

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PAMPA

RODRIGO DA SILVA FRANCO

**MODELAGEM MATEMÁTICA E SIMULAÇÃO COMPUTACIONAL COMO
ESTRATÉGIAS DE ENSINO-APRENDIZAGEM APLICADAS EM UM CICLO DE
MODELAGEM**

**Bagé
2018**

RODRIGO DA SILVA FRANCO

**MODELAGEM MATEMÁTICA E SIMULAÇÃO COMPUTACIONAL COMO
ESTRATÉGIAS DE ENSINO-APRENDIZAGEM APLICADAS EM UM CICLO DE
MODELAGEM**

Monografia apresentada ao Curso de Especialização em Modelagem Computacional em Ensino, Experimentação e Simulação da Universidade Federal do Pampa, como requisito parcial para obtenção do Título de Especialista em Modelagem Computacional.

Orientador: Prof. Dr. Everson Jonatha Gomes da Silva

Coorientador: Prof. Dr. Anderson Luis Jeske Bihain

**Bagé
2018**

Ficha catalográfica elaborada automaticamente com os dados fornecidos pelo(a) autor(a) através do Módulo de Biblioteca do Sistema GURI (Gestão Unificada de Recursos Institucionais) .

F825m Franco, Rodrigo da Silva

Modelagem matemática e simulação computacional como estratégias de ensino-aprendizagem aplicadas em um ciclo de modelagem / Rodrigo da Silva Franco.

66 p.

Trabalho de Conclusão de Curso (Especialização)--
Universidade Federal do Pampa, ESPECIALIZAÇÃO EM
MODELAGEM COMPUTACIONAL EM ENSINO, EXPERIMENTAÇÃO E
SIMULAÇÃO, 2018.

"Orientação: Everson Jonatha Gomes da Silva".

1. Modelagem matemática. 2. Simulação computacional.
3. Ciclos de modelagem. 4. Teoria da aprendizagem
significativa. I. Título.

RODRIGO DA SILVA FRANCO

**MODELAGEM MATEMÁTICA E SIMULAÇÃO COMPUTACIONAL COMO
ESTRATÉGIAS DE ENSINO-APRENDIZAGEM APLICADAS EM UM CICLO DE
MODELAGEM**

Monografia apresentada ao Curso de Especialização em Modelagem Computacional em Ensino, Experimentação e Simulação da Universidade Federal do Pampa, como requisito parcial para obtenção do Título de Especialista em Modelagem Computacional.

Área de concentração: Modelagem Computacional

Monografia de Especialização defendida e aprovada em 18 de Julho de 2018.

Banca examinadora:

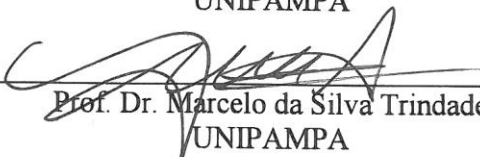


Prof. Dr. Everson Jonatha Gomes da Silva

Orientador
UNIPAMPA



Prof. Dr. Leandro Blass
UNIPAMPA



Prof. Dr. Marcelo da Silva Trindade
UNIPAMPA

AGRADECIMENTO

A Deus, por me dar forças e sabedoria para eu continuar a trilhar nessa jornada, me propiciando vencer mais essa etapa da minha vida.

A minha Família, em especial a minha Mãe Dalva Soares da Silva, ao meu Pai José Roberto Franco e aos meus Irmãos Arthur, Bruno, Gabriel e Ana Paula por me amarem e estarem sempre ao meu lado me apoiando em minhas decisões.

Ao meu Avô Antônio Tavares, por todo o amor, ajuda e orações oferecidas nesses anos da minha vida.

A minha Noiva e eterna Namorada Bianca Vasconcelos do Evangelho por toda paciência, carinho, amor e dedicação durante esses anos.

Aos demais Familiares e Amigos, pelas orações e incentivos.

Ao Professor Evérson Jonatha Gomes da Silva, pela dedicada orientação e por sempre me incentivar em minha carreira profissional.

Ao Professor Anderson Luis Jeske Bihain, que gentilmente aceitou o convite para ser Coorientador deste Trabalho.

Aos professores Leandro Blass e Marcelo da Silva Trindade, por aceitarem o convite para participarem da Banca e por todas as sugestões e contribuições oferecidas a este Trabalho.

Aos Alunos de Graduação da UNIPAMPA, que gentilmente se propuseram a participar da pesquisa que constitui este Trabalho.

O meu muito Obrigado a todos, pois sem vocês este Trabalho não teria sido realizado.

“Talvez não tenha conseguido fazer o melhor, mas lutei para que o melhor fosse feito. Não sou o que deveria ser, mas Graças a Deus, não sou o que era antes”.

Marthin Luther King

RESUMO

Neste trabalho, apresenta-se a modelagem matemática e a simulação computacional como estratégias inovadoras e motivadoras no processo de ensino-aprendizagem. Tais estratégias são aplicadas em um ciclo de modelagem de acordo com os pressupostos hestesianos, de forma a propiciar que os alunos sejam agentes críticos e ativos na construção do conhecimento. Assim, tem-se como objetivo analisar se a aplicação desta proposta viabiliza uma aprendizagem significativa aos alunos da forma como propõe David Ausubel em sua Teoria da Aprendizagem Significativa. O ciclo de modelagem foi aplicado com alunos de graduação da Universidade Federal do Pampa (UNIPAMPA), que apresentam perfis diversos por serem de diferentes cursos de Engenharias e estarem cursando semestres distintos. A metodologia utilizada na pesquisa teve uma abordagem qualitativa do tipo estudo de caso e os dados foram coletados a partir da observação direta do autor e de um questionário avaliativo por parte dos alunos participantes da pesquisa. Neste contexto, verificou-se através da análise dos dados que a proposta evidenciou e proporcionou aos alunos uma aprendizagem significativa. Sendo assim, a metodologia proposta se mostra promissora e potencialmente significativa no ensino de ciências e matemática, principalmente em atividades que envolvam modelagem matemática e simulação computacional.

Palavras-Chave: Modelagem matemática. Simulação computacional. Ciclo de modelagem. TAS.

ABSTRACT

In this work, mathematical modeling and computational simulation are presented as innovative and motivating strategies in the teaching-learning process. Such strategies are applied in a modeling cycle according to the hestesian assumptions, in order to allow students to be critical and active agents in the construction of knowledge. Thus, the objective is to analyze if the application of this proposal makes possible a meaningful learning to the students as proposed by David Ausubel in his Significant Learning Theory. The modeling cycle was applied with undergraduate students from the Federal University of Pampa, who have different profiles because they are from different engineering courses and are studying different semesters. In this research a qualitative approach was run of the case study kind, and the data were collected through author observations and an evaluation questionnaire answered by the students who has participated of this investigation. In this context, it was verified through the data analysis with that the proposal showed and provide the students with a meaningful learning. It thus, the proposed methodology is promising and potentially significant in the teaching of science and mathematics, especially in activities involving mathematical modeling and computational simulation.

Keywords: Mathematical Modeling. Computational Simulation. Modeling Cycle. TAS.

LISTA DE FIGURAS

| | |
|--|----|
| Figura 1 – Órbita do planeta devido à força gravitacional | 22 |
| Figura 2 – Órbita do planeta devido à força gravitacional | 29 |
| Figura 3 – Representação da elipse | 30 |
| Figura 4 – Representação de um ponto P qualquer em coordenadas cartesianas..... | 31 |
| Figura 5 – Representação de um ponto P qualquer em coordenadas polares..... | 31 |
| Figura 6 – Representação do sistema de coordenadas cartesianas com o sistema de coordenadas polares..... | 32 |
| Figura 7 – Rotação de um ângulo β do vetor \vec{v} em torno do eixo x | 35 |
| Figura 8 – Estudantes apresentando seus modelos para o grande grupo (a) e (b)..... | 50 |
| Figura 9 – Simulação das órbitas de estrelas no <i>software GeoGebra</i> | 53 |

LISTA DE QUADROS

| | |
|---|----|
| Quadro 1 – Cronograma dos encontros do ciclo de modelagem | 43 |
|---|----|

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CM – Ciclos de Modelagem

TAS – Teoria da Aprendizagem Significativa

UNIPAMPA – Universidade Federal do Pampa

Sgr A* – Sagittarius A-estrela

Sumário

| | | |
|--------------|---|-----------|
| 1 | INTRODUÇÃO | 13 |
| 2 | OBJETIVOS | 15 |
| 2.1 | Geral: | 15 |
| 2.2 | Específicos: | 15 |
| 3 | FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA | 16 |
| 3.1 | A Teoria da Aprendizagem Significativa | 16 |
| 3.2 | Os Ciclos de Modelagem | 20 |
| 4 | MODELO E MODELAGEM MATEMÁTICA | 24 |
| 4.1 | Modelagem Matemática: uma perspectiva histórica | 24 |
| 4.2 | O que é Modelo Matemático? | 25 |
| 4.3 | Definição de Modelagem Matemática | 25 |
| 5 | DESCRIÇÃO DO PROBLEMA PROPOSTO | 26 |
| 5.1 | Leis de Kepler e Lei da Gravitação Universal de Newton | 27 |
| 5.2 | Elipse | 29 |
| 5.3 | Matrizes de Rotação | 33 |
| 5.4 | A Lei da Gravitação Universal na forma Diferencial | 36 |
| 6 | METODOLOGIA | 41 |
| 6.1 | Metodologia de Ensino | 41 |
| 6.2 | Metodologia da Pesquisa | 44 |
| 6.2.1 | Coleta de Dados | 45 |
| 6.2.2 | Análise dos Dados | 45 |
| 7 | DISCUSSÃO DOS RESULTADOS | 47 |
| 8 | CONSIDERAÇÕES FINAIS | 55 |
| | REFERÊNCIAS | 56 |

APÊNDICES58

ANEXOS65

1 INTRODUÇÃO

Atualmente, percebe-se a necessidade de inserir metodologias de ensino que motivem os estudantes e facilite o processo de ensino-aprendizagem, não só no ensino médio como também no ensino superior, principalmente na área de ciências e matemática. Estudos (ARAÚJO; MAZUR, 2013; BRUSCATO; MORS, 2014; OLIVEIRA; ARAÚJO; VEIT; 2016) destacam que mesmo em tempos modernos, as aulas em diversas áreas do conhecimento, continuam centradas em aulas expositivas dialogadas, essencialmente com apresentação de cálculos matemáticos e fórmulas, descontextualizados com o cotidiano vivenciado pelos estudantes, além de não levar em consideração o que os alunos já sabem.

Tal fato caracteriza o método de ensino tradicional, bem como uma aprendizagem mecânica por parte dos estudantes. Desta forma, buscar inserir novas abordagens pedagógicas deveria ser uma das preocupações dos professores (SOUZA; ROZAL, 2016).

Neste contexto, a modelagem matemática torna-se uma importante estratégia no ensino e aprendizagem de ciências e matemática, pois oportuniza ao estudante investigar determinados problemas, tornando-os agentes críticos e ativos na construção do saber. Assim, as aulas acabam se tornando mais dinâmicas e atrativas para os estudantes, de modo que a aprendizagem ocorre de forma significativa.

Dentre várias contribuições da modelagem no ensino-aprendizagem, de acordo com Veit e Teodoro (2002) pode-se destacar que esta possibilita “elevar o nível do processo cognitivo, exigindo que os estudantes pensem num nível mais elevado, generalizando conceitos e relações” (VEIT; TEODORO, 2002, p. 88).

Procurando implementar metodologias inovadoras no ensino-aprendizagem de ciências e matemática, este trabalho consiste em apresentar uma proposta didática inserida em um ciclo de modelagem nos pressupostos hestesianos. Assim, o objetivo da pesquisa consiste em aplicar a modelagem matemática e a simulação computacional como estratégias de ensino-aprendizagem e analisar se ambas contribuem para que a aprendizagem dos alunos seja de fato significativa, de maneira que desperte o interesse destes, tornando-os agentes ativos na construção do saber.

Desta maneira, o presente trabalho está fundamentado na Teoria da Aprendizagem Significativa (TAS) proposta por David Ausubel e descrita por Moreira (1999), cujo fator mais importante é partir daquilo que o aluno já sabe sobre determinado assunto, chamado de conhecimento prévio ou “*subsunçor*” e na metodologia Ciclos de Modelagem (CM) de David Hestenes (2006) descritos por Heidemann, Araújo e Veit (2012) e Souza e Rozal (2016).

Este trabalho está dividido em 7 (sete) capítulos. No capítulo 2 (dois) são apresentados os objetivos, gerais e específicos que, norteiam a pesquisa. No capítulo 3 (três) são apresentados os referenciais teóricos que fundamentam o trabalho, sendo eles a Teoria da Aprendizagem Significativa de Ausubel e os Ciclos de Modelagem de Hestenes. No capítulo 4 (quatro) é apresentada uma breve descrição histórica do surgimento da modelagem matemática como linguagem de representação dos fenômenos presentes no cotidiano da humanidade, bem como as definições de modelo matemático e modelagem matemática nas diferentes percepções encontradas na literatura. No capítulo 5 (cinco), tem-se a descrição do problema proposto com a abordagem física e matemática escolhida pelo autor para modelar o problema, sendo esta apenas uma, das diferentes maneiras de representar o problema. No capítulo 6 (seis) são descritas as metodologias de ensino e pesquisa do trabalho. No capítulo 7 (sete) é realizada a discussão dos resultados alcançados, onde todo o enfoque é dado no processo de aprendizagem do aluno de acordo com a metodologia escolhida para aplicar a proposta didática. E por fim, no capítulo 8 (oito) são realizadas as considerações finais do trabalho, de modo que o mesmo se mostrou potencialmente significativo para a aprendizagem dos alunos.

2 OBJETIVOS

2.1 Geral:

Aplicar e avaliar uma proposta didática utilizando a modelagem matemática e a simulação computacional como estratégias de ensino aplicadas em um ciclo de modelagem.

2.2 Específicos:

- i. Propiciar episódios de modelagem de forma a incentivar os estudantes a se tornarem participantes ativos na construção do saber;
- ii. Utilizar a modelagem matemática e a simulação computacional como estratégias de ensino que viabilizem a motivação e facilitem o processo de ensino-aprendizagem dos estudantes;
- iii. Modelar e simular computacionalmente as órbitas de estrelas em torno de um buraco negro, buscando com isso que os alunos ampliem sua estrutura cognitiva;
- iv. Utilizar o *software GeoGebra* como recurso computacional de simulação;
- v. Analisar se a proposta didática viabiliza a aprendizagem significativa dos estudantes.

3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Nesta seção serão apresentadas as teorias que embasam o presente trabalho. Primeiro será apresentada a Teoria da Aprendizagem Significativa (TAS) de Ausubel e na sequência os Ciclos de Modelagem (CM) de Hestenes.

3.1 A Teoria da Aprendizagem Significativa

De acordo com Moreira (1999):

Uma teoria de aprendizagem é, então, uma construção humana para interpretar sistematicamente a área de conhecimento que chamamos aprendizagem. Representa o ponto de vista de um autor/pesquisador sobre como interpretar o tema aprendizagem, quais as variáveis independentes, dependentes e intervenientes. Tenta explicar o que é aprendizagem e porque funciona como funciona (MOREIRA, 1999, p. 9).

