

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO PAMPA**

**Kléber Kapelinski**

**ALGORITMO DOS VAGA-LUMES COM POPULAÇÃO NÃO HOMOGÊNEA  
APLICADO AO DESPACHO ECONÔMICO DE CARGA**

**Alegrete**

**14 de Setembro de 2018**



**Kléber Kapelinski**

**ALGORITMO DOS VAGA-LUMES COM POPULAÇÃO NÃO HOMOGÊNEA  
APLICADO AO DESPACHO ECONÔMICO DE CARGA**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação Stricto Sensu em Engenharia Elétrica da Universidade Federal do Pampa, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Orientador: João Plínio Juchem Neto

Alegrete  
14 de Setembro de 2018

Ficha catalográfica elaborada automaticamente com os dados fornecidos  
pelo(a) autor(a) através do Módulo de Biblioteca do  
Sistema GURI (Gestão Unificada de Recursos Institucionais) .

K63a KAPELINSKI, KLEBER

Algoritmo dos Vaga-lumes com População Não Homogênea  
Aplicado ao Despacho Econômico de Carga / KLEBER KAPELINSKI.  
150 p.

Dissertação(Mestrado)-- Universidade Federal do Pampa,  
MESTRADO EM ENGENHARIA ELÉTRICA, 2018.

"Orientação: João Plínio Juchem Neto".

1. Algoritmo dos Vaga-lumes. 2. População não Homogênea. 3.  
Problema de Despacho Econômico. I. Título.



**Kléber Kapelinski**

**ALGORITMO DOS VAGA-LUMES COM POPULAÇÃO  
NÃO HOMOGÊNEA APLICADO AO DESPACHO  
ECONÔMICO DE CARGA**

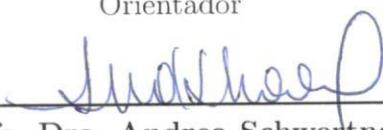
Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação Stricto Sensu em Engenharia Elétrica da Universidade Federal do Pampa, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Engenharia Elétrica.

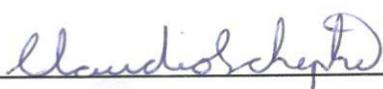
Área de concentração: Sistemas de Energia

Dissertação defendida e aprovada em: Alegrete, 14 de Setembro de 2018.

Banca examinadora:

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. João Plínio Juchem Neto  
Orientador

  
\_\_\_\_\_  
Profª. Dra. Andrea Schwertner  
Charão  
UFSM

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Claudio Schepke  
UNIPAMPA

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Dr. Eduardo Machado dos  
Santos  
UNIPAMPA

## **AGRADECIMENTOS**

Gostaria de agradecer à CAPES pelo apoio financeiro, através da concessão de uma bolsa de estudos durante todo o período do mestrado.



## RESUMO

O problema de despacho econômico é uma aplicação prática de otimização com fundamental importância para a operação de sistemas de potência. Neste problema, o objetivo é determinar as potências de saída das unidades geradoras do sistema, de forma que, o custo total de geração seja o menor possível, e as restrições do problema sejam atendidas. Logo, uma solução eficiente para este problema contribui para a redução de custos. A utilização de métodos matemáticos para a solução deste problema tem sido considerada, no entanto, estes métodos não são aplicáveis quando a função de custo é não diferenciável ou não convexa. Assim, para a solução de problemas de despacho econômico de carga que consideram efeitos mais complexos, a utilização de metaheurísticas tem se mostrado uma alternativa mais apropriada.

O algoritmo dos vaga-lumes é uma metaheurística que tem se mostrado bastante eficiente em estudos comparativos e aplicações. O desempenho deste algoritmo tem sido melhorado com a proposta de variantes. Normalmente, estas variantes são comparadas ao algoritmo original utilizando-se um conjunto de funções teste. Estas funções teste são também conhecidas como problemas artificiais, e foram concebidas ao longo do tempo para caracterizar tipos específicos de obstáculos para os métodos de busca. Por outro lado, em aplicações práticas, vários obstáculos diferentes dificultam a busca pela melhor solução.

Neste Trabalho, foi proposta uma nova variante do algoritmo dos vaga-lumes, onde a população de agentes é não homogênea. Desta forma, cada vaga-lume passa a ser governado por seus próprios parâmetros e, conseqüentemente, a ter também um comportamento distinto. Para a comparação da variante deste Trabalho com o algoritmo original, foi selecionado um conjunto de dez funções teste e, posteriormente, foi realizada uma aplicação dos métodos a problemas de despacho econômico.

A comparação dos algoritmos em um caso de teste de um determinado problema não permite uma conclusão generalizada. Assim, para investigar os efeitos de diferentes tamanhos de problemas, modelos de custo e restrições, foram selecionados doze sistemas de teste do problema de despacho econômico da literatura. Nos problemas considerados são considerados o efeito de ponto de válvula, múltiplos combustíveis, função custo cúbica, perdas nas linhas de transmissão, zonas proibidas, limites mínimo/máximo e de rampa.

A variante proposta obteve melhor desempenho do que o algoritmo original em nove das dez funções teste. Já no problema de despacho econômico, a variante apresentou melhores resultados em sistemas de maior escala sendo que em dez dos doze problemas considerados, a melhor média de custos foi obtida pelo algoritmo com população não homogênea.

**Palavras-chave:** algoritmo dos vaga-lumes, população não homogênea, problema de despacho econômico



## ABSTRACT

The economic load dispatch problem is a very important practical application for power systems operation. In this problem, the output power of each generator in the system, need to be adjusted in such a way that the total generation cost be minimal, and the constraints of the problem are met. Thus, an efficient solution to this problem lead to cost and emissions reduction. The use of mathematical methods for the solution of this problem has been considered, however, these methods are not applicable for non smooth or non convex cost functions. Thereby, the use of metaheuristics for the solution of economic dispatch problems with more complex effects has been shown a more appropriated alternative.

The firefly algorithm is a metaheuristic that has been quite efficient in comparative studies and applications. The performance of this algorithm has been improved by the proposal of variants. In most cases, those variants are compared with the original algorithm in a set of benchmark functions. Those functions are also known as artificial problems, and are designated the present specific kinds of issues in search methods. On the other hand, in practical applications, several kinds of issues make the search for the optimum solution harder.

In this work a new variant of the firefly algorithm, with non-homogenous population, has been proposed. So, each firefly has its own parameters, and hence, a different behavior. For comparison of the original method and the new variant proposed in this work, it was selected a set of ten benchmark functions, and after, the methods are applied to several economic dispatch problems.

The comparison of the algorithms in a certain test case doesn't allow a generalization. Thus, to analyse the effects of different sizes of problems, cost models and constraints, a set of twelve test systems of the economic load dispatch is selected from literature. On the selected problems are considered the valve point effect, multiple fuels, cubic cost function, transmission loss, prohibited zones, minimum/maximum outpup power limits and ramp rate limits.

The variant proposed in this work achieved better results in nine of the ten test functions considered. Yet, in the economic dispatch problem, the variant has shown a better performance in large scale systems being that in ten of the twelve considered systems, a better mean cost was achieved by the non homogenous population algorithm proposed.

**Keywords:** firefly algorithm, non homogenous population, economic load dispatch



## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Gráficos 3D das funções teste . . . . .	27
Figura 2 – Curvas de contorno das funções teste . . . . .	28
Figura 3 – Função custo quadrática . . . . .	30
Figura 4 – Função custo cúbica . . . . .	31
Figura 5 – Função custo com efeito de ponto de válvula . . . . .	32
Figura 6 – Função custo com múltiplos combustíveis . . . . .	33
Figura 7 – Impacto de zonas proibidas na função custo . . . . .	34
Figura 8 – Efeito de $\gamma$ na função da atratividade . . . . .	46
Figura 9 – Efeito de $\beta_0$ na função da atratividade . . . . .	47
Figura 10 – Função da atratividade com $\psi = 0,5$ . . . . .	51
Figura 11 – Decrescimento de $\alpha$ para 10, 100 e 500 iterações . . . . .	56
Figura 12 – Decrescimento de $\alpha$ com $\delta$ calculado para 10, 100 e 500 iterações . . . . .	58
Figura 13 – Convergência dos métodos nas funções teste . . . . .	67
Figura 14 – Diagrama de caixa de custos - sistema de 3 unidades . . . . .	74
Figura 15 – Gráfico de convergência - sistema de 3 unidades . . . . .	75
Figura 16 – Diagrama de caixa de custos - sistema de 6 unidades . . . . .	76
Figura 17 – Gráfico de convergência - sistema de 6 unidades . . . . .	77
Figura 18 – Diagrama de caixa de custos - sistema de 10 unidades . . . . .	78
Figura 19 – Gráfico de convergência - sistema de 10 unidades . . . . .	79
Figura 20 – Diagrama de caixa de custos - sistema de 13 unidades . . . . .	81
Figura 21 – Gráfico de convergência - sistema de 13 unidades . . . . .	82
Figura 22 – Diagrama de caixa de custos - sistema de 15 unidades . . . . .	83
Figura 23 – Gráfico de convergência - sistema de 15 unidades . . . . .	84
Figura 24 – Diagrama de caixa de custos - sistema de 18 unidades . . . . .	85
Figura 25 – Gráfico de convergência - sistema de 18 unidades . . . . .	86
Figura 26 – Diagrama de caixa de custos - sistema de 20 unidades . . . . .	88
Figura 27 – Gráfico de convergência - sistema de 20 unidades . . . . .	89
Figura 28 – Diagrama de caixa de custos - sistema de 26 unidades . . . . .	90
Figura 29 – Gráfico de convergência - sistema de 26 unidades . . . . .	91
Figura 30 – Gráfico de convergência (NhFA-M x NhFA-R) - sistema de 26 unidades . . . . .	92
Figura 31 – Diagrama de caixa de custos - sistema de 38 unidades . . . . .	93
Figura 32 – Gráfico de convergência - sistema de 38 unidades . . . . .	94
Figura 33 – Diagrama de caixa de custos - sistema de 40 unidades . . . . .	95
Figura 34 – Gráfico de convergência - sistema de 40 unidades . . . . .	96
Figura 35 – Diagrama de caixa de custos - sistema de 110 unidades . . . . .	97
Figura 36 – Gráfico de convergência - sistema de 110 unidades . . . . .	98
Figura 37 – Diagrama de caixa de custos - sistema de 140 unidades . . . . .	100
Figura 38 – Gráfico de convergência - sistema de 140 unidades . . . . .	101

Figura 39 – Histograma dos custos - sistemas de 3, 6, 10, 13, 15 e 18 unidades . . .	106
Figura 40 – Histograma dos custos - sistemas de 20, 26, 38, 40, 110 e 140 unidades	107
Figura 41 – Exemplo de diagrama de caixa . . . . .	146

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Funções teste . . . . .	24
Tabela 2 – Implementações do FA . . . . .	42
Tabela 3 – Estratégia para atribuição de $\gamma$ . . . . .	50
Tabela 4 – Relação entre estratégias . . . . .	51
Tabela 5 – Parâmetros utilizados para os métodos . . . . .	62
Tabela 6 – Melhor solução encontrada . . . . .	68
Tabela 7 – Rank médio dos métodos de acordo com a melhor solução . . . . .	68
Tabela 8 – Solução média encontrada pelos métodos . . . . .	70
Tabela 9 – Rank médio dos métodos de acordo com a solução média . . . . .	70
Tabela 10 – Características dos sistemas para PDE . . . . .	71
Tabela 11 – Limites de avaliações definidos para os sistemas . . . . .	72
Tabela 12 – Resultados das execuções - sistema 3 unidades . . . . .	73
Tabela 13 – Resultados das execuções - sistema 6 unidades . . . . .	74
Tabela 14 – Resultados das execuções - sistema 10 unidades . . . . .	77
Tabela 15 – Resultados das execuções - sistema 13 unidades . . . . .	80
Tabela 16 – Resultados das execuções . . . . .	81
Tabela 17 – Resultados das execuções - sistema de 18 unidades . . . . .	84
Tabela 18 – Resultados das execuções - sistema de 20 unidades . . . . .	87
Tabela 19 – Resultados das execuções - sistema de 26 unidades . . . . .	89
Tabela 20 – Resultados das execuções - sistema de 38 unidades . . . . .	91
Tabela 21 – Resultados das execuções - sistema de 40 unidades . . . . .	94
Tabela 22 – Resultados das execuções - sistema de 110 unidades . . . . .	96
Tabela 23 – Resultados das execuções - sistema de 140 unidades . . . . .	99
Tabela 24 – Características destacadas no PDE . . . . .	102
Tabela 25 – Custos das soluções para PDE - melhor caso . . . . .	102
Tabela 26 – <i>Rank</i> médio dos métodos - soluções de menor custo . . . . .	103
Tabela 27 – Custos das soluções para PDE - média . . . . .	103
Tabela 28 – <i>Rank</i> médio dos métodos - custo médio de soluções . . . . .	103
Tabela 29 – Custos das soluções para PDE - pior caso . . . . .	104
Tabela 30 – <i>Rank</i> médio dos métodos - custo máximo de soluções . . . . .	105
Tabela 31 – Tempo médio de execução dos métodos (s) . . . . .	108
Tabela 32 – Dados do problema de DE com 3 unidades . . . . .	121
Tabela 33 – Dados do problema de DE com 6 unidades . . . . .	121
Tabela 34 – Zonas proibidas - sistema de 6 unidades . . . . .	121
Tabela 35 – Dados do problema de DE com 10 unidades . . . . .	122
Tabela 36 – Dados do problema de DE com 13 unidades . . . . .	122
Tabela 37 – Dados do problema de DE com 15 unidades . . . . .	123
Tabela 38 – Zonas proibidas do problema de DE . . . . .	123

Tabela 39 – Dados do problema de DE com 18 unidades . . . . .	124
Tabela 40 – Dados do problema de DE com 20 unidades . . . . .	124
Tabela 41 – Dados do problema de DE com 26 unidades . . . . .	125
Tabela 42 – Dados do sistema de 38 unidades . . . . .	125
Tabela 43 – Dados do sistema de 40 unidades . . . . .	126
Tabela 44 – Dados do sistema de 110 unidades . . . . .	127
Tabela 45 – Dados do sistema de 140 unidades . . . . .	129
Tabela 46 – Melhor solução - sistema de 3 unidades . . . . .	133
Tabela 47 – Melhor solução - sistema de 6 unidades . . . . .	133
Tabela 48 – Melhor solução - sistema de 10 unidades . . . . .	133
Tabela 49 – Melhor solução - sistema de 13 unidades . . . . .	134
Tabela 50 – Melhor solução - sistema de 15 unidades . . . . .	134
Tabela 51 – Melhor solução - sistema de 18 unidades . . . . .	135
Tabela 52 – Melhor solução - sistema de 20 unidades . . . . .	135
Tabela 53 – Melhor solução - sistema de 26 unidades . . . . .	136
Tabela 54 – Melhor solução - sistema de 38 unidades . . . . .	136
Tabela 55 – Melhor solução - sistema de 40 unidades . . . . .	137
Tabela 56 – Melhor solução - sistema de 110 unidades . . . . .	138
Tabela 57 – Melhor solução - sistema de 140 unidades . . . . .	140
Tabela 58 – Tabela exemplo de soluções para análise . . . . .	147

## SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO . . . . .	17
1.1	Justificativa . . . . .	18
1.2	Objetivos . . . . .	18
1.3	Metodologia . . . . .	18
1.4	Organização do trabalho . . . . .	19
2	OTIMIZAÇÃO . . . . .	21
2.1	Problemas de otimização . . . . .	21
2.2	Métodos de otimização e metaheurísticas . . . . .	21
2.3	Funções teste . . . . .	24
2.4	Considerações finais . . . . .	26
3	PROBLEMA DE DESPACHO ECONÔMICO . . . . .	29
3.1	Função custo . . . . .	29
3.2	Restrições . . . . .	32
3.3	Solução do PDE . . . . .	36
4	ALGORITMO DOS VAGA-LUMES . . . . .	39
4.1	Atratividade . . . . .	39
4.2	Movimento dos vaga-lumes . . . . .	40
4.3	Algoritmo . . . . .	41
4.4	Algoritmo dos vaga-lumes com população não-homogênea . . . . .	43
5	ANÁLISE TEÓRICA . . . . .	45
5.1	Atratividade . . . . .	45
5.1.1	Parâmetro $\gamma$ . . . . .	46
5.1.2	Parâmetro $\beta_0$ . . . . .	52
5.1.3	Considerações . . . . .	52
5.2	Aleatoriedade . . . . .	53
5.2.1	Números aleatórios - parâmetro $\epsilon$ . . . . .	53
5.2.2	Parâmetro $\alpha$ . . . . .	55
5.2.3	Considerações . . . . .	57
5.3	Inicialização de parâmetros da população não-homogênea . . . . .	57
5.3.1	Inicialização por grupos . . . . .	58
5.3.2	Inicialização aleatória . . . . .	59
5.3.3	Considerações . . . . .	59
6	SIMULAÇÕES E RESULTADOS . . . . .	61
6.1	Configuração de testes . . . . .	61

6.2	Tratamento de restrições . . . . .	62
6.2.1	Funções teste . . . . .	63
6.2.2	Problema de despacho econômico . . . . .	63
6.2.3	Considerações . . . . .	65
6.3	Aplicação em funções teste . . . . .	66
6.3.1	Análise da melhor solução . . . . .	66
6.3.2	Análise da solução média . . . . .	69
6.4	Problema de despacho econômico . . . . .	71
6.4.1	Sistema de 3 unidades . . . . .	73
6.4.2	Sistema de 6 unidades . . . . .	74
6.4.3	Sistema de 10 unidades . . . . .	77
6.4.4	Sistema de 13 unidades . . . . .	80
6.4.5	Sistema de 15 unidades . . . . .	81
6.4.6	Sistema de 18 unidades . . . . .	84
6.4.7	Sistema de 20 unidades . . . . .	87
6.4.8	Sistema de 26 unidades . . . . .	88
6.4.9	Sistema de 38 unidades . . . . .	91
6.4.10	Sistema de 40 unidades . . . . .	93
6.4.11	Sistema de 110 unidades . . . . .	96
6.4.12	Sistema de 140 unidades . . . . .	98
6.4.13	Análise geral . . . . .	100
7	<b>CONCLUSÃO E PERSPECTIVAS FUTURAS . . . . .</b>	<b>109</b>
	<b>REFERÊNCIAS . . . . .</b>	<b>111</b>
	<b>APÊNDICES . . . . .</b>	<b>119</b>
	<b>APÊNDICE A – DADOS DOS PROBLEMAS DE DESPACHO ECONÔMICO . . . . .</b>	<b>121</b>
	<b>APÊNDICE B – SOLUÇÕES ÓTIMAS PARA OS PROBLEMAS DE DESPACHO ECONÔMICO . . . . .</b>	<b>133</b>
	<b>APÊNDICE C – FUNDAMENTOS DE ESTATÍSTICA . . . . .</b>	<b>145</b>
C.1	Descrição . . . . .	145
C.2	Inferência - Teste de Friedman . . . . .	146

## 1 INTRODUÇÃO

A otimização pode ser definida como a arte de determinar a melhor solução para certos problemas definidos matematicamente (FLETCHER, 1987). A formulação de um dado problema envolve uma função objetivo, as variáveis de controle e as restrições. A função objetivo deve ser maximizada ou minimizada ajustando-se as variáveis de controle no espaço de busca do problema. O espaço de busca por sua vez é o domínio de valores possíveis das variáveis de controle que é limitado pelo conjunto de restrições. Desta forma, podem ser definidos problemas relacionados às mais diversas áreas, pois, independente da aplicação a busca sempre tem por objetivo encontrar a melhor dentre todas as possíveis soluções (LINDEN, 2008).

