

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PAMPA

LUCAS DIAS SOARES

**SIMULAÇÃO NUMÉRICA E DESIGN CONSTRUTAL APLICADOS À
FLAMBAGEM ELÁSTICA BIAxIAL DE PLACAS RETANGULARES COM
PERFURAÇÕES RETANGULARES**

**Alegrete
2020**

LUCAS DIAS SOARES

**SIMULAÇÃO NUMÉRICA E DESIGN CONSTRUTAL APLICADOS À
FLAMBAGEM ELÁSTICA BIAXIAL DE PLACAS RETANGULARES COM
PERFURAÇÕES RETANGULARES**

Trabalho de Conclusão de Curso
apresentado ao Curso de Engenharia
Mecânica da Universidade Federal do
Pampa, como requisito parcial para
obtenção do Título de Bacharel em
Engenharia Mecânica.

Orientador: Prof. Me. Thiago da Silveira



SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
Universidade Federal do Pampa

LUCAS DIAS SOARES

**SIMULAÇÃO NUMÉRICA E DESIGN CONSTRUTAL APLICADOS À FLAMBAGEM ELÁSTICA
BIAXIAL DE PLACAS RETANGULARES COM PERFURAÇÕES RETANGULARES**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Engenharia Mecânica da Universidade Federal do Pampa, como requisito parcial para obtenção do Título de Bacharel em Engenharia Mecânica.

Trabalho de Conclusão de Curso defendido e aprovado em: 16, dezembro de 2020.

Banca examinadora:

Prof. Msc. Thiago da Silveira
Orientador
Unipampa

Prof. Dr. Tonilson de Souza Rosendo
Unipampa

Prof. Msc. Leandro Ferreira Friedrich
Unipampa



Assinado eletronicamente por **THIAGO DA SILVEIRA, PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR**, em 28/12/2020, às 20:01, conforme horário oficial de Brasília, de acordo com as normativas legais aplicáveis.



Assinado eletronicamente por **LEANDRO FERREIRA FRIEDRICH, PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR**, em 08/01/2021, às 17:54, conforme horário oficial de Brasília, de acordo com as normativas legais aplicáveis.



Assinado eletronicamente por **TONILSON DE SOUZA ROSENDO, PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR**, em 19/05/2021, às 21:50, conforme horário oficial de Brasília, de acordo com as normativas legais aplicáveis.



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.unipampa.edu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **0433267** e o código CRC **247D3510**.

Universidade Federal do Pampa, Campus Alegrete
Av. Tiarajú, 810 – Bairro: Ibirapuitã – Alegrete – RS CEP: 97.546-550
Telefone: (55) 3422-8400

AGRADECIMENTO

Gostaria de agradecer imensamente ao meu orientador, Professor Thiago da Silveira, que aceitou e apoiou o desenvolvimento deste trabalho, dando todo o auxílio necessário. Muito obrigado pela compreensão, incentivo e principalmente, tempo dedicado no decorrer de todos esses dias.

Aos meus pais, Juliane e Alex Sandro, que sempre estiveram ao meu lado incentivando e me dando força e coragem nos momentos difíceis, sendo os responsáveis por tornar este sonho realidade. Obrigado por todo apoio e paciência ao longo de todos esses anos.

À minha namorada, amiga e companheira Nayra, que compartilhou todos os momentos de dúvida, angústia e desespero, bem como momentos de alegria e satisfação. Obrigado por dividir comigo esta jornada, ajudando a superar todos os obstáculos e nunca me deixando desistir.

Aos meus amigos, pelo apoio e todos os momentos de risadas e brincadeiras vivenciados.

Aos professores que fizeram parte da minha formação, sendo os responsáveis pelo meu crescimento intelectual e pessoal.

RESUMO

Placas finas são elementos estruturais amplamente utilizados em diversas áreas da engenharia, sendo de grande importância na engenharia aeronáutica e naval, surgindo como principal elemento na construção de cascos de embarcações e estruturas *offshore*. Entretanto, por constituírem-se de um elemento estrutural esbelto, estão sujeitas à ocorrência de flambagem elástica, sendo este, um fenômeno de instabilidade estrutural indesejado em projetos de engenharia. Além disso, a inserção de perfurações em placas é uma técnica comumente utilizada, seja para viabilizar acesso a instalações, seja para a redução de peso ou até mesmo por questões estéticas. Porém, a inclusão de perfurações em placas ocasiona uma redistribuição de tensões internas do elemento, afetando sua resistência mecânica e suas características de flambagem. Portanto, neste trabalho, será analisada a influência da inserção de perfurações retangulares e centralizadas no comportamento mecânico de placas finas de aço, simplesmente apoiadas e submetidas à compressão biaxial. A análise foi realizada para placas com geometria retangular ($b/a = 0,5$), onde b e a representam a largura e o comprimento da placa, respectivamente. Com relação a perfuração, foram inseridos, à placa, furos retangulares que tiveram a sua geometria variada baseada na sua fração volumétrica. Foram consideradas as seguintes frações volumétricas: $\phi = 0,10; 0,15; 0,20$;, sendo ϕ a fração que relaciona o volume da perfuração e o volume da placa. Para determinação da carga crítica de flambagem, foi utilizado o elemento SHELL281 através do software comercial ANSYS®, que utiliza o Método de Elementos Finitos (MEF). O Método Design Construtal (DC) associado à técnica da Busca Exaustiva foi utilizado para a determinação do espaço de busca e das geometrias ótimas para todas as frações volumétricas de perfurações estudadas onde, foi possível a obtenção de geometrias otimizadas para as perfurações, buscando o melhor desempenho mecânico da estrutura. Notou-se que a inserção de perfuração, bem como o incremento da fração volumétrica, resultou na redução da carga crítica de flambagem. Ainda, a variação geométrica da perfuração pode incrementar em até 78,8% a carga crítica de flambagem da placa.

Palavras-Chave: Flambagem de Placas; Flambagem Elástica; Design Construtal; Simulação Numérica.

ABSTRACT

Thin plates are structural elements widely used in several areas of engineering, being of great importance in aeronautical and naval engineering, emerging as the main element in the construction of vessel hulls and offshore structures. However, because they are a slender structural element, they are subject to the occurrence of elastic buckling, which is a phenomenon of unwanted structural instability in engineering projects. In addition, the insertion of perforations in plates is a technique commonly used, whether to enable access to facilities, either to reduce weight or even for aesthetic reasons. However, the inclusion of perforations in plates causes a redistribution of internal stresses of the element, affecting its mechanical strength and its buckling characteristics. Therefore, in this work, the influence of the insertion of rectangular and centralized perforations on the mechanical behavior of thin steel plates, simply supported and submitted to biaxial compression, will be analyzed. The analysis was performed for plates with rectangular geometry ($b/a = 0,5$), where b and a represent the width and length of the plate, respectively. Regarding drilling, rectangular holes were inserted into the plate, which varied in geometry based on their volumetric fraction. The following volumetric fractions were considered: $\phi = 0,10; 0,15; 0,20$, ϕ being the fraction that relates the volume of the perforation and the volume of the plate. To determine the critical buckling load, the SHELL281 element was used through the commercial software ANSYS®, which uses the Finite Element Method (MEF). The Constructive Design Method (DC) associated with the Exhaustive Search technique was used to determine the search space and the optimum geometries for all the studied volumetric fractions where it was possible to obtain optimized geometries for the perforations, seeking the best mechanical performance of the structure. It is worth to mention that the perforation insertion, or the volume fraction increasing, resulted in a reduction of critical buckling load. Also, the geometric variation of the perforation can increase in 78,8% the critical buckling load of the plate.

Keywords: Plate Buckling; Elastic Buckling; Constructal Design; Numerical Simulation.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Fluxograma geral do trabalho	13
Figura 2 - Exemplo de placa plana	15
Figura 3 - Casos de Flambagem por Flexão	17
Figura 4 - Caso Simplificado: Placa Pós-Flambagem	18
Figura 5- Principais Teorias no Estudo de Placas	20
Figura 6 - Caso Simplificado de Compressão Biaxial em uma Placa	21
Figura 7 - Exemplo de Meias-Ondas Senoidais em Flambagem.....	22
Figura 8 - Efeito da Proporção da Placa no Coeficiente de Flambagem.....	22
Figura 9 - MEF: Divisão do Domínio em Sub-Regiões	24
Figura 10 - Principais Geometrias de Elementos Finitos	25
Figura 11 - Exemplo de Refinamento de Malha	26
Figura 12 - Descrição do Elemento SHELL281.....	28
Figura 13 - Sistemas de Escoamento	30
Figura 14 - Modelo de análise de placa sólida	34
Figura 15 - Comparação das Cargas Críticas para Placa Quadrada	38
Figura 16 - Comparação das Cargas Críticas para Placa Retangular	39
Figura 17 - Esquema Simplificado para Placa Perfurada	40
Figura 18 - Comparação das Cargas Críticas para Placa Perfurada	41
Figura 19 - Placa sem Perfurações	42
Figura 20 - Configuração da Placa Flambada para: (a) $b/a = 0,2$, (b) $b/a = 1,0$ e (c) $b/a = 3,2$	44
Figura 21 - Configuração da Placa Flambada para: (a) $b/a = 0,208$, (b) $b/a = 1,0$ e (c) $b/a = 1,875$	45
Figura 22 - Configuração da Placa Flambada para: (a) $b/a = 0,278$, (b) $b/a = 1,0$ e (c) $b/a = 1,6$	47
Figura 23 - Curvas de Carga Crítica para as Frações Volumétricas Analisadas	47

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Dados para Convergência de Malha.....	34
Tabela 2 - Tempo aproximado de simulação para diferentes tamanhos de elementos....	37
Tabela 3 - Teste de independência de malha para placa sem furos	38
Tabela 4 - Comparativo dos Valores de Carga Crítica.....	40
Tabela 5 - Valores Analisados para $\emptyset=0,1$	43
Tabela 6 - Valores Analisados para $\emptyset = 0,15$	44
Tabela 7 - Valores Analisados para $\emptyset = 0,2$	46

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

- a – Comprimento
- b – Largura
- β – Proporção da Placa
- det – Função Determinante
- δ_0 – Excentricidade inicial
- η – Razão Geométrica entre a Placa e a Perfuração
- E – Módulo de Elasticidade
- ϕ – Fração Volumétrica
- k – Coeficiente Adimensional de Flambagem
- K – Matriz de Rigidez
- K_E – Matriz de Rigidez Convencional para Pequenas Deformações
- K_G – Matriz de Rigidez Geométrica
- λ – Escalar para Matriz de Rigidez
- m – Número de Meia-Onda na Direção X
- MEF – Método de Elementos Finitos
- n – Número de Meia-Onda na Direção Y
- N – Esforço Normal
- ν – Coeficiente de Poisson
- \bar{N}_{cr} – Carga Crítica de Flambagem
- $\bar{N}_{cr(i)}$ – Carga Crítica de Flambagem em Última Análise
- $\bar{N}_{Cr(i-1)}$ – Carga Crítica de Flambagem em Análise Anterior
- P – Carregamento
- P_0 – Carregamento Inicial
- σ_x – Tensão Compressiva na Direção X
- σ_y – Tensão Compressiva na Direção Y
- $\sigma_{x,cr}$ – Tensão Crítica na Direção X
- t – Espessura
- U – Vetor de Deslocamento Total
- V – Volume Total da Placa
- V_0 – Volume da Perfuração
- ξ – Taxa de Tensão

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	10
1.2 Justificativa	11
1.1 Objetivo Geral	12
1.2 Objetivos Específicos	12
1.3 Estrutura do Trabalho	13
2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	15
2.1 Considerações Gerais Sobre Placas Planas	15
2.2 Flambagem de Placas	16
2.2.1 Principais Teorias sobre Flambagem em Placas	18
2.2.2 Flambagem Biaxial de Placas	20
2.3 Elementos Finitos e Aplicação à Placas	23
2.3.1 Software ANSYS®	27
2.3.2. Modelo Computacional	28
2.4 Método do Design Construtal	30
3 METODOLOGIA	33
3.1 Verificação do Modelo Computacional para a Placa sem Perfurações	33
3.2 Verificação do Modelo Computacional para Placa Perfurada	35
3.3 Método do Design Construtal	35
4 RESULTADOS	37
4.1 Convergência de Malha: Verificação do Modelo para Placa sem Perfurações	37
4.2 Resultados de Verificação do Modelo para Placa Perfurada	39
4.3 Resultados da Aplicação do Design Construtal à Placas Perfuradas	41
5 CONCLUSÕES	49
REFERÊNCIAS	51

1 INTRODUÇÃO

Elementos estruturais como chapas de aço são amplamente utilizados na indústria naval e *offshore*, surgindo como um dos principais componentes presentes em estruturas navais, plataformas de petróleo e portões de docas, por exemplo (SHANMUGAM; THEVEDRAN; TAN, 1999). Além disso, encontram-se em setores como construção civil, aeronáutico, aeroespacial e automobilístico. Isso se deve, principalmente, pelo fato de sua alta resistência mecânica aos diversos estados de tensão, oferecendo grande margem de segurança de trabalho e, além disso, são de fácil fabricação. Outro ponto positivo ao usar placas finas como elementos estruturais, se deve à facilidade de montagem e desmontagem, no qual, oferece a possibilidade de substituição destes elementos e até mesmo o reaproveitamento do material.

Entretanto, uma estrutura delgada submetida a um carregamento compressivo tende a apresentar uma grande deformação ao atingir determinado valor de carga crítica, perdendo sua capacidade de carregamento. Esse fenômeno é denominado flambagem ou, instabilidade estrutural (WANG; WANG, 2004)

De acordo com Ventsel e Krauthammer (2001, apud Helbig, 2016, p. 24), na flambagem, o elemento que está submetido a esforços axiais ou transversais está sujeito a desenvolver tensões de cisalhamento, flexão ou torção. Nesse caso, a flambagem ocorrerá em torno do eixo principal da seção que tenha o menor momento de inércia, ou seja, o eixo menos resistente, podendo levar à falha repentina e catastrófica da estrutura.

Além disso, em muitos casos torna-se necessária a realização de perfurações ao longo dessas placas, das mais variadas formas e tamanhos, geralmente buscando facilitar o acesso a manutenções, inspeções, reduzir o peso da estrutura ou até mesmo por questões estéticas. Porém, esta prática ocasiona uma redistribuição de tensões ao longo das placas, ocasionando mudanças no comportamento mecânico da estrutura (EL SAWAY; NAZMY, 2001)

Outro aspecto importante a ser analisado com relação à perfuração em placas, consiste em sua geometria e posicionamento, uma vez que, essas características influenciam diretamente no comportamento mecânico do elemento submetido à compressão. Segundo Helbig *et al.* (2013), para placas finas que apresentem pequenas relações entre a largura e o comprimento da perfuração, há o predomínio da flambagem elástica, enquanto que para grandes proporções, o da flambagem elasto-plástica.

Embora existam métodos analíticos para o estudo do comportamento mecânico em flambagem elástica de placas finas, para placas com presença de perfurações este método apresenta elevada dificuldade, inviabilizando o seu uso. Entretanto, uma das maneiras de solucionar este tipo de problema, consiste na utilização de softwares de simulação numérica que se baseiam no Método de Elementos Finitos (MEF).