As interpretações (teorias) construídas e propostas por vários pesquisadores foram classificadas em três grupos distintos: Cognitivo, Afetivo e Psicomotor. Moreira (1999) explica-nos de forma sucinta o que é cada uma destas teorias.

A aprendizagem cognitiva é aquela que resulta no armazenamento organizado de informações na mente do ser que aprende, e esse complexo organizado é conhecido como estrutura cognitiva. A aprendizagem afetiva resulta de sinais internos ao indivíduo e pode ser identificada com experiências tais como prazer e dor, satisfação ou descontentamento, alegria ou ansiedade. Algumas experiências afetivas sempre acompanham as experiências cognitivas. Portanto, a aprendizagem afetiva é concomitante com a cognitiva. A aprendizagem psicomotora envolve respostas musculares adquiridas por meio de treino e prática, mas alguma aprendizagem cognitiva é geralmente importante na aquisição de habilidades psicomotoras (MOREIRA, 1999, p. 151-152).

A Teoria da Aprendizagem Significativa de Ausubel é uma teoria cognitivista, pois propõe uma explicação teórica do processo de aprendizagem, de como o indivíduo constrói seu conhecimento, organizando assim sua estrutura cognitiva, ao invés de apenas armazenar informações. A ideia central desta teoria é de que o fator isolado que mais influencia a aprendizagem é aquilo que o aprendiz já sabe, ou seja, seu conhecimento prévio. Para Ausubel nosso cérebro armazena de maneira organizada e hierárquica todas as informações, isto é, conceitos que estão mais assimilados são ligados a outros mais gerais formando um conjunto de ideias em constante modificação, denominado por ele Estrutura Cognitiva.

A aprendizagem pode ocorrer de duas maneiras: Mecânica ou Significativa. De acordo com Moreira (1999) a aprendizagem mecânica é a aprendizagem de novos conceitos e informações com pouca ou nenhuma interação com conceitos relevantes existentes na estrutura cognitiva. Assim, a aprendizagem significativa é um processo por meio do qual um novo conceito ou uma nova informação relaciona-se com aspectos relevantes da estrutura cognitiva do indivíduo. Portanto, este processo envolve a interação da nova informação com os conhecimentos prévios (subsunçores).

Moreira (1999) ressalta que:

Ausubel não estabelece a distinção entre aprendizagem significativa e a aprendizagem mecânica como sendo uma dicotomia e sim como um contínuo. [...] a aprendizagem mecânica é sempre necessária quando um indivíduo adquire informações em uma área de conhecimento completamente nova para ele, isto é, a aprendizagem mecânica ocorre até que alguns elementos de conhecimento, relevantes a novas informações na mesma área, existam na estrutura cognitiva e possam servir de subsunçores, ainda que pouco elaborados (MOREIRA, 1999, p. 154).

Entretanto, existem algumas condições para que ocorra uma aprendizagem significativa. De acordo com Moreira (2012) é preciso analisar:

- *Se o aprendiz apresenta uma predisposição para aprender*, ou seja, o aluno deve estar disposto a relacionar conhecimentos, enriquecendo e modificando seus *subsunçores*, isto só não pode ocorrer simplesmente visando boas notas, pois recairemos na aprendizagem mecânica que por muitas vezes permeia as escola e estimula a memorização visando apenas um resultado final.
- *Se o material de aprendizagem é potencialmente significativo*, ou seja, se os livros, as aulas, as estratégias didáticas que estão sendo utilizadas pelo professor apresentam significado lógico. Lembrando sempre que é o aluno que atribui significado aos materiais de aprendizagem.

O objetivo desta teoria é que a aprendizagem dê-se de forma significativa, permitindo que o estudante não apenas decore o que está aprendendo, mas ao contrário, permitir a ele armazenar conceitos e conteúdos em sua estrutura cognitiva, ampliando-a gradativamente durante suas experiências dentro e fora da escola.

A aprendizagem significativa ocorre quando um novo conceito/ideia relaciona-se e é assimilado, de forma não-literal e não arbitrária, com conceitos/ideias já internalizados na mente do aprendiz, ou seja, o novo conhecimento interage com o *subsunçor*, resultando em ambos os conhecimentos modificados, podendo ser dissociável e redutível à ideia mais

estável. Os conceitos aprendidos não são apagáveis, eles permanecem na estrutura cognitiva modificando-se quando entram em contato com um novo conceito.

Segundo Moreira (2012):

O conceito básico da teoria de Ausubel é o de aprendizagem significativa. A aprendizagem é dita significativa quando uma nova informação (conceito, ideia, proposição) adquire significados para o aprendiz através de uma espécie de ancoragem em aspectos relevantes da estrutura cognitiva preexistente do indivíduo isto é, em conceitos, ideias, proposições já existentes em sua estrutura de conhecimentos (ou de significados) com determinado grau de clareza, estabilidade e diferenciação. Estes aspectos relevantes da estrutura cognitiva que servem de ancoradouro para a nova informação são chamados de “subsunçores” (MOREIRA, 2012, p. 5).

Assim, os *subsunçores* progressivamente ficam mais estáveis, mais ricos em significados, facilitando cada vez mais novas aprendizagens. De acordo com Moreira (2012):

Esta forma de aprendizagem significativa, na qual uma nova idéia, um novo conceito, uma nova proposição, mais abrangente, passa a subordinar conhecimentos prévios é chamada de *aprendizagem significativa superordenada*. Não é muito comum; a maneira mais típica de aprender significativamente é a *aprendizagem significativa subordinada*, na qual um novo conhecimento adquire significado na ancoragem interativa com algum conhecimento prévio especificamente relevante (MOREIRA, 2012, p. 3, grifo do autor).

Existem três fatores que são preponderantes para a aprendizagem significativa, sendo eles: fatores cognitivos, afetivo-sociais e externos.

O primeiro fator está relacionado com a estrutura mental do aprendiz, ou seja, ele diz que deve existir na estrutura cognitiva do aprendiz uma ideia que seja âncora (*subsunçor*) para que as novas ideias que sejam associadas, possam ser assimiladas e distinguidas, de forma não-literal, substantiva e não-arbitrária, das que serviram de âncora.

Os fatores afetivo-sociais tratam principalmente sobre a disposição do estudante em aprender, ou seja, quanto mais diferenciadas as metodologias e estratégias utilizadas pelos professores, e quanto mais significativo o material, mais dispostos aprendizes estarão.

E por fim, os fatores externos que dizem respeito aos materiais educacionais que serão apresentados aos estudantes, planejamento das aulas, levando em consideração os conhecimentos prévios dos alunos (*subsunçores*).

Antes da utilização do material potencialmente significativo, se o estudante não possui conhecimento prévio relevante para aprender o novo conhecimento que será introduzido,

sugere-se a utilização de *organizadores prévios*, que são materiais que podem tanto fornecer ideias âncoras como servir de ponte entre o que o aprendiz já sabe e o que ele deveria saber.

De acordo com Moreira (2012):

Destaque-se, no entanto, que organizadores prévios não são simples comparações introdutórias, pois, diferentemente destas, organizadores, devem:

- 1 - identificar o conteúdo relevante na estrutura cognitiva e explicar a relevância desse conteúdo para a aprendizagem do novo material;
- 2 - dar uma visão geral do material em um nível mais alto de abstração, salientando as relações importantes;
- 3 - prover elementos organizacionais inclusivos que levem em consideração, mais eficientemente, e ponham em melhor destaque o conteúdo específico do novo material, ou seja, prover um contexto ideacional que possa ser usado para assimilar significativamente novos conhecimentos (MOREIRA, 2012, p. 3)

Ausubel também propõe *Princípios Programáticos* como a *Diferenciação Progressiva* e a *Reconciliação Integrativa* ou *Integradora*, que servem como condições que tornam favoráveis a aprendizagem significativa.

O Princípio da *Diferenciação Progressiva*, refere-se à introdução de novas ideias/conceitos de maneira crescente, ou seja, partir de um conceito mais geral e amplo para um conceito mais específico.

Moreira (2012) destaca que:

A diferenciação progressiva é o processo de atribuição de novos significados a um dado subsunçor (um conceito ou uma proposição, por exemplo) resultante da sucessiva utilização desse subsunçor para dar significado a novos conhecimentos.

[...] Através de sucessivas interações um dado subsunçor vai, progressivamente, adquirindo novos significados, vai ficando mais rico, mais refinado, mais diferenciado, e mais capaz de servir de ancoradouro para novas aprendizagens significativas (MOREIRA, 2012, p. 6, *grifo* do autor).

Já o Princípio da *Reconciliação Integrativa* ou *Integradora*, dá-se quando os elementos subsunçores são reconhecidos e relacionados, verificando as similaridades e diferenças entre eles e conquistando novos significados, fazendo com que a estrutura cognitiva se rearranje, procurando por inconsistências previamente existentes.

Segundo Moreira (2012):

A reconciliação integradora, ou integrativa, é um processo da dinâmica da estrutura cognitiva, simultâneo ao da diferenciação progressiva, que consiste em eliminar diferenças aparentes, resolver inconsistências, integrar significados, fazer superordenações (MOREIRA, 2012, p. 6, *grifo* do autor).

Moreira (2012) também destaca que:

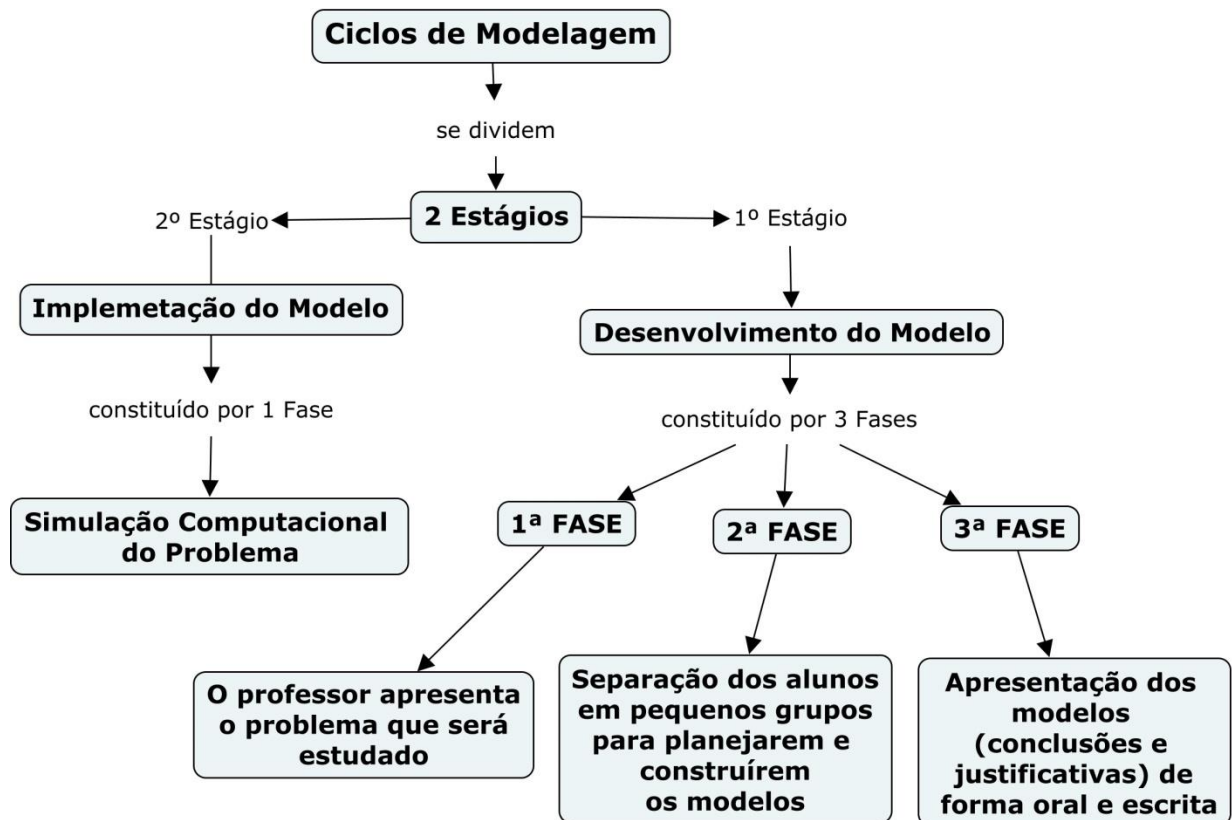
Quando aprendemos de maneira significativa temos que progressivamente diferenciar significados dos novos conhecimentos adquiridos a fim de perceber diferenças entre eles, mas é preciso também proceder a reconciliação integradora. Se apenas diferenciarmos cada vez mais os significados, acabaremos por perceber tudo diferente. Se somente integrarmos os significados indefinidamente, terminaremos percebendo tudo igual. Os dois processos são simultâneos e necessários à construção cognitiva, mas parecem ocorrer com intensidades distintas. A diferenciação progressiva está mais relacionada à aprendizagem significativa subordinada, que é mais comum, e a reconciliação integradora tem mais a ver com a aprendizagem significativa superordenada que ocorre com menos frequência (MOREIRA, 2012, p. 7).

3.2 Os Ciclos de Modelagem

Segundo Heidemann, Araújo e Veit (2012), o ensino através dos CM contribui para a aprendizagem significativa do aluno quando o mesmo se envolve ativamente na construção e utilização de modelos, apresentando seus resultados e conclusões aos colegas.

Os CM de Hestenes (2006) é uma metodologia baseada em modelagem matemática composta por estágios e fases (Figura 1).

Figura 1: Resumo dos estágios e das fases dos ciclos de modelagem



Fonte: Autor (2018).

Em cada um dos estágios e fases, o professor tem um importante papel que segundo os autores:

[...] o elemento mais crítico na implementação bem sucedida dos ciclos de modelagem é a habilidade do professor em sala de aula. Ele deve ter clareza dos seus objetivos e deve manter sempre um ambiente de abertura com seus alunos (HEIDEMANN; ARAÚJO; VEIT, 2012, p. 976).

Esses autores refletem ainda, que o ensino de ciências a partir dos CM contribui para uma aprendizagem significativa dos estudantes quando eles participam de atividades que os faça comunicar-se com os demais estudantes da sala. Essa comunicação dos estudantes tem suporte no uso de quadros brancos (*whiteboards*) que segundo Souza e Rozal (2016):

[...] possibilitam a elaboração de múltiplos registros semióticos (pictóricos, diagramático, gráficos, algébricos) de maneira recursiva. Assim, em cada ciclo, o conteúdo curricular é organizado ao redor de um modelo geral e não em blocos de assuntos pré-determinados. Isso garante maior coerência entre os saberes, evitando a fragmentação do conhecimento em prol da interdisciplinaridade (SOUZA e ROZAL, 2016, p. 101).

Desta maneira, de acordo com Hestenes (2010) apud Souza e Rozal (2016):

[...] um ciclo de modelagem pode ser decomposto em quatro fases principais: construção, análise, validação e aplicação do modelo. Durante um ciclo de modelagem e dependendo dos objetivos da investigação, pode haver grande variação na ênfase sobre essas quatro fases. Além disso, as mesmas não são necessariamente implementadas em ordem linear, por exemplo, questões levantadas nas fases de análise ou validação podem levar a modificações na fase de construção do modelo (SOUZA; ROZAL, 2016, p. 102).