O problema de despacho econômico é um importante problema de otimização presente na operação de sistemas elétricos de potência, onde a demanda de potência deve ser dividida entre as unidades geradoras com o menor custo possível (SINHA; CHAKRABARTI; CHATTOPADHYAY, 2003). Neste problema, a função objetivo é o custo de geração e, as variáveis de controle são as potências de saída dos geradores. As restrições deste problema por sua vez, são os limites de operação das unidades geradoras e o balanço de potência.

Os métodos matemáticos tradicionais podem ser empregados na resolução de problemas práticos, no entanto estes métodos não funcionam de maneira eficiente em funções não convexas, não suaves e de alta dimensionalidade (SUN et al., 2014). Desta forma, a utilização de métodos heurísticos (também chamados de metaheurísticas) é fortemente considerada para a solução de problemas complexos da ciência e da engenharia em um tempo hábil (TALBI, 2009). Segundo Sorensen, Sevaux e Glover (2017), uma metaheurística pode ser vista como um conjunto de conceitos e estratégias que se misturam e oferecem uma perspectiva no desenvolvimento de algoritmos de otimização. Atualmente, muitas metaheurísticas se originam de metáforas com a natureza (SORENSEN; SEVAUX; GLOVER, 2017).

O FA (do inglês *firefly algorithm*), ou algoritmo dos vaga-lumes, é uma metaheurística baseada no mecanismo de comunicação existente entre os vaga-lumes, que foi originalmente proposta por Yang (2009a). Desde então o FA tem sido aplicado a vários problemas práticos (YANG; HE, 2013), bem como também tem servido de base para o desenvolvimento de inúmeras variantes. Entre as aplicações práticas do FA pode-se citar a compressão de imagens (HORNG, 2012), o design de antenas (CHATTERJEE; MAHANTI; CHATTERJEE, 2012), a meteorologia (SANTOS et al., 2013), o problema de despacho econômico (YANG; HOSSEINI; GANDOMI, 2012), entre outros (FISTER et al., 2014).

Gandomi et al. (2013) propuseram uma variante na qual foi introduzido o efeito de mapas caóticos nos parâmetros de controle do algoritmo. Cheung, Ding e Shen (2014) desenvolveram uma versão adaptativa do FA, onde os parâmetros do algoritmo são

ajustados durante a execução. Posteriormente também foi desenvolvida uma versão não-homogênea do FA adaptativo (CHEUNG; DING; SHEN, 2016). De forma similar, Yu et al. (2014) também propôs uma variante não-homogênea na qual ocorre o ajuste automático de parâmetros na execução. Wang et al. (2016) propuseram um modelo de atração aleatória, apresentando a crítica de que o grande número de atrações existentes entre os vaga-lumes ocasiona oscilações indesejadas no movimento destes. Todas as variantes citadas foram comparadas com o algoritmo original por meio de um conjunto de funções teste, apresentando um melhor desempenho.

## 1.1 JUSTIFICATIVA

A literatura tem mostrado que o desempenho do algoritmo dos vaga-lumes pode ser melhorado através de modificação (variantes), apresentando assim melhores resultados para um conjunto de problemas. Além disso, como muitas aplicações práticas são modeladas como problemas de otimização, os resultados obtidos nestes problemas aplicados podem ser melhorados.

O problema de despacho econômico é um exemplo de problema prático, que tem uma grande importância para a operação de sistemas elétricos de potência. Uma solução eficiente para este problema conduz à redução de custos e também da emissão de poluentes. Logo, melhorando-se o desempenho de um método neste problema, melhora-se a qualidade das soluções obtidas.

## 1.2 OBJETIVOS

O objetivo geral deste Trabalho é propor uma variante não homogênea do algoritmo dos vaga-lumes e fazer uma análise comparativa dos resultados obtidos pela variante e pelo algoritmo original. Para isto, este trabalho tem como objetivos específicos a implementação do FA e da variante não homogênea proposta (NhFA), e a comparação do desempenho destes algoritmos em um conjunto de problemas selecionados, bem como também a aplicação e comparação no problema de despacho econômico.

## 1.3 METODOLOGIA

Neste Trabalho, foi proposta uma variante com população não-homogênea, o algoritmo dos vaga-lumes não-homogêneo ou NhFA (do inglês *Non-homogenous firefly algorithm*). Nesta variante, todos os parâmetros do algoritmo FA original passam a ser individualizados, assim, a população passa a ser composta de vaga-lumes com comportamentos distintos. Ao contrário das propostas não-homogêneas de Cheung, Ding e Shen (2016) e de Yu et al. (2014), a variante deste trabalho não realiza nenhum ajuste de parâmetros ao

decorrer da execução. Desta forma, este estudo se concentra essencialmente nos efeitos da utilização de parâmetros não-homogêneos no FA.

Para o estudo comparativo entre o FA e o NhFA foram selecionadas 10 funções teste bem conhecidas na literatura (JAMIL; YANG, 2013) (HANSEN et al., 2009) (RAHNAMAYAN; TIZHOOSH; SALAMA, 2007) (ALROOMI, 2013). Posteriormente, foi realizada a aplicação dos métodos ao problema de despacho econômico. Como existem várias instâncias deste problema (sistemas de teste) propagadas na literatura, foram selecionados 12 sistemas com diferentes tamanhos e características para compor uma análise comparativa mais ampla entre o FA e o NhFA.

## 1.4 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

Este trabalho está estruturado da seguinte forma: o Capítulo 2 introduz os conceitos de otimização, métodos de otimização e algumas funções teste utilizadas para a comparação das metaheurísticas. Em seguida, no Capítulo 3, é apresentada a formulação do problema de despacho econômico. Além disso, no Capítulo 4 é realizada uma descrição fundamental do FA, introduzindo também o NhFA. O Capítulo 5 por sua vez, aborda de maneira mais detalhada os parâmetros de controle do FA, fazendo uma análise de seus efeitos frente a algumas proposições existentes na literatura. No Capítulo 6 são apresentadas as configurações de teste, resultados obtidos e também uma análise destes. Finalmente, o Capítulo 7 apresenta as conclusões e futuras direções de pesquisa relacionadas a este Trabalho.



## 2 OTIMIZAÇÃO

Este Capítulo traz algumas definições a respeito de problemas de otimização e uma breve apresentação de alguns métodos para solucionar problemas deste tipo. Primeiramente a Seção 2.1 apresenta a definição formal de problemas de otimização. Na Seção 2.2 são apresentados de maneira sucinta alguns métodos heurísticos de otimização. A Seção 6.3 trata do uso de funções teste para a avaliação de métodos de otimização. Por fim, na Seção 2.4 são apresentadas as considerações finais deste Capítulo.

### 2.1 PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO

Em geral, um problema de otimização pode ser definido como buscar um minimizador para a função  $f$  no domínio  $D$  (IZMAILOV; SOLODOV, 2005). Este problema pode ser escrito de acordo com (2.1):

$$\min f(x) \text{ sujeito a } D \quad (2.1)$$

Em (2.1),  $D$ , chamado de conjunto de pontos viáveis ou espaço de busca, é delimitado pelas restrições do problema. A função  $f$  é também conhecida como função objetivo.  $x$  pode ser tomado como um ponto de  $d$  dimensões  $x = \{x_1, x_2, \dots, x_d\}$ . Quando  $D = \mathbb{R}^d$  o problema em questão é chamado de problema irrestrito. Já quando o problema envolver restrições, pode-se escrever  $D$  como (2.2), considerando que existem  $l$  restrições de igualdade e  $m$  restrições de desigualdade.

$$D = \left\{ \begin{array}{l} h_i(x) = 0 \quad | \quad i = 1, 2, \dots, l \\ g_i(x) \leq 0 \quad | \quad i = 1, 2, \dots, m \end{array} \right\} \quad (2.2)$$

Logo, de maneira geral, um problema de otimização é definido segundo (2.3):

$$\left\{ \begin{array}{l} \min f(x) \text{ sujeito a} \\ h_i(x) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, l \\ g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m \end{array} \right. \quad (2.3)$$

Cada ponto  $x$  no domínio que satisfaz as restrições é um candidato a solução do problema, e a solução  $\bar{x}$  que minimiza  $f$  é chamada de solução ótima. De mesma forma, o valor de  $f(\bar{x})$  é chamado de valor ótimo. Logo, a solução de um problema de otimização consiste em se encontrar  $\bar{x} = \{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_d\}$ .

### 2.2 MÉTODOS DE OTIMIZAÇÃO E METAHEURÍSTICAS

Existem duas classes principais de métodos de otimização: os métodos clássicos, também conhecidos como métodos exatos, e os métodos heurísticos, também conhecidos como metaheurísticas. Existem algumas diferenças principais entre estas duas classes. Os

métodos exatos são fundamentados matematicamente, enquanto os métodos heurísticos geralmente são inspirados em fenômenos da natureza. Para uma determinada condição inicial um método exato sempre encontrará a mesma solução, logo seu caráter é determinístico. Já para um método heurístico, uma mesma condição inicial pode levar a diferentes soluções, logo seu caráter é estocástico.

Os métodos exatos podem ser provados matematicamente quanto à convergência e a velocidade em que convergem. Isto nem sempre é possível para as metaheurísticas, assim estes métodos geralmente têm fundamentação empírica.

Alguns exemplos principais de métodos clássicos são o método do gradiente conjugado (FLETCHER; REEVES, 1964) e a programação quadrática sequencial (WILSON, 1963). Em geral estes métodos funcionam bem em funções contínuas e diferenciáveis (RAO; RAO, 2009). Por outro lado, os métodos clássicos são bastante limitados tratando-se de funções objetivo não suaves, não convexas e de alta dimensionalidade (SUN et al., 2014). Por estes motivos, os métodos clássicos tem um escopo limitado em problemas práticos (RAO; RAO, 2009).

Uma metaheurística é constituída de dois aspectos principais: a intensificação e a diversificação. A intensificação está relacionada com a característica de busca local do método, a qual serve para melhorar a solução atual. Já a diversificação está relacionada com a busca em nível global, visando encontrar soluções alternativas que possam conduzir a uma melhor solução final. O balanceamento entre as buscas local e global é bastante importante para evitar que o método fique preso em ótimos locais (por meio da diversificação) ao mesmo tempo que melhora a solução atual (por meio da intensificação).

O caráter estocástico das metaheurísticas é oriundo de operações com números aleatórios, que por sua vez são responsáveis pela diversificação das soluções obtidas durante a execução do método. Como um número gerado aleatoriamente teoricamente é imprevisível, não há também como prever exatamente a execução de uma metaheurística. Esta característica é que traz a vantagem de poder se obter soluções diversificadas ao longo da busca, impedindo que o método fique preso em ótimos locais.

De maneira geral, os métodos heurísticos podem ser classificados em dois grupos principais: os métodos baseados em única solução e os métodos baseados em população (TALBI, 2009). Os métodos baseados em única solução são também chamados de métodos baseados em trajetória pois seu caminho de busca forma uma trajetória onde o agente se movimenta considerando alguma atração (YANG, 2009b). Já os métodos baseados em população utilizam um conjunto de soluções (população) que é iterativamente aprimorado através de seleção e combinação das soluções existentes (SÖRENSEN; GLOVER, 2013).

Alguns exemplos de metaheurísticas baseadas em trajetória são o SA (do inglês *Simulated Annealing*) (KIRKPATRICK et al., 1983) e a busca tabu (GLOVER, 1986).

O SA é uma metaheurística baseada no processo de resfriamento térmico de sólidos utilizado na indústria de metalurgia. Quando um sólido atinge o estado de fusão

a mobilidade dos átomos é grande e então é aplicado o resfriamento gradual. Com o resfriamento, a movimentação dos átomos começa a ficar restrita para a formação de uma forte estrutura cristalina (RAO; RAO, 2009). Desta forma, o SA busca por soluções vizinhas da solução atual e a probabilidade de aceitação de soluções piores que a atual é grande no começo da execução. Com o decorrer da execução, acontece o "resfriamento", que faz com que a probabilidade de aceitação de soluções piores seja cada vez menor.

Por sua vez, a busca tabu é um método onde a busca é guiada por dois elementos principais: a restrição da busca, definindo algumas soluções temporariamente como proibidas (tabu), e a posterior liberação destas soluções do estado proibido (GLOVER, 1989). Para que este efeito seja implementado, o método da busca tabu faz uso da memorização de algumas soluções. Através da memorização é constituído um mecanismo de penalização que evita que hajam ciclos na busca (GLOVER, 1986).

Alguns exemplos de metaheurísticas baseadas em população são os algoritmos genéticos (HOLLAND, 1975) e o PSO (do inglês *Particle Swarm Optimization*) (KENNEDY; EBERHART, 1995).

Os algoritmos genéticos são baseados no processo evolutivo, onde cada solução é abstraída como um indivíduo da população. Desta forma, a busca acontece por meio de três operações básicas: reprodução, cruzamento e mutação (RAO; RAO, 2009). Geralmente é aplicado o cruzamento entre as soluções melhores e a mutação é incluída para modificar de uma maneira aleatória a nova solução, promovendo diversidade (TALBI, 2009).

O PSO é uma metaheurística inspirada no comportamento de enxames, onde as soluções são abstraídas como partículas. Cada partícula por sua vez se move considerando sua própria inteligência e também a inteligência coletiva do enxame (RAO; RAO, 2009). Assim, o movimento de uma partícula é relacionado à melhor solução encontrada por aquela partícula e também à melhor solução encontrada pelo enxame inteiro até então. Kennedy e Eberhart (1995) mencionam também a simplicidade da implementação do PSO uma vez que este requer apenas operadores simples como soma e multiplicação.

Como as metaheurísticas possuem caráter estocástico, não pode-se julgar seu desempenho por apenas uma execução. Ao invés disso, são realizadas várias execuções e analisadas a melhor solução, a solução média e eventualmente o desvio padrão. Esta comparação é feita utilizando-se um mesmo critério de parada para todos os métodos comparados, podendo ser um número limite de iterações, o erro presente nas  $n$  últimas iterações, o desvio padrão existente entre as soluções da população, entre outros. Segundo Luke (2009), o número de avaliações da função objetivo é o principal critério considerado atualmente, pois isto permite analisar nitidamente qual método tende a apresentar melhores soluções, tomando-se como referência um recurso limitado.

A validação e comparação do desempenho de metaheurísticas frequentemente é baseada em funções teste padrões na literatura (MOLGA; SMUTNICKI, 2005). As funções teste são elaboradas como problemas artificiais, que possuem o propósito de avaliar o

comportamento dos métodos em diferentes situações difíceis (ANDREI, 2008).

## 2.3 FUNÇÕES TESTE

Na literatura existe um grande número de funções teste para avaliação de metaheurísticas. Algumas funções possuem um número de dimensões determinado enquanto outras possuem uma forma generalizada, podendo ser empregadas para qualquer número de dimensões. O espaço de busca destas funções generalizadas geralmente é definido como um hipercubo. Logo, para um problema onde o espaço de busca é definido por  $x_i^{inf} \leq x_i \leq x_i^{sup}$ , onde  $i = 1, 2, \dots, d$ , será utilizada a representação  $[x_i^{inf}, x_i^{sup}]^d$ . Adicionalmente, o valor ótimo de uma função  $f$  será representado por  $f^*$ . A Tabela 1 apresenta algumas funções teste elementares utilizadas na literatura. Na função *inverted cosine*, define-se  $\lambda_i = x_i^2 + x_{i+1}^2 + 0,5x_ix_{i+1}$ . As funções *quartic*, *step*, *bent cigar* e de Rosenbrock são funções unimodais e as restantes são multimodais.

Tabela 1: Funções teste

Função	$f(x)$	Domínio	$f^*$
Rastrigin	$10d + \sum_{i=1}^d [x_i^2 - 10\cos(2\pi x_i)]$	$[-5, 12, \dots, 5, 12]^d$	0
Rosenbrock	$\sum_{i=1}^{d-1} [100(x_{i+1} - x_i^2) + (1 - x_i)^2]$	$[-30, \dots, 30]^d$	0
Schwefel	$418,9829d - \sum_{i=1}^d x_i \sin(\sqrt{ x_i })$	$[-500, \dots, 500]^d$	0
Griewank	$\frac{1}{4000} \sum_{i=1}^d x_i^2 - \prod_{i=1}^d \cos\left(\frac{x_i}{\sqrt{i}}\right) + 1$	$[-600, \dots, 600]^d$	0
Michalewicz	$-\sum_{i=1}^d \sin(x_i) \left[ \sin\left(\frac{ix_i^2}{\pi}\right) \right]^{2m}$	$[0, \dots, \pi]^d$	-
<i>Bent Cigar</i>	$x_i^2 + 10^6 \sum_{i=2}^d x_i^2$	$[-100, \dots, 100]^d$	0
Alpine	$\sum_{i=1}^d  x_i \sin(x_i) + 0,1x_i $	$[-10, \dots, 10]^d$	0
<i>Quartic</i>	$\sum_{i=1}^d ix_i^4$	$[-1, 28, \dots, 1, 28]^d$	0
<i>Step</i>	$\sum_{i=1}^d \lfloor  x_i  \rfloor$	$[-100, \dots, 100]^d$	0
<i>Inverted Cosine</i>	$-\sum_{i=1}^{d-1} \left\{ e^{\lfloor \frac{-\lambda_i}{8} \rfloor} \cos(4\sqrt{\lambda_i}) \right\}$	$[-5, \dots, 5]^d$	-d + 1

Fonte: Elaborado pelo autor

As funções teste foram selecionadas a partir de algumas revisões na literatura (RAHNAMAYAN; TIZHOOSH; SALAMA, 2007) (JAMIL; YANG, 2013) (ALI; KHOMPATRAPORN; ZABINSKY, 2005) (YAO; LIU; LIN, 1999). Cada função serve para testar o desempenho dos métodos em determinadas situações.

A função de Rosenbrock é bastante utilizada na literatura e conhecida por ser uma função difícil. O ponto ótimo se encontra em um vale curvo que segue uma parábola (ROSENBROCK, 1960). Este vale curvo deve ser seguido para que se encontre o ponto

ótimo global (HANSEN et al., 2009). Devido a existência de um ponto de sela, a localização do ótimo é difícil (ALI; KHOMPATRAPORN; ZABINSKY, 2005). Logo, apesar da localização do vale ser trivial, a convergência para o ótimo é difícil (POHLHEIM, 2007).

Já a função de Rastrigin se assemelha com a função da esfera com a adição de modulação senoidal, o que a caracteriza como uma função multimodal onde a localização dos mínimos locais é uniformemente distribuída (POHLHEIM, 2007). Considerando-se apenas duas dimensões a função apresenta cerca de 50 mínimos locais (ALI; KHOMPATRAPORN; ZABINSKY, 2005). Hansen et al. (2009) aproxima grosseiramente o número de mínimos locais como  $10^d$  para a função de Rastrigin com  $d$  dimensões.

Além disso, a função de Schwefel é bem mais difícil do que a função de Rastrigin por não ter um comportamento simétrico e o ótimo global se encontrar próximo à borda do espaço de busca (DIETERICH; HARTKE, 2012). Esta função também é bastante enganosa pois a segunda melhor solução se encontra geometricamente distante (no espaço de busca) do ótimo global (MOLGA; SMUTNICKI, 2005) (POHLHEIM, 2007). Desta forma, esta função pode propiciar potencialmente os algoritmos a convergirem na direção errada (POHLHEIM, 2007).

Ainda, a função de Griewank se assemelha com a função de Rastrigin uma vez que apresenta vários mínimos locais espalhados regularmente pelo espaço de busca (POHLHEIM, 2007). Como o espaço de busca é maior, o número de mínimos locais também é maior. De acordo com Griewank (1981) e Ali, Khompatraporn e Zabinsky (2005) existem cerca de 500 mínimos locais nesta função, considerando-se 2 dimensões.

