(16\,807 - 1)}{6} = \frac{7 \cdot 16\,806}{6} = 19\,607$$

Observe agora que esse é o mesmo cálculo que aparece no papiro com mais de 3 500 anos de idade. Com isso, tudo indica que, pelo menos um egípcio antigo conhecia um cálculo equivalente à fórmula da soma dos termos de uma PG que conhecemos hoje.

Fonte: Dante (2016, p. 227)

O problema 79 do Papiro de Rhind (Figura 10) é apresentado logo após a demonstração da fórmula da soma dos termos de uma PG finita. Desse modo, Dante (2016) propõe essa aplicação como meio de colocar os alunos em contato com a História da Matemática e também incentivá-los para a exploração de outros problemas.

A soma dos termos de uma PG infinita é desenvolvida através de exemplos de sequências infinitas. Segundo Smole e Diniz (2016) esse provavelmente será o primeiro contato que os estudantes terão com o conceito de limite e infinito. Assim, torna-se necessário que o professor promova discussões em sala de aula, com a intenção de favorecer a compreensão desse conteúdo. Nesse sentido, Iezzi *et al.* (2016) apresentam um exemplo para a soma da PG infinita e também sua representação geométrica, conforme a Figura 11.

Figura 11 – Exemplo para soma da PG infinita

Vamos calcular a soma dos termos da P.G. infinita $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots\right)$.

Inicialmente, note que $q = \frac{1}{2}$ e $-1 < \frac{1}{2} < 1$.

Assim: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$

Podemos interpretar geometricamente esse fato.

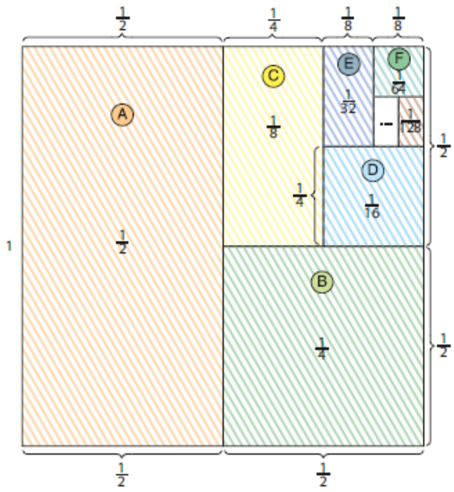
Vamos considerar o seguinte experimento:

Seja um quadrado de lado unitário. Vamos dividi-lo em duas partes iguais, hachurar uma delas e, na outra, repetir o procedimento, isto é, dividir essa parte em duas partes iguais, hachurando uma delas e dividindo a outra em duas partes iguais.

Vamos continuar, em cada etapa, dividindo a parte não hachurada em duas até que não seja mais possível fazê-lo, devido ao tamanho reduzido da parte. A operação pode ser repetida indefinidamente usando, por exemplo, um programa computacional.

A figura ao lado ilustra esse procedimento.

A soma das áreas dos "infinitos" retângulos assim construídos deve ser igual à área do quadrado original, isto é:



$$\overbrace{1 \cdot \frac{1}{2}}^{A} + \overbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}^{B} + \overbrace{\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}}^{C} + \overbrace{\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}}^{D} + \overbrace{\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4}}^{E} + \overbrace{\frac{1}{8} \cdot \frac{1}{8}}^{F} + \ldots = 1$$

ou, melhor:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \ldots = 1$$

Fonte: Iezzi *et al.* (2016, p. 189)

Verifica-se através da Figura 11 uma interessante abordagem para a soma dos termos de uma PG infinita, permitindo aos estudantes "enxergar" a sequência através de uma representação geométrica. Assim, possibilitando serem realizadas diversas explorações, levantamento de questões e também conjecturas. Apesar dessa atividade ser apresentada como um exemplo posterior, esta poderia também ser utilizada como meio para introduzir a fórmula, contribuindo para o desenvolvimento de competências definidas pela BNCC, como por exemplo, a competência 4 (Quadro 5) que tem relação com os diversos registros de representação matemáticos.

No decorrer de cada capítulo os autores analisados abordam atividades propostas e resolvidas, organizadas em ordem crescente de dificuldade. E assim como sugerem Ponte, Brocardo e Oliveira (2009) são explorados diversos tipos de atividades (inclusive Investigação Matemática), cada uma com suas características, promovendo assim um equilíbrio e possibilitando o desenvolvimento de várias competências e habilidades, como “[...] observação, investigação, percepção de regularidades, análise, síntese, diversidade de formas de expressão e registro de procedimentos, argumentação e tomada de decisão, inferência e prova, generalizações etc.” (BALESTRI, 2016, p. 292).