Nesse contexto, o presente trabalho propõe analisar numericamente o comportamento mecânico de placas finas retangulares, de aço, com perfuração retangular e centralizada, submetidas à flambagem biaxial. Para obtenção dos valores da carga crítica de flambagem, será utilizado o software ANSYS® onde primeiramente, será analisada uma placa sem perfurações e, na sequência, com a presença de furos para que possa ser avaliado o comportamento mecânico da placa para cada situação.

Além disso, buscando o melhor desempenho mecânico para placas finas retangulares com perfurações retangulares, será realizado o estudo comparativo entre a proporção das dimensões do furo retangular, através do grau de liberdade b_0/a_0 . Para isso, o Método do Design Construtal será aplicado simultaneamente com a técnica da Busca Exaustiva, permitindo avaliar diferentes frações volumétricas para as perfurações e, analisando seus respectivos comportamentos mecânicos. Dessa forma, espera-se maximizar a carga crítica de flambagem em placas finas retangulares com presença de perfuração retangular e centralizada.

Como justificativa ao tema proposto, está o aumento significativo na utilização de placas de aço em diversos setores como construção civil, aeronáutico, naval e *offshore* além de diversas outras áreas da engenharia.

1.2 Justificativa

Perfurações são comumente inseridas em elementos estruturais de paredes finas buscando facilitar o acesso tanto para passagem de componentes elétricos ou mecânicos, quanto para serviços de inspeções ou até mesmo estéticos. Porém, esta prática gera uma redistribuição de tensões ao longo da placa, alterando seu comportamento mecânico e, conseqüentemente, contribuindo para o colapso do elemento perfurado.

Dessa forma, justifica-se a escolha do tema proposto em função do aumento do consumo de placas finas, sendo amplamente encontradas no setor naval, aeronáutico, civil e estruturas *offshore*, por exemplo. Além disso, o presente trabalho propõe avaliar o comportamento mecânico de placas finas perfuradas e submetidas à flambagem biaxial,

através da aplicação do método do Design Construtal (DC). Sendo este um estudo pouco abordado pela literatura até o momento, busca-se um melhor entendimento por meio dos resultados obtidos de forma a colaborar com o desenvolvimento dos trabalhos acadêmicos no tema.

1.1 Objetivo Geral

Este trabalho propõe estudar, por meio de simulação numérica, o comportamento de placas delgadas, retangulares, com perfuração retangular e centralizada, submetidas à carregamento compressivo biaxial. Para isso, pretende-se avaliar a ocorrência da flambagem elástica utilizando o MEF, o Método Design Construtal e a Técnica da Busca Exaustiva.

O objetivo geral desse trabalho é avaliar a ação da flambagem elástica em placas finas retangulares com perfuração retangular e centralizada, submetidas à carregamento compressivo biaxial por meio de simulações numéricas através do software ANSYS®.

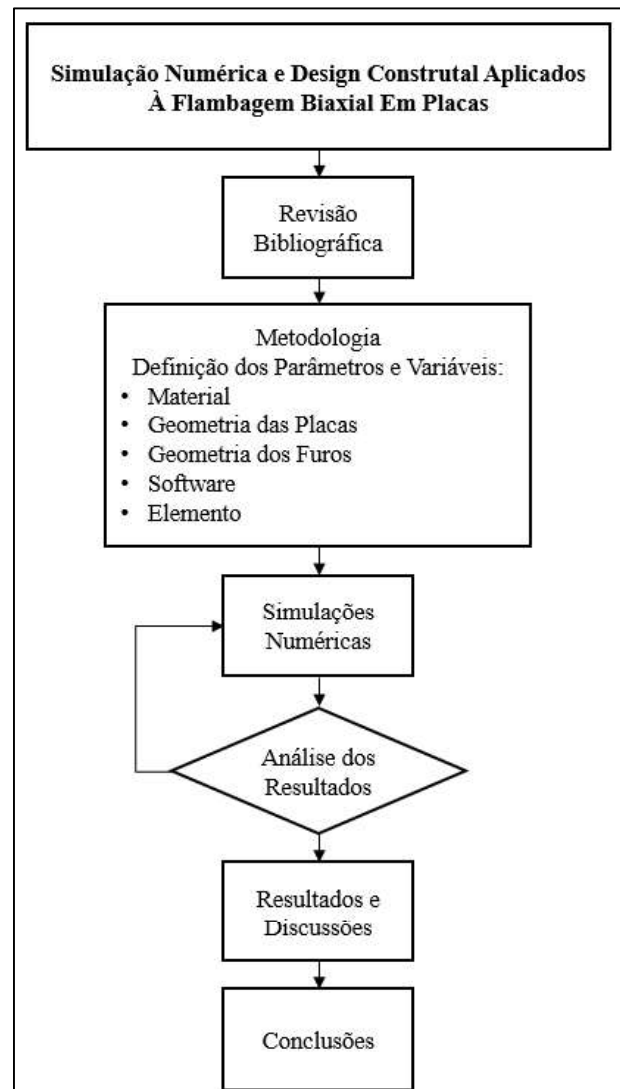
1.2 Objetivos Específicos

- Utilizar o MEF para determinação da carga crítica do primeiro estado de flambagem elástica biaxial em placas sem perfurações;
- Analisar numericamente o comportamento mecânico à flambagem elástica em placas finas retangulares com perfuração centrada do tipo retangular;
- Avaliar a influência da geometria da perfuração, através da variação do parâmetro de fração de volume da perfuração ϕ e do grau de liberdade b_0/a_0 , no comportamento mecânico da placa sob flambagem biaxial;
- Avaliar, por meio da aplicação do método de Design Construtal, a influência da inserção de perfurações retangulares em placas planas de geometria retangular;
- Determinar a geometria que melhor distribua as imperfeições, através do Princípio da Ótima Distribuição das Imperfeições.

1.3 Estrutura do Trabalho

O presente trabalho apresenta como objetivo principal avaliar a ação da flambagem elástica em placas finas com perfuração retangular e centralizada, submetidas à carregamento compressivo biaxial. A Figura 1 apresenta o fluxograma geral do trabalho.

Figura 1 - Fluxograma geral do trabalho



Fonte: Elaboração própria.

De acordo com a Figura 1, inicialmente, realiza-se uma revisão bibliográfica acerca das principais características envolvendo a flambagem de placas, das principais teorias referentes ao estudo de placas, do MEF aplicado à flambagem de placas e, por fim, o método Design Construtal aplicado à mecânica dos sólidos. Em seguida,

determinam-se as características do material a ser estudado e da geometria da placa, do software e dos parâmetros adotados para a realização das simulações. Em sequência, serão analisados e discutidos os resultados obtidos, para que então, sejam geradas as conclusões acerca do estudo proposto.

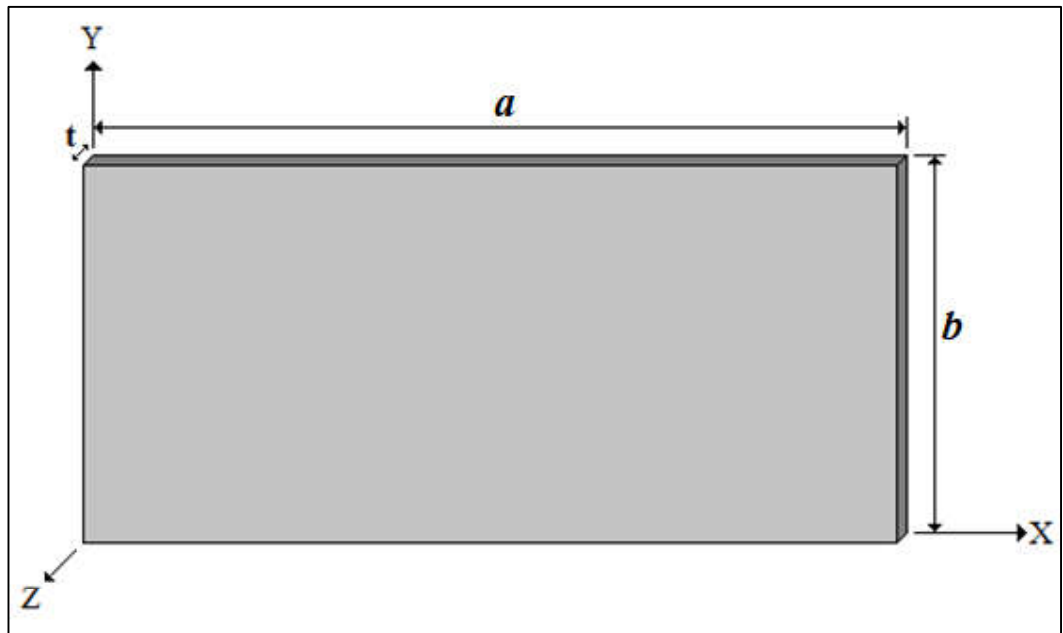
2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Nesta seção, serão apresentados conceitos básicos a respeito dos assuntos tratados no presente trabalho, tais como estudo de placas, flambagem elástica, MEF e Design Construtal aplicado a placas planas. Tal embasamento teórico teve como referência livros, artigos e teses.

2.1 Considerações Gerais Sobre Placas Planas

De acordo com Bernardino (2016), placas são elementos estruturais inicialmente planos, que podem ser consideradas bidimensionais devido sua espessura (t) ser muito inferior em relação as demais dimensões, como comprimento (a) e largura (b), conforme Figura 2. Segundo Helbig (2016), vários exemplos podem ser enquadrados na família de placas, tais como, elementos na confecção das fuselagens de aviões e de cascos em embarcações, nas plataformas de petróleo, dentre outros.

Figura 2 - Exemplo de placa plana



Fonte: Elaboração Própria.

De acordo com Cresce (2003), placas são consideradas delgadas quando sua esbelteza, ou seja, sua relação entre espessura e o comprimento do menor lado da placa atendam a proporção apresentada pela Equação 1:

$$\frac{1}{100} < \frac{t}{b} < \frac{1}{5} \quad (1)$$

Ainda segundo Cresce (2003), placas são consideradas espessas para a seguinte proporção de esbeltez:

$$\frac{1}{5} < \frac{t}{b} \quad (2)$$

Segundo Timoshenko e Woinowsky-Krieger (1959), o estudo de placas planas pode ser classificado em três grupos, sendo eles:

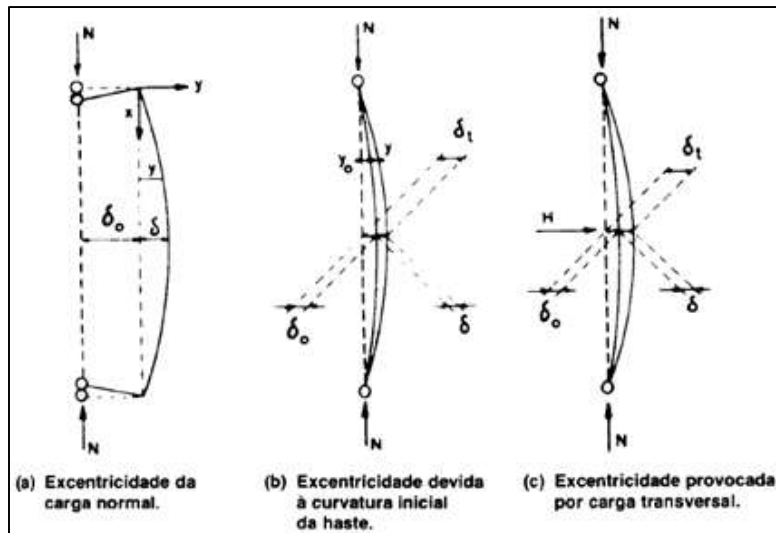
- Placas esbeltas com pequenas deformações: são aquelas em que as deformações apresentadas são relativamente pequenas se comparadas com a espessura a placa. Nesse caso, os efeitos do cisalhamento são desconsiderados, pois os valores são de carácter insignificantes se comparados com as deformações por flexão.
- Placas esbeltas com grandes deformações: são aquelas cuja resistência a flexão tendem a zero, sendo assim, é dito que seu comportamento é de uma membrana. Dessa forma, as cargas são resistidas pela rigidez à flexão e pela ação da membrana da placa. Tal afirmação deixa de ser válida para zonas com bordas estreitas onde a flexão pode ocorrer devido às condições de contorno impostas à placa.
- Placas espessas: são aquelas que apresentam espessura considerável em comparação com as demais dimensões. Nesse caso, deve-se considerar os efeitos das deformações de cisalhamento pois as mesmas tendem a apresentar a mesma ordem de grandeza das deformações por flexão.

2.2 Flambagem de Placas

De acordo com Hibbeler (2010), flambagem pode ser definida como a deflexão lateral ocasionada por uma força axial de compressão em elementos compridos e esbeltos. Onde, a carga crítica \bar{N}_{cr} define a carga axial máxima que um dado elemento esbelto pode suportar quando está no limite da flambagem. Portanto, qualquer carga adicional provocará flambagem, ocasionando deflexão lateral.

De maneira geral, de acordo com Pfeil e Pfeil (1994), existem três casos em que o esforço normal N atua como uma excentricidade inicial (δ_0), conforme ilustra a Figura 3.

Figura 3 - Casos de Flambagem por Flexão



Fonte: Adaptado de Pfeil e Pfeil (1994).

A Figura 3 apresenta a relação *carga x deslocamento* para um elemento esbelto carregado uniaxialmente considerando um material isotrópico e homogêneo. Assim, irá surgir um deslocamento transversal no elemento caso a aplicação de um carregamento axial compressivo N atinja determinado valor crítico.

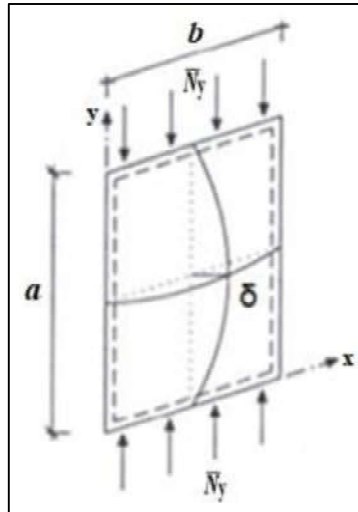
Porém, o fenômeno da flambagem em placas é diferente do comportamento de um elemento unidimensional como uma barra ou coluna. Isso ocorre devido ao fato de que placas possuem características bidimensionais, podendo ser capazes de suportar tensões acima da crítica (MELO, 2017). Além disso, uma das causas mais comuns desse fenômeno está relacionado à redistribuição de tensões que ocorre devido às condições de contorno no plano das bordas carregadas da placa (CHAJES, 1974).

Dessa forma, diferente de como acontece em barras ou colunas em que a carga crítica é exatamente a carga da falha, as placas apresentam resistência pós-flambagem devido a mudança de distribuição original das tensões. Esta mudança desenvolve um campo de tensão após a flambagem ter ocorrido, chamado efeito membrana transversal, possibilitando um aumento na capacidade de carga suportado (AKESSON, 2007).

A Figura 4 apresenta simplificada o fenômeno presente no efeito pós-flambagem onde, as linhas transversais tracionadas, tendem a estabilizar a flambagem das

linhas longitudinais, levando a um enrijecimento do conjunto estrutural conforme o carregamento aumenta, superando o valor crítico de flambagem (MELO, 2017).

Figura 4 - Caso Simplificado: Placa Pós-Flambagem



Fonte: Adaptado de Melo (2017).