A função de Michalewicz por sua vez é uma função multimodal onde o número de ótimos locais é igual a  $d!$  (MOLGA; SMUTNICKI, 2005). Ainda,  $m$  é um parâmetro que define a inclinação dos vales e bordas. Quanto maior o valor de  $m$  mais difícil é a busca (POHLHEIM, 2007). Um valor muito grande de  $m$  faz com que os vales e bordas sejam como "agulha no palheiro". Desta forma, os valores da função no espaço de busca oferecem pouca informação sobre a localização do ótimo global (MOLGA; SMUTNICKI, 2005). Normalmente, utiliza-se  $m = 10$  (MOLGA; SMUTNICKI, 2005). A localização do ótimo global e o valor ótimo da função de Michalewicz variam de acordo com o número de dimensões, para 2 dimensões o valor ótimo é  $-1,80$ . Vanaret et al. (2014) apresentam uma aproximação para o valor ótimo da função de Michalewicz com  $d$  dimensões, onde  $f^* = -0,9986d + 0,3027$ .

A função *bent cigar* possui uma velocidade de crescimento bastante alta com respeito às variáveis  $x_2, x_3, \dots, x_d$ , desta forma movimentos relacionados à variável  $x_1$  são menos sensíveis do que os relacionados ao restante das variáveis. Esta função é caracterizada por um cume suave mas bastante estreito que deve ser seguido para se encontrar o ótimo (HANSEN et al., 2009).

A função de Alpine é caracterizada pela presença de vários mínimos locais mas apenas um ótimo global (CLERC, 1999). O aumento do espaço de busca aumenta direta-

mente o número de mínimos locais (CLERC, 1999). Já a função *inverted cosine* também é caracterizada pela existência de ótimos locais. O principal obstáculo desta função é que as soluções próximas das bordas podem ser mais promissoras que as soluções mais próximas do ótimo global, podendo levar o algoritmo para a direção errada.

As funções *step* e *quartic*, assim como a função de Rosenbrock, fazem parte do conjunto de teste proposto por Jong (1975). A função *step* é caracterizada pela presença de superfícies planas, o que apresenta uma dificuldade pois não oferece nenhuma informação sobre qual direção pode ser favorável. A função *quartic* é de caráter mais simples e é bastante útil para avaliar a velocidade de convergência do algoritmo.

Os gráficos das funções descritas em duas dimensões são apresentados na Figura 1. Na Figura 2 são apresentadas as curvas de contorno para as funções descritas.

## 2.4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Existem várias metaheurísticas propostas atualmente. Xing e Gao (2014) citam 134 algoritmos diferentes e Jr et al. (2013) relacionam 72 metaheurísticas que são inspiradas por fenômenos da natureza na literatura. De acordo com Andrei (2008) existem problemas reais e também problemas artificiais, os quais são propostos para avaliar o desempenho do método em situações específicas. As funções teste são exemplos de problemas artificiais que são frequentemente usadas para estudos comparativos entre metaheurísticas. Existem vários estudos que mostram desempenhos melhores de algumas metaheurísticas em relação a outras, considerando-se algum conjunto proposto de funções teste ou algum problema prático aplicado.

No entanto, não há como afirmar de maneira absoluta que uma metaheurística é melhor do que outra. Esta proposição é fundamentada pelo teorema da inexistência de almoço grátis proposto por Wolpert e Macready (1997). De acordo com este teorema, se forem considerados todos os problemas possíveis para comparar dois métodos, um dos métodos será melhor em uma determinada quantidade de problemas e pior do que o outro método nos problemas restantes.

Considerando-se isto cabe o estudo comparativo entre diferentes metaheurísticas para que se determine qual é a mais eficiente para o problema ou conjunto de problemas selecionados. O teste de Friedman por sua vez permite associar um grau de certeza às conclusões tiradas a partir dos resultados dos testes executados.

De fato, o algoritmo dos vaga-lumes tem sido objeto de estudos comparativos e se mostrou muito eficiente em relação a outros métodos como PSO e GA (YANG, 2009a).

Figura 1: Gráficos 3D das funções teste

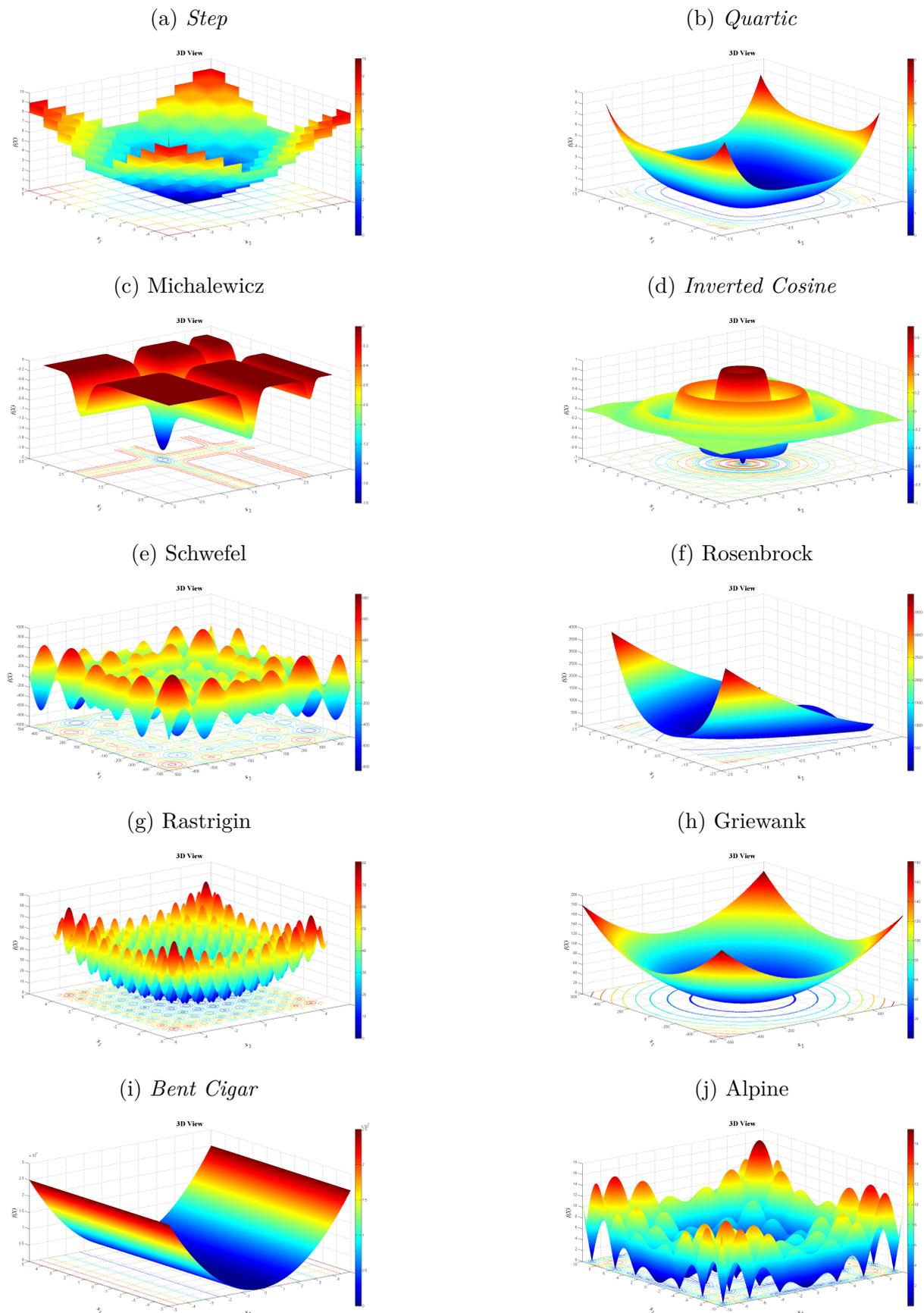
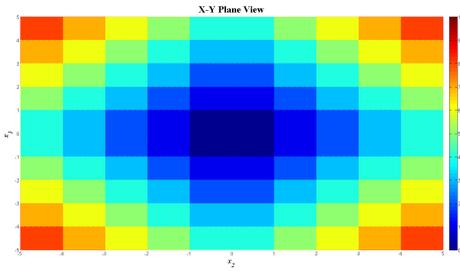
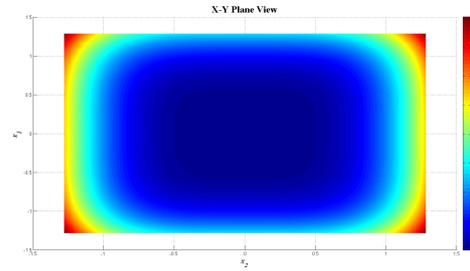
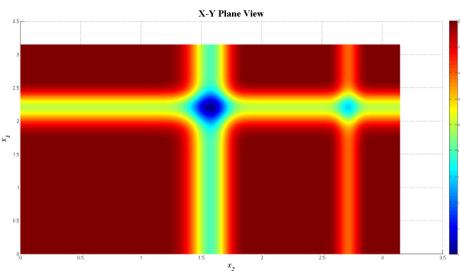
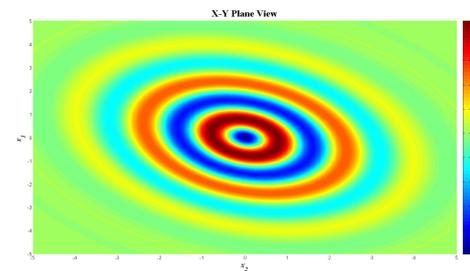
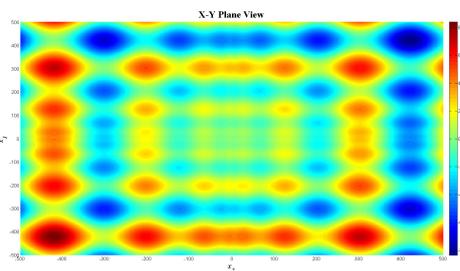
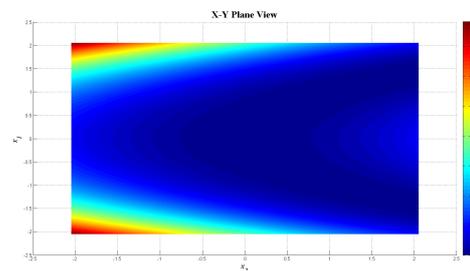
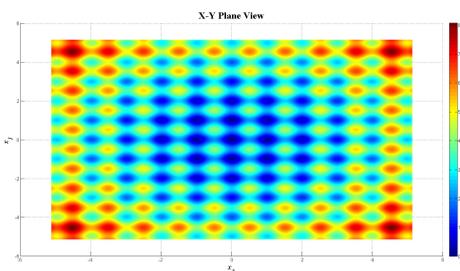
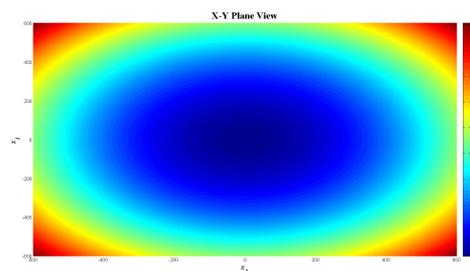
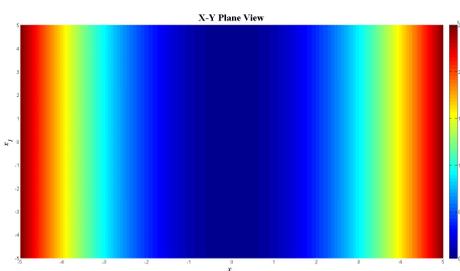
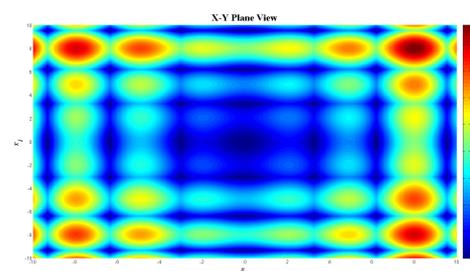


Figura 2: Curvas de contorno das funções teste

(a) *Step*(b) *Quartic*(c) *Michalewicz*(d) *Inverted Cosine*(e) *Schwefel*(f) *Rosenbrock*(g) *Rastrigin*(h) *Griewank*(i) *Bent Cigar*(j) *Alpine*

### 3 PROBLEMA DE DESPACHO ECONÔMICO DE CARGA

O problema de despacho econômico (PDE) é de bastante importância para o controle e operação dos sistemas de potência modernos (YANG; HOSSEINI; GANDOMI, 2012). A questão apresentada por este problema é a divisão da potência demandada entre as unidades geradoras economicamente (SUBRAMANIAN; THANUSHKODI, 2013). A busca pela solução ótima do PDE está sujeita a algumas restrições como limites de operação, limites de rampa e zonas proibidas, que são associadas às unidades geradoras. Além da restrição de operação das geradoras, outra restrição surge com o fato de que ocorrem perdas nas linhas de transmissão. Logo, a potência total gerada pelas unidades deve suprir também estas perdas. Desta forma, o problema de despacho econômico resume-se em buscar o escalonamento das saídas das unidades geradoras que atenda a demanda, as perdas de transmissão e também resulte em menor custo de geração (REDDY; REDDY, 2012).

Basicamente, no problema de despacho econômico existe uma função objetivo, que determina o custo de uma determinada solução, e também as restrições de operação que devem ser obedecidas. Na Seção 3.1 é descrita a formulação da função custo do PDE. Também, na Seção 3.2 são apresentadas as restrições do problema.

#### 3.1 FUNÇÃO CUSTO

Tendo-se o custo  $F_i$  para cada geradora  $i$ , a função objetivo que define o custo total de geração com  $N$  unidades geradoras é definida pela Equação (3.1).

$$C(P_1, P_2, \dots, P_N) = \sum_{i=1}^N F_i(P_i) \quad (3.1)$$

Por sua vez, a função custo  $F_i$  associada às unidades geradoras pode ser definida de várias formas diferentes. Uma das formas de se modelar o aumento de custo  $F_i$  em função da potência de saída  $P_i$ , consiste em utilizar equações baseadas em regressão polinomial de ordem 2 ou 3 (AL-ROOMI; EL-HAWARY, 2017). Normalmente, a função custo é aproximada por uma função quadrática (ordem 2) (ABDULLAH et al., 2012), dada em (3.2).

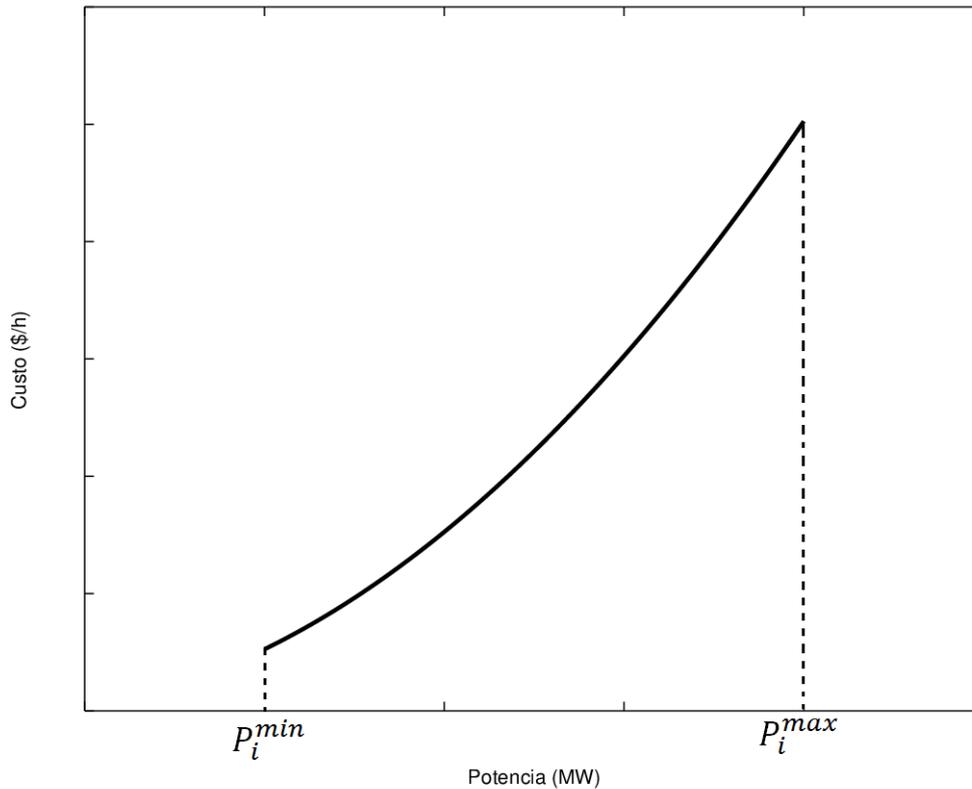
$$F_i(P_i) = a_i P_i^2 + b_i P_i + c_i \quad (3.2)$$

Em (3.2),  $a_i$ ,  $b_i$  e  $c_i$  são coeficientes da geradora  $i$ , e  $P_i$  é a potência de saída na geradora  $i$ . Na Figura 3, é apresentado um exemplo de função custo quadrática.

Além disso, o custo também pode ser modelado através de uma função cúbica (YANG; YANG; HUANG, 1997), conforme a Equação (3.3).

$$F_i(P_i) = a_i P_i^3 + b_i P_i^2 + c_i P_i + d_i \quad (3.3)$$

Figura 3: Função custo quadrática



Fonte: Elaborado pelo autor

Em (3.3), tem-se a adição de mais um coeficiente de custo  $d_i$ . Como o valor do coeficiente de custo que acompanha o termo  $P_i^3$  é muito pequeno, geralmente este termo é negligenciado, e utiliza-se a forma quadrática (AL-ROOMI; EL-HAWARY, 2017). Na Figura 4, é apresentado um exemplo de função custo cúbica.

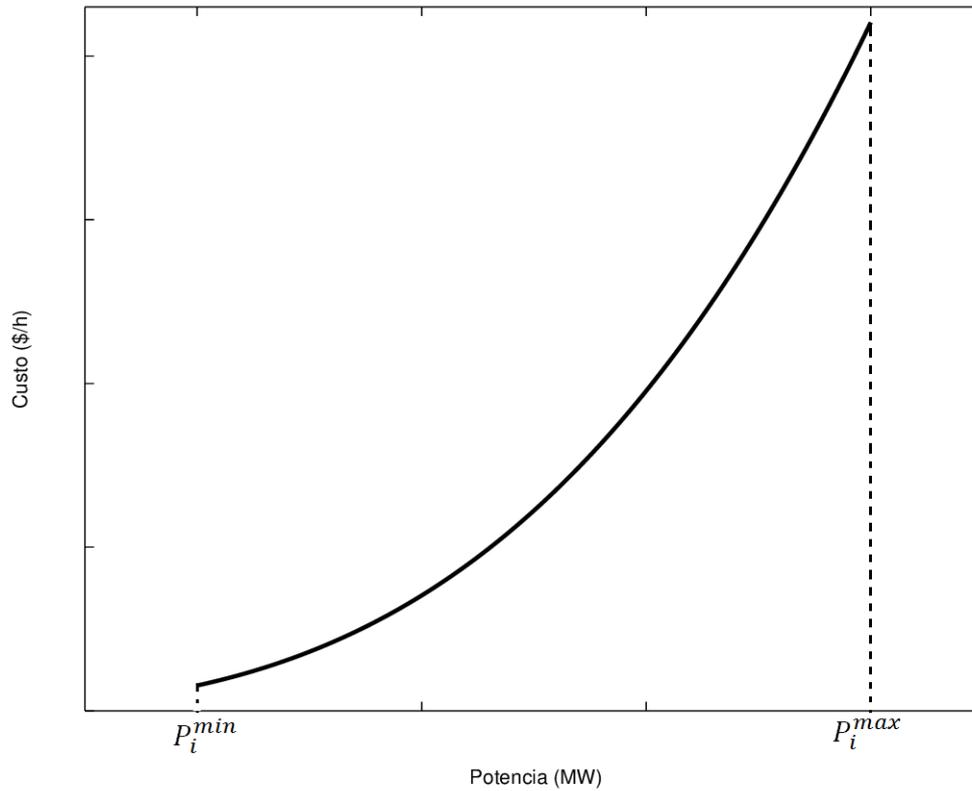
No entanto, existem também situações diferentes, que impactam no comportamento da função custo. Um exemplo é a presença de efeito de ponto de válvula (VPE - *Valve Point Effect*), que adiciona um comportamento ondulatório à curva de custo (CHIANG, 2005). Este efeito é modelado adicionando-se uma contribuição senoidal à função custo (WALTERS; SHEBLE, 1993). Assim, a função custo  $F_i$  que considera a presença do efeito de ponto de válvula é dada em (3.4).

$$F_i(P_i) = a_i P_i^2 + b_i P_i + c_i + |e_i \sin(f_i(P_i^{min} - P_i))| \quad (3.4)$$

Em (3.4),  $e_i$  e  $f_i$  são coeficientes de custo da unidade  $i$  relacionados ao efeito de ponto de válvula. Na Figura 5, é mostrado um exemplo da função custo com e sem o efeito de ponto de válvula.