Na fase de construção do modelo, os alunos são orientados e recebem as ferramentas necessárias que darão suporte para modelar sistemas reais. Nesta fase lhes são apresentados o problema ou a pergunta que deve ser respondida. Segundo Heidemann, Veit e Araújo (2012):

Essa demonstração pode ser conduzida de diferentes formas, podendo ser explorados vídeos, simulações computacionais, experimentos de laboratório, etc. Além disso, ao contrário de iniciar pela exposição de uma situação física para que os estudantes explorem e construam um modelo teórico com o intuito de descrevê-lo, o ciclo pode começar com a apresentação de um modelo teórico, cabendo aos alunos avaliar a sua adequação para descrever uma determinada situação. O essencial é que o problema envolva o uso de habilidades e ferramentas de modelagem (HEIDEMANN; ARAÚJO; VEIT, 2012, p. 974).

Na fase de análise do modelo, os estudantes devem extrair as informações relevantes do modelo, assim como uma explicação física, uma predição experimental ou uma simples resposta para o problema físico que está sendo modelado (Souza e Rozal, 2016). Segundo Heidemann, Veit e Araújo (2012):

[...] Hestenes (1996) ressalta que não é de se esperar uma correspondência perfeita, porque cada modelo é uma representação incompleta, isto é, há sempre algumas características do sistema que não são representadas pelo modelo. Essa avaliação de validade passa por uma análise do que é negligenciado pelo modelo teórico, e pode envolver também um balanço das fontes de incerteza dos experimentos e das consequentes incertezas dos dados empíricos obtidos (HEIDEMANN; ARAÚJO; VEIT, 2012, p. 975).

De acordo com Souza e Rozal (2016) na fase de validação do modelo, deve-se avaliar a adequabilidade do modelo matemático para representar o problema físico em questão,

podendo envolver o planejamento e condução de experimentos, ou até mesmo trabalhos e artigos da comunidade científica. Ainda nesta fase, os estudantes devem apresentar suas conclusões na forma oral e escrita destacando os pontos que foram e não foram considerados no modelo, justificando-os. “Com isso, busca-se aprimorar a habilidade de argumentação dos alunos e a qualidade de seus discursos” (HEIDEMANN; ARAÚJO; VEIT, 2012, p. 975). É nessa fase que os quadros brancos são utilizados.

A fase de aplicação do modelo consiste em utilizar o modelo matemático construído e aplicá-lo em novas situações problema. Isso garante com que os estudantes aprofundem e fixem os conhecimentos adquiridos durante as fases anteriores. Segundo Heidemann, Veit e Araújo (2012), nesta fase:

[...] os estudantes trabalham em problemas desafiadores em pequenos grupos, e depois apresentam e defendem seus resultados para a classe por meio dos quadros brancos. Essa fase inclui questionários, testes, trabalhos em laboratório, implementação computacional, etc. (HEIDEMANN; ARAÚJO; VEIT, 2012, p. 976).

4 MODELO E MODELAGEM MATEMÁTICA

Nesta seção, serão abordados os conceitos de modelo e de modelagem matemática de acordo com as visões e definições de diferentes autores encontrados na literatura no âmbito educacional. Primeiramente é realizada uma breve contextualização histórica da utilização da linguagem matemática como ferramenta para a descrição de fenômenos naturais, assim como na resolução de problemas do cotidiano da humanidade. Posteriormente serão apresentados os conceitos de modelo e modelagem matemática nas diferentes concepções estudadas.

4.1 Modelagem Matemática: uma perspectiva Histórica

Desde os tempos mais antigos a humanidade procura resolver seus problemas do cotidiano através dos recursos disponíveis no momento e, diretamente ou indiretamente, a modelagem matemática sempre esteve presente na solução desses problemas. De acordo com Stocco e Diniz (2010), o homem percebeu a partir de observações sucessivas de determinados fenômenos naturais que, esses seguiam na maioria das vezes os mesmos princípios, havendo a possibilidade de descrevê-los por meio de expressões matemáticas. Desta forma a matemática tornou-se uma importante ferramenta de representação e do desenvolvimento de modelos que descrevessem as leis naturais presentes nas observações e até mesmo em situações do cotidiano que necessitavam de soluções.

De acordo com Renz (2015), com o passar dos anos o processo da construção da modelagem matemática sofreu inúmeras mudanças e melhorias para a criação de novos modelos que permitiu que determinados problemas e fenômenos naturais fossem solucionados e compreendidos, um dos maiores e mais conhecido exemplo da história é a narrativa do grande trabalho realizado pelo matemático Tales de Mileto (624 – 578 a.C.) que observou as sombras produzidas por uma pirâmide e calculou a altura dessa pirâmide e a distância dela ao local onde ela se encontrava.

Para Santos (2011) apud Costa (2016):

[...] os conceitos matemáticos foram sendo elaborados ao longo da história, tanto pela necessidade da evolução da sociedade, quanto do desenvolvimento da própria Matemática. Grande parte das descobertas de conceitos matemáticos não teve de pronto, uma aplicação fora dela, porém em momentos posteriores esses conceitos se fizeram presentes no desenvolvimento das diversas ciências e da tecnologia (SANTOS, 2011 apud COSTA, 2016, p. 61).

Neste contexto, Barbosa (2004) apresenta cinco argumentos para a inserção da modelagem no currículo escolar, sendo eles [...] motivação, facilitação da aprendizagem, preparação para utilizar a matemática em diferentes áreas, desenvolvimento de habilidades gerais de exploração e compreensão do papel sócio-cultural da matemática (BARBOSA, 2004, p. 74). Sendo assim, neste trabalho é dado ênfase no primeiro e segundo argumento, onde se busca inserir a modelagem matemática como estratégia de ensino motivadora e inovadora em sala de aula, de maneira a encontrar evidências de uma aprendizagem significativa.

4.2 O que é Modelo Matemático?

De acordo com Biembengut e Hein (2005) apud Macêdo (2012), modelo matemático “é um conjunto de símbolos e relações matemáticas que traduz, de alguma forma, um fenômeno em questão ou um problema ligado a uma situação real” (BIEMBENGUT; HEIN, 2005, p. 12 apud MACÊDO, 2012, p. 568).

Dessa maneira, o ser humano está sempre em busca de um modelo que o ajude a interpretar ou descrever determinado problema ou fenômeno. A seguir são apresentadas outras definições de modelo matemático, que segundo Renz (2015), “... é sempre a mesma: uma representação simplificada da realidade sob a visão do investigador” (RENZ, 2015, p. 18).

Assim, quando se deseja estudar características de um sistema, de um objeto físico, propõe-se um modelo matemático, que pode ser descrito como:

[...] um análogo estrutural do sistema que ele representa, contendo elementos e relações fundamentais que reproduzem as características deste sistema dentro de um contexto de validade limitado, e sem a pretensão de ser uma imagem especular do mesmo (VEIT; ARAÚJO, 2005, p. 17).

4.3 Definição de Modelagem Matemática

Segundo Renz (2015), a partir da definição de modelo matemático [...] a Modelagem Matemática seria o ato de obter tal modelo, ou seja, um processo que transforma uma situação da realidade em uma expressão matemática (RENZ, 2015, p. 19).

Na visão de Bassanezi (2013) apud Renz (2015):

Modelagem Matemática é um processo dinâmico utilizado para a obtenção e validação de modelos matemáticos. É uma forma de abstração e generalização com a finalidade de previsão de tendências. A modelagem consiste, essencialmente, na arte de transformar situações da realidade em problemas matemáticos cujas soluções devem ser interpretadas na linguagem usual (BASSANEZI, 2013 apud RENZ, 2015, p. 19).

Portanto, ao propor o modelo matemático, o pesquisador conta com a modelagem matemática para abstrair, criar e prevenir tendências, de modo a obter uma representação que condiz com a realidade a ser estudada.

Biembengut (2014) apud Renz (2015) define que:

Modelagem Matemática é o processo que envolve a obtenção de um modelo. Este, sob certa óptica, pode ser considerado um processo artístico, visto que, para se elaborar um modelo, além de conhecimento de Matemática, o modelador precisa ter uma dose significativa de intuição e criatividade para interpretar o contexto, saber discernir que conteúdo matemático melhor se adapta e também ter senso lúdico para jogar com as variáveis envolvidas (BIEMBENGUT, 2014 apud RENZ, 2015, p. 14).

Sendo assim, a modelagem quando utilizada em sala de aula, possibilita aos alunos usufruir de sua criatividade, tornando-os investigadores, interpretadores e agentes ativos na construção do saber.

Barbosa (2001) apud Renz (2015) destaca que:

Modelagem Matemática é um ambiente de aprendizagem no qual os alunos são convidados a indagar e investigar, por meio da Matemática, situações oriundas de outras áreas da realidade. (BARBOSA, 2001 apud RENZ, 2015, p. 19).

Neste contexto, foi proposto aos alunos a construção de um modelo matemático baseado em estrelas orbitando um buraco negro, buscando através da modelagem matemática, proporcionar um ambiente de aprendizagem significativa no qual os alunos investiguem, criem e interpretem a realidade sobre astronomia através de expressões matemáticas e simulações computacionais.

5 DESCRIÇÃO DO PROBLEMA PROPOSTO

Nesta seção, serão apresentados os pressupostos matemáticos e as leis físicas utilizados neste trabalho que explicam o movimento dos corpos celestes. Desde já, deve-se ficar claro ao leitor que os conceitos abordados fazem parte do caminho e do modelo

escolhido pelo autor para descrever as órbitas das estrelas em torno do buraco negro *Sgr A** e que tal modelo pode ou não ser seguido pelos alunos durante a construção de seus modelos.

5.1 Leis de Kepler e Lei da Gravitação Universal de Newton

Preocupado em descrever as órbitas dos planetas do sistema solar, aproximadamente em 1605 o matemático e astrônomo alemão Johannes Kepler (1571-1630) estudou as observações de outro astrônomo dinamarquês, Tycho Brahe (1546- 1601) e postulou três importantes leis empíricas¹, sendo elas (HALLIDAY; RESNICK; WALKER, 2012, p. 40-41):

- **1ª Lei:** *Lei das órbitas:* todos os planetas se movem em órbitas elípticas, com o Sol em um dos focos;
- **2ª Lei:** *Lei das áreas:* A reta que liga um planeta ao Sol varre áreas iguais no plano da órbita do planeta em intervalos de tempos iguais;
- **3ª Lei:** *Lei harmônica:* O quadrado do período orbital (P) de qualquer planeta é proporcional ao cubo do semieixo maior (a) da sua órbita:

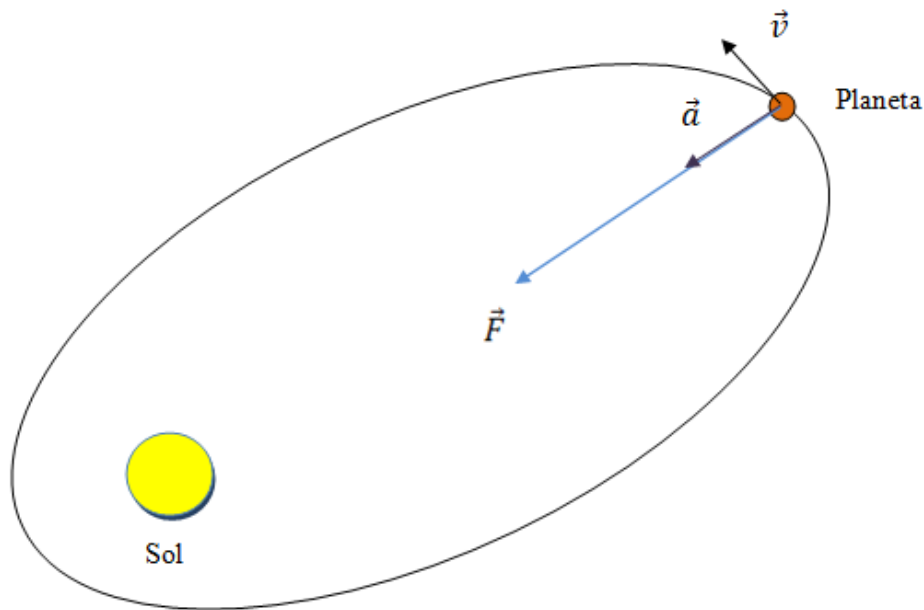
$$P^2 = ka^3 \tag{1}$$

onde k é uma constante de proporcionalidade.

Com essas três leis, Kepler explicava a forma com que os planetas se moviam, o que já foi uma grande contribuição para astronomia da sua época, mas essas leis não explicavam o porquê os planetas se moviam de tal forma. Essa explicação foi dada por Isaac Newton (1643-1727) com o que ele chamou de força da gravidade. Newton explicou o movimento dos planetas em torno do Sol (Figura 2), assumindo a existência de uma força (\vec{F}) dirigida ao Sol, sendo que esta produz uma aceleração (\vec{a}) que faz com que a velocidade (\vec{v}) do planeta sempre mude sua direção.

¹ Uma expressão matemática que sintetiza, por meio de regressões, correlações ou outro meio numérico, uma série de resultados observados em diversos ensaios, sem que seja necessário para isto dispor de uma teoria que a sustente nem explicar porque e por quais processos naturais e (ou) físicos funciona.

Figura 2- Órbita do planeta devido à força gravitacional



Fonte: Autor (2018).

Com isto, Newton descobriu a *lei da Gravitação Universal* (Halliday, Resnick e Walker (2012)):

$$\vec{F} = -G \frac{m_1 m_2}{|r|^3} \vec{r} \quad (2)$$

Onde G é a constante da *Gravitação Universal* e numericamente corresponde a $6,67 \cdot 10^{-11} \text{Nm}^2/\text{kg}^2$, m_1 e m_2 são as massas dos planetas e r é a distância de separação entre os planetas. O sinal negativo indica que a força é atrativa.