2.2.1 Principais Teorias sobre Flambagem em Placas

O objetivo do presente tópico consiste em apresentar brevemente algumas das principais teorias envolvendo o estudo de flambagem em placas e suas aplicações.

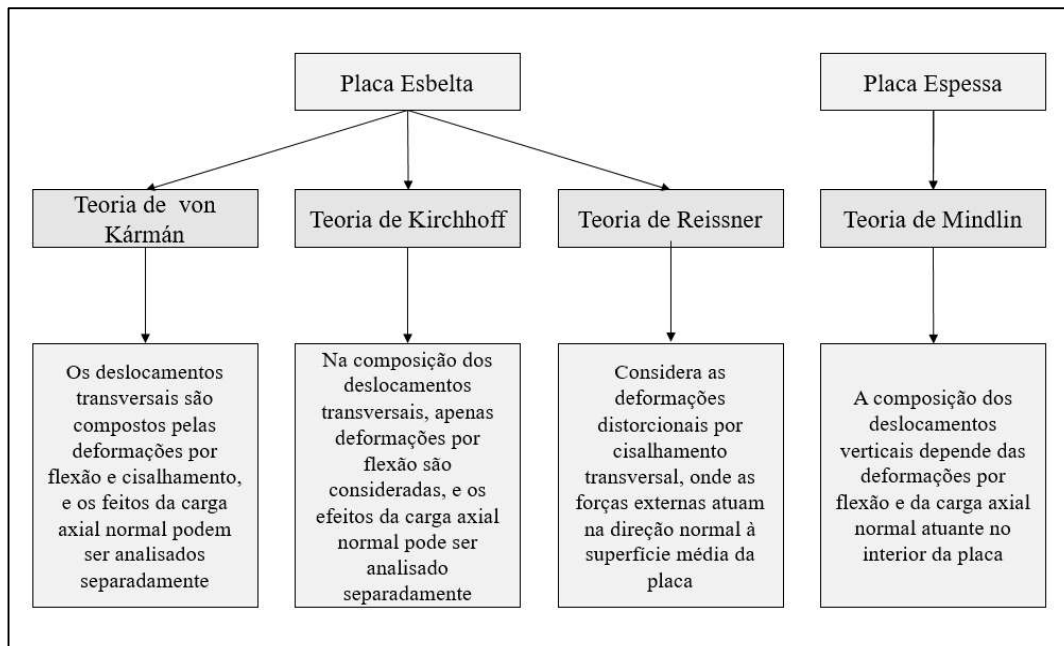
Conforme Bernardino (2016), existem três principais teorias que definem o comportamento estrutural de placas, sendo elas: Teoria de Kirchhoff, Teoria de Mindlin e Teoria de von Kármán. Além disso, a Teoria de Reissner é uma das teorias utilizadas em conjunto com a Teoria de Mindlin pelo elemento SHELL281 do software ANSYS®. Portanto, cada teoria será brevemente apresentada:

- Teoria de Kirchhoff: ou também chamada Teoria Clássica, possui como característica o cálculo dos deslocamentos e rotações em função do deslocamento transversal, interpretada por uma equação biarmônica (SOARES JUNIOR, 2015). A teoria é aplicável de acordo com as seguintes hipóteses: pequenos deslocamentos, superfície média indeformável, a tensão normal na direção z pode ser desprezada, material homogêneo isotrópico e linear desprezando os efeitos da deformação por cortante (BERNARDINO, 2016).

- Teoria de Mindlin: modifica a Teoria de Kirchhoff considerando que as linhas normais ao plano da placa não permanecem ortogonais após sua deformação pois, é considerada a influência das deformações de cisalhamentos transversais (CARVALHO, 2016). Apresenta as seguintes hipóteses: o plano médio da placa permanece indeformável após a flexão; seções planas normais ao plano médio da placa permanecem planas após a flexão, mas não necessariamente normais ao plano médio; tensão normal no plano médio z pode ser desprezada (BERNARDINO, 2016).
- Teoria de von Kármán: considera que a composição dos deslocamentos verticais depende das deformações por flexão e da carga axial normal atuante no interior da placa, sendo assim, o material da placa passa a ser não linear geométrico. Principais hipóteses: deformação no plano médio da placa após flexão, seções planas normais ao plano médio da placa permanecem planas e normais ao plano médio após a flexão e, a tensão normal no plano z pode ser desprezada (BERNARDINO, 2016).
- Teoria de Reissner: leva em conta a parcela de energia devido às deformações distorcionais, as quais juntamente com a parcela decorrente da flexão, resultam na energia total da placa (MAIA, 2013). Principais hipóteses: a placa é constituída de material elástico linear homogêneo, a espessura da placa é pequena quando comparada com as outras duas dimensões no plano da placa, as componentes tangenciais da tensão são nulas nas faces da placa (SILVA, 1996).

A Figura 5 ilustra de maneira resumida quais das principais teorias são adequadas para cada tipo de elemento estudado. Vale ressaltar que o objetivo do presente tópico não consiste em aprofundar-se nas diversas teorias existentes, mas sintetizar as principais teorias afim de proporcionar um breve conhecimento acerca de cada uma delas.

Figura 5- Principais Teorias no Estudo de Placas



Fonte: Elaboração Própria.

Para o presente trabalho, onde será avaliado o comportamento de flambagem em placas perfuradas com carregamento biaxial, adota-se um elemento homogêneo, isotrópico e de comportamento linear elástico desprezando os feitos das deformações por cisalhamento. Entretanto, a análise será realizada puramente a partir de software de simulação, valendo-se do MEF, que será discutido no decorrer do trabalho.

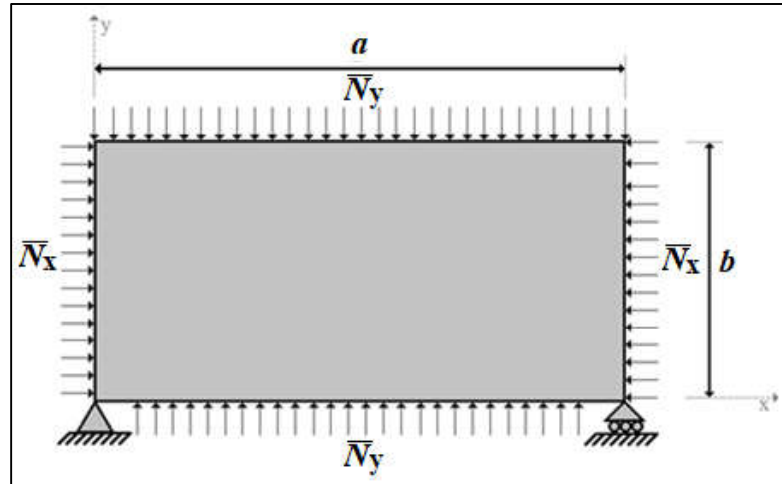
2.2.2 Flambagem Biaxial de Placas

Elementos estruturais como chapas finas de aço são elementos comumente presentes em diversos setores da engenharia, como indústria civil, aeronáutica e, principalmente, naval e *offshore*. Sendo assim, são elementos que geralmente são expostos a solicitações biaxiais de cargas no seu plano. Mesmo se esta for submetida a carregamentos uniaxiais compressivos, a placa pode apresentar estado de tensão biaxial devido às interações dos carregamentos axiais e das forças reativas de contorno (SOO KIM, 1995, apud DA SILVEIRA, 2016, p. 20).

Em situações de solicitações biaxiais, como compressão-compressão ou tração-compressão, as cargas tendem a tornar o elemento propenso à instabilidade, podendo ocasionar flambagem. Para placas finas, tende a ocorrer flambagem elástica, enquanto

para placas mais espessas, ocorre a chamada flambagem inelástica ou elasto-plástica (EL-SAWY; MARTINI, 2007).

Figura 6 - Caso Simplificado de Compressão Biaxial em uma Placa



Fonte: Elaboração Própria.

Ainda segundo El-Sawy e Martini (2007), a tensão crítica de flambagem ($\sigma_{x,cr}$) para uma placa sólida de geometria retangular, de dimensão lateral a na direção x e dimensão lateral b na direção y , espessura t , submetida a tensões biaxiais compressivas (σ_x na direção x e σ_y na direção y), simplesmente apoiada na direção fora do plano lateral conforme ilustrado pela Figura 6, pode ser escrita como:

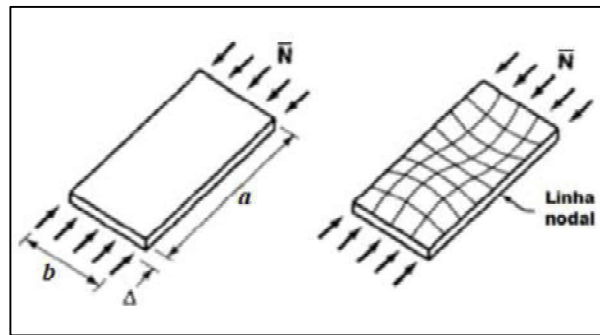
$$\sigma_{x,cr} = k \frac{\pi^2 E}{12(1 - \nu^2)} \left(\frac{t}{a}\right)^2 \quad (3)$$

Onde, k é o coeficiente adimensional de flambagem da placa e depende da carga aplicada ou da taxa de tensão $\xi = \sigma_y/\sigma_x$, e da proporção da placa $\beta = b/a$, E e ν são o módulo de Young ou de Elasticidade e, coeficiente de Poisson do material da placa, respectivamente. Assim, o coeficiente de flambagem pode ser expresso da seguinte maneira:

$$k = \left(\frac{m^2}{\beta^2} + n^2\right)^2 \left(\frac{m^2}{\beta^2} + \xi n^2\right)^{-1} \quad (4)$$

Onde, m e n correspondem aos números de meias-ondas que ocorrem nas direções x e y da placa em flambagem, respectivamente. Conforme Jones (2006) a deformação transversal de uma estrutura delgada apresenta meias-ondas senoidais na direção do carregamento no momento da flambagem, conforme ilustra a Figura 7.

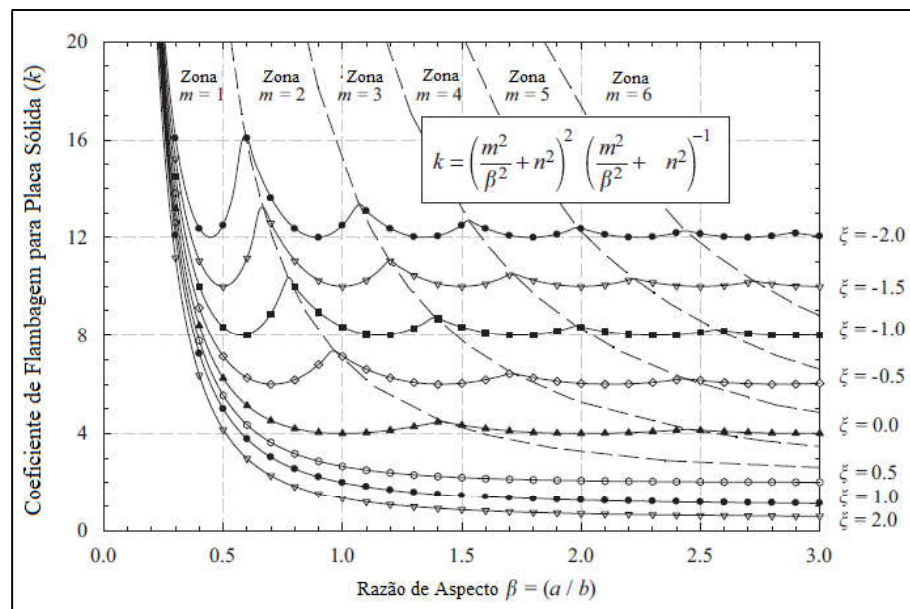
Figura 7 - Exemplo de Meias-Ondas Senoidais em Flambagem



Fonte: Adaptado de Jones (2006).

A equação do coeficiente de flambagem é baseada em valores pré-definidos para m e n , onde, o número de meias-ondas m e n devem ser escolhidos para fornecer a menor tensão crítica de flambagem elástica, $\sigma_{x,cr}$. Assim, a Figura 8 apresenta o efeito da proporção da placa retangular (b/a) no coeficiente de flambagem k .

Figura 8 - Efeito da Proporção da Placa no Coeficiente de Flambagem



Fonte: Adaptado de El-Sawy e Martini (2007).

Entretanto, embora existam diversas aproximações para soluções analíticas de flambagem biaxial em placas, para placas com perfurações a análise de tensões em torno das perfurações é bastante complexa e difícil de ser estudada. Dessa forma, diversos autores acabam utilizando o Método dos Elementos Finitos para obtenção dos valores da carga crítica devido a sua precisão e confiabilidade de resultados apresentados.

O presente trabalho avaliará a ação da flambagem elástica em placas finas retangulares com perfuração retangular e centralizada, submetidas à carregamento biaxial utilizando o MEF através da aplicação do software ANSYS® e, portanto, não fará uso de soluções analíticas.

2.3 Elementos Finitos e Aplicação à Placas

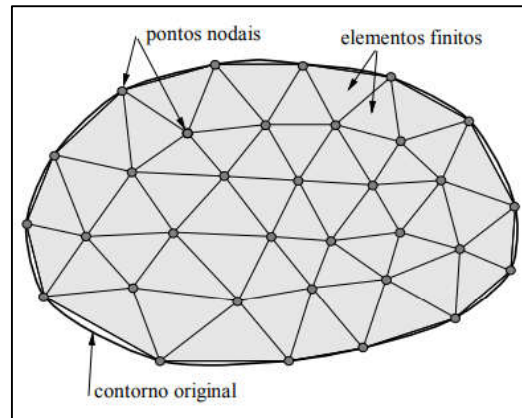
Embora diversos pesquisadores tenham desenvolvido métodos aproximados para estudar o comportamento de flambagem em placas finas e sólidas, a análise desses elementos é bastante complexa, especialmente quando há a presença de perfurações (SHANMUGAM; TAN, 1999).

Conforme Da Silva *et al.* (2018), o comportamento mecânico de placas isotrópicas e perfuradas, quando submetidas ao fenômeno de flambagem elástica ou inelástica, deve ser representado por um sistema de equações diferenciais parciais que, através de um método de discretização poderão ser resolvidas numericamente. Uma das maneiras de solucionar problemas através de um método de discretização, consiste na aplicação de softwares de análise numérica de estruturas onde, no âmbito da engenharia, o Método dos Elementos Finitos (MEF) surge como um dos mais empregados para este tipo de problema.

No geral, a aplicação do MEF consiste em determinar o estado de tensão e de deformação de um sólido de geometria arbitrária sujeito a solicitações exteriores, surgindo com ampla aplicação em estudo de edifícios, pontes, estruturas navais e *offshore*, entre outros diversos setores da engenharia (AZEVEDO, 2003).

De acordo com Souza (2003), a ideia principal do MEF consiste em dividir o domínio (meio contínuo) do problema em sub-regiões de geometrias simples, conforme ilustra a Figura 9. O comportamento de cada elemento é arbitrado de forma aproximada com a condição que a malha formada pelos elementos se comporte de forma semelhante ao contínuo original, considerando as forças nodais de interação entre esses elementos e mantendo as propriedades do meio original (TROINA *et al.*, 2015).