Atividades com números triangulares entre outros, para encontrar a lei de formação de sequências, como mostra a Figura 12, são encontradas em todos os materiais.

Figura 12 – Atividade com números triangulares

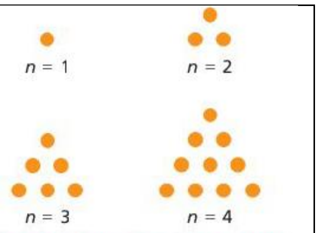
5. Observe a quantidade de pontos nas figuras que formam a sequência de números triangulares e responda às questões.

a) Calcule os valores numéricos de $n \cdot (n + 1)$ para $n \in \{1, 2, 3, 4\}$ e compare-os com os números de pontos das figuras.

b) Que lei de formação dá o número de pontos da enésima figura dessa sequência? $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$, com $n \in \mathbb{N}^*$

c) Quantos pontos formarão a 13ª figura? 91 pontos

d) Essa sequência tem uma figura com 110 pontos? E com 120 pontos? não; sim



5. a) 2, 6, 12, 20. Para cada n, o valor de $n \cdot (n + 1)$ é o dobro do número de pontos da respectiva figura.

Fonte: Leonardo (2016, p. 192)

Dependendo da maneira como são propostas, essas atividades podem ser exploradas de forma investigativa, visto que a percepção de regularidades na formação das figuras permite diversas explorações, e não somente uma resposta através de um algoritmo pré-definido.

Na Figura 13 encontra-se destacada uma atividade proposta por Iezzi *et al.* (2016), que pode propiciar um enfoque investigativo, devido à maneira como está estruturada, possibilitando o desenvolvimento do raciocínio lógico e argumentativo.

Figura 13 – Atividade proposta no livro Matemática: Ciência e aplicações

39 No esquema seguinte, os números naturais não nulos aparecem dispostos em blocos de três linhas e três colunas, conforme indicado abaixo: B_1, B_2, B_3, ...

	B_1	B_2	B_3	B_4	
1ª linha →	1 2 3	10 11 12	19 20 21	28 29 30	...
2ª linha →	4 5 6	13 14 15	22 23 24	31 32 33	...
3ª linha →	7 8 9	16 17 18	25 26 27	34 35 36	...
	1ª coluna 2ª coluna 3ª coluna				

a) Em que linha e coluna encontra-se o elemento 787? A qual bloco ele pertence?
b) Determine o elemento que está na 3ª linha e 1ª coluna do bloco B_{100}.
c) Determine o elemento que está na 2ª linha e 3ª coluna do bloco B_{500}.
d) Qual é a soma de todos os elementos que se encontram na 2ª linha e 2ª coluna dos 500 primeiros blocos?
e) Qual é a soma de todos os elementos escritos nos 200 primeiros blocos?

Fonte: Iezzi *et al.* (2016, p. 180)

Já Balestri (2016) traz uma interessante abordagem para o conteúdo de progressões, envolvendo a origem dos logaritmos, conforme a Figura 14.

Figura 14 – PA, PG e a origem dos logaritmos

Tudo indica que os logaritmos foram desenvolvidos pelo escocês John Napier (1550-1617) e pelo suíço Jobst Bürgi (1552-1632) de modo independente, ou seja, sem que um conhecesse o trabalho do outro. O objetivo de ambos era simplificar longas operações de multiplicação e divisão, muito utilizadas no desenvolvimento das navegações e da Astronomia da época. Com o desenvolvimento dos logaritmos, eles simplificaram essas operações "transformando-as" em adições e subtrações.

Para isso, eles utilizaram uma ideia já conhecida, pois o livro *Arithmetica integra* de Michael Stifel (por volta de 1487-1567), publicado em 1544, apresentava uma relação interessante entre algumas progressões específicas.

Considere as sequências:

PA:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...
PG:	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1 024	2 048	4 096	...

Para auxiliar nos cálculos, eram construídas tabelas numéricas com valores de alguns logaritmos, conhecidas como tábua de logaritmos.

Para obter o resultado de $16 \cdot 128$, por exemplo, basta observar que:

- 16 na linha da PG corresponde a 4 na linha da PA
- 128 na linha da PG corresponde a 7 na linha da PA

Como $4+7=11$, o resultado é o valor da linha da PG correspondente ao 11 da linha da PA, ou seja, $16 \cdot 128 = 2\,048$.