Quando se considera a possibilidade de utilização de múltiplos combustíveis em

Figura 4: Função custo cúbica



Fonte: Elaborado pelo autor

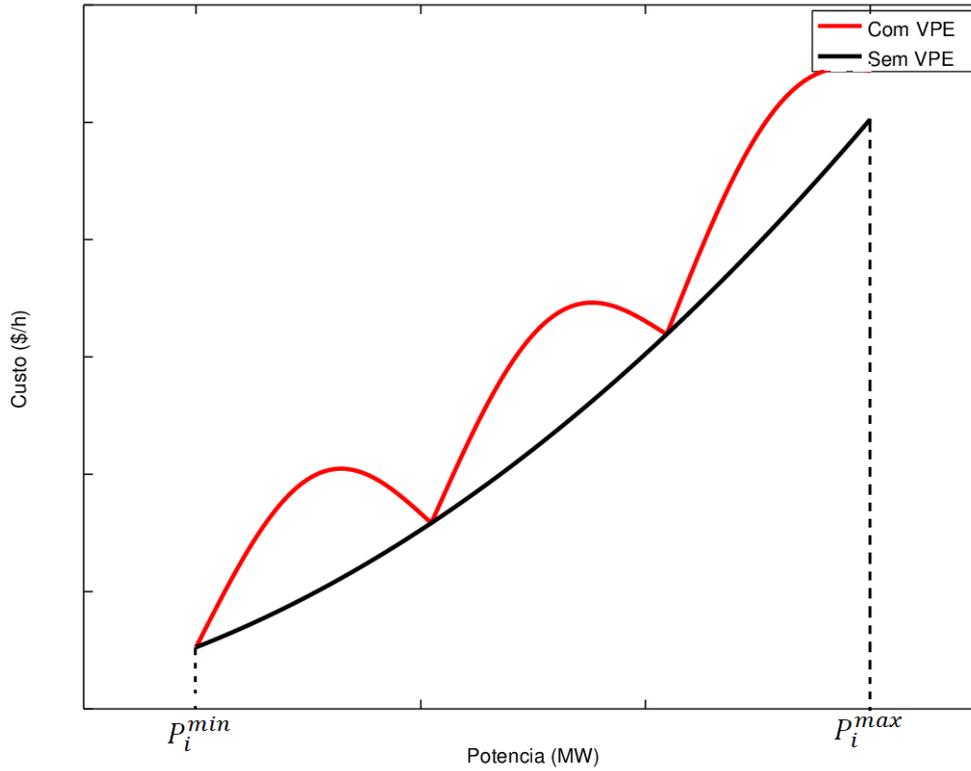
cada unidade geradora, pode-se representar o custo como uma função definida por partes (LIN; VIVIANI, 1984). A função resultante é chamada de função de custo híbrida, e é definida de acordo com a Equação (3.5).

$$F_i = \begin{cases} a_{i1}P_i^2 + b_{i1}P_i + c_{i1} & , P_i^{min} \leq P_i \leq P_{i1}, \text{ (combustível 1)} \\ a_{i2}P_i^2 + b_{i2}P_i + c_{i2} & , P_{i1} \leq P_i \leq P_{i2}, \text{ (combustível 2)} \\ \vdots & \\ a_{il}P_i^2 + b_{il}P_i + c_{il} & , P_{i(l-1)} \leq P_i \leq P_i^{max}, \text{ (combustível } l) \end{cases} \quad (3.5)$$

Em (3.5),  $a_{il}$ ,  $b_{il}$  e  $c_{il}$  são os coeficientes de custo da unidade geradora  $i$  com combustível  $l$ . É importante salientar que, o tipo de combustível a ser utilizado está relacionado com o intervalo no qual a potência de saída da geradora está situada. Por exemplo, se  $P_i$  estiver entre  $P_i^{min}$  e  $P_{i1}$ , então será utilizado o combustível 1, e assim sucessivamente para os outros combustíveis.

A Figura 6 apresenta um exemplo de função custo com 3 tipos diferentes de combustíveis.

Figura 5: Função custo com efeito de ponto de válvula



Fonte: Elaborado pelo autor

De maneira similar, quando são considerados ambos múltiplos combustíveis e efeito de ponto de válvula, a função custo pode ser definida por (3.6).

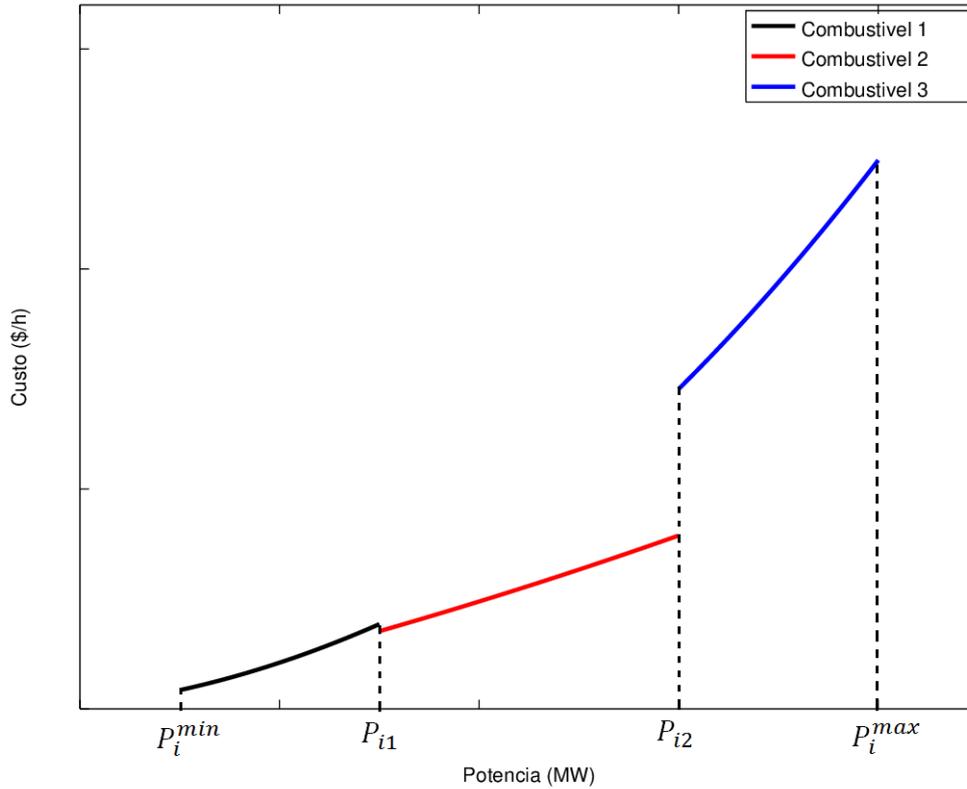
$$F_i = \begin{cases} a_{i1}P_i^2 + b_{i1}P_i + c_{i1} + |e_{i1}\sin(f_{i1}(P_i^{min} - P_i))| & , P_i^{min} \leq P_i \leq P_{i1}, \text{ (combustível 1)} \\ a_{i2}P_i^2 + b_{i2}P_i + c_{i2} + |e_{i2}\sin(f_{i2}(P_{i1} - P_i))| & , P_{i1} \leq P_i \leq P_{i2}, \text{ (combustível 2)} \\ \vdots & \\ a_{il}P_i^2 + b_{il}P_i + c_{il} + |e_{il}\sin(f_{il}(P_{i(l-1)} - P_i))| & , P_{i(l-1)} \leq P_i \leq P_i^{max}, \text{ (combustível } l) \end{cases} \quad (3.6)$$

Em (3.6),  $e_{il}$  e  $f_{il}$  são os coeficientes de custo relacionados ao efeito de ponto de válvula, considerando-se o uso do combustível  $l$ .

### 3.2 RESTRIÇÕES

Cada unidade  $i$  possui um limite de operação, logo a potência gerada pela unidade  $i$  deve se situar entre  $P_i^{min}$  e  $P_i^{max}$ . Esta condição define uma restrição no domínio que é

Figura 6: Função custo com múltiplos combustíveis



Fonte: Elaborado pelo autor

representada pela Desigualdade (3.7).

$$P_i^{min} \leq P_i \leq P_i^{max} \quad (3.7)$$

onde  $P_i^{min}$  é a potência mínima e  $P_i^{max}$  a potência máxima que a unidade  $i$  pode gerar.

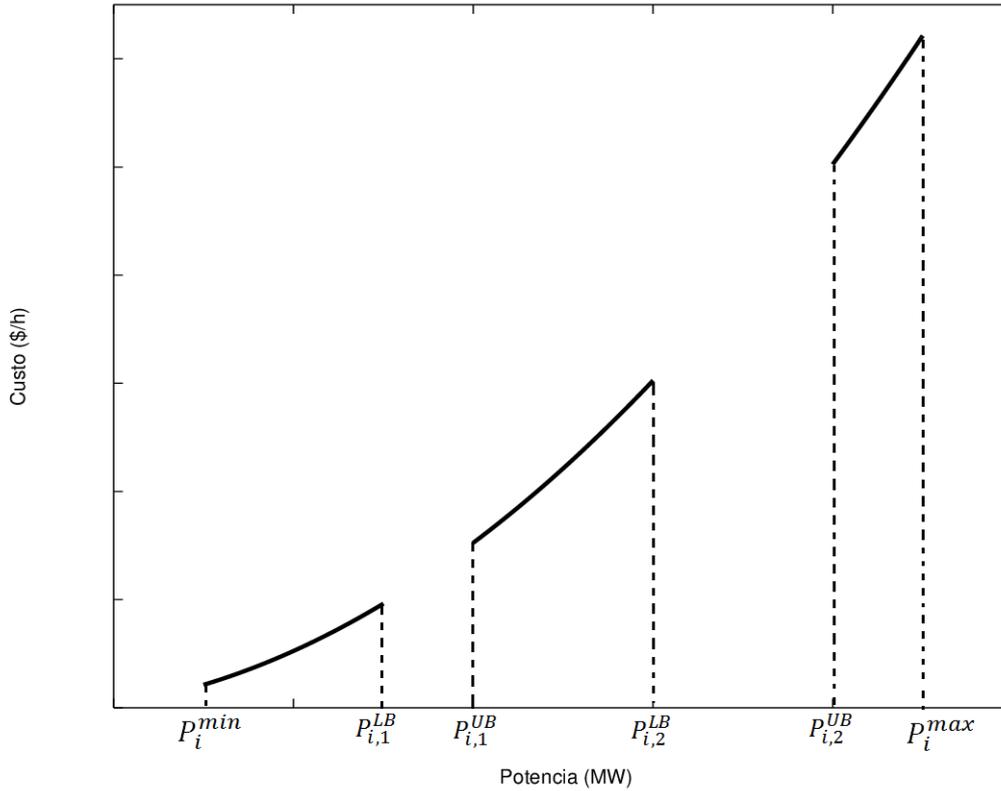
Dependendo do problema podem existir zonas proibidas, que também se caracterizam como restrições no domínio. Estas zonas se devem à operação da válvula de vapor ou à vibração no rolamento de eixo (CHEN; CHANG, 1995), e são limites de potência que devem ser evitados. Devido a esta característica o espaço de busca apresenta um caráter não convexo. A restrição de zonas proibidas pode ser representada de acordo com a relação (3.8).

$$\left\{ \begin{array}{l} P_i^{min} \leq P_i \leq P_{i,1}^{LB} \\ P_{i,j-1}^{UB} \leq P_i \leq P_{i,j}^{LB}, \quad j = 2, 3, \dots, NP_i \\ P_{i,j}^{UB} \leq P_i \leq P_i^{max}, \quad j = NP_i \end{array} \right. \quad (3.8)$$

Em (3.8),  $P_{i,j}^{LB}$  é o limite inferior da  $j$ -ésima zona proibida do gerador  $i$ , e  $P_{i,j}^{UB}$  é

o limite superior da  $j$ -ésima zona proibida do gerador  $i$ .

Figura 7: Impacto de zonas proibidas na função custo



Fonte: Elaborado pelo autor

A Figura 7 apresenta um exemplo de função custo, onde a potência está restrita por duas zonas proibidas.

Na prática, o ajuste de uma potência de saída  $P_i$  não pode ocorrer instantaneamente (NARESH; DUBEY; SHARMA, 2004). Isso acontece porque, uma turbina em um estado de alta temperatura e pressão requer um tempo adicional para aumentar ou diminuir sua geração de potência (WANG; SHAHIDEHPOUR, 1993). Logo, o crescimento ou decréscimo da potência  $P_i$  é realizado dentro de um intervalo de operação. Estes intervalos são conhecidos como limites de rampa, e podem ser representados de acordo com a desigualdade em (3.9).

$$\begin{cases} P_i^0 - P_i \leq DR_i \\ P_i - P_i^0 \leq UR_i \end{cases} \quad (3.9)$$

Em (3.9)  $UR_i$  é o limite de rampa superior da  $i$ -ésima geradora,  $DR_i$  é o limite de rampa inferior da  $i$ -ésima geradora, e  $P_i^0$  é a potência de saída do escalonamento anterior da  $i$ -ésima unidade geradora. Segundo Chaturvedi, Pandit e Srivastava (2008) a restrição

de limites de rampa também pode ser reescrita de uma forma mais compacta, que considera os limites superior e inferior de rampa e também de operação. Esta forma é apresentada na Equação (3.10).

$$\max(P_i^{\min}, P_i^0 - DR_i) \leq P_i \leq \min(P_i^{\max}, P_i^0 + UR_i) \quad (3.10)$$

É importante notar também que a forma compacta da restrição de limites de rampa apresentada na Equação (3.10) considera a presença de ambas as restrições (3.9) e (3.7). De maneira alternativa, pode-se definir os limites  $P_i^{\min}$  e  $P_i^{\max}$ , da geradora  $i$ , de acordo com (3.11) e (3.12).

$$P_i^{\min} = \max(P_i^{\min}, P_i^0 - DR_i) \quad (3.11)$$

$$P_i^{\max} = \min(P_i^{\max}, P_i^0 + UR_i) \quad (3.12)$$

Além de se enquadrar nas restrições de domínio apresentadas em (3.7), (3.8) e (3.9), a potência total gerada deve suprir a demanda e também as perdas nas linhas de transmissão. Esta restrição é representada pela igualdade (3.13).

$$\sum_{i=1}^N P_i = P_D - P_L \quad (3.13)$$

Em (3.13),  $P_D$  é a potência demandada e  $P_L$  é o coeficiente de perdas nas linhas de transmissão, que é calculado de acordo com a Equação (3.14) (WOOD; WOLLENBERG, 2012). Este cálculo das perdas é também conhecido como método da matriz-B, e foi proposto por Gabriel Kron em uma série de quatro trabalhos (KRON, 1951) (KRON, 1952b) (KRON, 1952a) (KRON, 1953). O método da matriz-B para cálculo de perdas passou a ser utilizado desde o começo dos anos 50 (LEONIDOPOULOS, 1988).

$$P_L = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N P_i B_{ij} P_j + \sum_{i=1}^N B_{0i} P_i + B_{00} \quad (3.14)$$

onde  $B_{ij}$  é um elemento da matriz de perdas  $B$ ,  $B_{i0}$  é um elemento do vetor de perdas  $B_0$  e  $B_{00}$  é um coeficiente de perda. Logo, a restrição (3.13) em sua forma explícita é escrita de acordo a Equação (3.15).

$$\sum_{i=1}^N P_i = P_D - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N P_i B_{ij} P_j + \sum_{i=1}^N B_{0i} P_i + B_{00} \quad (3.15)$$

Os dados que caracterizam uma instância de um problema de despacho econômico são os coeficientes  $a_i$ ,  $b_i$  e  $c_i$ , a matriz de perdas  $B$ , o vetor de perdas  $B_0$  e o coeficiente de perdas  $B_{00}$ . Também são necessários os dados referentes aos limites de geração das geradoras, que são os valores  $P_i^{\min}$  e  $P_i^{\max}$ , os limites de rampa  $UR_i$  e  $DR_i$ , e também os limites inferiores e superiores das zonas proibidas, caso existam no problema considerado.

Adicionalmente, quando o problema envolve limites de rampa, também deve-se conhecer as potências de saída da configuração anterior do sistema, dadas em  $P_i^0$ .

De maneira geral, o PDE pode ser escrito como um problema de minimização, que é apresentado em (3.16).

$$\left\{ \begin{array}{l} \min C(P_1, P_2, \dots, P_N) = \sum_{i=1}^N F_i \text{ sujeito a} \\ \sum_{i=1}^N P_i = P_D - P_L \\ \max(P_i^{\min}, P_i^0 - DR_i) \leq P_i \leq \min(P_i^{\max}, P_i^0 + UR_i) \\ P_i^{\min} \leq P_i \leq P_{i,1}^{LB} \dots \\ P_{i,j-1}^{UB} \leq P_i \leq P_{i,j}^{LB}, \quad j = 2, 3, \dots, NP_i \\ P_{i,j}^{UB} \leq P_i \leq P_i^{\max}, \quad j = NP_i \\ P_i^{\min} \leq P_i \leq P_i^{\max}, \quad i = 1, 2, \dots, N \end{array} \right. \quad (3.16)$$

### 3.3 SOLUÇÃO DO PDE

Os métodos propostos para a solução do PDE podem ser divididos em dois grupos principais (AL-ROOMI; EL-HAWARY, 2017). Um dos grupos compreende os métodos clássicos de otimização, como o método da secante (CHANDRAM; SUBRAHMANYAM; SYDULU, 2008), a iteração lambda (OBIOMA; IZUCHUKWU, 2013), a programação linear (FARAG; AL-BAIYAT; CHENG, 1995) e métodos baseados em gradiente (SANDHUL; SAINI; SHALINI, 2015). O outro grupo compreende as metaheurísticas e variantes.

Nos métodos clássicos, assume-se que o custo é uma função monótona crescente, e isto torna estes métodos inviáveis devido às características não lineares dos problemas práticos (GAING, 2003). Isto acontece porque as funções custo dos geradores modernos apresentam descontinuidades e não linearidades, devido ao efeito de ponto válvula, zonas proibidas e limites de rampa (CHATURVEDI; PANDIT; SRIVASTAVA, 2008). De forma a contornar estes problemas apresentados em situações práticas, uma grande variedade de métodos heurísticos baseados em população têm sido empregados para a solução do PDE (SUN et al., 2014).

O algoritmo genético (GA) foi utilizado para a solução do PDE por Bakirtzis, Petridis e Kazarlis (1994), apresentando uma melhor solução que o método da programação dinâmica, além de ter sido utilizado também para a solução de um sistema de larga escala (CHEN; CHANG, 1995), onde mostrou melhores resultados que o método da iteração lambda.