Figura 9 - MEF: Divisão do Domínio em Sub-Regiões



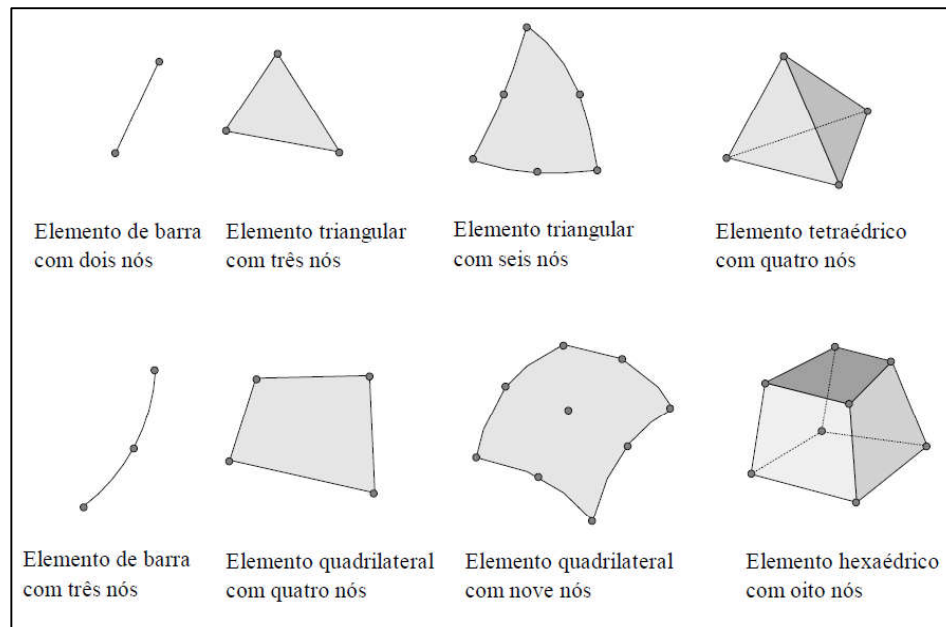
Fonte: Adaptado de Souza (2003).

O nome “elementos finitos” origina-se devido ao fato de as sub-regiões apresentarem dimensões finitas, em contraste com os elementos infinitesimais utilizados no cálculo diferencial integral (SOUZA, 2003). No MEF, a aproximação é definida mediante a interpolação desses elementos infinitesimais, onde cada elemento é definido por uma equação diferencial. Assim, as interpolações locais em cada elemento possuem validade apenas nesse subdomínio (BARROS, 2002).

Segundo Torii (2012), tratando-se de um método aproximado, as soluções obtidas pelo MEF quase sempre apresentam erros de discretização em relação à solução exata do problema, porém, estes erros podem ser reduzidos diminuindo-se o tamanho dos elementos finitos e/ou distribuindo os graus de liberdade pelo domínio de uma forma mais adequada, o que implica em um maior esforço computacional.

Conforme Souza (2003), a precisão do método depende da quantidade de nós e elementos e, do tamanho e tipos dos elementos presentes na malha. A Figura 10 ilustra algumas das principais geometrias de elementos finitos utilizados, variando em função da complexidade do problema.

Figura 10 - Principais Geometrias de Elementos Finitos

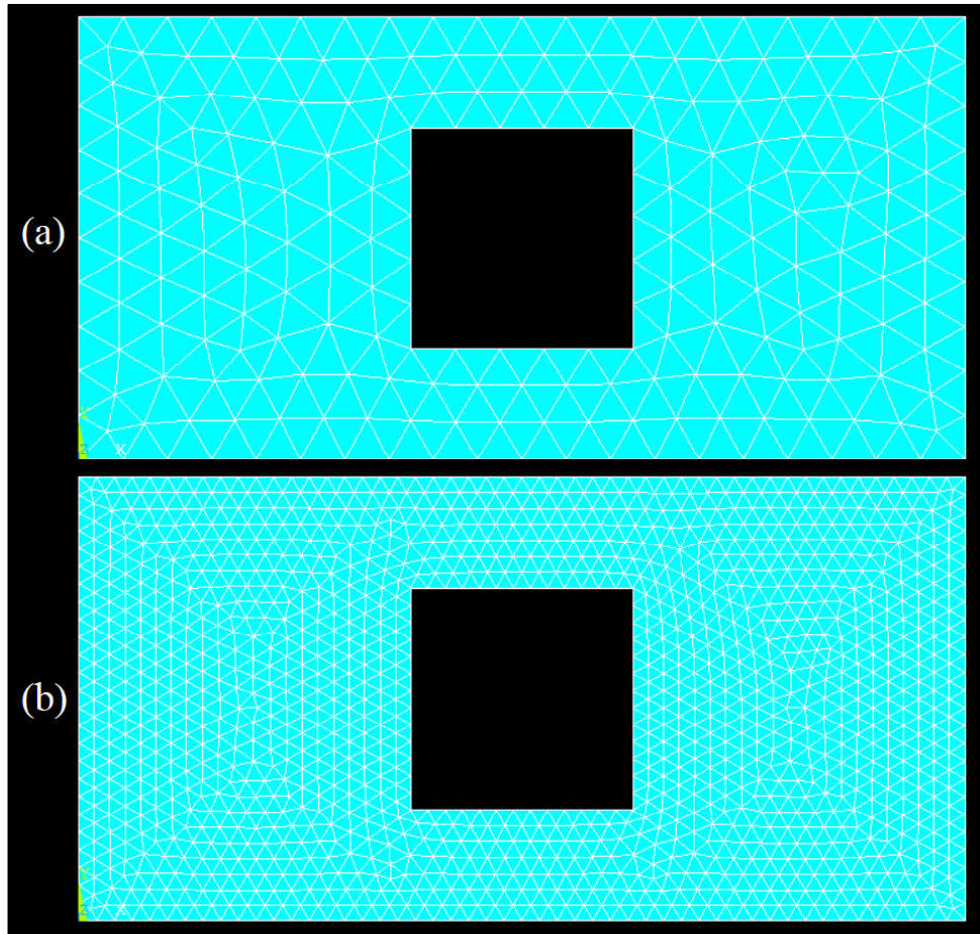


Fonte: Adaptado de Souza (2013).

Sendo assim, quanto maior o número de elementos em uma determinada malha e menor forem o tamanho destes elementos, mais próximo o problema estará de sua solução exata, expressando resultados mais precisos. A análise da influência da variação do tamanho dos elementos finitos que subdividem o meio contínuo, é definida como refinamento de malha, esta prática geralmente é utilizada com o intuito de reduzir o esforço computacional através da aproximação dos resultados obtidos. Como exemplo, a Figura 11 ilustra o refinamento de malha no entorno do corte, onde há concentração de tensões e observa-se a redução do tamanho dos elementos que compõe a estrutura.

Figura 11 - Exemplo de Refinamento de Malha

(a) Elemento de tamanho 100 mm. (b) Elemento de tamanho 40 mm.



Fonte: Elaboração Própria.

No estudo de flambagem de placas, diversos autores como Sabir e Chow (1986), El-Sawy, Nasmy e Martini (2004), Moen e Schafer (2009) e estudos mais recentes como Da Silva *et al.* (2018), fazem uso do MEF para avaliar o comportamento apresentado por placas perfuradas submetidas a flambagem uniaxial.

Em sua obra, Baptista *et al.* (2015), realiza uma análise não-linear da flambagem utilizando o método dos elementos finitos para placas com perfurações circulares e centralizadas através da modelagem computacional com auxílio do software ANSYS®. Através desse método, os autores obtiveram a carga última para as placas estudadas, analisando a influência do tamanho do furo, da esbeltez da placa e do comprimento variável na capacidade de carga das placas, ficando evidente a diminuição da carga máxima suportada pela placa devido a inserção do furo.

Para analisar o comportamento em flambagem elástica de uma placa fina quadrada com perfuração quadrada centralizada, Jayashankarbabu e Karisiddappa (2014) fazem uso do software comercial ANSYS®, utilizando o elemento de casca SHELL93, cuja verificação é realizada através da análise comparativa entre os resultados de Timoshenko e Gere (1963) e Yettram e Brown (1986).

Além de Baptista *et al.* (2015), alguns outros autores como Jameel *et al.* (2012), Helbig *et al.* (2013), Folzke *et al.* (2016), Da Silveira *et al.* (2017) e Lima *et al.* (2018) utilizam o software ANSYS® para analisar o comportamento em flambagem de placas finas com perfurações centralizadas, apresentando resultados positivos conforme análise dos autores.

Na modelagem de elementos finitos, uma solução mais precisa está diretamente associada à densidade da malha utilizada, ou seja, quanto mais fina a malha utilizada, maior será o tempo necessário para solucioná-la e, conseqüentemente, maior será o esforço computacional (HASSAN; KURGAN, 2019)

Portanto, uma maneira de obter uma malha que equilibre satisfatoriamente a precisão e os recursos computacionais, consiste em executar o estudo de convergência de malha, no qual, verifica-se a proximidade dos resultados das malhas estudadas.

Além disso, para averiguar os resultados apresentados pelo software de simulação e avaliar sua correta utilização, deve ser realizada a verificação ou a validação do modelo computacional, levando em conta as dimensões e propriedades mecânicas do material utilizados pelo autor de referência.

2.3.1 Software ANSYS®

Amplamente utilizado na engenharia em pesquisas relacionadas a diversas áreas como transferência de calor e análise estrutural, o programa computacional ANSYS® é um software comercial que se baseia na aplicação do MEF buscando solucionar os mais diversos problemas presentes na engenharia.

Conforme Castro (2017), a vantagem na utilização de softwares desse tipo, é que as soluções numéricas possuem equações com grau de complexidade reduzido, uma vez que um elemento de área é discretizado em elementos de reta com soluções nodais. Dessa forma, o MEF acaba sendo empregado no desenvolvimento de diversos softwares de análise estrutural, uma vez que, viabiliza análises complexas que dificilmente seriam resolvidas analiticamente.

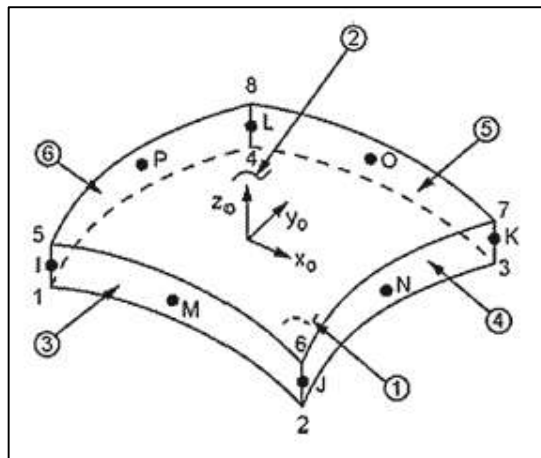
Conforme Helbig (2016), o software ANSYS® utiliza o MEF de deslocamentos baseado no ponto de vista Lagrangiano, isto é, é realizada uma análise de cada ponto material como uma função do tempo e de suas coordenadas e, as equações de equilíbrio são obtidas a partir do princípio dos trabalhos virtuais. Ao final, os resultados obtidos são primeiramente para os deslocamentos nodais e após, são obtidas as derivadas desses valores, que equivalem as soluções desses elementos, como deformações e tensões, por exemplo.

Para situações de flambagem elástica, tema abordado pelo presente estudo, o ANSYS® utiliza autovalores como método de análise, no qual, consiste em descobrir um autovalor que representa um fator de carga correspondente à carga crítica de flambagem, e os autovetores que são os modos obtidos. Esta abordagem, corresponde à formulação clássica de Euler para a análise da flambagem elástica (ANSYS USERS MANUAL, 2005, apud HELBIG, 2016, p. 115).

2.3.2. Modelo Computacional

A análise numérica da carga crítica em flambagem elástica de placas delgadas, será realizada utilizando o elemento SHELL281, sendo este um dos elementos mais apropriados para analisar estruturas finas a moderadamente espessas. Conforme descrito por Da Fonseca (2015), o elemento possui oito nós com seis graus de liberdade em cada nó: translação nos eixos x , y , e z , e rotações sobre os eixos x , y e z . A Figura 12 apresenta o elemento SHELL281.

Figura 12 - Descrição do Elemento SHELL281



Fonte: Adaptado de ANSYS (2015).

O procedimento numérico adotado para o cálculo da carga crítica em flambagem elástica é baseado em uma análise de autovalores e autovetores, obtidos através da solução de equações algébricas homogêneas. Os autovalores e autovetores de menor valor correspondem, respectivamente, à carga crítica de flambagem e ao modo de deformação elástico da estrutura (MADENCI E GUVEM, 2006, apud HELBIG, 2016, p. 117).

Conforme Rackow *et al.* (2015), a matriz de rigidez $[K]$ é obtida através da soma da matriz de rigidez convencional para pequenas deformações $[K_E]$ com a matriz de rigidez geométrica $[K_G]$, dependente da geometria e do esforço interno existente no início do carregamento $\{P_0\}$. Sendo assim, a matriz de rigidez total de uma placa para um dado carregamento $\{P_0\}$ é apresentada como:

$$[K] = [K_E] + [K_G] \quad (5)$$

Para o caso em que o carregamento atinja um dado carregamento com nível de $\{P\} = \lambda\{P_0\}$, onde λ é um escalar, a matriz rigidez pode ser escrita da seguinte maneira:

$$[K] = [K_E] + \lambda[K_G] \quad (6)$$

Portanto, as equações de equilíbrio governantes para o comportamento da placa podem ser escritas como:

$$[[K_E] + \lambda[K_G]]\{U\} = \lambda\{P_0\} \quad (7)$$

Onde $\{U\}$ é o vetor de deslocamento total, podendo ser determinado por:

$$\{U\} = [[K_E] + \lambda[K_G]]^{-1}\lambda\{P_0\} \quad (8)$$

Ainda de acordo com Rackow *et al.* (2015), sob flambagem, a placa apresenta um elevado crescimento nos seus deslocamentos sem aumento de carga. Sendo assim, por definição matemática, é possível determinar a matriz inversa como a matriz adjunta dividida pelo determinante dos coeficientes onde, é possível notar que os deslocamentos $\{U\}$ tendem ao infinito quando:

$$\det[[K_E] + \lambda[K_G]] = 0 \quad (9)$$

Onde, \det é uma função determinante. Portanto, a solução da Equação 10 gera um menor autovalor, correspondente a carga crítica em que ocorre a flambagem.

$$\{\bar{N}_{cr}\} = \lambda_1\{P_0\} \quad (10)$$

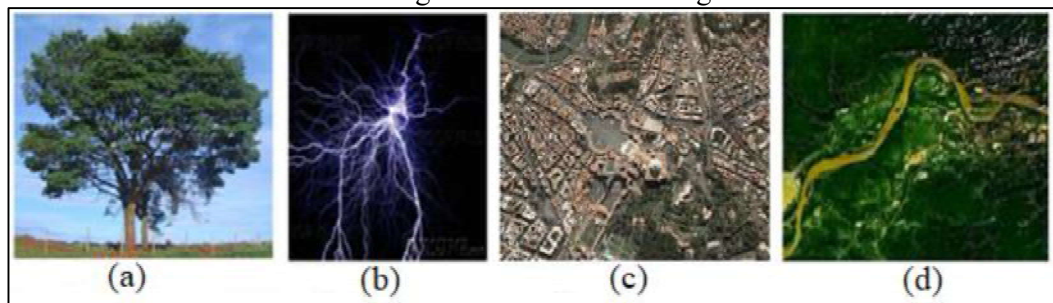
Onde, $\{\bar{N}_{cr}\}$ é a carga crítica de flambagem, ou seja, a carga limite onde inicia o fenômeno de instabilidade da flambagem e, λ_1 é o menor autovalor gerado. O vetor de deslocamento associado $\{U\}$, define a forma do modo de flambagem. Segundo ANSYS User's Manual (2005), citado por Da Silveira (2016), o problema de autovalor é resolvido usando o método de Lanczos, sendo este, um dos métodos mais utilizados.