Newton também deduziu as três leis de Kepler combinando suas leis de movimento com a *Lei da Gravitação Universal* e mostrou que a terceira lei de Kepler, especificamente pode ser expressa da seguinte forma:

$$P^2 = \frac{4\pi}{G(m_1 + m_2)} (r_1 + r_2)^3 \quad (3)$$

Desta forma, a terceira lei de Kepler na forma deduzida por Newton pode ser utilizada para quaisquer sistemas que interajam gravitacionalmente (levando em consideração o

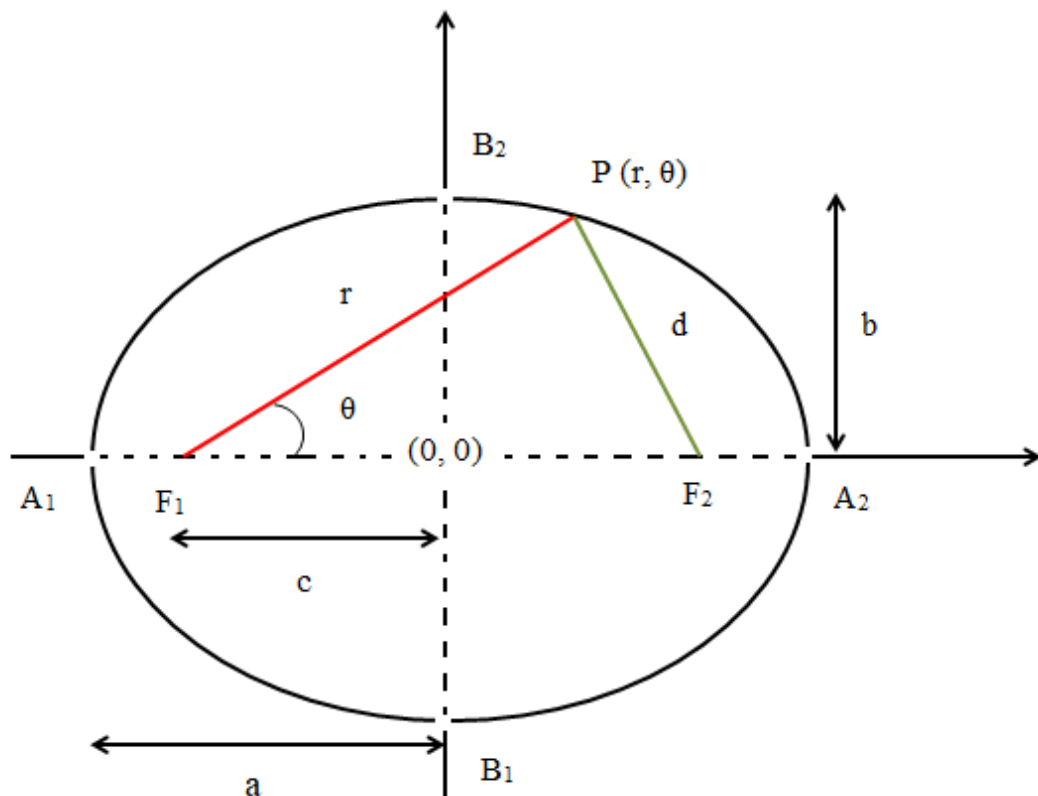
sistema de unidades adequado), inclusive para descrever as órbitas das estrelas que orbitam o *Sgr A**.

5.2 Elipse

Matematicamente, as órbitas das estrelas que orbitam o *Sgr A** descrevem uma trajetória elíptica, portanto é natural que seja usado na construção do modelo o conceito de elipse.

Uma elipse (Figura 3) é o conjunto dos pontos $P = (x, y)$ do plano, tal que a soma das distâncias de P a dois pontos fixos F_1 e F_2 é constante, ou seja, $\overline{F_1P} + \overline{F_2P} = 2a$. F_1 e F_2 são denominados focos da elipse e a o semieixo maior da elipse centrada na origem $(0,0)$. Os pontos A_1, A_2, B_1 e B_2 são definidos vértices da elipse com eixos maior e menor iguais a $\overline{A_1A_2} = 2a$ e $\overline{B_1B_2} = 2b$, respectivamente. A distância entre os focos $\overline{F_1F_2}$ é denominada de distância focal $= 2c$ e a razão (c/a) é definida como a excentricidade e da elipse.

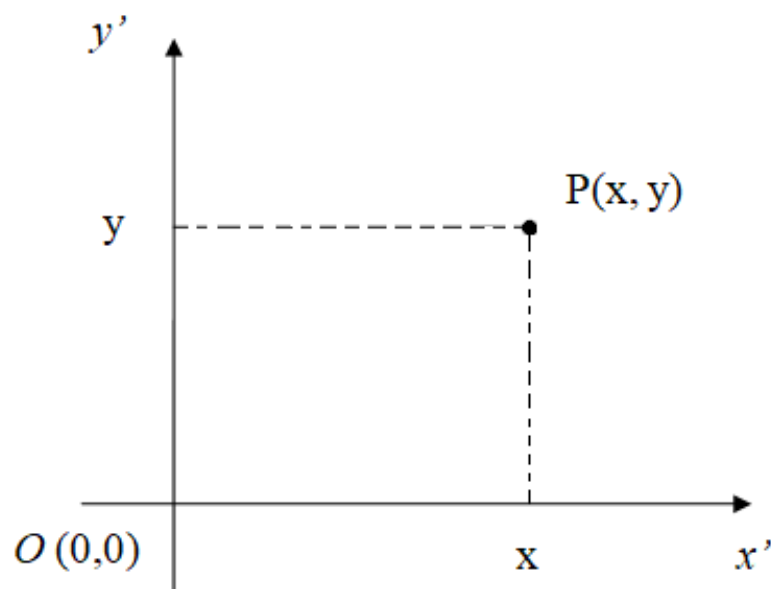
Figura 3 - Representação da elipse



Fonte: Autor (2018).

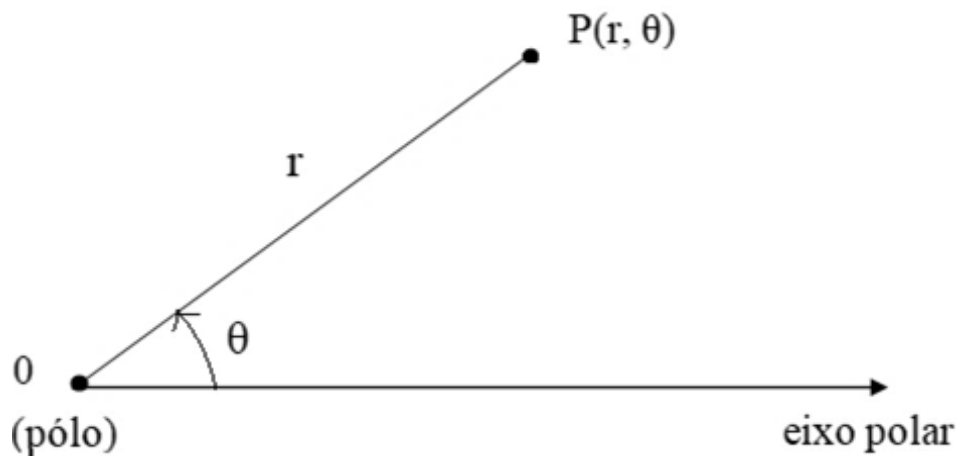
De acordo com a geometria do problema proposto, é usual utilizar a representação da elipse através de coordenadas polares. Sendo assim, neste trabalho será demonstrada a equação da elipse em coordenadas polares, sendo essas, um sistema de coordenadas bidimensional em que cada ponto no plano $P(x, y)$, em coordenadas cartesianas, pode ser representado por $P(r, \theta)$, em coordenadas polares, sendo r a distância da origem do eixo polar até o ponto P , e θ o ângulo que r faz com o eixo polar. Ver Figuras 4 e 5.

Figura 4 - Representação de um ponto P qualquer em coordenadas cartesianas



Fonte: Autor (2018).

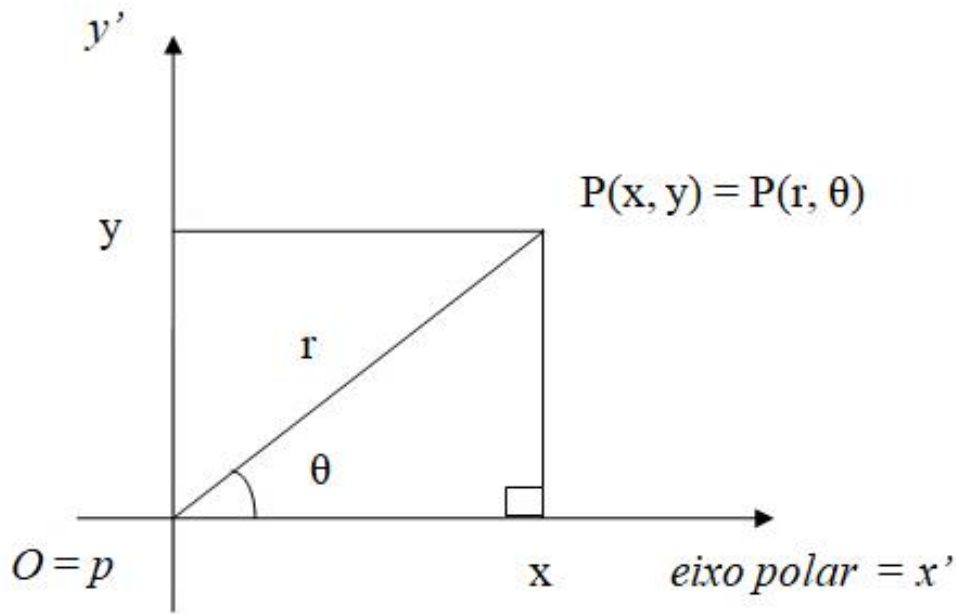
Figura 5 - Representação de um ponto P qualquer em coordenadas polares



Fonte: Autor (2018).

Esses dois sistemas de coordenadas se relacionam fazendo-se coincidir a origem $O(0, 0)$ do sistema cartesiano com o pólo p do sistema polar, e o eixo polar com o eixo x' . Ver Figura 6.

Figura 6 - Representação do sistema de coordenadas cartesianas com o sistema de coordenadas polares



Fonte: Autor (2018).

No triângulo retângulo representado na Figura 5, tem-se que $r^2 = x^2 + y^2$ e de acordo com as relações trigonométricas $\cos \theta = x/r$ e $\sin \theta = y/r$, conclui-se que:

$$x = r \cos \theta \quad (4)$$

$$y = r \sin \theta \quad (5)$$

Desta forma, seja um ponto qualquer $P(x, y)$ sobre a elipse e θ o ângulo orbital deste ponto (imagine que este ponto seja uma estrela que orbita o *Sgr A**), pode-se descrever a órbita desta estrela em termos das coordenadas polares como será demonstrado a seguir. Colocando-se a origem do sistema sobre o foco F_1 da elipse (Figura 2), e aplicando a lei dos cossenos no triângulo $\overline{F_1 F_2 P}$, tem-se que:

$$d^2 = r^2 + 4c^2 - 4cr \cos \theta \quad (6)$$

Da definição da elipse $\overline{F_1P} + \overline{F_2P} = 2a$, tem-se que:

$$r + d = 2a \quad (7)$$

Isolando o parâmetro d da equação acima:

$$d = 2a - r \quad (8)$$

Substituindo (8) em (6):

$$4a^2 - 4ar + r^2 = r^2 + 4c^2 - 4cr \cos \theta \quad (9)$$

Da relação notável da elipse:

$$a^2 = b^2 + c^2 \quad (10)$$

Isolando o parâmetro b :

$$b^2 = c^2 - a^2 \quad (11)$$

Manipulando (9) e rearranjando os termos:

$$4(a^2 - c^2) = 4r(a - c \cos \theta) \quad (12)$$

Substituindo (11) em (12), tem-se que:

$$b^2 = r(a - c \cos \theta) \quad (13)$$

Isolando r em (13):

$$r = \frac{b^2}{a - c \cos \theta} \quad (14)$$

Dividindo o lado direito de (14) por a , chega-se na forma final da equação da elipse em coordenadas polares:

$$r = \frac{p}{1 - e \cos \theta} \quad (15)$$

Onde $p = b^2/a$ e $e = c/a$ é a excentricidade da elipse.

5.3 Matrizes de Rotação

Para descrever órbitas elípticas em diferentes planos, podem-se utilizar as matrizes de rotação, i.e, matrizes quadradas que, quando aplicadas sobre um vetor ou uma matriz coluna, muda a sua direção sem mudar a sua magnitude (módulo). Desta maneira, as matrizes de rotação apresentam uma característica interessante, elas são unitárias. Em outras palavras, ao aplicar uma rotação sobre um vetor \vec{v} cujas coordenadas são v_x , v_y e v_z , esse vetor é rodado em um ângulo θ qualquer, deslocando-se de um ponto do plano cartesiano para um novo ponto do mesmo plano, tornando-se agora num vetor \vec{v}' cujas coordenadas passam a ser v_x' , v_y' e v_z' . Ao rotacionar o vetor \vec{v} em torno de um eixo, por exemplo, o eixo x , sua componente rotacionada correspondente a esse eixo não muda, de forma análoga:

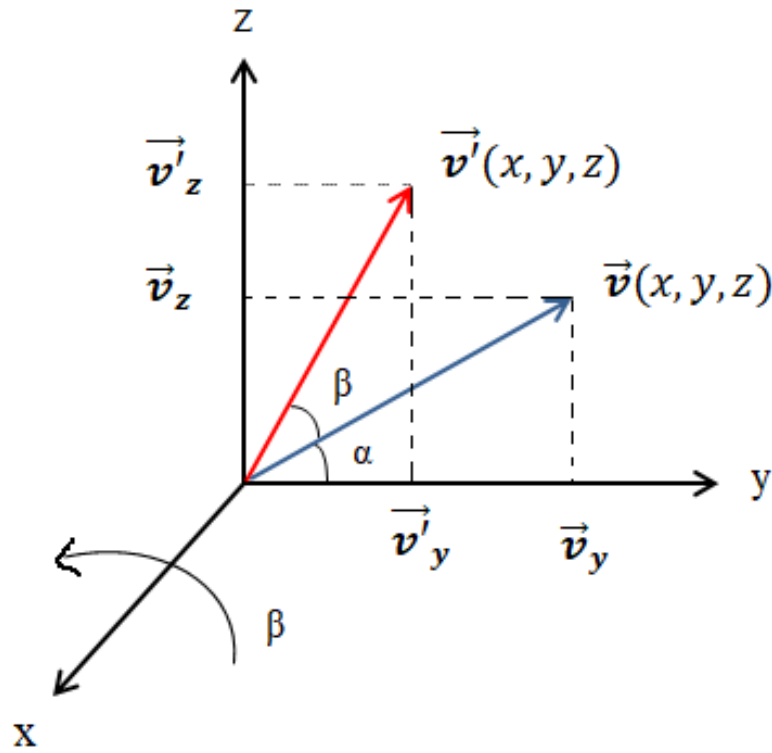
$$v_x' = v_x \text{ (rotação em torno do eixo } x)$$

$$v_y' = v_y \text{ (rotação em torno do eixo } y)$$

$$v_z' = v_z \text{ (rotação em torno do eixo } z)$$

Serão demonstradas a seguir, as matrizes de rotação em três dimensões, rotacionando o vetor \vec{v} primeiramente em torno do eixo x , ver Figura 7.

Figura 7 - Rotação de um ângulo β do vetor \vec{v} em torno do eixo x



Fonte: Autor (2018).