Gaing (2003) por sua vez, apresentou uma solução ao PDE utilizando PSO, onde obteve resultados superiores ao GA. Além disso, muitos outros trabalhos também utilizaram o PSO como base para o desenvolvimento de variantes para a solução do PDE. As variantes por sua vez, foram propostas com o propósito de melhorar a solução obtida

com o algoritmo original. Alguns exemplos destas abordagens são o PSO hierárquico auto-organizado (CHATURVEDI; PANDIT; SRIVASTAVA, 2008), o PSO com operação de mutação (PARK et al., 2010), o PSO auto adaptativo (NIKNAM; MOJARRAD; MEYMAND, 2011), o PSO com impulso aleatório (SUN et al., 2014) e o PSO com aprendizado ortogonal aperfeiçoado (QIN et al., 2017).

Tratando-se do algoritmo dos vaga-lumes (FA), vários trabalhos foram dedicados à aplicação deste ao PDE (APOSTOLOPOULOS; VLACHOS, 2010) (REDDY; REDDY, 2012) (SULAIMAN et al., 2012) (SUBRAMANIAN; THANUSHKODI, 2013) (MOUSTAFA; BADRA; ABDELAZIZ, 2017). No entanto, estes trabalhos foram aplicados apenas a sistemas de pequeno porte, com 3 e 6 unidades geradoras, com exceção de Yang, Hosseini e Gandomi (2012), que aplicaram o FA para a solução de sistemas maiores. Ainda, a aplicação de variantes do FA para o problema de despacho econômico não tem sido muito utilizada até o momento. A comparação feita por Moustafa, Badra e Abdelaziz (2017) leva em conta algumas variantes do FA, mas se limita a sistemas de pequeno porte.



## 4 ALGORITMO DOS VAGA-LUMES

Existem centenas de espécies de vaga-lumes na natureza. Cada espécie de vaga-lume possui um padrão de piscadas único. As piscadas servem como um sistema de sinalização e suas funções ainda se encontram em debate. No entanto, as duas principais funções deste sistema são: encontrar parceiros para acasalamento e atrair potenciais presas (YANG, 2009a).

O FA (YANG, 2009a) é uma metaheurística inspirada no mecanismo de comunicação dos vaga-lumes. Este método utiliza uma população de agentes (vaga-lumes), onde cada vaga-lume representa uma possível solução do problema. Cada vaga-lume emite uma determinada intensidade de luz, que é dada pela qualidade de sua solução. Adicionalmente, o potencial de um vaga-lume com melhor solução atrair outro com pior solução é dado pela atratividade.

No FA são idealizadas três regras principais:

- Todos os vaga-lumes são unissex e se atraem independentemente do gênero;
- A atratividade é proporcional à intensidade de luz de um vaga-lume e decresce com o aumento da distância. Considerando-se um par de vaga-lumes, o vaga-lume com menor intensidade de luz deverá se mover em direção ao com maior intensidade de luz;
- O brilho de um vaga-lume é determinado pela função objetivo.

No FA existem duas questões importantes, a variação da intensidade de luz e a formulação da atratividade (YANG, 2009a).

### 4.1 ATRATIVIDADE

Idealmente, a luz emitida por uma fonte deveria poder ser vista a qualquer distância com a mesma intensidade que é emitida. No entanto, conforme a distância entre a fonte e o observador aumenta, a intensidade de luz vista é menor. Este efeito pode ser descrito pela lei do inverso do quadrado da distância, apresentada na Equação (4.1):

$$I(r) = \frac{I_s}{r^2} \quad (4.1)$$

Em (4.1),  $I(r)$  é a intensidade de luz vista pelo observador a uma distância  $r$  da fonte e  $I_s$  é a intensidade de luz na fonte.

Outro fator que também influencia na intensidade de luz vista pelo observador é a absorção da luz pelo ar, que varia também em função da distância. Este efeito pode ser descrito pela Equação (4.2).

$$I(r) = I_s e^{-\gamma r} \quad (4.2)$$

Em (4.2),  $I(r)$  é a intensidade de luz vista por um observador, que está a uma distância  $r$  da fonte de luz,  $I_s$  é a intensidade de luz emitida pela fonte e  $\gamma$  é o coeficiente de absorção do ar.

O efeito de ambos, a lei do inverso do quadrado da distância e a absorção da luz pelo ar, pode ser combinado usando-se a aproximação na Equação (4.3).

$$I(r) = I_s e^{-\gamma r^2} \quad (4.3)$$

A intensidade de luz  $I$  vista em função da distância  $r$  pelo observador deve ser monotonicamente decrescente, como a Equação (4.3). Outra aproximação para a intensidade de luz, que decresce a uma taxa menor é apresentada na Equação (4.4).

$$I(r) = \frac{I_s}{1 + \gamma r^2} \quad (4.4)$$

A atratividade deve ser uma função monotonicamente decrescente, sendo formulada de acordo com o comportamento da intensidade de luz em relação à distância, considerando-se a absorção do ar. Logo, a atratividade existente entre um par de vaga-lumes pode ser formulada tomando-se por base a Equação (4.3), sendo dada pela Equação (4.5).

$$\beta(r) = \beta_0 e^{-\gamma r^2} \quad (4.5)$$

Em (4.5),  $\beta_0$  é a atratividade em  $r = 0$ , sendo um dos parâmetros do algoritmo. Para a maior parte dos problemas pode-se utilizar  $\beta_0 = 1$  (YANG, 2009a).

A atratividade pode também ser formulada de acordo com a Equação (4.4). Nesta forma, a atratividade irá decrescer mais lentamente, além de poder ser calculada mais rapidamente que a forma da Equação (4.5). Este segundo modelo de atratividade é apresentado na Equação (4.6).

$$\beta(r) = \frac{\beta_0}{1 + \gamma r^2} \quad (4.6)$$

Na maioria dos trabalhos o modelo de atratividade mais utilizado é o descrito pela Equação (4.5). No entanto, existem outros modelos propostos na literatura, como será abordado mais adiante. A formulação da atratividade deve ser realizada previamente para que seja empregada na movimentação dos vaga-lumes.

## 4.2 MOVIMENTO DOS VAGA-LUMES

Uma questão presente na movimentação dos vaga-lumes é o cálculo da distância entre um par de vaga-lumes. Em geral, a distância  $r$  entre dois vaga-lumes  $i$  e  $j$  ( $r_{ij}$ ) em

um espaço  $d$ -dimensional, é calculada como a distância euclidiana, apresentada na Equação (4.7), onde  $x_{i,k}$  e  $x_{j,k}$  são as posições dos vaga-lumes  $i$  e  $j$  na dimensão  $k$ .

$$r_{ij} = \sqrt{\sum_{k=1}^d (x_{j,k} - x_{i,k})^2} \quad (4.7)$$

Para um par de vaga-lumes, a Equação (4.8) define o movimento de um vaga-lume  $i$  que é atraído por um vaga-lume  $j$ , com maior intensidade de luz.

$$x_i = x_i + \beta(r_{ij})(x_j - x_i) + \alpha\epsilon S \quad (4.8)$$

Em (4.8),  $\alpha$  é o parâmetro do algoritmo que dá peso ao movimento aleatório,  $\epsilon$  é um número real gerado aleatoriamente a partir de uma dada distribuição de probabilidade, e  $S = \{S_1, S_2, \dots, S_d\}$  é o fator de escala do problema. Para cada dimensão  $k$  do problema (com  $d$  dimensões) o fator de escala  $S_k$  é definido por (4.9), onde  $x_k^{max}$  e  $x_k^{min}$  são os limites superior e inferior do espaço de busca na dimensão  $k$ .

$$S_k = |x_k^{max} - x_k^{min}|, \quad k = 1, 2, \dots, d \quad (4.9)$$

Com a formulação da atratividade e a definição do movimento dos vaga-lumes, tem-se as equações suficientes para implementação do algoritmo.

### 4.3 ALGORITMO

Apesar das ideias que inspiraram o FA e as regras idealizadas serem consistentes, existem várias implementações distintas deste algoritmo (FISTER; YANG; BREST, 2013) (WANG et al., 2017) (ARORA; SINGH, 2013). A implementação utilizada neste Trabalho segue a proposta original de Yang (2009a) e é apresentada no Algoritmo 1. Existem três parâmetros principais que guiam a funcionamento do FA:  $\gamma$ ,  $\beta_0$  e  $\alpha$ . Naturalmente, o tamanho  $n$  da população também é um parâmetro do algoritmo a ser ajustado, mas por simplicidade será omitido neste momento. As duas principais equações utilizadas no algoritmo são a equação da atratividade (Equação (4.5)) e a equação do movimento (Equação (4.8)). Alternativamente, para se calcular a atratividade pode ser utilizada a Equação (4.6), ou qualquer outra forma atribuída para o cálculo de  $\beta(r)$ .

Nas implementações de Arora e Singh (2013), Fister, Yang e Brest (2013) e Yang (2009a), as avaliações da função objetivo são realizadas para todos indivíduos da população ao final da iteração. Adicionalmente, na implementação de Arora e Singh (2013), se um determinado vaga-lume  $i$  não for atraído por nenhum outro vaga-lume  $j$ , ele executa um passo aleatório. Já na implementação de Wang et al. (2017), após cada movimentação realizada por um vaga-lume (cálculo da Equação (4.8)) já é avaliada sua nova posição. Esta diferença conduz a um número de iterações e tempo de execução menor, para um mesmo número de avaliações da função objetivo.

**Parâmetros:**  $\gamma, \beta_0, \alpha$

Inicialização dos vaga-lumes;

Computar  $I_i = f(x_i)$ ;

**enquanto** *condição de parada não atingida* **faça**

    Ordenar os vagalumes de acordo com o brilho;

**para**  $i = 1$  **até**  $n$  **faça**

**para**  $j = 1$  **até**  $n$  **faça**

**se**  $I_i > I_j$  **então**

                Calcular distância entre vagalumes  $i$  e  $j$  ( $r_{ij}$ );

                Calcular  $\beta(r)$  usando (4.5);

                Mover o vagalume  $i$  em direção ao vagalume  $j$  usando (4.8);

**fim**

**fim**

**fim**

**para**  $i = 1$  **até**  $n$  **faça**

**Tratar restrições;**

        Atualizar  $I_i$  ( $I_i = f(x_i)$ );

$fes++$ ;

**fim**

    Atualizar melhor solução da população;

**fim**

Pós processamento e visualização;

**Algoritmo 1:** FA

As três implementações distintas descritas possuem características de execução diferentes. A Tabela 2 sintetiza o número de avaliações de função objetivo (FEs - *Function Evaluations*) e o número de movimentações dos vaga-lumes (cálculos da Equação (4.8)) por iteração em função do tamanho  $n$  da população. As implementações de Arora e Singh (2013) e Fister, Yang e Brest (2013) não são apresentadas na tabela pois seguem a mesma implementação original de Yang (2009a) com adição de pequenas modificações. Logo, tratando-se de número de avaliações e movimentações por iteração, estas duas implementações se igualam à original. O mesmo vale para a implementação deste Trabalho, que também é baseada na implementação original.

A implementação de Wang et al. (2017) tende ser mais rápida do que a de Yang (2009a) pelo fato de executar maior número de avaliações por iteração, isto conduz a um número de iterações menor.

Tabela 2: Implementações do FA

Implementação	Número de FEs	Número de movimentações
(YANG, 2009a)	$n$	$\frac{n(n-1)}{2}$
(WANG et al., 2017)	$\frac{n(n-1)}{2}$	$\frac{n(n-1)}{2}$

Como as implementações de Yang (2009a) e Wang et al. (2017) têm um número exato de avaliações da função objetivo por iteração, o número de iterações para estas implementações pode ser calculado. Considerando-se um número FEs de avaliações da função objetivo e uma população de tamanho  $n$ , o número  $N_{it}$  de iterações na implementação de (YANG, 2009a) é dado pela Equação (4.10).

$$N_{it} = \frac{\text{FEs}}{n} \quad (4.10)$$

Já na implementação de Wang et al. (2017), o número de iterações  $N_{it}$  é dado pela Equação (4.11).

$$N_{it} = \frac{2\text{FEs}}{n(n-1)} \quad (4.11)$$

#### 4.4 ALGORITMO DOS VAGA-LUMES COM POPULAÇÃO NÃO-HOMOGÊNEA

No FA existem três parâmetros principais:  $\gamma$ ,  $\beta_0$  e  $\alpha$ . Estes parâmetros definem o alcance da visão e os pesos da atratividade e da aleatoriedade de um vaga-lume, respectivamente. Para um determinado conjunto de parâmetros do algoritmo, toda a população de vaga-lumes terá o mesmo comportamento (ex: mesmo alcance de visão, mesmo peso de aleatoriedade). A variante do FA proposta neste Trabalho explora o comportamento diversificado dos vaga-lumes.

No FA com população não-homogênea (NhFA - *Non-homogenous Firefly Algorithm*) proposto neste Trabalho, cada vaga-lume  $i$  obedece aos parâmetros  $\gamma_i$ ,  $\beta_{0i}$  e  $\alpha_i$ . Desta forma, as Equações (4.5) e (4.8) são definidas de acordo com estes parâmetros. Logo, no NhFA a atratividade e o movimento são calculados pelas Equações (4.12) e (4.13).

$$\beta(r) = \beta_{0i}e^{-\gamma_i r^2} \quad (4.12)$$

$$x_i = x_i + \beta(r_{ij})(x_j - x_i) + \alpha_i \epsilon S \quad (4.13)$$

A estrutura do NhFA é mostrada em detalhe no Algoritmo 2. De uma maneira abstrata, não há diferença estrutural entre o FA e o NhFA. As equações da atratividade e do movimento passaram a ser as Equações (4.12) e (4.13). Um detalhe bastante importante é a questão da ordenação dos vaga-lumes de acordo com a intensidade de luz. No processo de ordenação, as posições dos vaga-lumes são trocadas e, para que os parâmetros continuem condizentes com o vaga-lume ao qual os parâmetros foram atribuídos, os parâmetros também devem acompanhar a mesma ordenação da população.

Outra questão importante no NhFA é a quantidade de parâmetros, a qual aumenta proporcionalmente ao tamanho da população  $n$ . Yang (2009a) menciona que um tamanho bom para a população se situa entre 25 a 40 vaga-lumes. Considerando isso, a inicialização

**Parâmetros:**  $\gamma_i, \beta_{0i}, \alpha_i, i = 1, 2, \dots, n$

Inicialização dos vaga-lumes;

Computar  $I_i = f(x_i)$ ;

**enquanto** *condição de parada não atingida* **faça**

    Ordenar os vagalumes (e os parâmetros) de acordo com o brilho;

**para**  $i = 1$  **até**  $n$  **faça**

**para**  $j = 1$  **até**  $n$  **faça**

**se**  $I_i > I_j$  **então**

                Calcular distância entre vagalumes  $i$  e  $j$  ( $r_{ij}$ );

                Calcular  $\beta(r)$  usando (4.12);

                Mover o vagalume  $i$  em direção ao vagalume  $j$  usando (4.13);

**fim**

**fim**

**fim**

**para**  $i = 1$  **até**  $n$  **faça**

**Tratar restrições;**

        Atualizar  $I_i$  ( $I_i = f(x_i)$ );

$fes ++$ ;

**fim**

    Atualizar melhor solução da população;

**fim**

Pós processamento e visualização;

### Algoritmo 2: NhFA

dos parâmetros um a um pode ser muito trabalhosa. Para lidar com esse problema, foram propostas duas possíveis abordagens que viabilizam a atribuição dos parâmetros à população: a atribuição aleatória e a atribuição baseada em grupos. Estas duas estratégias de atribuição serão melhor detalhadas na Seção 5.3 do Capítulo 5.

O NhFA possibilita flexibilidade no comportamento da população, já que individualiza todos parâmetros. É importante notar que se  $\gamma_1 = \gamma_2 = \dots = \gamma_n, \beta_{01} = \beta_{02} = \dots = \beta_{0n}$  e  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n$ , então a população inteira será governada por um mesmo parâmetro  $\gamma, \beta_0$  e  $\alpha$ . Este caso é equivalente ao FA original. Logo, o FA original é um caso particular do NhFA.

Tratando-se da individualização dos parâmetros da população, são encontrados alguns trabalhos na literatura, mas nenhum tem uma relação direta com a proposta deste trabalho.

Cheung, Ding e Shen (2016) apresentaram uma proposta não-homogênea visando analisar a trajetória de cada vaga-lume em particular. No entanto esta proposta é aplicada para uma variante adaptativa do FA (AdaFA) (CHEUNG; DING; SHEN, 2014), o que se difere desse trabalho, que é aplicado ao FA clássico (YANG, 2009a). Outra proposta com parâmetros independentes foi apresentada por Yu et al. (2014), onde apenas o parâmetro  $\alpha$  é individualizado e automaticamente ajustado a cada iteração. Nesse trabalho não é realizado nenhum ajuste de parâmetros ao longo da iterações. Além disso, todos os parâmetros principais são individualizados.

## 5 ANÁLISE TEÓRICA

O comportamento dos agentes no algoritmo dos vaga-lumes é essencialmente governado por duas características principais: a atratividade e o movimento. A atratividade é determinada pelos parâmetros  $\gamma$  e  $\beta_0$ . O movimento, conseqüentemente, é determinado pelo comportamento da atratividade e pelo parâmetro  $\alpha$ , que dá diversidade ao movimento. Muitos trabalhos foram dedicados ao estudo de heurísticas de utilização destes parâmetros, resultando na determinação de alguns valores ou métodos de atribuição que levaram a melhores soluções.

A Equação (4.8) pode ser reescrita de uma maneira mais intuitiva, apresentada na Equação (5.1). O termo Atração está fortemente ligado com o caráter de intensificação da busca, enquanto o termo Aleatoriedade tem forte relação com o caráter de diversificação na busca.

$$x_i = x_i + \text{Atração} + \text{Aleatoriedade} \quad (5.1)$$

Os termos Atração e Aleatoriedade são apresentados nas Equações (5.2) e (5.3), respectivamente.

$$\text{Atração} = \beta(r_{ij})(x_j - x_i) \quad (5.2)$$

$$\text{Aleatoriedade} = \alpha \epsilon S \quad (5.3)$$

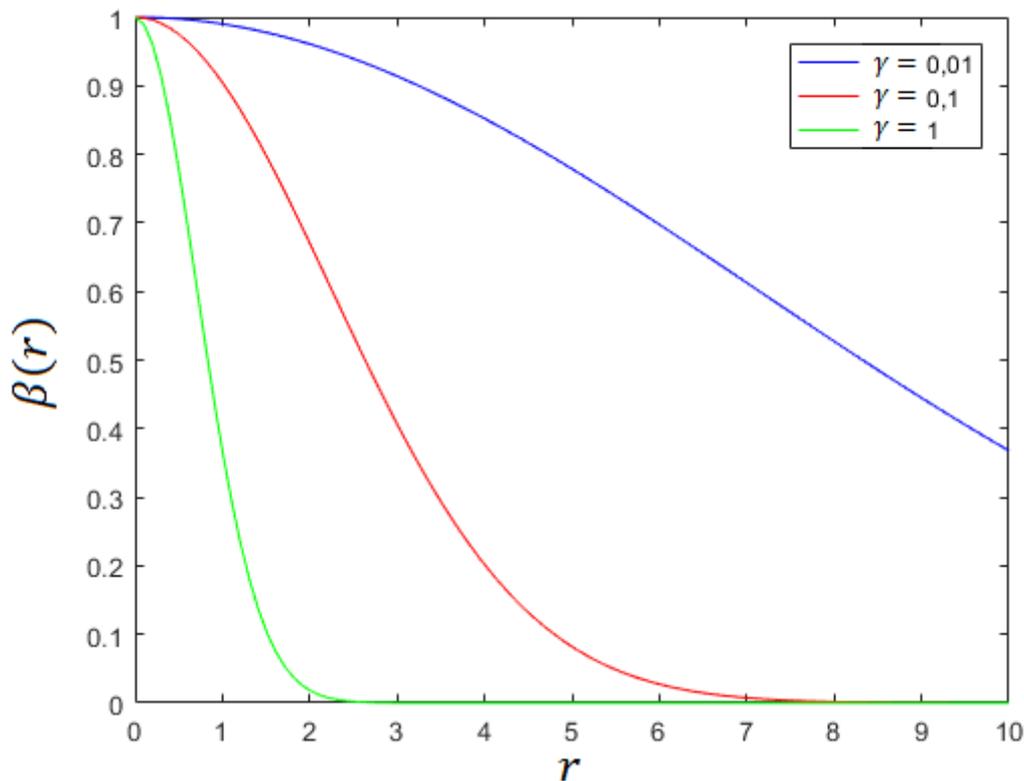
A Equação (5.2) é dependente de um fator principal: a função da atratividade  $\beta(r)$ , que por sua vez é dependente de dois parâmetros principais,  $\beta_0$  e  $\gamma$ . A Equação (5.3) pode variar de acordo com dois termos principais: o parâmetro  $\alpha$  e o número aleatório  $\epsilon$ .