2.4 Método do Design Construtal

Enunciada por Bejan em 1996, a Teoria Construtal relaciona o design das estruturas naturais, animadas e inanimadas, com um princípio físico que o governa (BARRETO, 2015). Trata-se de um princípio utilizado para explicar semelhança entre a forma que a natureza tende a desenvolver seu fluxo natural, como por exemplo, bacias hidrográficas, fluxos dos pulmões, ramificações de árvores, entre outros (BEJAN; LORENTE, 2008). A Figura 13 ilustra alguns dos padrões que se repetem na natureza, demonstrando a evolução de design que ocorre para prover um fluxo de maneira mais fácil e eficiente.

Figura 13 - Sistemas de Escoamento

- (a) Escoamento de água através da árvore. (b) Descarga Elétrica em uma tempestade. (c) Trânsito de Automóveis e Pessoas em uma cidade. (d) Escoamento de Água de uma bacia hidrográfica.



Fonte: Adaptado de Pepe (2018).

Inicialmente proposta por Bejan e Sciubba (1992) no estudo de um trocador de calor interno que permitisse a máxima densidade de transferência de calor, a Teoria Construtal mais tarde voltou a ser aplicada na busca da solução de problemas de resfriamento de circuitos eletrônicos e otimização da transferência de calor por convecção. Os estudos realizados por Bejan impulsionaram não apenas no design de problemas de engenharia, mas também de outras áreas como ciências humanas, por exemplo (BECKEL, 2016).

Segundo Barreto (2015), a Teoria Construtal aplica-se em todo e qualquer tipo de sistema de fluxo, abrangendo as mais diferentes áreas, desde a engenharia, sistemas biológicos, sistemas sociais e econômicos, onde o fluxo tende a desenvolver-se de maneira a melhor distribuir as suas imperfeições.

A Teoria Construtal baseia-se na indicação da direção na evolução do tempo, refletindo sobre o fato de que o design da natureza é dinâmico e em constante evolução (BEJAN, 2015, apud MIECOANSKI, 2018, p. 45). Em razão disso, apresenta abrangência em diversas áreas da ciência, podendo ser empregada desde estudos biológicos até projetos de engenharia.

Conforme Beckel (2016), a evolução dos sistemas que escoam não possui uma intenção definida, uma vez que cada sistema é único e, portanto, eles evoluem porque são dirigidos pela Lei Construtal. A aplicação da Lei Construtal em áreas como engenharia, é denominada Método do Design Construtal, através do qual pode-se determinar as melhores condições de geometria, estratégias e uma melhor organização de movimentação de informações (LIMA *et al.*, 2016).

Segundo Altê *et al.* (2015), para a aplicação do Design Construtal como técnica de otimização geométrica em um sistema físico, são necessários: definição de uma grandeza a ser melhorada (parâmetro de performance); um ou mais graus de liberdade, que são parâmetros variáveis durante o processo; e restrições geométricas, ou seja, parâmetros que devem ser mantidos durante o processo de otimização.

A aplicação do Método do Design Construtal (DC) é válida para diversas áreas de estudo, indo desde sistemas genéticos e biológicos até aplicações em engenharia como problemas voltados à transferência de calor. Dessas diversas abordagens, entre elas, estão a mecânica dos sólidos e análise de tensões para aplicações na engenharia naval e *offshore*, no qual, pode ser aplicado para a determinação geométrica e dimensional dos componentes estruturais de navios e plataformas (DA SILVEIRA, 2016).

O uso do DC relacionado ao desempenho mecânico de placas metálicas contendo perfurações é abordado por autores como Helbig *et al.* (2015) e Da Silveira *et al.* (2017), por exemplo, onde os autores indicam que a aplicação do método contribui positivamente nos resultados. Onde, a aplicação do Design Construtal é utilizada para a obtenção da geometria otimizada das perfurações, de tal modo que estes componentes apresentem um melhor comportamento mecânico.

Em seu trabalho, Folzke *et al.* (2016) utiliza o DC aplicado à flambagem elástica de placas finas de aço, onde a carga crítica de flambagem é a função objetivo, ou seja, a grandeza a ser otimizada; as restrições geométricas são as dimensões da placa e a fração volumétrica \emptyset ; e como graus de liberdade, a relação das características de cada dimensão da perfuração.

O presente trabalho utilizará o Design Construtal no estudo de placas finas de seção retangular com furos retangulares e centralizados. As perfurações das placas serão variáveis através do grau de liberdade b_0/a_0 enquanto os parâmetros geométricos da placa (a e b) e a fração volumétrica do furo serão restrições não variáveis. Além disso, será utilizada a Técnica da Busca Exaustiva, sendo esta, uma técnica de busca sistêmica que analisa possíveis soluções geradas sucessivamente até encontrar uma solução admissível ou, até atingir um número máximo de tentativas.

3 METODOLOGIA

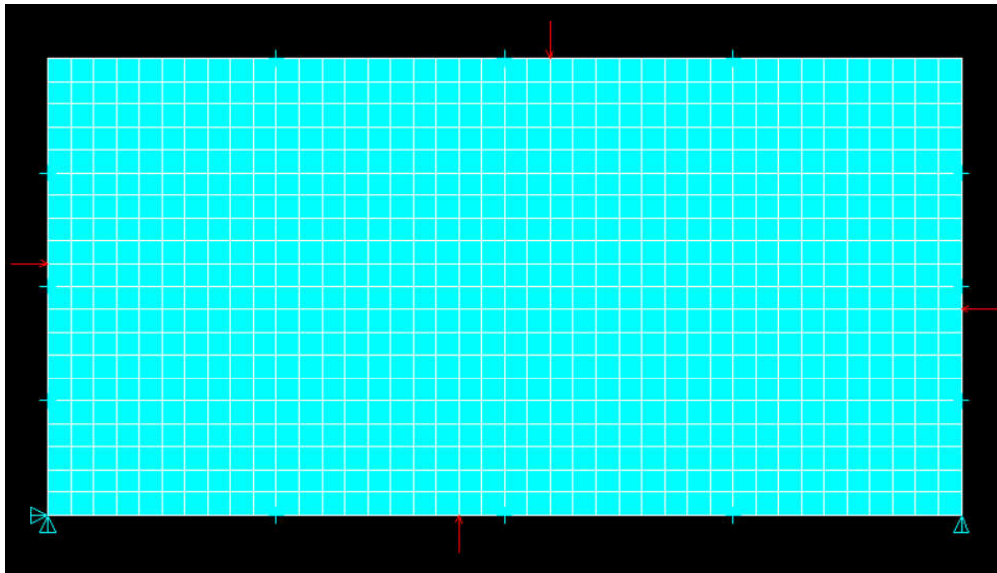
A metodologia utilizada para o presente trabalho apresenta, como objetivo principal, o estudo do comportamento de flambagem elástica em placas finas perfuradas de aço, submetidas a compressão biaxial. Soluções analíticas para placas finas em flambagem biaxial são encontradas na literatura, entretanto, para placas perfuradas o estudo apresenta elevada dificuldade, tornando-se mais viável a utilização da modelagem computacional para a solução destes problemas de engenharia. Portanto, o presente estudo utiliza o software ANSYS®, que se baseia no MEF. Para determinação dos parâmetros ótimos das perfurações, foi aplicado o método do Design Construtal associado à técnica da Busca Exaustiva, buscando o melhor desempenho mecânico.

Ao longo desta seção serão apresentados detalhadamente os procedimentos adotados para desenvolvimento do trabalho.

3.1 Verificação do Modelo Computacional para a Placa sem Perfurações

No presente trabalho, a verificação do modelo computacional para a resolução do problema da flambagem elástica de uma placa esbelta, irá utilizar como referência os resultados obtidos por Piscopo (2010) através do software ANSYS® utilizando o elemento SHELL181, os quais foram verificados através da comparação com os resultados alcançados por meio de soluções analíticas. A análise foi realizada para placas de geometria retangular e quadrada onde, de maneira análoga ao autor, foi testada a malha ideal para o prosseguimento das análises.

Figura 14 - Modelo de análise de placa sólida



Fonte: Elaboração própria.

A Figura 14 ilustra a maneira como é realizada a análise do comportamento de uma placa fina de aço e sem perfurações, simplesmente apoiada nas bordas ($U_z = 0$), submetida a cargas distribuídas compressivas nas quatro bordas considerando o fenômeno da flambagem biaxial, utilizando o elemento SHELL281. As geometrias utilizadas, bem como as propriedades do material, estão indicadas na Tabela 1.

Tabela 1 - Dados para Convergência de Malha

Dados	Placa Quadrada	Placa Retangular
a (m)	1000	1000
b (m)	1000	500
t (mm)	10	10
E (GPa)	206	206
ν	0,3	0,3

Fonte: Elaboração Própria.

Para análise da convergência dos valores analisados, será utilizado o cálculo da diferença percentual, descrito como:

$$Diferença (\%) = 100x \frac{(\bar{N}_{Cr(i-1)} - \bar{N}_{Cr(i)})}{\bar{N}_{Cr(i)}} \quad (11)$$

Onde, $\bar{N}_{Cr(i)}$ é o valor da carga crítica de flambagem obtido através da malha mais refinada na última análise e, $\bar{N}_{Cr(i-1)}$ é o resultado da carga crítica de flambagem obtido com a malhas menos refinada utilizada em uma análise anterior.

3.2 Verificação do Modelo Computacional para Placa Perfurada

Semelhante ao método adotado para verificação do modelo para uma placa não perfurada, o presente tópico apresenta uma verificação levando em conta a existência de uma perfuração quadrada centralizada, utilizando como referência os resultados obtidos por Jayashankarbabu e Karisiddappa (2014).

, analisa uma placa simplesmente apoiada, apresentando dimensões de 1000 mm x 1000 mm x 10 mm (a , b e t , respectivamente), onde, a razão geométrica ($\eta = b_0/a$) entre a placa e a perfuração varia entre 0,1 e 0,4, mantendo fixa a dimensão da placa. Além disso, considera-se o Módulo de Young como $E = 210,924$ GPa e o Coeficiente de Poisson $\nu = 0.3$.

Portanto, para análise da convergência da malha, a Eq. (11) será aplicada, sendo possível verificar o modelo computacional e avaliar o correto uso do modelo computacional.

3.3 Método do Design Construtal

Para a aplicação do Design Construtal, será utilizada a fração volumétrica, que relaciona o volume total da placa (V) e o volume da perfuração (V_0). Dessa forma, a porção volumétrica do furo em relação à placa é mantida constante e apenas a geometria é alterada.

A fração volumétrica de uma placa retangular com perfuração retangular, pode ser escrita como:

$$\emptyset = \frac{V_0}{V} = \frac{b_0 a_0 t}{bat} = \frac{b_0 a_0}{ba} \quad (12)$$

Com a finalidade de evitar o efeito das bordas, determina-se que a borda do furo retangular deve estar suficientemente distante das extremidades da placa, sendo assim, a distância entre eles deve ser de pelo menos 100 mm, ou seja:

$$\begin{aligned} b - b_0 &\geq 200 \text{ mm} \\ a - a_0 &\geq 200 \text{ mm} \end{aligned} \tag{13}$$

A restrição imposta pela Eq. (13) é adotada para a análise tanto para a placa de geometria quadrada, quanto para a placa retangular. Além disso, a inserção do furo retangular, bem como a variação da sua geometria, serão realizadas respeitando diferentes frações de volume para o furo quadrado ($\phi = 0,10; 0,15; 0,20$), no qual, as dimensões b e a da placa, correspondentes a largura e ao comprimento, respectivamente, serão inalteradas e apenas as dimensões da perfuração (a_0 e b_0) sofrerão alterações.

Portanto, uma vez que a geometria das placas não será alterada, a variação da fração volumétrica resultará em diferentes configurações para a perfuração quadrada, logo, respeitando a condição imposta pela Eq. (13), a função objetivo será maximizar a carga crítica de flambagem biaxial.

4 RESULTADOS

Nesta seção, estão apresentados os resultados obtidos através das simulações numéricas e suas respectivas análises realizadas para placas finas quadradas e retangulares, com e sem perfurações, para o estado de flambagem elástica sob ação de carregamento biaxial.

4.1 Convergência de Malha: Verificação do Modelo para Placa sem Perfurações

O presente tópico contempla uma placa de geometria quadrada e, outra de geometria retangular, ambas sem perfurações, submetidas à sollicitação compressiva biaxial, conforme apresentado por Piscopo (2010). O estudo, avalia a diferença entre os resultados obtidos a partir do refinamento da malha utilizada durante aplicação do software ANSYS® utilizando o elemento SHELL93.

Para o presente estudo, foi utilizado o modelo SHELL281 utilizando os mesmos parâmetros apresentados por Piscopo (2010), no qual, a Tabela 2 apresenta como resultado inicial, o tempo aproximado de cada simulação. Este, é um fator determinante para escolha do tamanho de elemento que será utilizado para o restante do trabalho.

Tabela 2 - Tempo aproximado de simulação para diferentes tamanhos de elementos

Placa	Malha	Tamanho do Elem. (mm)	Número de Elem.	Tempo Aprox. de Simulação (s)
Quadrada	20 x 20	50	400	10
	40 x 40	25	1600	25
	100 x 100	10	10000	80
	200 x 200	2	40000	150
Retangular	10 x 20	50	100	10
	20 x 40	25	800	25
	50 x 100	10	5000	80
	100 x 200	5	20000	150

Fonte: Elaboração Própria.

A Tabela 3 apresenta a síntese dos resultados, no qual, avalia-se a diferença percentual entre os dados de Piscopo (2010) e o presente estudo.

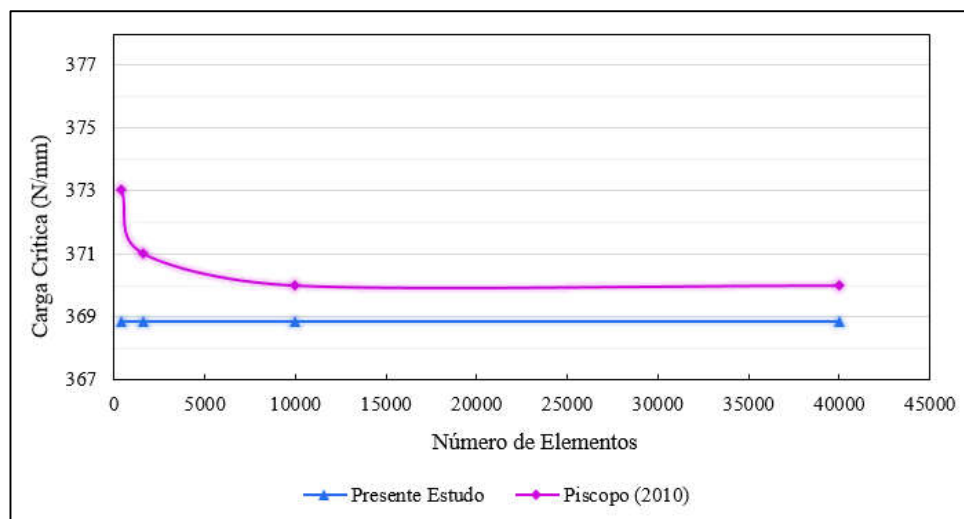
Tabela 3 - Teste de independência de malha para placa sem furos

Placa	Tamanho do Elem. (mm)	Carga Crítica (N/mm)		Diferença (%)
		Presente Estudo	Piscopo (2010)	
Quadrada	50	368,8885	373,00	1,1145
	25	368,8854	371,00	0,5732
	10	368,8841	370,00	0,3025
	2	368,8861	370,00	0,3019
Retangular	50	3135,5022	3356,00	6,5702
	25	3134,8765	3194,00	1,8511
	10	3134,7895	3147,00	0,3880
	5	3134,7879	3138,00	0,1024

Fonte: Elaboração Própria.