De acordo com a Figura 7, as coordenadas dos vetores \vec{v} e \vec{v}' podem ser expressas da seguinte maneira, respectivamente:

$$|\vec{v}_y| = |\vec{v}| \cos \alpha \quad (16)$$

$$|\vec{v}_z| = |\vec{v}| \sin \alpha \quad (17)$$

$$|\vec{v}'_y| = |\vec{v}| \cos(\alpha + \beta) \quad (18)$$

$$|\vec{v}'_z| = |\vec{v}| \sin(\alpha + \beta) \quad (19)$$

Utilizando as identidades trigonométricas a seguir que relacionam senos e cossenos:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) - \text{sen}(\alpha) \text{sen}(\beta) \quad (20)$$

$$\text{sen}(\alpha + \beta) = \text{sen}(\alpha) \cos(\beta) + \text{sen}(\beta) \cos(\alpha) \quad (21)$$

Substituindo (20) em (18) e (21) em (19) respectivamente, tem-se:

$$\left| \vec{v}'_y \right| = |\vec{v}| [\cos(\alpha) \cos(\beta) - \text{sen}(\alpha) \text{sen}(\beta)] \quad (22)$$

$$\left| \vec{v}'_z \right| = |\vec{v}| [\text{sen}(\alpha) \cos(\beta) + \text{sen}(\beta) \cos(\alpha)] \quad (23)$$

Isolando $\cos(\alpha)$ e $\text{sen}(\alpha)$ de (16) e (17), respectivamente:

$$\cos(\alpha) = \frac{|\vec{v}_y|}{|\vec{v}|} \quad (24)$$

$$\text{sen}(\alpha) = \frac{|\vec{v}_z|}{|\vec{v}|} \quad (25)$$

Agora, substituindo (24) e (25) em (22) e (23), respectivamente, e simplificando, tem-se:

$$\left| \vec{v}'_y \right| = |\vec{v}_y| \cos(\beta) - |\vec{v}_z| \text{sen}(\beta) \quad (26)$$

$$\left| \vec{v}'_z \right| = |\vec{v}_y| \text{sen}(\beta) + |\vec{v}_z| \cos(\beta) \quad (27)$$

Como a componente x do vetor permanece a mesma, tem-se que:

$$|\vec{v}_x| = \left| \vec{v}'_x \right| \quad (28)$$

Portanto, agora se podem escrever as componentes do vetor \vec{v}' na forma matricial como segue:

$$\begin{bmatrix} v'_x \\ v'_y \\ v'_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\beta) & -\text{sen}(\beta) \\ 0 & \text{sen}(\beta) & \cos(\beta) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} \quad (29)$$

Onde a primeira linha da matriz quadrada é $[1, 0, 0]$, pois como descrito anteriormente, a componente x do vetor não muda. Algebricamente:

$$\vec{v}' = R_x \vec{v} \quad (30)$$

Onde R_x é a matriz de rotação em torno do eixo x , logo:

$$R_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\beta) & -\text{sen}(\beta) \\ 0 & \text{sen}(\beta) & \cos(\beta) \end{bmatrix} \quad (31)$$

De forma análoga, pode-se realizar a rotação do vetor \vec{v} em torno dos eixos y e z . Desta maneira, R_y e R_z são definidos da forma:

$$R_y = \begin{bmatrix} \cos(\beta) & 0 & -\text{sen}(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \text{sen}(\beta) & 0 & \cos(\beta) \end{bmatrix} \quad (32)$$

$$R_z = \begin{bmatrix} \cos(\beta) & -\text{sen}(\beta) & 0 \\ \text{sen}(\beta) & \cos(\beta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (33)$$

5.4 A Lei da Gravitação Universal na forma Diferencial

Outra maneira de representar o problema proposto é reescrever a *Lei da Gravitação Universal* (equação (2)) na forma diferencial. Suponha um sistema tridimensional no qual o buraco negro $Sgr A^*$ esteja no centro. Suponha ainda, que exista uma estrela de massa m cuja órbita ao redor do $Sgr A^*$ é dada por:

$$X(t) = (x(t); y(t); z(t)) \quad (34)$$

Assim, o vetor *velocidade* é a derivada do vetor *posição* definida anteriormente (Halliday, Resnick e Walker (2008)), de modo que:

$$\dot{X}(t) = (\dot{x}(t); \dot{y}(t); \dot{z}(t)) \quad (35)$$

Também se pode definir o vetor *aceleração* como a derivada do vetor *velocidade* (Halliday, Resnick e Walker (2008)), da forma que segue:

$$\ddot{X}(t) = (\ddot{x}(t); \ddot{y}(t); \ddot{z}(t)) \quad (36)$$

Como a estrela está em movimento, tem-se pela *Segunda Lei de Newton* que:

$$F = m\ddot{X} \quad (37)$$

Lembre-se que a interpretação física da segunda derivada (\ddot{X}) é a aceleração no tempo t e m é a massa da estrela. Tem-se ainda pela *Lei da Gravitação Universal* de Newton que:

$$F = -G \frac{m \cdot M}{|X|^2} \frac{X}{|X|} \quad (38)$$

onde, M é a massa do Sgr A* e o sinal negativo é porque a força gravitacional é de atração. Chamando $r = |X|$, segue que:

$$F = -G \frac{m \cdot M}{r^3} X \quad (39)$$

Substituindo (37) em (39):

$$m\ddot{X} = -G \frac{m \cdot M}{r^3} X \quad (40)$$

Simplificando m em ambos os lados de (40), tem-se:

$$\ddot{X} = -G \frac{M}{r^3} X \quad (41)$$

Portanto, reescrevendo (41) em suas componentes, tem-se:

$$\ddot{x} = -G \frac{M}{r^3} x \quad (42)$$

$$\ddot{y} = -G \frac{M}{r^3} y \quad (43)$$

$$\ddot{z} = -G \frac{M}{r^3} z \quad (44)$$

Sendo assim, este problema pode ser modelado utilizando o *software Scilab*² que possui uma linguagem baseada em matrizes, de forma que ao invés de representar o sistema como um conjunto de 6 (seis) equações independentes (ao longo dos eixos x , y e z para posições e velocidades), pode-se representar como uma equação de matriz única de dimensão 6×6 . Esse método é uma abordagem clássica para mudar de uma equação diferencial escalar de segunda ordem para uma equação diferencial de matriz de primeira ordem, do tipo:

$$\dot{u} = A \cdot u \quad (45)$$

onde A e u são expressos da seguinte forma:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{GM}{r^3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{GM}{r^3} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{GM}{r^3} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (46)$$

² SCILAB. *software Scilab*. Disponível em: <http://www.scilab.org/>. Acesso em: 12 maio 2018.

$$u = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} \quad (47)$$

Este último método apresentado para modelar o problema proposto é de uma complexidade mais elevada e pode ser explorada com mais detalhes em um trabalho futuro, porém, fica aqui uma sugestão para o método ser utilizado.

6 METODOLOGIA

Nesta seção serão apresentadas as metodologias de ensino e de pesquisa. Na subseção referente à metodologia de ensino, serão apresentados como os encontros desta proposta foram planejados e aplicados de acordo com os CM de Hestenes, os recursos educacionais utilizados, bem como o público alvo da pesquisa. Na segunda subseção é apresentada a metodologia da pesquisa, assim como a maneira em que foram coletados e analisados os dados obtidos.

6.1 Metodologia de Ensino

Primeiramente delimitou-se o tema e o problema que seria estudado e aplicado dentro do contexto educacional da sala de aula. O problema escolhido está relacionado à astronomia e trata-se da descrição de órbitas de estrelas em torno do buraco negro *Sgr A**, que está localizado no centro da Via-Láctea. Posteriormente foram realizadas pesquisas na literatura acerca de estratégias e metodologias inovadoras no ensino que tivessem seu foco no aluno como participante ativo na construção do processo de ensino-aprendizagem.

Neste contexto, visando uma descrição mais completa do problema, buscou-se embasamento teórico nas *Leis de Kepler* e na *Lei da Gravitação Universal de Newton*, bem como nas seções de *cônicas (elipse)* de geometria analítica e *transformações lineares (matrizes de rotação)* de álgebra linear.

O público alvo escolhido para a implementação desta proposta didática, foi composto por 8 (oito) alunos de graduação da área exatas da Universidade Federal do Pampa (UNIPAMPA), que encontram-se em diferentes fases (semestres) de seus cursos, ou seja, apresentam perfis diferentes, sendo 6 (seis) alunos do curso de Engenharia de Energias, 1 (um) aluno do curso de Engenharia de Produção e 1 (um) aluno do curso de Engenharia da Computação. Deste modo, foram planejados três encontros com duração de 4 horas cada (ver Quadro 1), com um intervalo de uma semana entre eles. Para cada um desses encontros foi elaborado um plano de aula conforme apresentado no Apêndice A.

Quadro 1 - Cronograma dos encontros do ciclo de modelagem

| Encontros | Fases do Ciclo de Modelagem | Atividade |
|--------------------|-----------------------------|--|
| 01 (Apêndice A) | 1ª Fase | Apresentação da proposta e do problema a ser modelado através de uma abordagem utilizando um vídeo, visando motivar os alunos; apresentação do problema a ser modelado. |
| | 2ª Fase | Separação dos alunos em grupos; distribuição do material de apoio; início da construção dos modelos por parte dos alunos. |
| 02 (Apêndice A) | 2ª Fase | Continuação e término da construção dos modelos iniciados no encontro 01. |
| 03 (Apêndice A) | 3ª Fase | Apresentação realizada pelos alunos sobre os modelos para o grande grupo com o auxílio do quadro branco; discussão dos pontos relevantes presentes em cada modelo em comparação com o modelo físico real; apresentação do <i>software GeoGebra</i> . |
| | 4ª Fase | Implementação (simulação) do modelo por parte dos alunos no <i>software GeoGebra</i> . |

Fonte: Autor (2018).

Durante a realização de todo este trabalho, buscou-se elaborar uma proposta didática diferenciada das metodologias de ensino tradicionais aliando os CM de Hestenes com a TAS de Ausubel, procurando sempre propiciar ao aluno uma aprendizagem significativa, levando em consideração seus conhecimentos prévios, suas motivações e curiosidades a respeito do tema estudado, proporcionando discussões em sala de aula durante o desenvolvimento das fases do ciclo de modelagem, tendo sempre o professor como mediador.

Alguns recursos educacionais foram utilizados visando à construção de um cenário inovador e motivador para os alunos, tornando as aulas mais dinâmicas, unindo tecnologia e

conceitos teóricos (e muitas vezes abstratos), propiciando uma ruptura com o método tradicional e corroborando para uma aprendizagem de fato significativa. São eles:

- i) Simulação;
- ii) *Whiteboards*³;
- iii) Vídeo⁴

De acordo com Evangelho (2017, No prelo), “As simulações podem ser potencialmente significativas, dependendo da maneira como o professor as utiliza, pois proporcionam aos alunos uma interação entre conceitos teóricos e abstratos, com a realidade na qual estão inseridos” (EVANGELHO, 2017, p.43, No prelo).

Segundo Greis e Reategui (2010) apud Evangelho (2017, No prelo):

[...] as simulações educacionais, as quais permitem reproduzir em sala de aula conceitos físicos que necessitariam de modelos mais complexos para compreensão dos fenômenos observáveis no mundo real. Estas novas possibilidades sugerem novas formas de interação entre alunos e os conteúdos que estão sendo trabalhados de forma digital. Este diálogo que se estabelece entre o homem e a máquina, o qual chamamos de interação (Lemos, 2002), possibilita nas simulações educacionais um novo patamar de interatividade para o aluno, ou seja, uma maior ação ou controle sobre o ambiente que está sendo explorado (GREIS; REATEGUI, 2010, p. 2 apud EVANGELHO, 2017, p. 43, No prelo).

Já os *whiteboards* são elementos fundamentais para o desenvolvimento de um ciclo de modelagem, pois são neles que os grupos apresentam e constroem seus modelos, facilitando, desta forma, a visualização em sala de aula. De acordo com Souza e Rozal (2016), “o ponto culminante de um ciclo de modelagem é o relato e discussão dos resultados em sessões de whiteboarding” (SOUZA; ROZAL, 2016, p. 103), pois de acordo com Hestenes (2010) apud Souza e Rozal (2016) é no momento da discussão que a aprendizagem dos alunos ocorre mais profundamente.

Em relação aos vídeos, Vasconcelos e Leão (2010) destacam:

O profissional em educação que utiliza em sua prática metodológica, recursos audiovisuais e do cotidiano dos alunos, permite que haja o incentivo a problematização de conceitos, satisfazendo as curiosidades dos alunos e necessidades reais ou imaginárias dos mesmos. A mudança proporciona a criação de atividades mais atraentes e com uma maior atuação dos alunos, seja na parte de produção de materiais para uso em sala de aula, seja na apresentação de situações vivenciadas fora do âmbito escolar, possibilitando um desenvolvimento cognitivo, permitindo com isso, novos interesses nos mesmos (VASCONCELOS; LEÃO, 2010, p. 2).

³ Quadros brancos na tradução livre.

⁴ UCLA GALACTIC CENTER GROUP. **Stellar Orbits in the Central Parsec**. [S. l.: s. n.], 2016. 1 vídeo (00:00:16 s). Disponível em: <http://www.galacticcenter.astro.ucla.edu/animations.html>. Acesso em: 12 nov. 2017.

6.2 Metodologia da Pesquisa

Neste trabalho optou-se por utilizar uma metodologia de pesquisa qualitativa, do tipo estudo de caso, pois de acordo com Yin (2001) “[...] o estudo de caso contribui, de forma inigualável, para a compreensão que temos dos fenômenos individuais, organizacionais, sociais e políticos (YIN, 2001, p. 21)”.

Os Estudos de Caso são utilizados por várias áreas como psicologia, medicina e até mesmo economia, entre outros, por que permitem ao pesquisador realizar uma investigação profunda, ampla, detalhada de um indivíduo, grupo ou fenômeno.

Para Fonseca (2002):

Um estudo de caso pode ser caracterizado como um estudo de uma entidade bem definida como um programa, uma instituição, um sistema educativo, uma pessoa, ou uma unidade social. Visa conhecer em profundidade o como e o porquê de uma determinada situação que se supõe ser única em muitos aspectos, procurando descobrir o que há nela de mais essencial e característico. O pesquisador não pretende intervir sobre o objeto a ser estudado, mas revelá-lo tal como ele o percebe. O estudo de caso pode decorrer de acordo com uma perspectiva interpretativa, que procura compreender como é o mundo do ponto de vista dos participantes, ou uma perspectiva pragmática, que visa simplesmente apresentar uma perspectiva global, tanto quanto possível completa e coerente, do objeto de estudo do ponto de vista do investigador (FONSECA, 2002, p. 33).

Além disso, esta metodologia pode alternar entre aspectos quantitativos e qualitativos. Sendo assim, neste trabalho foi abordado o enfoque qualitativo, visto que pesquisas deste tipo irão interpretar a fala, a escrita, os gestos e as ações dos sujeitos envolvidos (CARVALHO, 2011).

Pesquisas qualitativas caracterizam-se por estarem centradas no universo dos significados, das expressões, motivações, enfim, pela subjetividade do grupo (realidade) estudado, que não podem ser quantificados (SILVEIRA; CÓRDOVA, 2009), estudos de caso, por exemplo, podem se basear em qualquer mescla de dados quantitativos e qualitativos.

Além disso, Yin (2001) destaca que “[...] a pesquisa de estudo de caso pode incluir tanto estudos de caso único quanto de casos múltiplos (YIN, 2001, p. 34)”.

Neste contexto, este trabalho é constituído de um único caso, onde investigou-se sobre o processo ensino-aprendizagem de alguns alunos de graduação da área de exatas, visando a construção de modelos matemáticos para descrever um fenômeno físico real. Durante todas as

aulas o pesquisador procurou observar com cuidado o comportamento dos alunos, de forma a encontrar indícios da ocorrência de uma aprendizagem significativa.

6.2.1 Coleta de Dados

Durante a implementação do ciclo de modelagem foram utilizados como instrumentos de coleta de dados a observação direta, e respostas a um questionário avaliativo (Apêndice B) da metodologia utilizada.