Stifel determinou que a soma na PA corresponde ao produto na PG, e a diferença na PA corresponde ao quociente na PG.

Fonte: Balestri (2016, p. 212)

Assim, as tabelas que envolvem as progressões e a origem dos logaritmos podem propiciar que sejam realizadas diversas explorações, permitindo aos estudantes que questões e conjecturas sejam levantadas, fazendo com que possam compreender através da História da Matemática de que forma eram feitos os cálculos.

Relações com o contexto cotidiano também são exploradas nos livros. Um exemplo é a proposta apresentada por Dante (2016) na seção *Outros contextos*, que segundo o autor, traz "Temas interessantes e curiosos que tratam de situações práticas, articulando a Matemática com outras disciplinas e com temas como Arquitetura, Saúde, Sociedade, entre outros" (DANTE, 2016, p. 5). No caso do capítulo em análise, o tema tratado em *Outros contextos* está vinculado à Saúde. São trazidas diversas informações em relação à "Automedicação e uso indiscriminado de medicamentos" (DANTE, 2016, p. 232), além de tabelas quantificando casos de intoxicação e os resíduos deixados pelos medicamentos no organismo. Também são propostas questões relacionadas ao contexto apresentado. De certo modo, através dessa seção é possível também contemplar competências específicas de Matemática e suas Tecnologias para o Ensino Médio definidas pela BNCC.

Portanto, percebe-se ao longo da análise realizada nos cinco livros didáticos, que estes consideram em diversos momentos, princípios e características da Investigação Matemática, assim como aspectos relacionados às competências e habilidades previstos na BNCC.

Os aspectos relacionados à Investigação Matemática foram mais evidentes no livro de Dante (2016), porém também foram encontrados de forma significativa em todos os demais livros analisados.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Na presente pesquisa, buscou-se verificar, em sequências didáticas de Ensino Médio, se a forma como o estudo das progressões, apresentado nos livros didáticos, favorece a descoberta de relações e o estabelecimento de conjecturas, em um processo de Investigação Matemática.

Nesse sentido, a pesquisa realizada revelou que os autores preveem em seus materiais o equilíbrio entre diversas metodologias, entre elas a Investigação Matemática, como forma de possibilitar aos estudantes a participação ativa e efetiva em um processo corresponsável de construção do conhecimento.

Assim, através das sequências didáticas elaboradas para o estudo do conteúdo de progressões nos livros considerados, verificou-se que essas possibilitam aos estudantes a descoberta de padrões e relações matemáticas nos mais diferentes contextos, assim como o estabelecimento de conjecturas, favorecendo o processo de Investigação Matemática. É válido destacar que apesar de os livros didáticos analisados apresentarem a proposta investigativa e os autores também sugerirem que seja utilizada essa abordagem, isso não garante que os professores trabalhem com essa metodologia em sala de aula.

Outro ponto a ser destacado foi a identificação de elementos relacionados à BNCC encontrados em diversos momentos da análise, apesar de os livros investigados serem anteriores ao documento legal, permitindo, desse modo, o estabelecimento de relações entre as propostas apresentadas pelos autores e as competências e habilidades definidas pela Base.

Concluindo, percebe-se através dos vários pontos destacados na análise, que os livros didáticos considerados são pertinentes ao trabalho pedagógico esperado para o conteúdo de progressões, mesmo após a aprovação da nova Base Nacional Comum Curricular, pois além de favorecerem o processo de Investigação Matemática na construção do conhecimento desse conteúdo, também contemplam elementos que tem relação direta com as competências e habilidades esperadas para esse ensino.

Desse modo, admite-se que esses livros não precisam necessariamente serem substituídos, somente por serem anteriores à BNCC, pois a substituição de livros didáticos gera custos reais, que indiretamente podem afetar outros setores igualmente prioritários das escolas. Contudo, essa temática dá margem para uma nova pesquisa, que fica como sugestão ao concluir este trabalho.

REFERÊNCIAS

BALESTRI, Rodrigo. **Matemática:** interação e tecnologia. Ensino Médio. v. 1. 2. ed. São Paulo: Leya, 2016. ISBN 978-85-451-0324-0.

BOGDAN, Robert C.; BIKLEN, Sari Knopp. **Investigação qualitativa em educação:** uma introdução à teoria e aos métodos. Portugal: Porto Editora, 1994. ISBN 972-0-34112-2.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular (BNCC)**. Brasília, DF: Ministério da Educação, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 01 maio 2019.