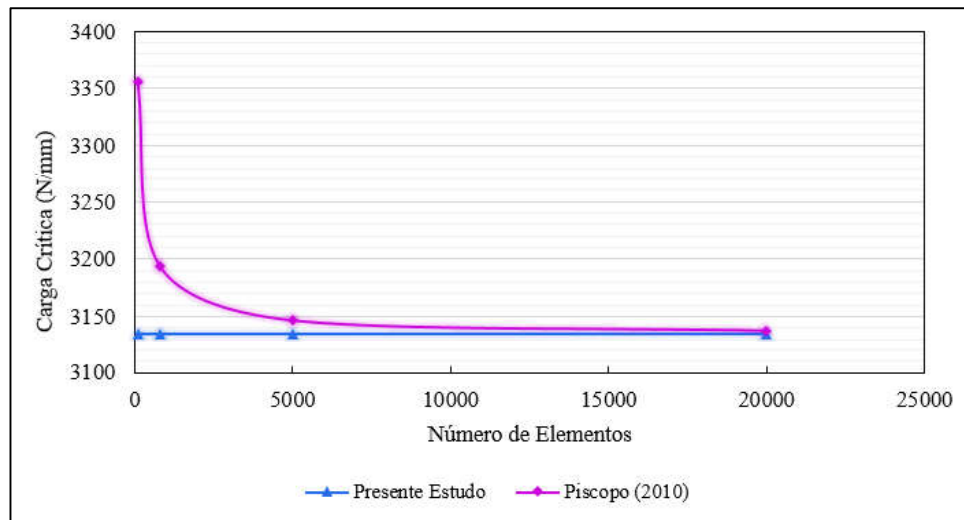
De acordo com os dados apresentados na Tabela 3 geram-se os gráficos comparativos ilustrados pelas Figuras 15 e 16, onde observa-se a pequena diferença percentual entre eles e verifica-se a aproximação dos resultados.

Figura 15 - Comparação das Cargas Críticas para Placa Quadrada



Fonte: Elaboração Própria.

Figura 16 - Comparação das Cargas Críticas para Placa Retangular



Fonte: Elaboração Própria.

Portanto, a partir da análise comparativa entre os resultados, observa-se que a convergência apresenta resultado satisfatório para elementos de tamanho equivalente a 10 mm, sendo este, o elemento escolhido para dar seguimento ao estudo, uma vez que não apresentará uma diferença significativa e reduzirá o esforço computacional se comparado às malhas mais refinadas.

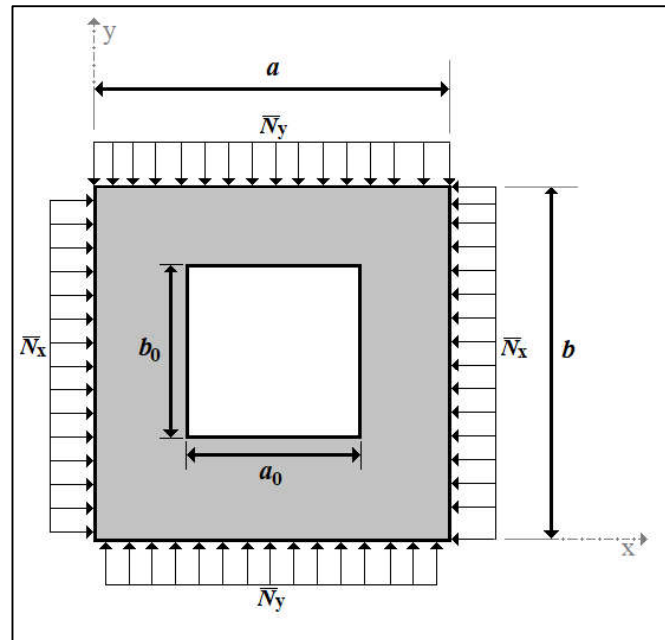
A aproximação dos resultados obtidos através da modelagem com elementos de 10 mm, comparados aos resultados de Piscopo (2010), indicam uma diferença de aproximadamente 0,3025% para placa quadrada e 0,3880% para placa retangular. Dessa forma, a verificação do modelo computacional é válida, demonstrando que o modelo computacional está sendo usado de maneira adequada.

4.2 Resultados de Verificação do Modelo para Placa Perfurada

A verificação do modelo SHELL281 é realizada para o comportamento elástico em flambagem de uma placa fina quadrada, submetida à solicitação compressiva biaxial, possuindo perfuração quadrada e centralizada, conforme utilizada por Jayashankarbabu e Karisiddappa (2014). A placa utilizada como referência tem suas dimensões e propriedades mecânicas conforme descrito no item 3.3 do presente trabalho.

A Figura 17, apresenta o esquema simplificado da placa analisada, conforme apresentado por Jayashankarbabu e Karisiddappa (2014).

Figura 17 - Esquema Simplificado para Placa Perfurada



Fonte: Elaboração Própria.

Além disso, adota-se uma malha com elementos de tamanho 10 mm, uma vez que, apresentam resultados satisfatórios, baixa diferença percentual e reduzido esforço computacional, conforme resultados obtidos e apresentados no item 4.1.

Com isso, a Tabela 4 apresenta o comparativo entre o presente estudo e os resultados apresentados por Jayashankarbabu e Karisiddappa (2014).

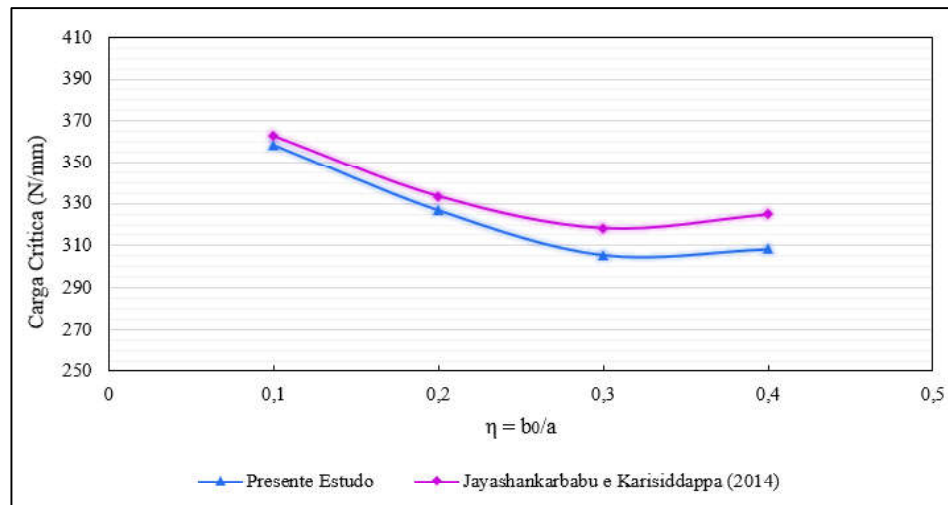
Tabela 4 - Comparativo dos Valores de Carga Crítica

$\eta = b_0/a$	Carga Crítica de Flambagem (N/mm)		Diferença (%)
	Presente Estudo	Jayashankarbabu e Karisiddappa (2014)	
0,1	358,667	363,179	1,24
0,2	326,947	333,535	1,97
0,3	305,561	318,056	3,93
0,4	308,347	324,614	5,01

Fonte: Elaboração Própria.

Conforme apresentado pela Tabela 4, observa-se o aumento gradativo na diferença entre os resultados conforme a razão geométrica η é aumentada. Essa mesma diferença pode ser observada graficamente, conforme Figura 18.

Figura 18 - Comparação das Cargas Críticas para Placa Perfurada



Fonte: Elaboração Própria.

O aumento gradual da diferença para os valores de carga crítica a partir do aumento da razão geométrica η , pode estar relacionado ao efeito da flambagem elasto-plástica, que não será analisado no presente trabalho. Segundo Helbig *et al.* (2013), para placas finas que apresentem pequenas relações entre a largura e o comprimento da perfuração, há o predomínio da flambagem elástica, enquanto que para grandes proporções, o da flambagem elasto-plástica. Isso justifica o aumento da diferença nas cargas críticas obtidas a partir do aumento da razão geométrica η .

4.3 Resultados da Aplicação do Design Construtal à Placas Perfuradas

Na aplicação do Design Construtal, a fração volumétrica do furo em relação à placa é mantida constante enquanto a geometria da perfuração é variada. A Eq. (12) descreve a relação entre o volume do furo (V_0) e o volume total da placa sem a perfuração (V). Para isso, as dimensões da placa são mantidas constantes, variando-se gradativamente o valor de a_0 , no qual, a partir da fração volumétrica analisada, determina-se o respectivo valor de b_0 que irá satisfazer a relação. Além disso, respeitando

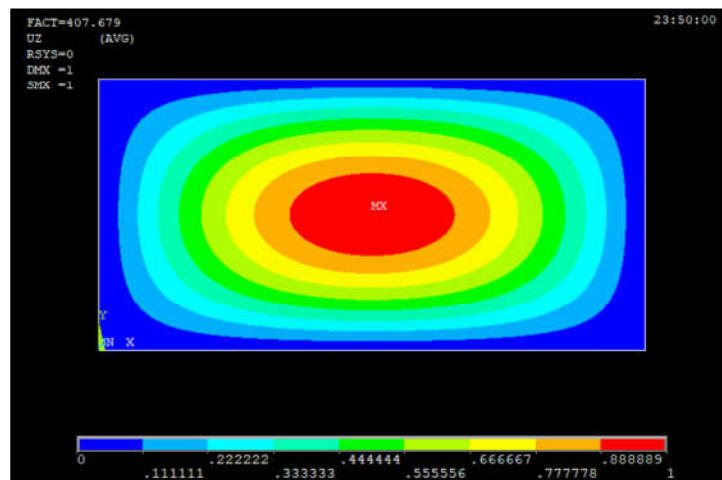
o determinado pela Eq. (13), utiliza-se apenas valores que mantenham a perfuração afastada o suficiente das bordas, evitando que o efeito das bordas seja evidenciado.

Com a finalidade de evitar perfurações demasiadamente estreitas, adota-se valores inferiores à 5:1 referentes à relação a_0/b_0 , ou seja, o comprimento da perfuração não deve ser maior que 5 (cinco) vezes a sua largura. Por outro lado, a relação b_0/a_0 indica o grau de liberdade para a placa perfurada, sendo responsável pela mudança de geometria da perfuração retangular, cujo objetivo é maximizar a carga crítica de flambagem biaxial.

No presente estudo, será considerada uma placa fina retangular de aço com propriedades mecânicas similares às apresentadas por Piscopo (2010), Jayashankarbabu e Karisiddappa (2014) e Folzke *et al.* (2016) no qual, o módulo de elasticidade é dado por $E = 210$ GPa e o coeficiente de *Poisson* $\nu = 0.3$, sendo este o aço AH36 conhecido como aço naval. As dimensões da placa são baseadas em estudos de placas finas e perfuradas, como de Joshi *et al.* (2013) e Folzke *et al.* (2016) sendo analisado placas de materiais do tipo fibra epoxy/carbono e aço, respectivamente. Dessa forma, adota-se o comprimento, largura e espessura sendo $a = 2000$ mm, $b = 1000$ mm e $t = 12$ mm, respectivamente.

Como forma de comparação, foi realizada a verificação para uma placa de mesmas dimensões e propriedades mecânicas adotadas ao longo do trabalho, porém, sem a presença de perfurações. Nesse caso, obteve-se uma carga crítica de $\bar{N}_{cr} = 407,6$ N/mm, conforme pode ser observado através da Figura 19.

Figura 19 - Placa sem Perfurações



Fonte: Elaboração Própria.

A Tabela 5 apresenta a primeira fração volumétrica analisada, relativa à $\emptyset = 0,1$, ou seja, o volume do furo representa uma remoção de 10% do material em relação à placa sem furo.

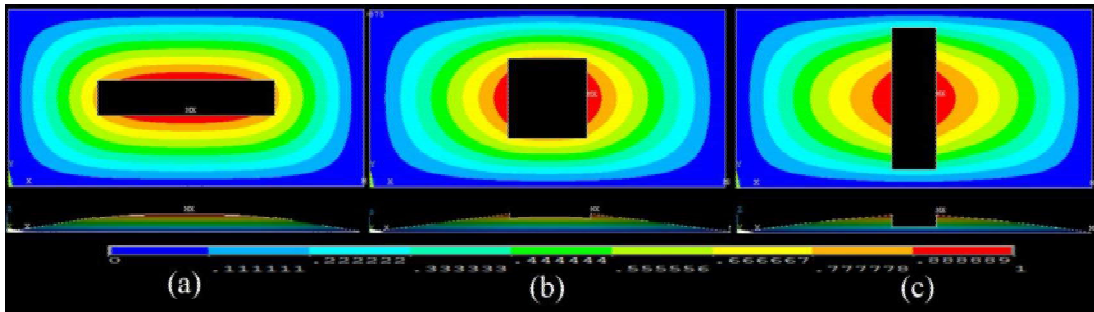
Tabela 5 - Valores Analisados para $\emptyset=0,1$

a (mm)	b (mm)	a_0 (mm)	b_0 (mm)	b_0/a_0	\bar{N}_{cr} (N/mm)
2000	1000	1000	200,000	0,200	213,64
2000	1000	900	222,222	0,247	221,66
2000	1000	800	250,000	0,313	232,07
2000	1000	700	285,714	0,408	244,77
2000	1000	600	333,333	0,556	260,0
2000	1000	500	400,000	0,800	278,78
2000	1000	447,25	447,177	1,000	290,98
2000	1000	400	500,000	1,250	304,13
2000	1000	300	666,667	2,222	346,09
2000	1000	250	800,000	3,200	381,98

Fonte: Elaboração Própria

A partir da análise dos resultados expressos na Tabela 5, observa-se que a carga crítica de flambagem tende a aumentar à medida em que o valor da relação b_0/a_0 aumenta. Para a fração volumétrica $\emptyset = 0,1$, a geometria otimizada que apresentou a melhor carga crítica, foi $b_0/a_0 = 3,2$, correspondendo à 384,98 N/mm. Este valor representa uma redução de 6,3% na resistência à flambagem elástica quando comparada à placa sem perfurações. A variação da geometria do furo retangular possibilita um incremento de até 78,8% na carga crítica de flambagem, quando comparados os graus de liberdade $b_0/a_0 = 0,2$ e $b_0/a_0 = 3,2$. A Figura 19 apresenta três diferentes geometrias de perfuração para a fração volumétrica estudada, onde (a) representa $b_0/a_0 = 0,2$, (b) um $b_0/a_0 = 1,0$ e (c) $b_0/a_0 = 3,2$, sendo o menor valor de carga crítica encontrando, o valor médio e o valor máximo de carga crítica, respectivamente.