Segundo Viecili (2006):

A observação é uma técnica de coleta de dados para conseguir informações e utilizar os sentidos na obtenção de determinados aspectos da realidade. Não consiste apenas em ver e ouvir, como também em examinar fatos ou fenômenos que se desejam estudar. Traz como vantagem, a possibilidade de estudar uma ampla variedade de fenômenos e de coletar dados sobre um conjunto de atitudes comportamentais típicas (VIECILI, 2006, p. 38-39).

Neste contexto, os alunos foram observados e avaliados individualmente e em grupo, durante todo o processo de construção dos modelos matemáticos, principalmente quando realizaram as apresentações para o grande grupo, cujo momento mais relevante foi a fase das discussões dos aspectos que foram levados e não levados em consideração durante a construção dos modelos matemáticos.

O questionário avaliativo foi aplicado com o objetivo de receber um *feedback*⁵ dos alunos acerca da metodologia utilizada, visto que a princípio, este foi o primeiro contato dos alunos com uma proposta sobre modelagem matemática a qual utilizou-se de estratégias inovadoras, incentivando-os a tornarem-se agentes pensantes e construtores críticos e ativos do saber. Além disso, eles tiveram a oportunidade de fazer reflexões e sugestões sobre a proposta didática na qual foram submetidos.

6.2.2 Análise dos Dados

Conforme foi descrito anteriormente, a metodologia utilizada para a análise dos dados tem caráter qualitativo, demandando muito cuidado, por parte do pesquisador, ao analisar detalhadamente as observações realizadas durante os encontros, bem como as respostas obtidas através do questionário sobre a implementação da proposta didática.

⁵ Comentários na tradução livre.

Visto que Carvalho (2011) destaca que “Uma questão delicada da metodologia qualitativa refere-se à validade e à fidedignidade dos resultados obtidos” (CARVALHO, 2011, p. 28).

Neste contexto, as análises foram realizadas de modo totalmente fiel às respostas escritas dos alunos, buscando sempre através dos instrumentos de coletas de dados, descobrir, destacar e selecionar fatos marcantes durante a realização da proposta, principalmente aqueles que fornecem indícios de uma aprendizagem significativa.

7 DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

A primeira fase que caracteriza o início do primeiro estágio (desenvolvimento do modelo) do ciclo de modelagem teve início com a apresentação de um vídeo motivacional, que mostrava estrelas orbitando o buraco negro *Sgr A**, uma breve introdução dos conceitos físicos envolvidos nesta proposta e da apresentação do problema a ser estudado. Durante as falas do pesquisador e a apresentação do vídeo os alunos mostraram-se motivados, realizando perguntas do tipo: como são as forças de interação entre os corpos ?; o que acontece dentro de um buraco negro? e etc., interagindo entre si e com o professor. O problema foi enunciado do seguinte modo: “*Construa um modelo que represente geometricamente o movimento de estrelas orbitando um buraco negro num mesmo plano e em diferentes planos*”.

Durante a implementação do ciclo de modelagem, principalmente na segunda fase, sendo esta a fase que caracteriza a construção ou investigação do modelo, o aspecto que mais se destacou, foi a dificuldade dos alunos em desenvolver seus modelos matemáticos, mesmo recebendo materiais⁶ de apoio contendo os conteúdos que eles deveriam utilizar no processo. Apesar de terem um intervalo de uma semana entre um encontro e outro para tentar construir os modelos matemáticos, até mesmo em casa, os alunos não o fizeram e ainda assim continuaram a apresentar dificuldades durante os encontros.

É importante ressaltar que o último encontro não ocorreu na data que consta no plano de aula (Apêndice A), pois teve que ser adiado devido à greve dos caminhoneiros que aconteceu em todo o País no período de 21 a 30 de Maio de 2018. Com esse fato os alunos tiveram um prazo de duas semanas entre o segundo e o terceiro encontro para finalizarem os modelos matemáticos e, ainda assim, não o fizeram. Atitudes como estas são comuns de serem encontradas, pois quando o aluno leva temas para casa é muito provável que ele não o faça, ou vai deixar para fazer nos últimos dias de qualquer forma.

Tais dificuldades foram observadas devido ao pouco domínio dos conceitos matemáticos que deveriam ser utilizados durante a construção dos modelos. Sendo assim, o pesquisador procurou saber o porquê destas dificuldades e alguns alunos relataram que não tinham estudado os conceitos matemáticos quando cursaram as disciplinas básicas de graduação e outros relataram que simplesmente não se lembravam de tais conceitos.

Dificuldades como essas são comuns em cursos das áreas de exatas, devido aos métodos tradicionais e abordagens fragmentadas às quais os alunos são submetidos desde o

⁶ FRANCO, R. **Material para alunos dos ciclos de modelagem**. Disponível em: <https://drive.google.com/open?id=1aYb4FHysHLsGNAC9KOddem-GIDJmpmho>. Acesso em: 02 maio 2018.

ensino médio, onde por diversas vezes o foco está centrado na memorização de equações e exercícios mecânicos, que de tanto resolver os alunos decoram e após determinado período de tempo se esquecem, o que caracteriza uma aprendizagem instantânea, cujo foco não é aprender de forma significativa, mas aprender para reproduzir em provas e avaliações.

No questionário avaliativo (Apêndice B), quando perguntado aos alunos sobre suas dificuldades, obtiveram-se as seguintes respostas: Aluno 1: *“Minha principal dificuldade foi em compreender as manipulações iniciais que deveriam ser realizadas para que um modelo pudesse ser construído”*. Já o Aluno 2 destacou que sua maior dificuldade foi *“Absorver as informações iniciais necessárias para partida das atividades”*. O Aluno 3 relatou: *“As dificuldades enfrentadas pelo meu grupo na confecção da modelagem foram de cunho algébrico, ou seja, articular de maneira coerente as ferramentas matemáticas que possuíamos até então para que pudéssemos atingir o objetivo. Essa deficiência por parte do grupo, fez com que nós concentrássemos nossos esforços para fundamentar/relembrar conceitos já adquiridos ao longo da vida acadêmica”*. O Aluno 4, expressou que estava um pouco perdido no caminho que deveria seguir, em suas palavras: *“Poderia ter uns tópicos no início para guiar o aluno o que fazer, pois muitas vezes ficava perdido e não sabia se estava na direção certa”*. O Aluno 5 respondeu: *“Minha maior dificuldade foi no início na resolução do problema ou seja relembrar os conceitos de geometria para aplicar no problema em análise”*. O Aluno 6 relatou: *“Aplicar os conceitos matemáticos vistos de forma só teórica para buscar a melhor forma de resolver um problema físico”*.

Ao deter-se na resposta do Aluno 3, observa-se que ao se deparar com dificuldades algébricas, seu grupo motivou-se à pesquisar e relembrar conceitos, tornando-se agentes ativos no processo de ensino-aprendizagem, buscando partir de seus conhecimentos prévios e buscando ampliar sua estrutura cognitiva para obter uma aprendizagem de fato significativa.

Já ao analisar o relato do Aluno 6, percebe-se a dificuldade enfrentada quando a proposta envolve teoria e prática, pois o método tradicional ao qual os alunos são submetidos embasasse em uma educação bancária, com aulas teóricas/expositivo-dialogadas, com conteúdos fragmentados, abstratos e que estão presentes apenas em sala de aula, onde o professor é o detentor do saber e os alunos caracterizam-se como tabulas rasas⁷, sendo difícil aplicar os conceitos matemáticos (teóricos) para resolver problemas físicos cotidianos (práticos).

⁷ Termo adotado por Paulo Freire, cujo significado é “vazio, sem conteúdo”.

No processo de construção dos modelos, os dois grupos formados, optaram por modelar por diferentes caminhos. O grupo 1, seguiu o mesmo raciocínio que foi proposto e descrito na seção 5, já grupo 2 optou por descrever diferentes equações de planos (Anexo A) para inserir as órbitas. Tal fato é importante ser relatado, pois diferente dos métodos tradicionais, os alunos ficam livres para escolherem como irão resolver os problemas propostos, de forma que as estratégias e resoluções não ficam detidas com o professor, propiciando desta maneira, uma aula ou encontros abertos, de forma que o aluno possua toda a autonomia no processo de construção do conhecimento.

Quanto ao uso dos quadros brancos (Figura 8), ferramentas estas que são utilizadas na terceira fase do ciclo de modelagem, o autor não teve como disponibilizá-los da forma como propõe Hestenes, mas os alunos tiveram a oportunidade de transpor seus modelos no quadro branco da própria sala de aula.

Figura 8- Estudantes apresentando seus modelos para o grande grupo (a)



Fonte: Autor (2018)

Figura 9- Estudantes apresentando seus modelos para o grande grupo (b)



Fonte: Autor (2018).

Inicialmente os alunos escreveram seus modelos em folhas de ofício tamanho A4 (Anexo A), porém, devido à ausência dos quadros brancos (de pequenas dimensões), os alunos precisaram de um tempo maior para fazer a transposição dos modelos matemáticos descritos em suas folhas para o quadro branco da sala. Contudo, o uso dos quadros brancos da sala de aula foi bastante útil na fase das discussões em grande grupo.

A seguir são apresentados alguns relatos dos alunos a respeito do uso do quadro branco. De acordo com o Aluno 1: *“O uso do quadro aparece de forma positiva visto que o quadro acaba sendo mais direto que slides ou uso de software por não possuir limitações no quesito “implementação” e na expressão de uma determinada ideia”*. O Aluno 3 relatou: *“O uso do quadro branco foi imprescindível por partes dos discentes. As exposições foram realizadas de maneira mais rápida e flexível, possibilitando assim, a todos, que entendessem os conceitos e ideias usados”*. E para o Aluno 4: *“Foi bom, pois consegui mostrar minha visão sobre o assunto para o outro grupo e professores, assim, gerando dúvidas e discussões acrescentando para o conhecimento do tema abordado”*. De acordo com o Aluno 6 o uso do quadro branco *“Foi muito útil para mostrar aos colegas a parte matemática do modelo proposto pelo grupo, tornando muito mais fácil a compreensão do que se fosse apenas falado”*.

Esses relatos corroboram com a ideia de Hestenes, pois de acordo com este autor apud Souza e Rozal (2016) é no momento da discussão que os quadros brancos são utilizados

fazendo com que a aprendizagem dos alunos ocorra mais profundamente de forma significativa.

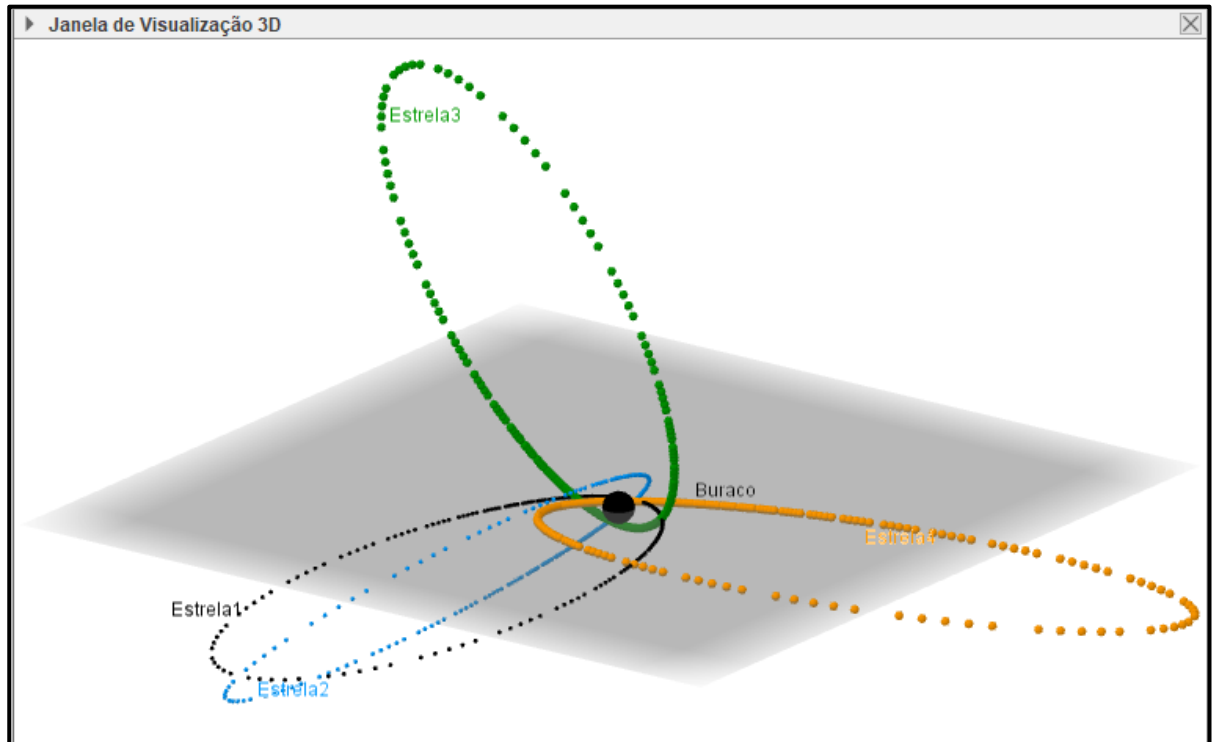
Do ponto de vista do autor, em concordância com o que propõe Hestenes, a discussão em grande grupo foi o momento crucial e mais importante do ciclo de modelagem, pois foi neste momento que os alunos apresentaram suas conclusões e esclareceram suas dúvidas. E ainda, foi neste momento que pareceu claro, na visão dos alunos, o objetivo do trabalho.

Neste contexto, o Aluno 1 relatou que: *“A discussão final é de suma importância devido a comparação e discussão final dos modelos criados por ambos os grupos, tornando possível a troca de ideias”*. O Aluno 3 fez a seguinte reflexão: *“Eu acredito que as discussões realizadas no final do curso, me fizeram entender e enxergar outras possíveis maneiras de realizar a modelagem. As visões dos outros grupos demonstraram a real importância de se realizar uma discussão pra que juntos pudéssemos agregar conhecimento em termos de maneiras de resolução”*. O Aluno 4 destacou: *“(…) pois consegui ver o problema de uma forma diferente da abordada, assim, tendo outro ponto de vista do mesmo problema”*. O Aluno 5 disse: *“É muito importante essa discussão em grupo visto que aplicamos os conhecimentos adquiridos na disciplina de geometria analítica para chegar em algo mais concreto e contribuiu para ter um conhecimento mais amplo na modelagem”*. E de acordo com o Aluno 6 o momento da discussão *“Foi muito importante para ver a situação interpretada de forma diferente pelo outro grupo, e compartilhar os conhecimentos obtidos com os demais colegas, mostrando que há várias formas de modelar um mesmo problema”*.

Percebe-se através das respostas acima, que a discussão promovida entre os grupos propiciou aos alunos, a aquisição de novas percepções a partir do problema proposto, além de fornecer evidências de uma aprendizagem significativa da forma como propõe David Ausubel.

O uso do *software GeoGebra* (Figura 8) como ferramenta de simulação computacional, caracterizando a última fase (implementação do modelo) do ciclo de modelagem, mostrou-se como um importante recurso, pois possibilitou que os alunos tivessem uma visão final do problema que estavam modelando.

Figura 10 - Simulação das órbitas de estrelas no *software GeoGebra*



Fonte: Autor (2018).