BRASIL. Ministério da Educação. **PNLD 2018**: Matemática – guia de livros didáticos – Ensino Médio. Brasília, DF: Ministério da Educação, 2017. 122 p. ISBN 978-85-7783-237-8. Disponível em: https://www.fnde.gov.br/index.php/centrais-de-conteudos/publicacoes/category/125-guias?download=10744:guia-pnld-2018-matematica. Acesso em: 03 out. 2019.

CERGOLI, Daniel. **Ensino de logaritmos por meio de investigações matemáticas em sala de aula**. 2017. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2017. Disponível em: http://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/45/45135/tde-29112017-171710/publico/Daniel_Cergoli.pdf. Acesso em: 11 abr. 2019.

CORRADI, Daiane Katiúscia Santos. Investigações Matemáticas. **Revista de Educação Matemática da Universidade Federal de Ouro Preto**, vol. I, 2011 - XI Semana da Matemática e III Semana da Estatística, 2011. ISSN 2237-809X. Disponível em: http://www.cead.ufop.br/jornal/index.php/redumat/article/view/346. Acesso em: 23 mar. 2019.

CRESWELL, John W. **Projeto de pesquisa:** métodos qualitativo, quantitativo e misto. Porto Alegre: Artmed, 2010. ISBN 978-85-363-2300-8.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática:** contexto & aplicações. Ensino Médio. v. 1. 3. ed. São Paulo: Ática, 2016.

IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; DEGENSZAJN, David; PÉRIGO, Roberto; ALMEIDA, Nilze de. **Matemática:** ciência e aplicações. Ensino Médio. v. 1. 9. ed. São Paulo: Saraiva, 2016. ISBN 978-85-472-0536-2.

LEONARDO, Fábio Martins de. **Conexões com a matemática**. Ensino Médio. v. 1. 3. ed. São Paulo: Moderna, 2016.

LIAKOPOULOS, Miltos. Análise argumentativa. *In:* BAUER, Martin W.; GASKELL, George (orgs.). **Pesquisa qualitativa com texto, imagem e som:** um manual prático. 13. ed. Traduzido por Pedrinho Guareschi. Petrópolis, RJ: Vozes, 2015.

LÜDKE, Menga; ANDRÉ, Marli Eliza Dalmazo Afonso. **Pesquisa em educação:** abordagens qualitativas. São Paulo: EPU, 1986. ISBN 978-85-12-30370-3

PONTE, João Pedro; BROCARDO, Joana; OLIVEIRA, Hélia. **Investigações matemáticas na sala de aula**. 2. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2009.

PONTE, João Pedro. **Investigar, ensinar e aprender**. Actas do ProfMat. Lisboa: APM. 2003. Disponível em http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/03-Ponte(Profmat).pdf. Acesso em: 23 maio 2019.

PONTE, João Pedro. **Investigação sobre investigações matemáticas em Portugal**. Centro de Investigação em Educação e Departamento de Educação, Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa. Lisboa, 2003. Disponível em: http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/03-Ponte(Rev-SPCE).pdf. Acesso em: 23 maio 2019.

SANTOS, Caroline Hellen Martendal; BELLINI, Willian. Investigações matemáticas em sala de aula: Contribuições de uma tarefa investigativa no 1º ano do ensino médio. *In*: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 12., 2016, São Paulo. **Anais** [...] São Paulo: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2016. Disponível em: http://www.sbem.com.br/enem2016/anais/pdf/6320_2940_ID.pdf. Acesso em: 30 mar. 2019.

SEGURADO, Irene; PONTE, João Pedro. **Concepções sobre a Matemática e trabalho investigativo**. 1998. Disponível em: http://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/3040/1/98-Segurado-Ponte%20%28Quadrante%29.pdf. Acesso em: 24 maio 2019.

SMOLE, Kátia Stocco; DINIZ, Maria Ignez. **Matemática para compreender o mundo**. Ensino Médio. v. 1. 1. ed. São Paulo: Saraiva, 2016. ISBN 978-85-472-0586-7.

SOUZA, Sidnei Fernandes; JACINTO, Cristiano Vaz; GOMES, Otávio Elias; BOTELHO, Vitor da Silva; MIRANDA, Paula Reis. Uma proposta didática para trabalhar sequências numéricas em sala de aula. *In*: COLÓQUIO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 5., 2017, Juiz de Fora. **Anais** [...] Juiz de Fora: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2017. Disponível em: http://www.ufjf.br/coloquioedumat/files/2017/10/UMA-PROPOSTA-DIDATICA-PARA-TRABALHAR-SEQUENCIAS-NUMERICAS-EM-SALA-DE-AULA.pdf. Acesso em: 01 abr. 2019.