A Seção 5.1 apresenta um estudo sobre a função da atratividade. Posteriormente, a Seção 5.2 aborda algumas formas de utilização da aleatoriedade na busca. Por fim, na Seção 5.3, são propostas duas técnicas de inicialização de parâmetros para o NhFA.

### 5.1 ATRATIVIDADE

Dois dos parâmetros principais do FA são utilizados diretamente para o cálculo da atratividade, o parâmetro  $\gamma$  e o parâmetro  $\beta_0$ . A atratividade  $\beta(r)$  decresce exponencialmente de  $\beta_0$  a 0 em função da distância  $r$ . Quanto maior o valor de  $\gamma$ , mais rapidamente a função  $\beta(r)$  tenderá a 0. Desta forma, o parâmetro  $\gamma$  determina diretamente a velocidade do decrescimento da função  $\beta(r)$ . A Figura 8 exemplifica o comportamento da função  $\beta(r)$  com  $\beta_0 = 1$  e  $\gamma$  assumindo valores de 0,01, 0,1 e 1.

O parâmetro  $\beta_0$  determina o valor máximo da função  $\beta(r)$ . A Figura 9 exemplifica este efeito com  $\gamma = 1$  e  $\beta_0$  tomando valores de 0,5, 1 e 2. É importante notar que para todos valores de  $\beta_0$  a função  $\beta(r)$  tende a zero praticamente no mesmo ponto, ou seja, a

Figura 8: Efeito de  $\gamma$  na função da atratividade

Fonte: Elaborado pelo autor

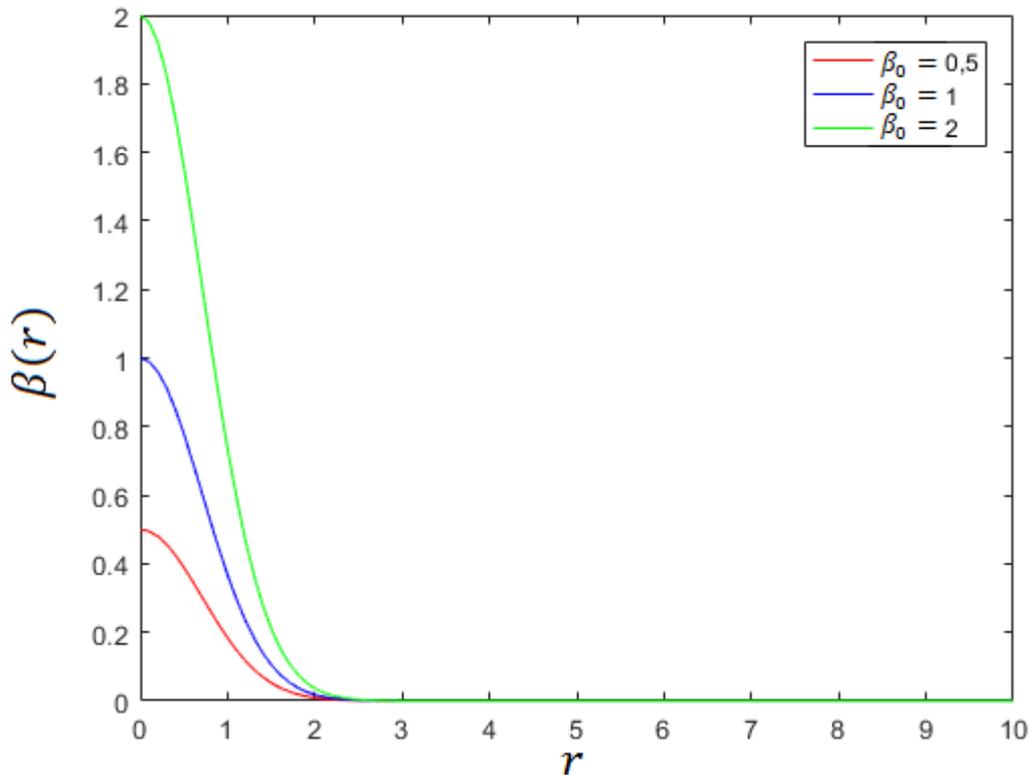
característica de decrescimento da função se mantém. Com isso, verifica-se que a velocidade de decrescimento da função  $\beta(r)$  é governada essencialmente pelo parâmetro  $\gamma$ .

O ajuste apropriado da função da atratividade é fundamental para o bom desempenho do algoritmo. Para isso, a escolha de  $\gamma$  e  $\beta_0$  é muito importante. Nesta seção, são vistas algumas heurísticas utilizadas na literatura e é também proposta uma nova abordagem para a atribuição do parâmetro  $\gamma$ .

### 5.1.1 PARÂMETRO $\gamma$

O valor do parâmetro  $\gamma$  está bastante relacionado ao tamanho do espaço de busca do problema. Por esse motivo, um mesmo valor deste parâmetro pode levar a um bom desempenho para determinados problemas e um desempenho ruim para outros. Segundo Yang (2009a), a atribuição do parâmetro  $\gamma$  deve estar associada de alguma maneira com a escala do problema.

Apesar de ser constatado que  $\gamma$  tem relação direta com a escala do problema, não há um limite de valores bem estabelecido para este parâmetro. Yang (2010b) propõe que um  $\gamma$  entre  $10^{-1}$  e  $10^1$  é apropriado para a maioria dos casos. Já Yang (2009a) menciona

Figura 9: Efeito de  $\beta_0$  na função da atratividade

Fonte: Elaborado pelo autor

que  $\gamma$  entre  $10^{-2}$  e  $10^2$  ocorre na maioria dos casos. Ainda, Yang (2013) propõe  $\gamma$  entre  $10^{-5}$  e  $10^5$ . Esta mudança ocorre porque, em problemas com o espaço de busca pequeno,  $\gamma$  tende a ser maior e o contrário para espaços de busca maiores. A mudança de  $\gamma$  acontece em função do espaço de busca para que a característica da função da atratividade seja mantida.

Na função da atratividade existe uma distância característica  $\Gamma$ , na qual a função apresenta um decaimento bastante significativo. A distância  $\Gamma$  caracteriza um ponto de transição, a partir do qual a atratividade passa a ser bem menor e o decrescimento é menos acentuado. A Equação (5.4) apresenta a distância característica a partir da qual ocorre a transição da função.

$$\Gamma = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \quad (5.4)$$

Fazendo-se  $r = \Gamma$ , obtém-se a relação (5.5).

$$\begin{aligned}\beta(\Gamma) &= \beta_0 e^{-\gamma \Gamma^2} \\ \beta(\Gamma) &= \beta_0 e^{-\gamma \left(\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right)^2} \\ \beta(\Gamma) &= \beta_0 e^{-\gamma \left(\frac{1}{\gamma}\right)} \\ \beta(\Gamma) &= \beta_0 e^{-1} \\ \beta(\Gamma) &= \frac{\beta_0}{e}\end{aligned}\tag{5.5}$$

Na prática, o parâmetro  $\gamma$  é determinado através da distância característica  $\Gamma$  do sistema a ser otimizado (YANG, 2009a). Manipulando-se a Equação (5.4) é possível determinar  $\gamma$  em função da distância característica  $\Gamma$  de acordo com a Equação (5.6).

$$\gamma = \frac{1}{\Gamma^2}\tag{5.6}$$

Apesar desta estratégia de atribuição do parâmetro  $\gamma$  ser bem clara, não há uma forma específica de se executá-la. Isto porque a distância característica  $\Gamma$  pode ser determinada de várias formas diferentes. Yang (2010a) e Zhang et al. (2016) definem  $\Gamma$  como o tamanho médio considerando-se todas as dimensões do problema.

Lukasik e Zak (2009) definem  $\gamma$  em função da distância máxima no domínio do problema. Adicionalmente, também é introduzida uma constante  $\gamma_0 \in [0, 1]$  que se torna o novo parâmetro para a atribuição. Este método pode ser definido de acordo com uma das duas equações mostradas em (5.7) e (5.8).

$$\gamma = \frac{\gamma_0}{R_{max}}\tag{5.7}$$

$$\gamma = \frac{\gamma_0}{R_{max}^2}\tag{5.8}$$

De acordo com Lukasik e Zak (2009), a Equação (5.7) com  $\gamma_0 = 0,8$  é uma boa estratégia a ser utilizada. Já Yang (2013) utiliza a Equação (5.8) com  $\gamma_0 = 0,5$ .

Nesse Trabalho é proposta uma nova abordagem de atribuição que serve também como uma generalização das estratégias de Yang (2010a) e também Lukasik e Zak (2009).

A estratégia de atribuição de  $\gamma$  desse Trabalho está focada diretamente na função  $\beta(r)$ , de maneira que possa se obter um mesmo comportamento da função da atratividade, independentemente do tamanho do espaço de busca do problema. Esta abordagem é construída inicialmente a partir da normalização da distância  $r$  em relação à maior distância possível no espaço de busca do problema em questão.

A maior distância possível em um determinado domínio é a distância euclidiana entre o ponto inferior até o ponto superior do espaço de busca. Esta definição é apresentada

pela Equação (5.9), considerando-se um espaço de busca com  $d$  dimensões.

$$R_{max} = \sqrt{\sum_{i=1}^d (x_i^{max} - x_i^{min})^2} \quad (5.9)$$

Para que a distância  $r$  esteja normalizada em relação à distância máxima  $R_{max}$ , deve-se atribuir  $\gamma$  de acordo com a Equação (5.10).

$$\gamma = \frac{1}{R_{max}^2} \quad (5.10)$$

Desta forma, substituindo-se  $\gamma$  na função da atratividade de acordo com a Equação (5.10), obtém-se a relação (5.11).

$$\begin{aligned} \beta(r) &= \beta_0 e^{-\gamma r^2} \\ \beta(r) &= \beta_0 e^{-\left(\frac{1}{R_{max}^2}\right) r^2} \\ \beta(r) &= \beta_0 e^{-\left(\frac{1}{R_{max}}\right)^2 r^2} \\ \beta(r) &= \beta_0 e^{-\left(\frac{r}{R_{max}}\right)^2} \end{aligned} \quad (5.11)$$

A distância  $r$  pode variar de 0 até  $R_{max}$ . Por consequência, o termo  $\frac{r}{R_{max}}$  na Equação (5.11) pode variar de 0 a 1. Para  $r = 0$ , tem-se  $\beta(0) = \beta_0$  e para  $r = R_{max}$  tem-se  $\beta(R_{max}) = \frac{\beta_0}{e}$ . Neste caso, quando  $r = R_{max}$ , a atratividade atinge seu ponto de transição  $\frac{\beta_0}{e}$ . De maneira análoga, se a distância  $r$  for normalizada em relação a alguma distância menor do que  $R_{max}$ , o ponto de transição da atratividade irá ocorrer antes. Assim, o valor em relação ao qual a distância  $r$  está normalizada determina diretamente a distância a partir da qual ocorre a transição na função da atratividade.

Como os tamanhos dos problemas variam, também não há como escolher um único valor de normalização da distância para o qual a função atratividade tenha sempre o mesmo comportamento. No entanto, com a variação do tamanho do problema a variável de interesse que irá mudar será apenas  $R_{max}$ . Logo, podem-se definir distâncias menores que  $R_{max}$  introduzindo-se um fator  $\psi$  que tenha valor entre 0 e 1, satisfazendo-se a desigualdade apresentada em (5.12).

$$\psi R_{max} \leq R_{max} \quad , \quad 0 \leq \psi \leq 1 \quad (5.12)$$

Para que seja feita a normalização da distância  $r$  em relação a  $\psi R_{max}$ , deve-se atribuir  $\gamma$  de acordo com (5.13).

$$\gamma = \frac{1}{\psi^2 R_{max}^2} \quad (5.13)$$

Aplicando-se a substituição da Equação (5.13) na função da atratividade, é obtida a relação (5.14).

$$\begin{aligned}
 \beta(r) &= \beta_0 e^{-\gamma r^2} \\
 \beta(r) &= \beta_0 e^{-\left(\frac{1}{\psi^2 R_{max}^2}\right) r^2} \\
 \beta(r) &= \beta_0 e^{-\left(\frac{1}{(\psi R_{max})^2}\right) r^2} \\
 \beta(r) &= \beta_0 e^{-\left(\frac{1}{\psi R_{max}}\right)^2 r^2} \\
 \beta(r) &= \beta_0 e^{-\left(\frac{r}{\psi R_{max}}\right)^2}
 \end{aligned} \tag{5.14}$$

De acordo com a relação (5.14), se  $r$  for igual a  $\psi R_{max}$ , a função da atratividade atingirá o ponto de transição. Logo, o fator  $\psi$  atua como uma grandeza percentual sobre a distância máxima  $R_{max}$ , permitindo determinar assim o ponto de transição desejado da função da atratividade. Por exemplo, se  $\psi$  for igual a 0,5 então o valor de transição  $\frac{\beta_0}{e}$  será atingido exatamente para  $r$  igual a 50% da distância total do espaço de busca. Esta estratégia permite determinar de maneira definitiva um raio de visão percentual para os vaga-lumes, independente do espaço de busca. A Figura 10 apresenta um exemplo utilizando-se  $\beta_0 = 1$  e  $\psi = 0,5$  para um domínio cuja distância máxima  $R_{max}$  é 100.

Tendo em vista que a distância  $R_{max}$  pode ser calculada pela Equação (5.9), e que  $\gamma$  pode agora ser calculado pela Equação (5.13),  $\psi$  se torna um novo parâmetro do algoritmo e  $\gamma$  deixa de ser um parâmetro a ser determinado.

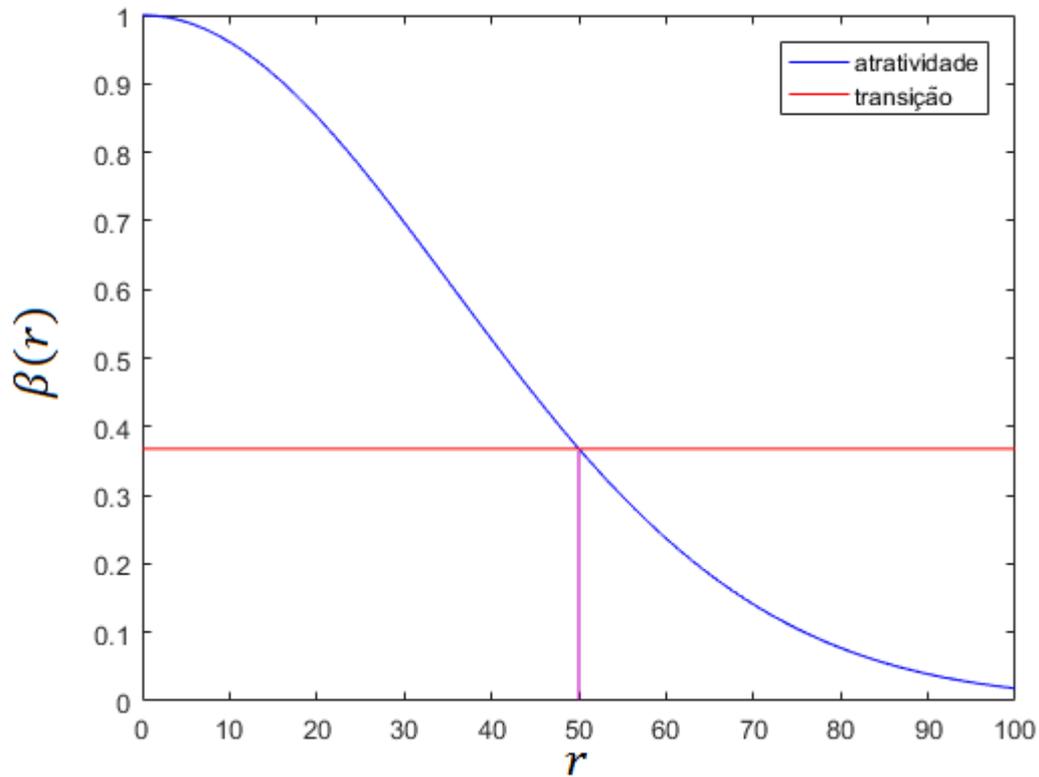
O parâmetro  $\psi$  pode ser relacionado com a distância característica  $\Gamma$  mencionada por Yang (2009a) e também com o parâmetro  $\gamma_0$  utilizado por Lukasik e Zak (2009). As estratégias de atribuição do parâmetro  $\gamma$  são sintetizadas na Tabela 3.

Tabela 3: Estratégia para atribuição de  $\gamma$

Trabalho	Estratégia
Yang (2009a)	$\gamma = \frac{1}{\Gamma^2}$
Lukasik e Zak (2009)	$\gamma = \frac{\gamma_0}{R_{max}}$
Lukasik e Zak (2009)	$\gamma = \frac{\gamma_0}{R_{max}^2}$
Este trabalho	$\gamma = \frac{1}{\psi^2 R_{max}^2}$

Fonte: Elaborado pelo autor

É possível também estabelecer uma relação entre estas estratégias, determinando-se  $\psi$  como uma função de  $\Gamma$  e  $\gamma_0$ . Desta forma, as estratégias de Yang (2009a) e Lukasik e Zak (2009) são definidas como casos da estratégia proposta neste trabalho. Esta relação é apresentada na Tabela 4.

Figura 10: Função da atratividade com  $\psi = 0,5$ 

Fonte: Elaborado pelo autor

Tabela 4: Relação entre estratégias

Estratégia	Relação
$\frac{1}{\Gamma^2}$ (YANG, 2009a)	$\psi = \frac{\Gamma}{R_{max}}$
$\frac{\gamma_0}{R_{max}}$ (LUKASIK; ZAK, 2009)	$\psi = \frac{1}{\sqrt{\gamma_0 R_{max}}}$
$\frac{\gamma_0}{R_{max}^2}$ (LUKASIK; ZAK, 2009)	$\psi = \frac{1}{\sqrt{\gamma_0}}$

Fonte: Elaborado pelo autor

Utilizando as relações da Tabela 4, pode-se verificar, por exemplo, que a estratégia adotada por Yang (2013) ( $\gamma = \frac{0,5}{R_{max}^2}$ ) pode ser reproduzida adotando-se um valor de  $\psi = 1,41$  na estratégia proposta neste trabalho. No entanto, este estudo não entra no escopo deste trabalho, já que foi suposto que  $\psi \in [0, 1]$ .

### 5.1.2 PARÂMETRO $\beta_0$

O parâmetro  $\beta_0$  não é um objeto tão analisado e estudado na literatura. Originalmente,  $\beta_0$  foi definido como 1 empiricamente (YANG, 2009a) e é o valor mais aceito e utilizado para a maioria dos estudos até hoje. No entanto, alguns trabalhos trazem algumas propostas diferentes. Por exemplo, Zhang et al. (2016) definem  $\beta_0 = 2 \times rand$  (onde  $rand$  é um número aleatório entre 0 e 1), e Francisco, Costa e Rocha (2014) utilizam  $\beta_0 = 0,8$ . Em teoria  $\beta_0 < 2$  garante a convergência do algoritmo (YANG, 2012).