Quanto a avaliação desta ferramenta o Aluno 2 destacou: *“Software bastante disseminado para ensino na área da matemática, possui ferramentas que permitem o usuário a utilização de forma direta e simplificada de acordo com sua necessidade (...)”*. De acordo com o Aluno 6: *“(...) E acima de tudo foi muito útil na representação do resultado final, para ver se o comportamento estava de acordo com o objetivo”*. O Aluno 3 relatou: *“A falta de conhecimento quanto ao uso do software Geogebra, fizeram com que o grupo tivesse mais dificuldade nos ajustes finais de visualização. Contudo, atingiu-se o objetivo de visualizar o trabalho executado ao longo do curso”*. O Aluno 4 comentou: *“O software é muito bom, porém faltou conhecimento sobre o mesmo”*. Segundo o Aluno 5: *“Foi um pouco complicado”*. Já o Aluno 1 fez a seguinte reflexão: *“Software simples para equações simples, porém seu nível de complexidade aumenta de acordo com a função a qual está sendo implementada. Ainda que possua uma interface um tanto quanto intuitiva, conforme a equação pede mais símbolos/sinais específicos, tornam-se cada vez mais confusos durante a implementação. O Software cobre todos os problemas propostos pelo projeto, porém sua praticidade deixa a desejar”*.

Analisando as respostas dos alunos, percebe-se que alguns apresentaram certa dificuldade durante o uso do *software GeoGebra*, a qual é justificada, pois apesar do autor apresentar e introduzir os principais comandos do *software*, os alunos tiveram pouco tempo para explorarem o mesmo.

Entretanto, apesar das dificuldades iniciais em desenvolver os modelos matemáticos devido ao conteúdo, todos os alunos avaliaram o ciclo de modelagem de forma positiva. Segundo o Aluno 1: *“Contribuiu positivamente para o aprendizado, definindo os passos a serem tomados e impondo um ritmo de progresso constante ao projeto”*. O Aluno 2 relatou: *“Permitiu compreender a aplicabilidade das ferramentas apresentada, relacionando aos insumos teóricos de tal forma a resolver um problema proposta com proximidade a um caso real. Ponto negativo que dado a uma turma ser composta exclusivamente por alunos de Engenharia, se sentiu necessidade de algum mais direcionado a área”*. O Aluno 3 fez a seguinte reflexão: *“Acredito que o método utilizado para o ensino foi adequado e eficaz. Portanto, resoluto quanto às expectativas proporcionadas por mim ao longo do curso. Este método trás o diferencial de interação entre todos os participantes, de maneira comutativa, dissuadindo ideias, segmentando conhecimento e visões de um mesmo problema proposto”*. O Aluno 4 destacou: *“A metodologia contribuiu para o aprendizado, pois gerou dúvidas e discussões com os colegas sobre o assunto estudado, teve bastante debates sobre as opiniões. Os confrontos sobre a opinião de cada um foi um ponto positivo. Ponto negativo: poderia ter mais tempo para explorar ainda mais o assunto”*. Já o Aluno 5 disse: *“Contribuiu bastante mas eu acho que como de inicio ficamos um pouco perdidos creio que da próxima vez o professor faça um breve apanhado dos conceitos que iriamos usar isso facilitaria muito”*. E para o Aluno 6: *“A metodologia foi ótima, talvez um dos maiores pontos positivos seja que o problema foi apresentado a grupos, de forma que a discussão proporcionou troca de conhecimentos entre nós”*.

Quanto à aprendizagem adquirida com a aplicação do ciclo de modelagem como metodologia de ensino e aprendizagem os alunos responderam: *“Contribuiu para o meu aprendizado de forma positiva, exigindo uma visão mais crítica sobre o problema proposto no projeto. Por eu ser um calouro em engenharia de computação e estar em um grupo com diversos alunos que estavam semestres a frente, acabei por conhecer matérias e manipulações que só seriam demonstradas futuramente, sendo esse outro dos pontos positivos”* (ALUNO1). *“Acredito que a forma como foi exposto o problema a ser resolvido juntamente com a condução sob a direção do avaliador fizeram que entendêssemos de maneira simples e eficaz os ciclos de modelagem, até então desconhecidos por mim”*

(ALUNO 3). *“Contribuiu de forma positiva, pois trouxe um problema do mundo real para discussão, abordando assuntos estudados ao longo do curso de engenharia”* (ALUNO 4). *“Contribuiu de forma positiva porque abriu minha mente em relação a modelagem matemática”* (ALUNO 5). *“A proposta contribuiu de forma positiva para a aprendizagem, pois para a realização da atividade buscamos aprender novos conceitos matemáticos e relembrar antigos conceitos já esquecidos”* (ALUNO 6).

Deste modo, de acordo com os relatos dos alunos e observações por parte do pesquisador (realizadas em sala de aula acerca da participação, motivação e contribuição dos alunos para a proposta) pode-se dizer que o uso da modelagem matemática e da simulação computacional como estratégias de ensino-aprendizagem aplicados em um ciclo de modelagem contribuíram de forma potencialmente significativa, visto que os alunos mostraram-se interessados e motivados, fornecendo indícios de uma aprendizagem significativa.

8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A modelagem matemática e a simulação computacional se mostraram como importantes estratégias de ensino-aprendizagem quando aplicados em um ciclo de modelagem, visto que propiciaram aos alunos que estes se tornassem agentes ativos e críticos na construção do conhecimento. Tal fato diferencia-se dos atuais métodos de ensino tradicionais que acabam dando muita ênfase em resoluções de exercícios, levando os alunos a uma postura passiva dentro da sala de aula, desmotivando-os e fazendo com que os mesmos adquiram uma aprendizagem totalmente mecânica e sem significados.

Deste modo, esta proposta mostrou-se importante, principalmente com a utilização de ciclos de modelagem como metodologia de ensino, pois proporcionou aos alunos participarem de uma atividade totalmente diferenciada do que estão acostumados. E apesar das dificuldades alcançadas logo no início da proposta, os alunos mostraram-se motivados em realizarem as atividades, interagindo com o pesquisador e entre eles, partindo de seus conhecimentos prévios para elaborar perguntas e questionamentos que ampliassem suas concepções e estruturas cognitivas.

O ciclo de modelagem apresentado neste trabalho, pode ser implementado de forma indisciplinar e para trabalhos futuros, espera-se trabalhar com a descrição da parte Física do problema, explorando com mais detalhes as forças gravitacionais envolvidas no mesmo, além de se inserir novas ferramentas computacionais de modelagem como, por exemplo, *o software Scilab*.

Portanto, analisando todos os relatos dos alunos e comparando-os com o que diz a TAS de Ausubel, pode-se dizer que a proposta didática aqui apresentada contribuiu e apresenta indícios de que os alunos tiveram uma aprendizagem de fato significativa, pois eles foram os principais sujeitos na construção do conhecimento.

REFERÊNCIAS

ARAUJO, I. S.; MAZUR, E. Instrução pelos colegas e ensino sob medida: uma proposta para o engajamento dos alunos no processo de ensino-aprendizagem de Física. **Caderno Brasileiro de Ensino de Física**, v. 30, n. 2, p. 362-384, Agosto, 2013. Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/fisica/article/download/21757941.2013v30n2p362/2499>. Acesso em: 10 maio 2017.

BARBOSA, J. C. Modelagem matemática: O que é? Por quê? Como? **Revista Veritati**, n. 4, p. 73-80, 2004.

BRUSCATO, G. C.; MORS, P. M. Ensinando física através do radioamadorismo. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 36, n. 1, p. 1506-8, Março, 2014. Disponível em: www.scielo.br/pdf/rbef/v36n1/24.pdf. Acesso em: 27 mar. 2018.

CARVALHO, A. M. P. Uma metodologia de pesquisa para estudar os processos de ensino e aprendizagem em salas de aula. In: SANTOS, F. M. T.; GRECA, I. M. **A pesquisa em Ensino de Ciências no Brasil e suas Metodologias**. 2. ed. rev. Ijuí: Unijuí, 2011.

COSTA, F. A. Ensino matemática por meio da modelagem matemática. **Ensino da Matemática em Debate**, v. 3, p. 58-69, 2016. Disponível em: <https://revistas.pucsp.br/index.php/emd/article/view/29005>. Acesso em: 02 mar. 2018.

EVANGELHO, B. V. **O processo ensino-aprendizagem de ondulatória fundamentado na teoria da aprendizagem significativa crítica**: uma proposta para o ensino médio. 2017. 146 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Licenciatura em Física), Universidade Federal do Pampa – Campus Bagé/RS. No prelo.

FONSECA, J. J. S. **Metodologia da pesquisa científica**. Fortaleza: UEC, 2002. Apostila. Disponível em: <http://197.249.65.74:8080/biblioteca/bitstream/123456789/716/1/Metodologia%20da%20Pesquisa%20Cientifica.pdf>. Acesso em: 12 maio 2018.

GREIS, L. K.; REATEGUI, E. Um simulador educacional para disciplina de física em mundos virtuais. **Revista Renote Novas Tecnologias na Educação**, v. 8, n. 2, jul., 2010. Disponível em: <http://seer.ufrgs.br/index.php/renote/article/download/15220/8984>. Acesso em: 15 maio 2018.

HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J. **Fundamentos de física: mecânica**. vol.1, 8 ed. Rio de Janeiro: LTC, 2008.

HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J. **Fundamentos de física: gravitação, ondas e termodinâmica**. vol. 2, 8 ed. Rio de Janeiro: LTC, 2012.

HEIDEMANN, L. A; ARAÚJO, I. S; VEIT, E. A. Ciclos de modelagem: uma proposta para integrar atividades baseadas em simulações computacionais e atividades experimentais no ensino de física. **Caderno Brasileiro de Ensino de Física**, v. 29, n. Especial, p. 965-1007, out., 2012. Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/fisica/article/download/21757941.2012v29nesp2p965/23071>. Acesso em: 20 out. 2017.

MACÊDO, J. A; DICKMAN, A. G; ANDRADE, I. S. F. Simulações computacionais como ferramentas para o Ensino de conceitos básicos de Eletricidade. **Caderno Brasileiro de Ensino de Física**, v. 29, n. Especial 1, p. 562-613, set., 2012.

MOREIRA, M. A. **Teorias de aprendizagem**. 2. ed. São Paulo: EPU, 1999.

_____. Organizadores prévios e aprendizagem significativa. *In: Sítio profissional prof. Marco Antônio Moreira*. Porto Alegre: UFRGS, Instituto de Física, 2012. Disponível em: <https://www.if.ufrgs.br/~moreira/ORGANIZADORESport.pdf>. Acesso em: 30 set. 2017.

OLIVEIRA, T. E; ARAUJO, I. S; VEIT, E. A. Aprendizagem baseada em equipes (*Team-Based Learning*): um método ativo para o ensino de física. **Caderno Brasileiro de Ensino de Física**, v. 33, n. 3, p. 962-986, dez., 2016. Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/fisica/article/download/21757941.2016v33n3p962/33015>. Acesso em: 11 maio. 2017.

RENZ, E. J. **A Importância modelagem matemática no ensino-aprendizagem**. 2015. 62f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal de Goiás, Catalão, 2015. Disponível em: <https://repositorio.bc.ufg.br/tede/bitstream/tede/4706/5/Disserta%C3%A7%C3%A3o%20-%20Herton%20Renz%20J%C3%BAnior%20-%202015.pdf>. Acesso em: 12 ago. 2017.

SILVEIRA, D. T.; CÓDOVA, F. P. A pesquisa científica. *In: GERHARDDT, T. E. e SILVEIRA, D. T. (org.). Métodos de Pesquisa*, p.31-42. Porto Alegre: Editora de UFRGS, 2009.

SOUZA, E. S. R; ROZAL, E. F. Instrução por modelagem de David Hestenes: uma proposta de ciclo de modelagem temático e discussões sobre alfabetização científica, **Revista de Educação em Ciências e Matemática**, v. 12, n. 24, p. 99-115, jan./jul., 2016. Disponível em: <https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/5893150.pdf>. Acesso em: 12 maio. 2018.

STOCCO, K. C. S.; DINIZ, M. I. S. V. **Matemática: ensino médio**, v. 2, 6 ed. São Paulo: Saraiva, 2010.

VASCONCELOS; F. C. G. C.; LEÃO, M. B. C. A utilização de programas televisão como recurso didático em aulas de química. *In: ENCONTRO NACIONAL DE ENSINO DE QUÍMICA*. Brasília: 2010. Disponível em: www.s bq.org.br/eneq/xv/resumos/R0011-2.pdf. Acesso em: 13 ago. 2018.

VEIT, E. A; TEODORO, V. D. Modelagem no ensino / aprendizagem de física e os novos parâmetros curriculares nacionais para o ensino médio. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 24, n. 2, p. 87-92, jun., 2002. Disponível em: <http://www.scielo.br/pdf/rbef/v24n2/a03v24n2.pdf>. Acesso em: 20 jun. 2017.

_____. **Tecnologias computacionais no ensino de ciências**. Texto de apoio. n. 24 do PIDEAC, Porto Alegre: UFRGS, 2005. 75 p.

VIECILI, C. R. C. **Modelagem matemática: Uma Proposta para o Ensino da Matemática**. 2006. 119f. Dissertação (Mestrado em Educação e Matemática) – Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2006. Disponível em: <http://hdl.handle.net/10923/3029>. Acesso em: 20 jun. 2017.

YIN, R. K. **Estudo de caso: planejamento e métodos**. 2. ed. Porto Alegre: Bookman, 2001.

APÊNDICES

APÊNDICE A – PLANOS DE AULA DE IMPLEMENTAÇÃO DO CICLO DE MODELAGEM

| IDENTIFICAÇÃO | |
|--|---|
| Instituição: | Universidade Federal do Pampa – campus Bagé |
| Componente Curricular: | Interdisciplinar |
| Professor: | Rodrigo da Silva Franco |
| Data das Aulas: | 11/05/2018, 18/05/2018 e 25/05/2018 |
| Tempo previsto: | 4 horas (cada encontro de aula) |
| TEMA DA AULA | |
| Descrição de órbitas de estrelas em torno de um buraco negro. | |
| CONTEÚDOS DE ENSINO DA AULA | |
| Equação da elipse, coordenadas polares, parametrizações, matrizes de transformação linear, Gravitação. | |
| CONTEÚDOS DE ENSINO QUE SÃO PRÉ-REQUISITOS PARA A AULA | |
| Geometria analítica (cônicas – coordenadas cartesianas e polares), álgebra linear (matrizes de rotação), Leis de Kepler, Lei da Gravitação Universal de Newton. | |
| OBJETIVOS DA APRENDIZAGEM | |
| <p>1 Objetivo geral</p> <p>Aplicar e analisar uma sequência didática utilizando a modelagem matemática e a simulação computacional como estratégias de ensino baseadas nos Ciclos de Modelagem.</p> <p>2 Objetivos específicos</p> <ol style="list-style-type: none"> i. Propiciar episódios de modelagem de forma a incentivar os estudantes a se tornarem participantes ativos na construção do saber; ii. Utilizar a modelagem matemática e a simulação computacional como recursos didáticos que viabilizem a motivação e facilitem o processo de ensino aprendizagem dos estudantes; iii. Modelar e simular computacionalmente as órbitas de estrelas em torno de um | |

buraco negro, buscando com isso que os alunos ampliem sua estrutura cognitiva;

- iv. Utilizar o *software* GeoGebra, como facilitador e como ferramenta mediadora (além do professor), na construção da aprendizagem significativa de modo a facilitar as percepções dos estudantes;
- v. Analisar se a proposta didática viabiliza a aprendizagem significativa dos estudantes.