Figura 20 - Configuração da Placa Flambada para: (a) $b_0/a_0 = 0,2$, (b) $b_0/a_0 = 1,0$ e (c) $b_0/a_0 = 3,2$



Fonte: Elaboração Própria.

Conforme ilustrado pela Figura 20 todas as placas apresentam uma semi-onda próxima ao centro da placa, onde a parcela vermelha representa o maior deslocamento da placa ao longo do eixo z , transversal ao plano xy e a cor azul indica o deslocamento nulo da placa.

Para uma fração volumétrica de $\phi = 0,15$, é adotado o mesmo procedimento realizado para a análise anterior, onde incrementa-se gradativamente o valor de a_0 e calcula-se o respectivo valor para b_0 que satisfaça a fração em análise. Os valores utilizados estão descritos na Tabela 6, juntamente com os resultados de carga crítica obtidos ao longo das verificações.

Tabela 6 - Valores Analisados para $\phi = 0,15$

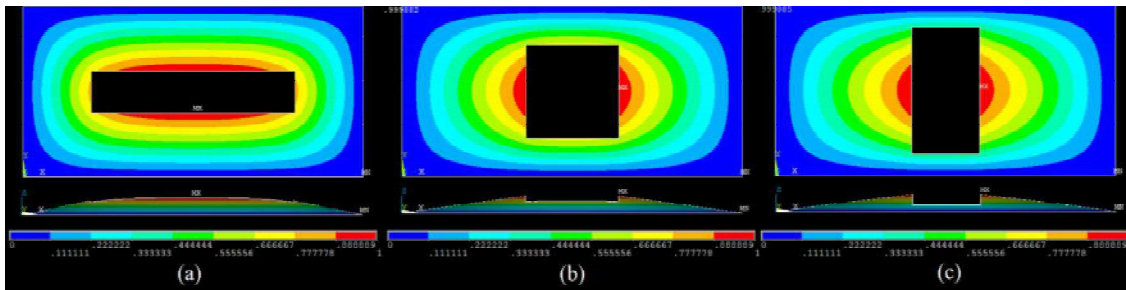
a (mm)	b (mm)	a_0 (mm)	b_0 (mm)	b_0/a_0	\bar{N}_{cr} (N/mm)
2000	1000	1200	250,000	0,208	195,12
2000	1000	1100	272,727	0,248	197,03
2000	1000	1000	300,000	0,300	202,68
2000	1000	900	333,333	0,370	211,36
2000	1000	800	375,000	0,469	222,86
2000	1000	700	428,571	0,612	237,53
2000	1000	600	500,000	0,833	256,55
2000	1000	547,8	547,645	1,000	269,11
2000	1000	500	600,000	1,200	282,97
2000	1000	400	750,000	1,875	324,8

Fonte: Elaboração Própria.

Conforme demonstrado na Tabela 6, a carga crítica de flambagem tende a aumentar na medida em que ocorre o acréscimo na proporção de b_0/a_0 , similar ao que ocorre para a fração volumétrica de $\emptyset = 0,1$. A geometria que apresentou melhor valor de carga crítica é obtido quando $b_0/a_0 = 1,875$ correspondendo à $\bar{N}_{cr} = 324,8$ N/mm. Comparado ao valor de carga crítica para a placa não perfurada, a presença da perfuração que representa a melhor carga crítica de flambagem para a fração volumétrica analisada, indica uma redução de 20,33% na resistência à flambagem elástica. A variação da geometria do furo retangular possibilita um incremento de até 66,6% na carga crítica de flambagem, quando comparados os graus de liberdade $b_0/a_0 = 0,208$ e $b_0/a_0 = 1,875$.

A Figura 21 apresenta a comparação entre as placas que apresentaram o menor valor de carga crítica, o valor médio e o maior valor, respectivamente.

Figura 21 - Configuração da Placa Flambada para: (a) $b_0/a_0 = 0,208$, (b) $b_0/a_0 = 1,0$ e (c) $b_0/a_0 = 1,875$



Fonte: Elaboração Própria.

A terceira e última análise refere-se à uma fração volumétrica de $\emptyset = 0,2$, ou seja, o volume da perfuração representa uma remoção de 20% do material em relação à placa sem furos. A Tabela 7 apresenta os valores obtidos ao longo da verificação.

Tabela 7 - Valores Analisados para $\phi = 0,2$

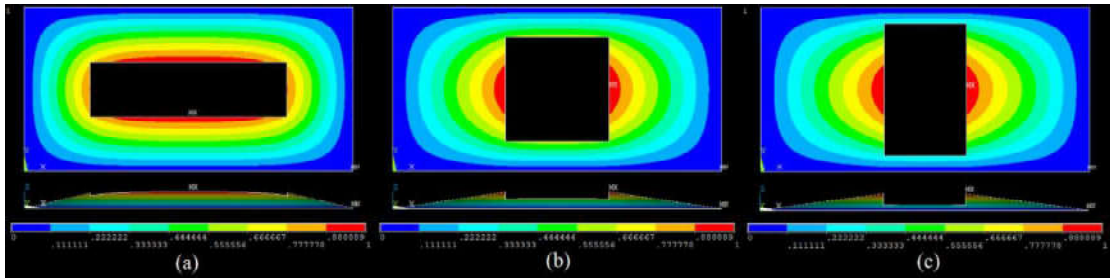
a (mm)	b (mm)	a_0 (mm)	b_0 (mm)	b_0/a_0	\bar{N}_{cr} (N/mm)
2000	1000	1400	285,714	0,204	197,77
2000	1000	1300	307,692	0,237	187,67
2000	1000	1200	333,333	0,278	185,49
2000	1000	1100	363,636	0,331	188,41
2000	1000	1000	400,000	0,400	195,12
2000	1000	900	444,444	0,494	205,13
2000	1000	800	500,000	0,625	218,63
2000	1000	700	571,429	0,816	236,63
2000	1000	632,46	632,451	1,000	252,5
2000	1000	600	666,667	1,111	261,65
2000	1000	550	727,273	1,322	278,4
2000	1000	500	800,000	1,600	299,53

Fonte: Elaboração Própria.

Os resultados obtidos através da análise da Tabela 7, indicam um aumento de carga crítica como efeito do aumento de b_0/a_0 , similar ao resultado encontrado para as demais frações volumétricas analisadas. Para uma fração volumétrica de $\phi = 0,20$, a carga crítica maximizada, ou seja, a maior carga crítica encontrada, é obtida quando $b_0/a_0 = 1,6$, correspondendo à $\bar{N}_{cr} = 299,53$ N/mm. Este valor de carga crítica maximizada, se comparado à carga crítica de flambagem para a placa não perfurada, indica uma redução de 26,53% na resistência à flambagem elástica. A variação da geometria do furo retangular possibilita um incremento de até 61,5% na carga crítica de flambagem, quando comparados os graus de liberdade $b_0/a_0 = 0,278$ e $b_0/a_0 = 1,6$.

A comparação dos deslocamentos em placas perfuradas para uma fração volumétrica $\phi = 0,2$, é ilustrada pela Figura 22, apresentando as placas que apresentam respectivamente o menor valor de carga crítica, o valor médio e o maior valor de carga crítica obtidos ao longo da verificação.

Figura 22 - Configuração da Placa Flambada para: (a) $b_0/a_0 = 0,278$, (b) $b_0/a_0 = 1,0$ e (c) $b_0/a_0 = 1,6$

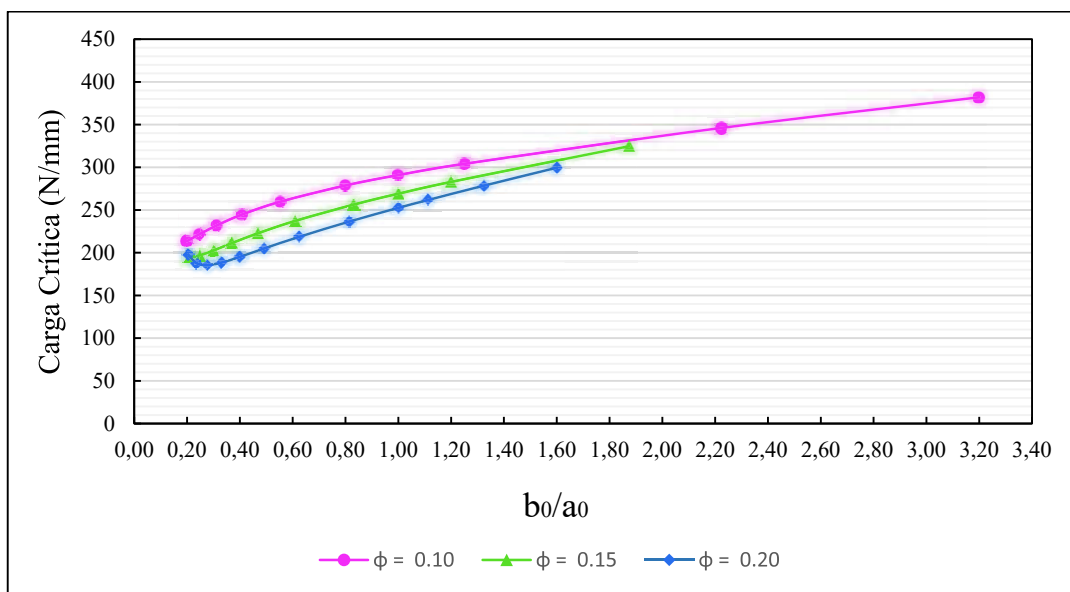


Fonte: Elaboração Própria.

Através da análise das Figuras 20 à 22, é possível observar que todas as placas em condições de flambagem, apresentam uma semi-onda próxima ao seu centro. Esta característica também é notada em outros estudos para placas planas sob solicitação compressiva biaxial, como Jayashankarbabu e Karisiddappa (2014), El-Sawy e Martini (2007), Da Silveira (2016), indicando que a análise ocorreu de forma correta.

A Figura 23 apresenta as curvas obtidas para cada valor de ϕ analisado. Dessa forma, é possível observar que a presença de maiores frações volumétricas do furo, reduzem a carga crítica de flambagem ao longo da análise. Este fenômeno pode estar relacionado à concentração de tensões geradas pelo furo e pela remoção de material (YETTRAM e BROWN, 1986).

Figura 23 - Curvas de Carga Crítica para as Frações Volumétricas Analisadas



Fonte: Elaboração Própria;

Outro fenômeno observado, refere-se à variação da carga crítica de flambagem biaxial em relação ao aumento de b_0/a_0 . O aumento no valor da relação de comprimento e largura da perfuração, apresenta um aumento na carga crítica de flambagem biaxial, de tal forma que quanto mais o furo se estende ao longo do eixo y , melhor é o desempenho mecânico da placa. A análise das Fig. (19), (20) e (21), indicam que este fenômeno pode estar relacionado à forma em que são distribuídos os deslocamentos da placa, onde observa-se que o maior deslocamento (parcela em vermelho), predomina em geometrias estendidas ao longo do eixo x , ficando distribuído em toda extensão da perfuração. Por outro lado, geometrias que se estendem ao longo do eixo y , apresentam uma maior concentração de deslocamento no centro da perfuração. Esta observação vai ao encontro do Princípio da Ótima Distribuição das Imperfeições, princípio este que rege a aplicação do método Design Construtal.

Foi percebido em todas as frações volumétricas que, para os melhores comportamentos mecânicos, as máximas deflexões da placa (representadas pela cor vermelha) se concentraram em regiões menores e centralizadas à placa. Entendendo-se as máximas deflexões como as imperfeições a serem distribuídas, as geometrias que apresentaram a maior carga crítica também foram as que distribuíram melhor as suas deflexões, resultando em áreas menores submetidas aos máximos deslocamentos em z . O mesmo comportamento é relatado por Da Silveira (2016) no estudo de flambagem biaxial de placas de material compósito com perfurações elípticas, podendo ser constatado que este fenômeno independe das propriedades do material e da geometria retangular do furo, adotada neste trabalho, podendo estar relacionado à distribuição de tensões ao longo da placa e da perfuração.

5 CONCLUSÕES

O presente trabalho apresentou uma abordagem numérica para a análise de placas retangulares de aço naval AH36, sob solicitação compressiva biaxial com a aplicação de perfurações retangulares e centralizadas. Para as análises, foi utilizado o MEF, apresentando resultados satisfatórios e de forma ágil no processo de informações.

A análise da fração volumétrica de $\emptyset = 0,1$ sugere que a geometria otimizada compreende uma relação $b_0/a_0 = 3,2$, correspondendo à um decréscimo de resistência à flambagem de 6,30% se comparado à placa sem furos.

Para a fração de $\emptyset = 0,15$, a carga crítica maximizada é atingida para uma relação $b_0/a_0 = 1,875$. Se comparado à placa sem perfurações, esse valor representa um decréscimo de 20,33% na resistência à flambagem da placa.

A análise da efracção volumétrica equivalente à $\emptyset = 0,2$, observa-se que a carga crítica maximizada é obtida para o grau de liberdade $b_0/a_0 = 1,6$ e, indicando uma redução de 26,53% comparado à resistência da placa sem furos.

A variação da geometria do furo retangular possibilita incrementos de até 78,8% para o caso de $\emptyset = 0,1$, um incremento de 66,6% para $\emptyset = 0,15$ e 61,5% para a fração volumétrica de $\emptyset = 0,2$

Outro ponto importante, refere-se à diminuição da carga crítica de flambagem para placas que apresentam perfurações em comparação à placa sem furo, podendo ser atribuída às concentrações de tensões geradas pela perfuração e ao efeito da remoção de material da placa.

Observa-se também que, quanto mais o furo se estende ao longo do eixo y , melhor é o desempenho mecânico da placa ao longo de toda a análise.

Baseado no Princípio da Ótima Distribuição das Imperfeições, é possível constatar que, as geometrias da perfuração que conduzem ao melhor comportamento mecânico, são as que melhor distribuem as deflexões, por flambagem, ao longo da placa.

Com base nos estudos e análises realizadas, é possível afirmar que o método Design Construtal associado à técnica da Busca Exaustiva e ao Método dos Elementos Finitos pode ser utilizado na análise estrutural de placas finas e perfuradas, submetidas à flambagem biaxial, possibilitando a obtenção de geometrias otimizadas que levam ao melhor desempenho mecânico da estrutura analisada.

Além disso, o elemento SHELL281 demonstrou resultados satisfatórios na verificação dos modelos propostos, indicando ser uma ferramenta viável na análise de flambagem de placas finas.

Como sugestão para trabalhos futuros, sugere-se a análise das distribuições das tensões ocasionadas pelas perfurações, a investigação do efeito da flambagem elasto-plástica, o efeito de outras condições de contorno e carregamentos ao longo da placa, a investigação de outras geometrias de perfurações e diferentes valores para frações volumétricas da perfuração.

REFERÊNCIAS

ÅKESSON, B. **Plate Buckling in Bridges and Other Structures**. London, UK: Taylor & Francis, 2007.