Yang, Hosseini e Gandomi (2012) determinaram, através de um estudo paramétrico, que  $\beta_0 \in [0, 5, 1]$  conduz a bons resultados. Lukasik e Zak (2009) também realizaram um estudo paramétrico para  $\beta_0$  e obtiveram melhores resultados utilizando  $\beta_0 = 1$ .

Apesar de não haver uma estratégia específica para escolher  $\beta_0$ ,  $\beta_0 = 1$  é um dos valores mais aceitos e utilizados para este parâmetro. Portanto, para esse trabalho, será considerado este mesmo paradigma.

### 5.1.3 CONSIDERAÇÕES

Nesta seção foram abordados dois parâmetros principais que influenciam a função da atratividade. Existem outros fatores que também influenciam no comportamento da atratividade dos vaga-lumes. Um destes fatores é a forma de se calcular a distância entre dois vaga-lumes no espaço de busca. A forma mais utilizada é a distância euclidiana, também chamada de norma-2. Francisco, Costa e Rocha (2014) estudam o desempenho de cenários que utilizam outros tipos de norma e encontram melhores resultados utilizando a norma-1. A norma- $p$  onde  $p \geq 1$  é definida pela Equação (5.15).

$$|x - y|_p = [(x - y)^p]^{\frac{1}{p}} \quad (5.15)$$

Em (5.15),  $x$  é o ponto de origem e  $y$  o ponto de destino no espaço  $d$ -dimensional.

Outro fator também existente é a possibilidade de se utilizar outras funções para a atratividade. Yang (2009a) define duas funções possíveis de se utilizar, descritas na Seção 4.1 do Capítulo 4. Fister, Yang e Brest (2013) definem uma função onde a atratividade decresce de  $\beta_0$  a  $\beta_{min}$ , apresentada na Equação (5.16).

$$\beta(r) = \beta_{min} + (\beta_0 - \beta_{min})e^{-\gamma r^2} \quad (5.16)$$

Outra função diferente também é estudada por Francisco, Costa e Rocha (2014), onde  $\beta(r)$  é constante a partir de uma determinada distância  $c$ . Esta proposta é definida segundo a Equação (5.17).

$$\beta(r) = \begin{cases} \beta_0 e^{-\gamma r^2}, & r \leq c \\ 0,5, & r > c \end{cases} \quad (5.17)$$

Embora existam tratamentos alternativos para a função da atratividade e o cálculo da distância entre vaga-lumes, neste trabalho será abordado o método mais utilizado na literatura, que consiste da forma original da atratividade (YANG, 2009a) e distância euclidiana entre vaga-lumes.

Em suma, a atratividade é um aspecto muito importante para o bom desempenho do algoritmo, especialmente para o caráter de intensificação. No entanto, é impossível fazer um balanço apropriado entre diversificação e intensificação apenas definindo-se a atratividade eficientemente. Para este balanço ficar otimizado como um todo, é necessário também que a aleatoriedade do algoritmo seja bem definida.

## 5.2 ALEATORIEDADE

Como mencionado no começo deste Capítulo, existem dois parâmetros principais que determinam a aleatoriedade do algoritmo. O primeiro,  $\alpha$ , é um dos parâmetros principais do algoritmo, que deve ser determinado. O segundo,  $\epsilon$ , diz respeito à técnica de geração de números aleatórios utilizada. Nesta seção, serão abordados aspectos relacionados à utilização destes dois parâmetros.

### 5.2.1 NÚMEROS ALEATÓRIOS - PARÂMETRO $\epsilon$

Tecnicamente,  $\epsilon$  é um número gerado aleatoriamente a partir de uma dada distribuição de probabilidade. As distribuições mais utilizadas são a uniforme e a normal. Um número gerado a partir de uma distribuição uniforme é normalmente obtido através de um gerador de números pseudo-aleatórios (GALASSI et al., 2015). Logo, a distribuição uniforme  $U(0, 1)$  é obtida segundo a Equação (5.18).

$$U(0, 1) = rand() \quad (5.18)$$

Em (5.18),  $rand()$  é uma função que retorna um número pseudo-aleatório entre 0 e 1.

Por outro lado, distribuições não uniformes como a Gaussiana não possuem um método de geração de amostras direto, sendo necessário o uso de métodos de amostragem ou algoritmos específicos. O método de Box, Muller et al. (1958) permite gerar duas amostras de uma distribuição normal a partir de um par de amostras independentes de uma distribuição uniforme  $U_1$  e  $U_2$ . Esta técnica é apresentada na Equação (5.19).

$$N(0, 1) = \begin{cases} Z_1 = -\sqrt{-2\ln U_1} \cos(2\pi U_2) \\ Z_2 = \sqrt{-2\ln U_1} \sin(2\pi U_2) \end{cases} \quad (5.19)$$

Em (5.19),  $Z_1$  e  $Z_2$  são duas amostras independentes de uma distribuição Normal.

A variável aleatória gerada de uma distribuição uniforme é a base para a geração de variáveis aleatórias correspondentes a outras distribuições (MICHALEWICZ; FOGEL,

2013). A amostra de uma distribuição uniforme por sua vez é obtida a partir de um gerador de números pseudo-aleatórios (GALASSI et al., 2015). Considerando que uma metaheurística é fundamentalmente baseada em variáveis aleatórias (sejam elas de uma distribuição uniforme ou não), a qualidade do gerador de números pseudo-aleatórios impacta diretamente na validade dos resultados (LUKE, 2009).

Para esse trabalho, será utilizado o gerador *Mersenne Twister* (MATSUMOTO; NISHIMURA, 1998), que é um gerador com boas propriedades estatísticas e um longo período (quarta de tempo antes da sequência de amostras começar a se repetir) (LUKE, 2009). O gerador *Mersenne Twister* é utilizado por padrão no Matlab.

Quando é utilizada a distribuição uniforme  $U(0, 1)$ , então  $\epsilon$  é gerado de acordo com a Equação (5.20) (YANG, 2009a).

$$\epsilon = U(0, 1) - 0,5 \quad (5.20)$$

Segundo Yang (2009a),  $\epsilon$  pode ser facilmente estendido para uma distribuição normal ou qualquer outra distribuição de probabilidade arbitrária. Considerando uma distribuição normal  $N(0, 1)$ ,  $\epsilon$  pode ser determinado de acordo com a Equação (5.21) (YANG, 2009a).

$$\epsilon = N(0, 1) \quad (5.21)$$

A distribuição normal e a uniforme são as mais utilizadas na literatura. Por outro lado, Yang (2010a) mostrou que um desempenho melhor pode ser adquirido utilizando-se uma distribuição de Lévy. Já Fister, Yang e Brest (2014) realizaram uma análise envolvendo distribuições uniforme, normal, de Lévy e mapas caóticos, onde foi concluído haver uma nítida melhora com a utilização do mapa caótico de Kent. No entanto esta melhora ocorreu apenas em problemas com dimensões menores ( $d=10$ ). Já para problemas maiores ( $d=30$ ,  $d=50$ ), não houve diferença significativa.

Na prática, pode-se definir  $\epsilon$  como uma amostra de uma distribuição de probabilidade qualquer. Naturalmente, deve-se considerar que a distribuição de probabilidade escolhida para se colher as amostras pode impactar no desempenho do algoritmo em termos de tempo de execução. Isto acontece porque algumas distribuições de probabilidade mais elementares como a uniforme e a normal possuem formas fechadas, a partir das quais as amostras podem ser calculadas. Já as distribuições para as quais não existem formas fechadas requerem a utilização de algoritmos de amostragem, que por sua vez consomem mais tempo.

Para este estudo será considerado o uso  $\epsilon$  como uma distribuição normal, de acordo com a Equação (5.21), pois está de acordo com a proposta original (YANG, 2009a) (FISTER; YANG; BREST, 2014).

A distribuição normal tem a propriedade da geração de aproximadamente 2/3 das amostras estarem no intervalo de um desvio padrão, mantendo também uma probabilidade

não-nula de gerar amostras mais distantes da média, pois a cauda da distribuição nunca chega a zero (EIBEN; SMITH et al., 2003). Desta forma, a distribuição normal tende a favorecer pequenas modificações na maioria das vezes, enquanto também apresenta uma probabilidade considerável de gerar maiores modificações (FISTER; YANG; BREST, 2014).

### 5.2.2 PARÂMETRO $\alpha$

O parâmetro  $\alpha$  está ligado diretamente com o tamanho total do passo aleatório do movimento, o que também é um dos aspectos que contribui para o balanço entre diversificação e intensificação na busca. Teoricamente,  $\alpha \in [0, 1]$  (YANG, 2009a). Desta forma, se o valor de  $\alpha$  for suficientemente grande (por exemplo 0,5 ou mais) o movimento terá maior caráter de diversificação. De forma contrária, para um valor pequeno de  $\alpha$  o movimento resultante favorecerá a intensificação.

Uma estratégia que favorece bastante o desempenho do algoritmo é o decrescimento de  $\alpha$  ao decorrer das iterações. Assim, ao início da execução a busca começa com bastante diversificação, e vai passando a ter maior caráter de intensificação ao decorrer das iterações. Com esta estratégia  $\alpha$  passa a ser definido como um par de parâmetros  $\alpha_0$  e  $\alpha_f$ , onde  $\alpha_0$  é o valor inicial de  $\alpha$  e  $\alpha_f$  é o valor final até o qual  $\alpha$  deve ser decrescido.

Segundo Yang (2010b), uma forma de implementar o decrescimento de  $\alpha_0$  até  $\alpha_f$  é de acordo com a Equação (5.22).

$$\alpha(t + 1) = \alpha_f + (\alpha_0 - \alpha_f)e^{-t} \quad (5.22)$$

Outra estratégia também proposta por Yang (2010b) é o decrescimento geométrico de  $\alpha$ . Esta estratégia pode ser implementada definindo-se uma constante  $\delta \in [0, 1]$  que é multiplicada por  $\alpha$  a cada iteração. Desta forma,  $\alpha$  na iteração  $t + 1$  pode ser calculado de acordo com a Equação (5.23).

$$\alpha(t + 1) = \alpha(t)\delta \quad (5.23)$$

A Equação (5.23) pode ser reescrita em função de  $\alpha_0$ , sendo definida segundo a Equação (5.24).

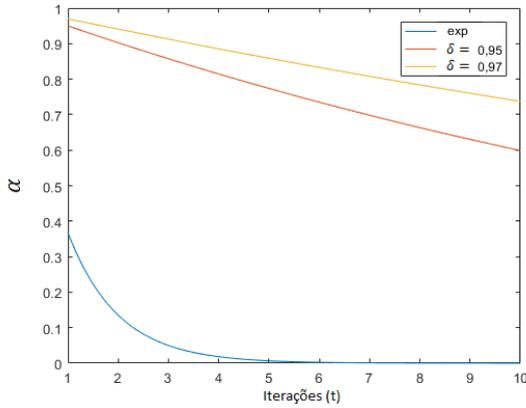
$$\alpha(t + 1) = \alpha_0\delta^t \quad (5.24)$$

Segundo Yang (2010b), um valor de  $\delta$  entre 0,95 e 0,97 é apropriado para a maioria dos casos.

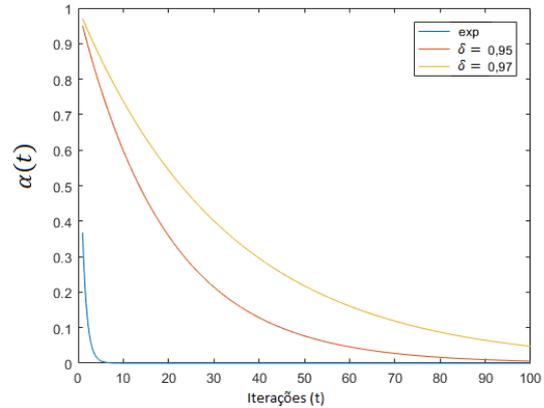
A Figura 11 exemplifica o uso de três formas de decrescimento para três casos diferentes. As três formas são a função do decaimento exponencial apresentada na Equação (5.22) (em azul) e a função do decaimento geométrico apresentada na Equação (5.24), tomando valores de  $\delta = 0,95$  (em vermelho) e  $\delta = 0,97$  (em amarelo). Os três casos

Figura 11: Decrescimento de  $\alpha$  para 10, 100 e 500 iterações

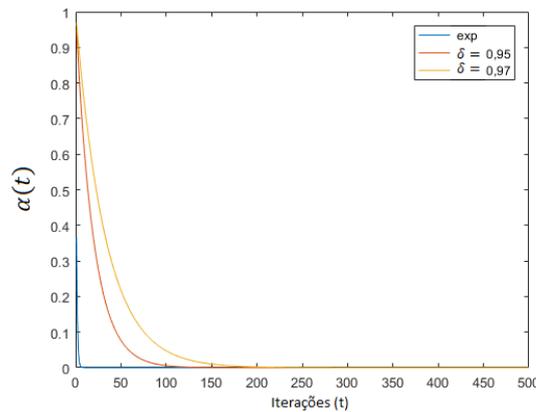
(a) 10 iterações



(b) 100 iterações



(c) 500 iterações



Fonte: Elaborado pelo autor

apresentados são os limites de iterações iguais a 10, 100 e 500 iterações, respectivamente. O valor inicial foi definido como  $\alpha_0 = 1$ , decrescente até  $\alpha_f = 0,0001$ .

Pela Figura 11 é possível verificar que o decrescimento exponencial não é muito apropriado para maiores números de iterações, como 100 ou 500, pois a velocidade de decrescimento é muito rápida e  $\alpha$  decresce rapidamente para  $\alpha_f$ . Por outro lado, o decrescimento geométrico com  $\delta = 0,95$  e  $\delta = 0,97$  também apresenta algumas limitações. A primeira delas é que para um número pequeno de iterações (10 iterações) o decrescimento nem ao menos se aproxima de  $\alpha_f$ . Outra limitação do esquema de decrescimento geométrico é que não há garantia de que  $\alpha$  irá atingir  $\alpha_f$  ao final das iterações. Com vista a este efeito, nem sempre um valor entre 0,95 e 0,97 pode ser apropriado, pois pode levar a um decrescimento muito ou pouco intenso, levando a valores diferentes de  $\alpha_f$  ao final da execução. Para isto, neste trabalho é utilizada uma estratégia para se calcular  $\delta$  de forma que  $\alpha$  varie de  $\alpha_0$  até  $\alpha_f$ .

Supondo que sejam realizadas  $N_{it}$  iterações pelo algoritmo, pode-se impor que  $\alpha(N_{it}) = \alpha_f$ . Assim, obtém-se a Equação (5.25).

$$\begin{aligned}\alpha(N_{it}) &= \alpha_0 \delta^{N_{it}-1} \\ \alpha_f &= \alpha_0 \delta^{N_{it}-1}\end{aligned}\tag{5.25}$$

Basta manipular a Equação (5.25) e obtém-se  $\delta$  em função de  $\alpha_0$ ,  $\alpha_f$  e  $N_{it}$ . Esta relação é apresentada na Equação (5.26).

$$\delta = \left( \frac{\alpha_f}{\alpha_0} \right)^{\frac{1}{N_{it}-1}}\tag{5.26}$$

Desta forma, com o cálculo de  $\delta$  em função do número máximo de iterações, pode-se garantir que a função apresente uma velocidade de decrescimento apropriada independente do número de iterações da execução. O mesmo exemplo apresentado na Figura 11 é mostrado na Figura 12, utilizando-se o decrescimento geométrico com  $\delta$  calculado de acordo com a Equação (5.26).

Fazendo-se uso desta estratégia, o parâmetro principal  $\alpha$  passa a ser substituído por um par de parâmetros:  $\alpha_0$  e  $\alpha_f$  onde  $\delta$  é um coeficiente a ser calculado a partir de  $N_{it}$ .

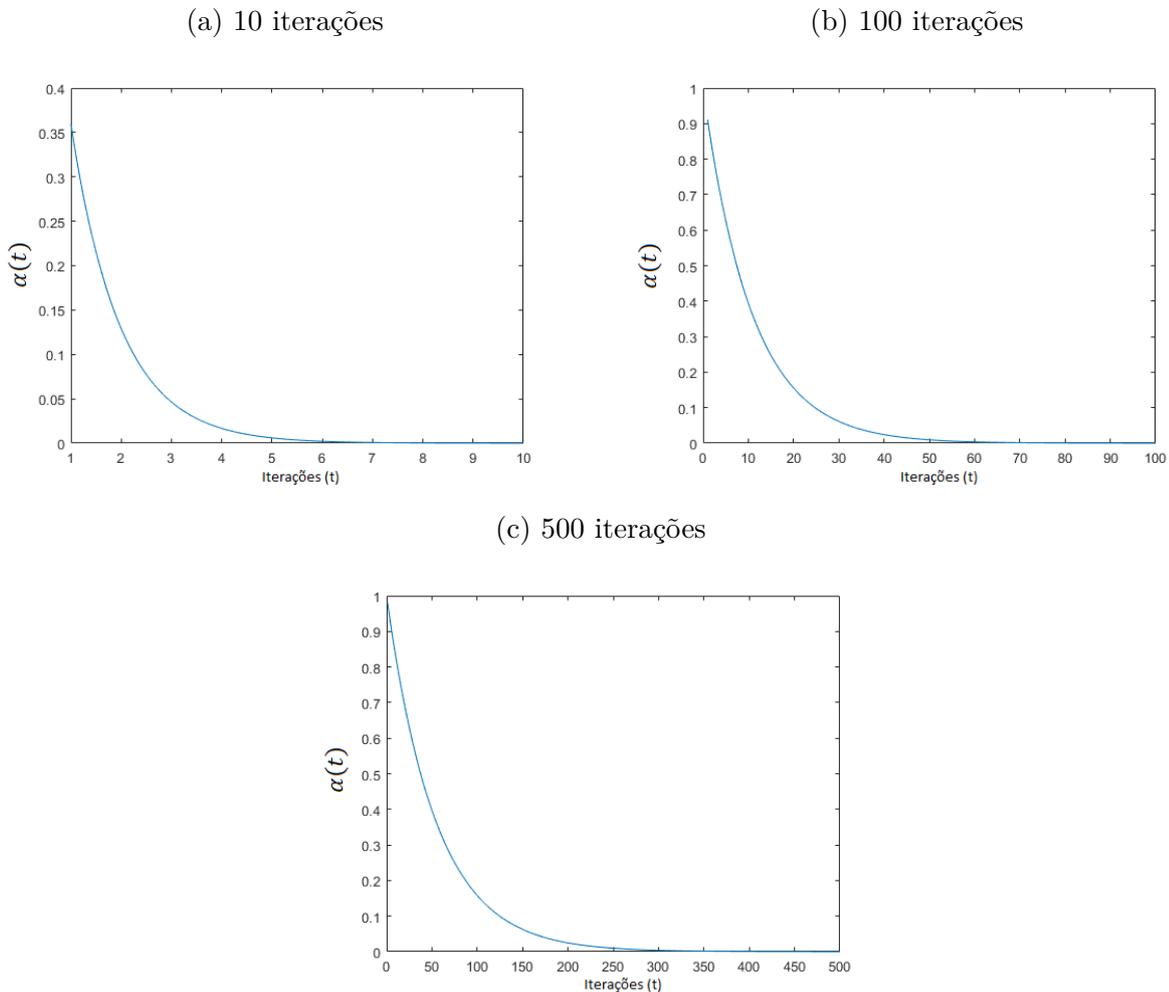
### 5.2.3 CONSIDERAÇÕES

De forma geral, estipular um número limite de avaliações da função objetivo é um critério de parada que oferece uma comparação justa entre métodos de otimização. É possível calcular, a partir do número de avaliações, o número de iterações que serão executadas pelo método. O conhecimento do número de iterações por sua vez é importante para que seja feito o decrescimento da aleatoriedade ao decorrer da execução, desta forma propiciando um balanço apropriado de diversificação e intensificação.