METODOLOGIA DE ENSINO

(Procedimentos e Recursos Instrucionais e Desenvolvimento da Aula)

1 Procedimentos e Recursos da Instrução

1.1 Procedimentos

- a) Aulas expositivo-dialogadas contextualizadas, empregando o uso de vídeos (e animações) e de simulação no *software* Geogebra.

2 Desenvolvimento das Aulas

2.1 Aula do dia 11/05/2018

1ª fase: Motivação – o professor fará a apresentação do problema (estrelas orbitando o buraco negro Sgr A*). O professor iniciará a discussão apresentando um vídeo de simulação real (dados coletados a partir de observação) de estrelas orbitando o buraco negro Sgr A*, bem como de uma simulação construída no *software* Geogebra, tendo como objetivo motivar os alunos para processo de construção e implementação do modelo. O problema que os alunos deverão modelar é:

“Construa um modelo que represente geometricamente o movimento de estrelas orbitando um buraco negro num mesmo plano e em diferentes planos”.

2ª fase: Os alunos devem ser separados em pequenos grupos, onde cada grupo irá trabalhar no desenvolvimento do seu modelo. Em seguida, será disponibilizado aos grupos, links de artigos e textos científicos, assim como sugestões de livros para pesquisa para dar suporte na construção dos modelos. Nesta aula os alunos começarão a explorar e construir os seus modelos.

Material de Apoio

<http://www.if.ufrgs.br/fis02001/aulas/Aula6-122.pdf>

<http://www.if.ufrgs.br/fis02001/aulas/Aula7-122.pdf>

https://www.inf.pucrs.br/~smusse/CG/PDFs/RevisaoP1_2013_1.pdf

<https://www.lcad.icmc.usp.br/~rosane/CG/TransfGeomAndersonIcaro.pdf>

<https://www.ime.unicamp.br/~deleo/MA141/Luiza07.pdf>

[www.ifba.edu.br/dca/Corpo.../CONICAS_POLARES_ERON%20\(revisado2007.2\).pdf](http://www.ifba.edu.br/dca/Corpo.../CONICAS_POLARES_ERON%20(revisado2007.2).pdf)

www.mat.ufmg.br/~regi/gaalt/conicas.pdf

2.2 Aula do dia 18/05/2018

Continuação da 2ª fase: Neste encontro os alunos continuarão a construção dos seus modelos nos seus respectivos grupos e deverão concluir os seus modelos para apresentação para o grande grupo (demais grupos) no próximo encontro.

2.3 Aula do dia 25/05/2018

3ª fase: Neste encontro os alunos deverão apresentar seus modelos e conclusões para o grande grupo através de projeções (uso de retroprojetores). O professor pode auxiliar nas apresentações aprimorando os termos mais técnicos que podem surgir durante as apresentações. Seguem alguns pontos importantes que poderão ser discutidos:

- Quais as limitações de representar a equação da elipse em coordenadas **cartesianas**?
- É importante ressaltar que o *Geogebra* não representa fielmente o fenômeno estudado e que é apenas uma representação geométrica do problema, sem levar em consideração o termo das forças gravitacionais envolvidas no problema.
- Como fazer a representação de órbitas em um plano e em diferentes planos?
- É importante que os alunos procurem sempre identificar os referentes reais, as idealizações e as aproximações consideradas no problema.

Ainda nesta aula o professor apresentará o *software Geogebra* e irá explorar os comandos básicos do mesmo, dando subsídios para que os alunos consigam implementar os seus modelos.

4ª fase: Nesta última fase da aplicação desta proposta, os alunos devem implementar o modelo construído no *software GeoGebra*. O professor pode auxiliar os grupos na implementação dos seus modelos que, por sua vez, também podem ser refinados (de forma

a representar da melhor forma possível o problema proposto) com o auxílio do professor, quando necessário.

No final da implementação o professor fará uma breve discussão das forças gravitacionais envolvidas no problema que não foram levadas em consideração neste primeiro momento, mas que será considerada num próximo Ciclos de Modelagem envolvendo o uso do *software* Scilab.

AVALIAÇÃO DA APRENDIZAGEM

A avaliação será da seguinte forma:

- **Qualitativa:** Por meio da observação do professor durante a aula que avaliará a participação, o interesse, as curiosidades e a motivação dos alunos, buscando subsídios que possam remeter à aprendizagem significativa.
- **Quantitativa:** Por meio de uma avaliação escrita por parte dos alunos, que deverão avaliar a aplicação da proposta. Seguem alguns pontos para a avaliação:
 - ✓ Descreva como essa proposta contribuiu para a sua aprendizagem. Contribuiu de forma positiva? Justifique.
 - ✓ Descreva qual a importância da discussão final em grande grupo. Essa discussão contribuiu ou não para o compartilhado dos conhecimentos adquiridos durante o Ciclo de Modelagem?
 - ✓ Quais foram as suas dificuldades (ou do grupo) enfrentadas durante a realização das atividades?
 - ✓ Descreva se a metodologia utilizada contribuiu para o seu aprendizado, ressaltando os pontos positivos e negativos se houverem.
 - ✓ Avalie o uso do software Geogebra.
 - ✓ Avalie o uso do quadro branco.

BIBLIOGRAFIA

ERON; ISABEL. **Geometria Analítica - Cônicas e Polares** – Notas de Aula. Centro Federal de Educação Tecnológica da Bahia – CEFET-BH. Disponível em: <www.ifba.edu.br/dca/Corpo_Docente/MAT/ICCL/>. Acesso em: 04 mai. 2018.

LUIZA. **Forma Polar das Cônicas**. Material de Apoio. Instituto de Matemática e Estatística - UNICAMP. Disponível em:

<<https://www.ime.unicamp.br/~deleo/MA141/Luiza07.pdf>>. Acesso em: 04 mai. 2018.

MUSE, S. R. **Transformações 2D** - Notas de Aula. PUC-RS. Disponível em: <http://www.inf.pucrs.br/~smusse/CG/PDF2013_2/Transf2D_2013.pdf>. Acesso em: 22 out. 2017.

NAKANO, A. L.; CUNHA, I. L. L. **Transformações Geométricas 2D e 3D**. Seminário. Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação - USP, São Carlos, 2007. Disponível em: <www.lcad.icmc.usp.br/~rosane/CG/TransfGeomAndersonIcaro.pdf>. Acesso em: 05 nov. 2017.

SANTOS, R. J. **Seções Cônicas**. Notas de Aula. Departamento de Matemática – UFMG. Disponível em: <www.mat.ufmg.br/~regi/gaalt/conicas.pdf>. Acesso em: 04 mai. 2018.

SARAIVA, M. F. O.; OLIVEIRA, K. F.; MÜLLER, A. M. Aula 6: **O Movimento dos Planetas - as leis de Kepler**. Disponível em: <<http://www.if.ufrgs.br/fis02001/aulas/Aula6-122.pdf>>. Acesso em: 07 jun. 2017.

SARAIVA, M. F. O.; OLIVEIRA, K. F.; MÜLLER, A. M. Aula 7: **Newton e as generalizações das Leis de Kepler - Gravitação**. Disponível em: <<http://www.if.ufrgs.br/fis02001/aulas/Aula7-122.pdf>>. Acesso em: 07 jun. 2017.

APÊNDICE B – FORMULÁRIO AVALIATIVO

Formulário Avaliativo

1. Descreva como essa proposta contribuiu para a sua aprendizagem. Contribuiu de forma positiva? Justifique.

Resposta:

2. Descreva qual a importância da discussão final em grande grupo. Essa discussão contribuiu ou não para o compartilhado dos conhecimentos adquiridos durante o Ciclo de Modelagem?

Resposta:

3. Quais foram as suas dificuldades (ou do grupo) enfrentadas durante a realização das atividades?

Resposta:

4. Descreva se a metodologia utilizada (Ciclo de Modelagem) contribuiu para o seu aprendizado, ressaltando os pontos positivos e negativos se houverem.

Resposta:

5. Avalie o uso do *software Geogebra*.

Resposta:

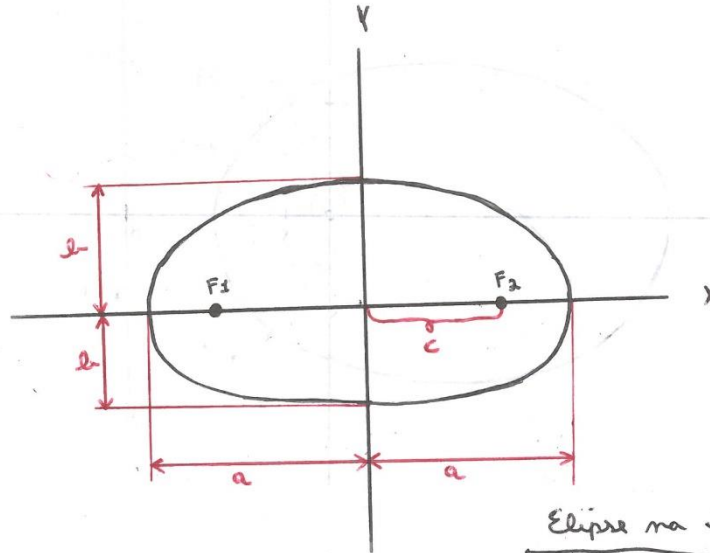
6. Avalie o uso do quadro branco para apresentação dos modelos.

Resposta:

ANEXOS

ANEXO A – MODELOS MATEMÁTICOS CONSTRUÍDOS PELOS ALUNOS EM FOLHA DE OFÍCIO A4

Elipse

 $2b \rightarrow$ eixo menor $2a \rightarrow$ eixo maior $c \rightarrow$ distância do centro até 1 foco $e = \frac{c}{a} \rightarrow$ excentricidade

$$1 - e^2 = \frac{b^2}{a^2}$$

Elipse na horizontal

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Elipse na vertical

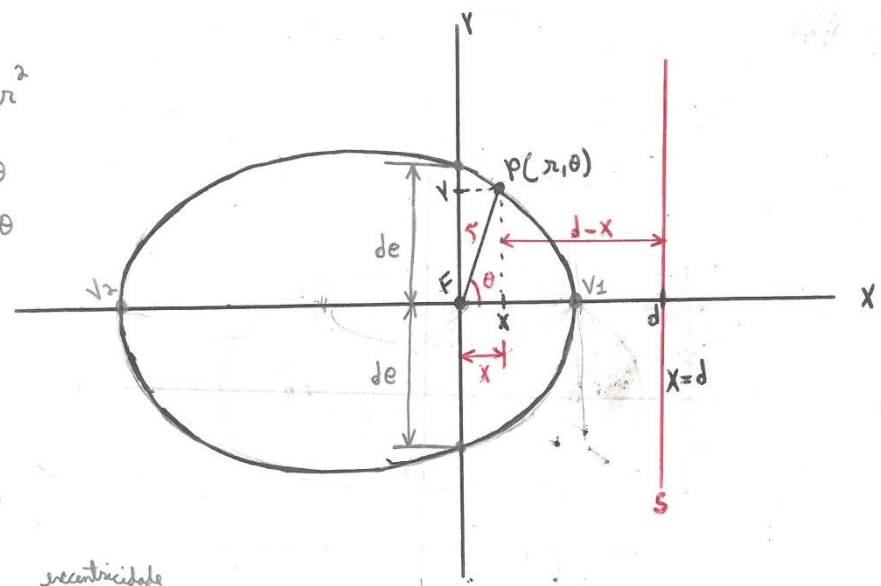
$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

$$X^2 + Y^2 = r^2$$

$$X = r \cos \theta$$

$$Y = r \sin \theta$$

$$\frac{\frac{e^2}{a}}{1 - e \cos \theta}$$



eccentricidade

distância do ponto até o foco

distância do ponto até a reta diretriz S

$$d(P, F) = e \cdot d(P, S)$$

$$r = e \cdot (d - x)$$

$$r = e \cdot d - e \cdot r \cos \theta$$

$$r + e r \cos \theta = de$$

$$r(1 + e \cos \theta) = de$$

$$r(\theta) = \frac{de}{1 + e \cos \theta}$$

$$r\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{de}{1 + e \cos \frac{\pi}{2}} = de$$

$$r\left(\frac{3\pi}{2}\right) = de$$

$$2a = r(0) + r(\pi)$$

$$2a = \frac{de}{1 + e \cos 0} + \frac{de}{1 + e \cos \pi}$$

$$2a = \frac{de}{1 + e} + \frac{de}{1 - e}$$

$$2a = \frac{de(1 - e) + de(1 + e)}{(1 + e)(1 - e)} \rightarrow 1 - e + e - e^2$$

$$2a = \frac{de - de^2 + de + de^2}{1 - e^2}$$

$$2a = \frac{2de}{1 - e^2}$$

$$a = \frac{de}{1 - e^2} \quad \boxed{1 - e^2 = \frac{b^2}{a^2}}$$

$$e = \frac{c}{a}$$

$$e = ae$$

$$a = \frac{de}{\frac{b^2}{a^2}} \cdot a^2$$

$$b^2 = aed$$

$$a^2 = cd$$

$$a = \sqrt{cd}$$

$$\frac{b^2}{a^2} \cdot a = de \rightarrow \boxed{\frac{b^2}{a} = de}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & \\ & \\ & \end{bmatrix}_{3 \times 3} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Coord. Rotary

$$x = r \cos(\alpha) \quad y = r \sin(\alpha)$$

$$x' = r \cos(\alpha + \beta) \quad y' = r \sin(\alpha + \beta)$$

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \end{aligned}$$

$$x' = x \cos \beta - y \sin \beta$$

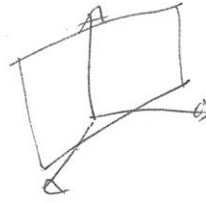
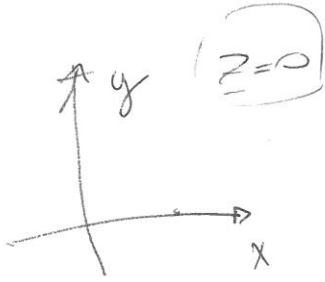
$$y' = x \sin \beta + y \cos \beta$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta & 0 \\ \sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} x' &= x \cos \beta - y \sin \beta \\ y' &= x \sin \beta + y \cos \beta \\ z' &= z \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



$$z = 2x$$

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{z} = 1$$

$$d = 1$$

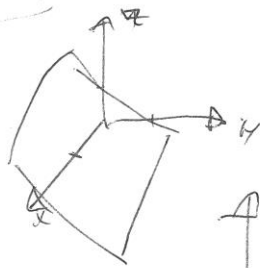
$$(x, y, z)$$

$$(x, y, 2x)$$

$$z = 2x$$

$$z = 2x$$

$$(x, y, 2x)$$



$$z = x$$

$$z = 3x$$

$$z = 2y$$

$$(r \cos \theta, r \sin \theta,$$

$$z \cos \theta)$$

$$(0, 0, 1)$$