ALTÊ, Vinícius Amaral; ALONSO, Renata Costa de Almeida; LIMA, João Paulo Silva; DOS SANTOS, Elizaldo Domingues; ISOLDI, Liércio Andr; REAL, Mauro de Vasconcellos; ROCHA, Luiz Alerto Oliveira. **Análise Numérica do Comportamento Mecânico de Tubos Estruturais de Perfuração Submetidos à Flambagem Elástica Através do Método Constructal Design**. Congress on Computational Methods in Engineering. Rio de Janeiro, 2015. Disponível em: <https://plataforma.swge.com.br/PROCEEDINGS/PDF/CILAMCE2015-0573.pdf>.

Acesso em: 08 fev. 2020.

AZEVEDO, Álvaro F. M. **Método dos Elementos Finitos**. Universidade do Porto, Portugal, ed. 1, 2003.

BAPTISTA, Lillian Gonçalves; REAL, Mauro de Vasconcellos; ISOLDI, Liércio André. **Simulação Numérica Não-Linear do Comportamento de Placas de Aço Perfuradas Sob Compressão Uniaxial em Estruturas Navais e Offshore**. Engevista, v. 17, n. 3, p. 323-335, 2015.

BARRETO, Eduardo Xavier. **Design Construtal de Caminhos Condutivos com Geometria em Forma de “I” e “T” para Resfriamento de Corpos Geradores de Calor Considerando a Resistência Térmica de Contato**. 2015. Tese (Doutorado em Engenharia) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Programa de Pós-Graduação em Engenharia, Porto Alegre, 2015. Disponível em: <https://lume.ufrgs.br/handle/10183/133124>. Acesso em: 08 fev. 2020.

BECKEL, Cássia Cris. **Projeto Construtal de Complexos Caminhos Condutivos Para o Arrefecimento de Corpos Submetidos à Geração de Calor**. 2016. Tese (Doutorado em Engenharia) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Programa de Pós-Graduação em Engenharia, Porto Alegre, 2016. Disponível em: <https://lume.ufrgs.br/handle/10183/153338>. Acesso em: 08 fev. 2020.

BEJAN, Adrian. **Constructal-Theory Network of Conducting Paths for Cooling a Heat Generation Volume**. Int. J. Heat Mass Transfer, v. 40, n. 4, p. 799-816, 1997.

BEJAN, Adrian; LORENTE, Sylvie. **Design with Constructal Theory**. 1º International Workshop “Shape and Thermodynamics” – Florence, Itália. Firenze University Press, 2008.

BERNARDINO, Bruno Nery Souza. **Aplicação da Teoria de Placas na Análise de Estruturas Offshore**. 2016. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Engenharia Civil) – Universidade Federal do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro, 2015. Disponível em: <http://monografias.poli.ufrj.br/monografias/monopoli10017350.pdf>. Acesso em: 17 fev. 2020.

CARVALHO, Pablo Giovanni Silva; **Análise Estrutural de Placas: Modelagem Computacional para Teorias de Reissner-Mindlin e Kirchhoff**. Revista Interdisciplinar de Pesquisa em Engenharia, v. 2, n. 23, p. 257-276, 2016.

CASTRO, Emerson Cardoso de. **Procedimento para Análise Numérica com Software ANSYS de uma Viga em Flexão com a Forma T**. Revista Eletrônica de Engenharia Civil, v. 14, n. 1, p. 43-49, 2018.

CHAJES, Alexander. **Principles of structural stability theory**. Prentice Hall, 1974.

CRESCCE, Salvador Homce de. **Análise Não-Linear de Pavimentos de Concreto Armado Pelo Método dos Elementos Finitos de Contorno**. 2003. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) - Universidade de São Paulo, São Carlos, 2009. Disponível em: https://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/18/18134/tde-11062007-094230/publico/2003DO_SalvadorHCresce.pdf. Acesso em: 28 jan. 2020.

DA FONSECA, Zélia Garcia. **Otimização Estrutural do Suporte de uma Turbomáquina Usando um Método de Elementos Finitos**. 2015. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Engenharia Mecânica) – Universidade Federal do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro, 2015. Disponível em: <http://monografias.poli.ufrj.br/monografias/monopoli10013626.pdf>. Acesso em: 17 fev. 2020.

DA SILVEIRA, Thiago. **Simulação Numérica E Design Construtal Aplicados à Flambagem Biaxial de Placas de Material Compósito Utilizadas em Estruturas Navais**. 2016. Dissertação (Mestrado em Engenharia Oceânica) – Universidade Federal do Rio Grande. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Oceânica, Rio Grande, 2016. Disponível em: <https://ppgeo.furg.br/dissertacoes-e-teses/42-publicaes-de-2016/200-12255dissertacao-thiago-da-silveira>. Acesso em: 12 jan. 2020.

DA SILVEIRA, Thiago; LIMA, João Paulo Silva; REAL, Mauro de Vasconcellos; ROCHA, Luiz Alberto Oliveira; DOS SANTOS, Elizaldo Domingues; ISOLDI, Liércio André. **Verificação de um Modelo Computacional Baseado no Método de Elementos Finitos Aplicados à Flambagem Biaxial de Placas Delgadas Laminadas**. Scientia Plena, v. 13, n. 4, 2017.

DA SILVEIRA, Thiago; LIMA, João Paulo Silva; REAL, Mauro de Vasconcellos; ROCHA, Luiz Alberto Oliveira; DOS SANTOS, Elizaldo Domingues; ISOLDI, Liércio André. **Design Construtal e Método de Elementos Finitos Aplicados à Flambagem Biaxial de Placas Perfuradas Laminadas Simetricamente**. Revista de Engenharia e Tecnologia, v. 9, n. 2, p. 186-198, 2017.

EL-SAWY, Khaled M.; NAZMY, Aly S. **Effect of aspect ratio on the elastic buckling of uniaxially loaded plates with eccentric holes**. Thin-walled structures, v. 39, n. 12, p. 983-998, 2001.

EL-SAWY, Khaled M.; MARTINI, Mohammad Iqbal. **Elastic Stability of Bi-Axially Loaded Rectangular Plates with a Single Circular Hole**. Thin-Walled Structures, v. 45, n. 1, p. 122-133, 2007.

EL-SAWY, Khaled M.; NAZMY, Aly S.; MARTINI, Mohammad Iqbal. **Elasto-Plastic Buckling of Perforated Plates Under Uniaxial Compression**. Thin-Walled Structures, v. 42, n. 8, p. 1083-1101, 2004.

FOLZKE, Emilio Gabriel Gonçalves; CORREIA, Anderson Luis Garcia; DA SILVEIRA, Thiago; ROCHA, Luiz Alberto Oliveira; DOS SANTOS, Elizaldo Domingues; REAL, Mauro de Vasconcellos; ISOLDI, Liércio André. **Simulação**

Númerica e Constructal Design Aplicados à Flambagem Elástica de Placas Finas de Aço. Vetor, Rio Grande, v. 26, n. 1, p. 20-34, 2016.

HASSAN, Ahmed Hassan Ahmed; KURGAN, Naci. **Modeling and Buckling Analysis of Rectangular Plates in ANSYS.** International Journal Of Engineering & Applied Sciences, v. 11, n. 1, p. 310-329, 2019.

HELBIG, Daniel. **Estudo Numérico De Placas Finas De Aço Com Perfuração, Submetidas à Flambagem Elástica e Elasto-Plástica, Aplicando-Se O Método Design Construtal.** 2016. Tese (Doutorado em Engenharia) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Porto Alegre, 2016. Disponível em: <https://lume.ufrgs.br/handle/10183/153339>. Acesso em: 18 jan. 2020.

HELBIG, Daniel; REAL, Mauro de Vasconcellos; DOS SANTOS, Elizaldo Domingues; ISOLDI, Liércio Andre. **Constructal Design of Perforated Steel Plates Subject to Linear Elastic and Nonlinear Elasto-Plastic Buckling.** Congress on Computational Methods in Engineering. Pirenópolis, 2013. Disponível em: <http://repositorio.furg.br/handle/1/5018>. Acesso em: 08 fev. 2020.

HIBBELER, Russell Charles. **Resistência dos materiais.** Pearson Educación, 2010.

JAMEEL, Adnan Naji; SADIQ, Ibtehal Abbas; NSAIF, Hasanain Ibraheem. **Buckling Analysis of Composite Plates under Thermal and Mechanical Loading.** Journal of Engineering, v. 18, n. 12, 2012.

JAYASHANKARBABU, B. S; KARISIDDAPPA. **Stability of Square Plate with Concentric Cutout.** International Journal of Civil and Environmental Engineering, v. 8, n. 3, p. 259-267, 2014.

JONES, Robert Millard. **Buckling of bars, plates, and shells.** Bull Ridge Corporation, 2006.

LIMA, João Paulo Silva; RAMOS, André Pereira; ISOLDI, Liércio André; DOS SANTOS, Elizaldo Domingues. **Modelagem Computacional e Método Design**

Construtal Aplicados ao Estudo do Comportamento Mecânico de Painéis de Aço com Enrijecedores Submetidos à Flambagem. Revista Interdisciplinar de Pesquisa em Engenharia, v. 2, n; 32, 2016.

MAIA, Adimar Fernandes. **Implementação da Teoria de Reissner para placas com método dos elementos de contorno em ambiente computacional orientado a objetos.** 2013. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Universidade Federal de Minas Gerais. Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas, Belo Horizonte, 2013. Disponível em: <https://repositorio.ufmg.br/handle/1843/BUOS-9KCGZU>. Acesso em: 19 dez. 2020.

MANDAL, Bibekananda; RAY, Chaitali. **Bending of FRP Bridge Deck Under the Combined Effect of Thermal and Vehicle Load.** In: Advances in Structural Engineering. Springer, New Delhi, 2015. p. 2493-2503.

MELO, Jonathan da Maia Santos de. **Análise da Flambagem Elástica e da Resistência de Telhas Autoportantes de Aço Formadas a Frio.** 2017. Dissertação (Mestrado em Ciências em Engenharia Civil) – Universidade Federal do Rio de Janeiro. Programa de Pós-Graduação e Pesquisa em Engenharia, Rio de Janeiro, 2017. Disponível em: <https://pantheon.ufjf.br/bitstream/11422/11635/1/886765.pdf>. Acesso em: 13 fev. 2020.

MIECOANSKI, Leon Fernando. **Estudo Numérico de Design Constructal do Sistema de Arrefecimento de Células Fotovoltaicas de Alta Concentração.** 2018. Dissertação (Mestrado em Engenharia Ambiental) – Universidade Federal do Paraná. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Ambiental, Curitiba, 2018. Disponível em: <https://acervodigital.ufpr.br/handle/1884/58483>. Acesso em: 17 fev. 2020.

MOEN, Christopher D.; SCHAFFER, B. W. **Elastic Buckling of Thin Plates with Holes in Compression or Bending.** Thin-Walled Structures, v. 47, n. 12, p. 1597-1607, 2009.
PFEIL, Walter; PFEIL, Michele. **Estruturas de Aço: Dimensionamento Prático.** Grupo Gen-LTC, 2000.

PEPE, Vinicius da Rosa. **Otimização numérica do escoamento interno em estruturas em forma de T aplicando o método design construtal**. 2018. Dissertação (Mestrado em Engenharia) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Porto Alegre, 2018. Disponível em: <https://www.lume.ufrgs.br/handle/10183/181383>. Acesso em: 19 nov. 2020.

PISCOPO, V. **Refined Buckling Analysis of Rectangular Plates Under Uniaxial and Biaxial Compression**. International Journal of Mechanical and Mechatronics Engineering, v. 4, n. 10, p. 1018-1025, 2010.

RACKOW, Patrícia Borges; REAL, Mauro de Vasconcellos; ISOLDI, Liércio André; COLARES, Rafaela da Silva; THORMANN, Daniela. **Análise Paramétrica de um Painel com Enrijecedor sob Flambagem Elástica**. Scientia Plena, v.11, n. 8, 2015.

SABIR, A. B.; CHOW, F. Y. **Elastic Buckling of Plates Containing Eccentrically Located Circular Holes**. Thin-walled structures, v. 4, n. 2, p. 135-149, 1986.

SHANMUGAM, N. E.; THEVENDRAN, V.; TAN, Y. H. **Design formula for axially compressed perforated plates**. Thin-Walled Structures, v. 34, n. 1, p. 1-20, 1999.

SILVA, Caio Cesar Cardoso da; HELBIG, Daniel; LIMA, João Paulo Silva; REAL, Mauro de Vasconcellos; DOS SANTOS, Elizaldo Domingues; ROCHA, Luiz Alberto Oliveira; ISOLDI, Liércio André. **Simulação Numérica e Método Design Construtal Aplicados ao Estudo de Flambagem em Placas de Aço com Perfuração Hexagonal**. Perspectivas Online: Exatas & Engenharias, v. 8, n. 20, p. 64-77, 2018.

SILVA, Ney Amorim. **Aplicação do método dos elementos de contorno à placas com enrijecedores utilizando a teoria de Reissner**. 1996. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) – Universidade de São Paulo. Escola de Engenharia de São Carlos, São Carlos, 1996. Disponível em: <https://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/18/18134/tde-10042018-114016/en.php>. Acesso em: 19 dez. 2020

SOARES JUNIOR, Romildo Aparecido. **Aplicação do Método dos Elementos de Contorno na Análise de Instabilidade de Placas Perfuradas**. 2015. Dissertação

(Mestrado em Engenharia Civil) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas. 2015. Disponível em: http://repositorio.unicamp.br/bitstream/REPOSIP/258077/1/SoaresJunior_RomildoAparecido_M.pdf. Acesso em: 18 fev. 2020.

SOUZA, Remo Magalhães de. **O Método dos Elementos Finitos Aplicado ao Problema de Condução de Calor**. Universidade Federal do Pará. Núcleo de Instrumentação e Computação Aplicada à Engenharia, 2013. Disponível em: <http://www.inf.ufes.br/~luciac/fem/livros-fem/ApostilaElementosFinitosNiCAE.pdf>. Acesso em: 13 fev. 2020.

TORII, André Jacomel. **Análise Dinâmica de Estruturas com Método dos Elementos Finitos Generalizado**. 2012. Tese (Doutorado em Ciências) – Universidade Federal do Paraná. Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia, Curitiba, 2012. Disponível em: <https://acervodigital.ufpr.br/handle/1884/28386>. Acesso em: 17 fev. 2020.

TIMOSHENKO, Stephen P.; GERE, James M. **Theory of elastic stability**. McGraw-Hill Book Company, Inc., 1963.

TIMOSHENKO, Stephen P.; WOINOWSKY-KRIEGER, Sergius. **Theory of plates and shells**. McGraw-hill, 1959.

TROIAN, Sandro; DA SILVA, Caio Cesar Cardoso; ROCHA, Luiz Alberto Oliveira; DOS SANTOS, Elizaldo Domingues; ISOLDI, Liércio André; REAL, Mauro Vasconcellos. **Análise Numérica do Comportamento Mecânico de Placas Finas Perfuradas de Materiais Compósitos sob Flexão**. Scientia Plena, v. 11, n. 8, 2015.

WANG, Chien Ming; WANG, Chang Yi. **Exact solutions for buckling of structural members**. CRC press, 2004.

YETTRAM, A. L.; BROWN, C. J. **The Elastic Stability of Square Perforated Plates Under Bi-Axial Loading**. Computers & structures, v. 22, n. 4, p. 589-594, 1986.