Basicamente, dois aspectos principais modificam a aleatoriedade: o parâmetro  $\alpha$  e a distribuição de probabilidade  $\epsilon$ . Considerando que o parâmetro  $\alpha$  é variante ao longo das iterações, este parâmetro é substituído pelo par de parâmetros  $\alpha_0$  e  $\alpha_f$ . A escolha da distribuição de probabilidade  $\epsilon$  utilizada também impacta na escolha de  $\alpha_0$  e  $\alpha_f$ , pois para diferentes distribuições o intervalo de valores gerados é diferente. É importante considerar que, para diferentes distribuições  $\epsilon$  nem sempre o mesmo par  $\alpha_0$  e  $\alpha_f$  será apropriado.

## 5.3 INICIALIZAÇÃO DE PARÂMETROS DA POPULAÇÃO NÃO-HOMOGÊNEA

No método FA existem  $m$  parâmetros a serem ajustados, que determinam o comportamento de toda a população. Já no NhFA cada vaga-lume possui um comportamento próprio, no entanto, esta modificação aumenta o número de parâmetros para  $n \times m$ , onde  $n$  é o número de agentes da população. A medida que  $n$  cresce, o número de parâmetros a ser ajustado se torna muito maior. Esta consequência torna inicialização dos parâmetros um a um impraticável. Como neste trabalho foi considerado um tamanho

Figura 12: Decrescimento de  $\alpha$  com  $\delta$  calculado para 10, 100 e 500 iterações

Fonte: Elaborado pelo autor

$n$  suficientemente grande, foram estudadas então algumas técnicas de inicialização de parâmetros que viabilizam o uso do NhFA para populações maiores.

Foram desenvolvidas duas técnicas principais de inicialização: a inicialização por grupos e a inicialização aleatória.

### 5.3.1 INICIALIZAÇÃO POR GRUPOS

Esta técnica consiste na divisão da população em grupos e a atribuição de parâmetros para cada grupo. Através desta técnica, o número de parâmetros é diminuído de  $n \times m$  para  $g \times m$ , onde  $g$  é o número de grupos em que a população foi dividida. Se  $g$  for muito grande a vantagem se torna menor, pois o número de parâmetros a serem ajustados tende a aumentar. Naturalmente, isso varia de acordo com a estratégia escolhida, mas pode-se considerar por exemplo que  $g \in [2, 4]$  é praticável.

Outra questão existente nesta estratégia é que a divisão por grupos pode ser

aplicada a cada parâmetro individualmente. Por exemplo, todos vaga-lumes podem ter mesmo  $\gamma$  e  $\beta_0$ , e apenas  $\alpha$  ser dividido em grupos. Com isto, o número de parâmetros a serem determinados é reduzido. No entanto esta característica não deve ser adotada como redução de parâmetros, mas sim como forma estratégica para a inicialização, combinando os parâmetros adequadamente nos grupos.

### 5.3.2 INICIALIZAÇÃO ALEATÓRIA

Nesta técnica os parâmetros de cada agente são atribuídos aleatoriamente. Para a geração aleatória de um determinado parâmetro, pode-se determinar um intervalo de geração, ou aplicar-se uma perturbação em torno de um valor definido. É importante observar que quanto mais extenso for o intervalo de valores possíveis para a inicialização, maior a imprevisibilidade na execução do algoritmo. Isto acontece porque um intervalo mais extenso pode levar a cenários mais diversificados.

### 5.3.3 CONSIDERAÇÕES

Existem duas formas principais para se realizar a inicialização dos parâmetros. No entanto, estas duas técnicas não precisam ser utilizadas exclusivamente. É possível misturar as duas técnicas, por exemplo, definindo grupos e realizando a inicialização aleatória para cada grupo. Isto permite que sejam criados cenários onde a diversificação e a intensificação possam ser favorecidas simultaneamente.

É importante notar que, se for adotado o decrescimento de  $\alpha$  ao longo das iterações, na variante não-homogênea cada parâmetro  $\alpha_i$  será substituído por  $\alpha_{0i}$  e  $\alpha_{fi}$ . Por consequência isto implica que também  $\delta$  será substituído pelos parâmetros não-homogêneos  $\delta_i$ . O parâmetro  $\delta_i$  é calculado em função de  $\alpha_{0i}$ ,  $\alpha_{fi}$  e  $N_{it}$  de acordo com a Equação (5.27).

$$\delta_i = \left( \frac{\alpha_{fi}}{\alpha_{0i}} \right)^{\frac{1}{N_{it}-1}} \quad (5.27)$$



## 6 SIMULAÇÕES E RESULTADOS

Neste Capítulo, são apresentados os resultados obtidos com as simulações nos problemas propostos. Foi considerado um conjunto de 10 funções teste, e, um total de 12 sistemas de teste diferentes para o problema de despacho econômico.

Na Seção 6.1, são apresentadas as configurações utilizadas para as simulações realizadas neste trabalho. Nas configurações são detalhados, a máquina de testes, o conjunto de parâmetros dos algoritmos e o número de execuções realizadas para cada método. Em seguida, a Seção 6.2 apresenta a metodologia empregada para o tratamento das restrições dos problemas. Na Seção 6.3 são apresentados e analisados os resultados obtidos nas funções teste. Finalmente, na Seção 6.4 são apresentados os resultados encontrados no problema de despacho econômico.

### 6.1 CONFIGURAÇÃO DE TESTES

Os métodos foram implementados em Matlab (R2016a). A máquina de testes utilizada foi um notebook com processador Intel(R) Core(TM) i3-3110M 2,40GHz, 4GB de RAM e sistema operacional Windows 8.1 Pro 64 bits.

Para todos os métodos foi utilizada uma população de 25 vaga-lumes. Além disso, foi utilizado o parâmetro  $\alpha$  decrescente ao longo das iterações até chegar a um valor de  $10^{-4}$  ( $\alpha_f = 10^{-4}$ ).

Em adição, o critério de parada utilizado para todos os métodos foi a determinação de um número limite de avaliações da função objetivo, que foi definido de acordo com cada problema em questão. Para todas as funções teste foi estabelecido um limite de 50000 avaliações. Já no problema de despacho econômico, o limite de avaliações foi definido de acordo com cada sistema em questão, baseando-se em critérios de trabalhos da literatura.

O método NhFA foi definido em dois cenários distintos, chamados NhFA-R e NhFA-M. No NhFA-R cada parâmetro é inicializado de forma aleatória para cada vaga-lume. Enquanto no NhFA-M é utilizada uma técnica de divisão por grupos, onde a população toda é dividida em dois grupos. Um destes grupos tem os parâmetros inicializados de acordo com o NhFA-R e o outro grupo é inicializado de acordo com os parâmetros do FA.

Os parâmetros utilizados para os métodos são sumarizados na Tabela 5.

Na tabela 5,  $rand()$  é um número aleatório entre 0 e 1 gerado a partir de uma distribuição uniforme. No caso do NhFA-M,  $\psi_i = rand()$  (12) significa que esta forma de inicialização é aplicada a 12 vaga-lumes da população.

Os parâmetros do FA foram definidos com algumas recomendações da literatura. O parâmetro  $\psi$  foi definido de forma a manter uma estratégia similar à apresentada por Lukasik e Zak (2009). Além disso, os parâmetros  $\beta_0$  e  $\alpha_0$  foram definidos de acordo com a proposta apresentada por Yang, Hosseini e Gandomi (2012), aplicada à solução do problema de despacho econômico.

Os limites da inicialização aleatória são definidos de acordo com algumas pro-

Tabela 5: Parâmetros utilizados para os métodos

Método	Parâmetros		
FA	$\psi = 1$	$\alpha_0 = 0,5$	$\beta_0 = 1$
NhFA-R	$\psi_i = rand()$	$\alpha_{0i} = rand()$	$\beta_{0i} = 2 \times rand()$
NhFA-M	$\psi_i = rand()$ (12) $\psi_i = 1$ (13)	$\alpha_{0i} = rand()$ (12) $\alpha_{0i} = 0,5$ (13)	$\beta_{0i} = 2 \times rand()$ (12) $\beta_{0i} = 1$ (13)

Fonte: Elaborado pelo autor

posições. Primeiramente, neste trabalho foi assumido um novo parâmetro  $\psi \in [0, 1]$  que substitui  $\gamma$ . Segundo Yang (2009a), o parâmetro  $\alpha$  é definido entre 0 e 1. Para  $\beta_0$  foi considerado um intervalo entre 0 e 2, visando manter o critério de convergência estabelecido por Yang (2013). Logo, os parâmetros inicializados aleatoriamente serão inicializados nestes intervalos teóricos. Para todos os métodos foi utilizado  $\epsilon$  como uma distribuição normal  $N(0, 1)$ .

O FA e o NhFA são métodos estocásticos, e o desempenho destes tipos de métodos não pode ser julgado por apenas uma execução (YANG; HOSSEINI; GANDOMI, 2012). Considerando isto foram realizadas várias execuções, e as soluções encontradas nestas execuções foram analisadas com medidas estatísticas como a média e o desvio padrão. Além disso, os dados da execução que conduziu à melhor solução foram utilizados para plotar os gráficos de convergência.

O número de execuções deve ser suficientemente grande para eliminar a possibilidade da aleatoriedade interferir nos resultados (LUKE, 2009). Além disso quanto maior o número de execuções, mais nítida tende a ficar a diferença de resultados esperados pelos métodos (LUKE, 2009). Luke (2009) recomenda a realização de 50 a 100 execuções para cada método em cada problema. Levando-se em conta esta recomendação, para este trabalho, foram realizadas 100 execuções para cada método em cada problema em questão.

Além da definição dos parâmetros dos métodos é muito importante também que sejam definidas as estratégias de tratamento de restrições.

## 6.2 TRATAMENTO DE RESTRIÇÕES

A busca pela solução ótima de um determinado problema deve também respeitar as restrições impostas. Nesse trabalho foram selecionados dois tipos de problemas para a validação do NhFA: os problemas artificiais (funções teste) e os problemas práticos (problemas de despacho econômico).

Nas funções teste selecionadas existe apenas uma restrição: o domínio de valores de cada variável de controle. Já no problema de despacho econômico o número de restrições

é maior, tendo como exemplo os limites de operação das geradoras, zonas proibidas, limites de rampa e o balanço de potência.

Na Subseção 6.2.1 é descrita a regra de tratamento de restrição utilizada para as funções teste. Adicionalmente, na Subseção 6.2.2 são descritas as formas de reparo utilizadas para as restrições do problema de despacho econômico.

### 6.2.1 FUNÇÕES TESTE

Cada função teste é limitada a um determinado espaço de busca  $[x_i^{min}, x_i^{max}]$ ,  $i = 1, 2, \dots, d$ . Com a movimentação de um vaga-lume é possível que este possa cair fora do espaço de busca. Neste caso, a correção aplicada segue de acordo com a Equação (6.1).

$$x_i = \begin{cases} x_i^{min}, & \text{se } x_i < x_i^{min} \\ x_i^{max}, & \text{se } x_i > x_i^{max} \end{cases} \quad (6.1)$$

### 6.2.2 PROBLEMA DE DESPACHO ECONÔMICO

Primeiramente, a potência de saída  $P_i$  está sujeita à região de operação  $[P_i^{min}, P_i^{max}]$ , estando de acordo com a Equação (3.7). Se algum vaga-lume se mover para uma solução que viole o espaço de busca em alguma dimensão (alguma potência de saída fora do limite de operação), a potência  $P_i$  será redefinida de acordo com a Equação (6.2). Esta abordagem é bastante eficiente para este tipo de problema pois é comum a ocorrência de soluções localizadas próximas às fronteiras do espaço de busca (limites de operação das unidades geradoras).

$$P_i = \begin{cases} P_i^{min}, & \text{se } P_i < P_i^{min} \\ P_i^{max}, & \text{se } P_i > P_i^{max} \end{cases} \quad (6.2)$$

De tal forma, os limites de rampa também constituem uma restrição imposta no espaço de busca durante o processo de otimização. A nova potência  $P_i$  obtida com o movimento do vaga-lume deve se encontrar dentro de um intervalo máximo permitido. Esta relação é apresentada pela desigualdade em (3.10). Se a nova potência  $P_i$  obtida após o movimento do vaga-lume violar o limite de rampa,  $P_i$  deve ser atribuída segundo a Equação (6.3).

$$P_i = \begin{cases} \max(P_i^{min}, P_i^0 - DR_i), & \text{se } P_i < \max(P_i^{min}, P_i^0 - DR_i) \\ \min(P_i^{max}, P_i^0 + UR_i), & \text{se } P_i > \min(P_i^{max}, P_i^0 + UR_i) \end{cases} \quad (6.3)$$

A regra de reparo apresentada na Equação (6.3) tem o mesmo funcionamento da regra apresentada na Equação (6.2). Além disso, na regra da Equação (6.3) considera-se também os limites  $P_i^{min}$  e  $P_i^{max}$ . Ainda, as restrições de limites de operação e limites de

rampa podem ser tratadas utilizando apenas a regra da Equação (6.2). Para isso,  $P_i^{min}$  e  $P_i^{max}$  devem ser definidos de acordo com as Equações (6.4) e (6.5).

$$P_i^{min} = \max(P_i^{min}, P_i^0 - DR_i) \quad (6.4)$$

$$P_i^{max} = \min(P_i^{max}, P_i^0 + UR_i) \quad (6.5)$$

Além da potência  $P_i$  estar restrita ao intervalo  $[P_i^{min}, P_i^{max}]$ , também existem neste intervalo as zonas proibidas de operação, que devem ser evitadas. Esta restrição é enunciada pela relação (3.8). Caso um vaga-lume se movimente para uma solução onde a potência  $P_i$  se encontra em uma zona proibida  $j$ , a potência é movimentada para o limite (superior ou inferior) do qual estiver mais próxima. Esta correção é apresentada na Equação (6.6).

$$P_i = \begin{cases} P_{i,j}^{UB}, & \text{se } P_i > \frac{P_{i,j}^{LB} + P_{i,j}^{UB}}{2} \\ P_{i,j}^{LB}, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (6.6)$$

Finalmente, além das restrições no espaço de busca mencionadas anteriormente, também deve ser considerada a restrição do balanço de potência. Neste trabalho foram utilizados dois métodos para o tratamento desta restrição. Um dos métodos envolve a penalização de soluções que violem a restrição, e o outro, o reparo destas soluções.

No método de penalização, a restrição de balanço de potência é incluída na função custo. Desta forma, se a solução em questão apresentar violação do balanço de potência, o custo será elevado. Assim, a solução em questão deixa de ser atrativa.

A restrição de balanço de potência pode ser reescrita de acordo com a Equação (6.7).

$$\sum_{i=1}^N P_i - P_D - P_L = 0 \quad (6.7)$$

Pela Equação (6.7), nota-se que o termo  $\left| \sum_{i=1}^N P_i - P_D - P_L \right|$  idealmente deve ser zero. Caso este termo seja diferente de zero, significa que há uma violação do balanço de potência. Logo, este termo é então introduzido na função custo com um determinado peso. A Equação (6.8) apresenta a função custo modificada, que inclui a restrição do balanço de potência.

$$C(P_1, P_2, \dots, P_N) = \sum_{i=1}^N F_i(P_i) + \phi \left| \sum_{i=1}^N P_i - P_D - P_L \right| \quad (6.8)$$

Onde  $\phi$  é a constante de penalização do termo de balanço de potência.

A outra forma de tratamento da restrição de balanço de potência empregada neste trabalho é uma rotina de reparo da solução. Através desta rotina, uma solução que não é

factível (que não satisfaz a restrição) é transformada em uma solução factível. A rotina de reparo proposta é apresentada no Algoritmo 3.

**Parâmetros:**  $P = P_1, P_2, \dots, P_N, P_D$   
**para**  $\sum_{i=1}^N P_i < P_D$  **faça**  
 | Seleccione uma geradora  $k$  aleatoriamente  
 | Aumente  $P_k$  o máximo possível  
**fim**

**Algoritmo 3:** Rotina de reparo para balanço de potência

O Algoritmo 3 mostra o procedimento utilizado quando a potência total está abaixo da demanda. Quando a potência total está acima da demanda o procedimento é o mesmo, com a diferença de que, ao invés de buscar aumentar  $P_k$ , busca-se diminuí-lo.

Quando a potência  $P_k$  é aumentada, deve-se considerar os limites de operação  $P_k^{min}$  e  $P_k^{max}$ , de forma que não sejam ultrapassados. Adicionalmente, se  $P_k$  cair em uma zona proibida, deve ser redefinido para o limite inferior desta.

A rotina de reparo apresentada é aplicável para problemas onde não são consideradas perdas nas linhas de transmissão. Isso acontece porque, se houverem perdas, a variação da potência  $P_k$  implica também na variação da demanda total ( $P_D + P_L$ ), e este efeito impossibilita o reparo preciso da potência  $P_k$ .

Considerando esta limitação da técnica de reparo para a restrição de balanço de potência, para os problemas que consideram perdas nas linhas de transmissão, foi utilizada a técnica de penalização na função custo. Enquanto que, para os problemas onde as perdas são negligenciadas, foi utilizado o método de reparo de soluções não factíveis.

### 6.2.3 CONSIDERAÇÕES

Nas Subseções 6.2.1 e 6.2.2 foram descritos os métodos de tratamento de restrições utilizados neste trabalho. No entanto, existe mais uma questão importante para que estes métodos sejam incorporados no FA e no NhFA, que é a determinação de onde serão aplicados estes tratamentos.

Existem duas possibilidades principais. Uma delas é a aplicação dos tratamentos após a movimentação dos vaga-lumes. A outra forma, consiste em aplicar os tratamentos antes da realização das avaliações da função objetivo. Estas duas possibilidades trazem um grande impacto no custo computacional necessário.

Considerando uma população de tamanho  $n$ , se os tratamentos de restrições forem aplicados após a movimentação de cada vaga-lume, as regras de reparo serão utilizadas  $\frac{n(n-1)}{2}$  vezes em cada iteração. Já se o tratamento for realizado antes das avaliações da função objetivo, as regras de reparo serão empregadas  $n$  vezes por iteração. Quanto maior for o tamanho da população, maior será esta diferença. Mesmo para o tamanho  $n$  utilizado neste trabalho (25 vaga-lumes), a diferença é bastante nítida. Se os reparos forem realizados

após a movimentação de cada vaga-lume, o custo computacional para o tratamento das restrições será 12 vezes maior.

Visando manter um custo computacional menor, para este trabalho os tratamentos das restrições foram realizados antes das avaliações da função objetivo.

### 6.3 APLICAÇÃO EM FUNÇÕES TESTE

Para esta validação foram consideradas as funções teste descritas na Seção 6.3 do Capítulo 2. A dimensionalidade para todas as funções foi definida como  $d = 30$ . Além disso, para todas as funções foi definido um limite de 50000 avaliações da função objetivo como critério de parada. Este número de avaliações resulta em 1998 iterações por execução. O tempo médio de execução apresentado pelos métodos ficou em torno de 8 segundos, para todas as funções teste.

Este Capítulo está estruturado da seguinte forma: a Seção 6.3.1 apresenta as melhores soluções encontradas pelos métodos e uma análise desta perspectiva. Já na Seção 6.3.2 os métodos são comparados tomando-se como referência a solução média obtida.

#### 6.3.1 ANÁLISE DA MELHOR SOLUÇÃO

A análise da melhor solução encontrada pelos métodos em cada função é útil para verificar o quão bem estes podem se desempenhar nos problemas em questão. A execução que retornou a melhor solução é definida como a melhor execução. Utilizando os dados da melhor execução são plotados os gráficos de convergência para a análise do comportamento do método ao longo das iterações.

Na Tabela 6 é apresentada a melhor solução encontrada para cada função teste, por cada método.

De acordo com a Tabela 6 é possível visualizar a vantagem do NhFA sobre o FA. Ambas as estratégias NhFA-M e NhFA-R obtiveram solução melhor do que o FA para quase todos os problemas propostos. A exceção se deu apenas na função de Rosenbrock, onde a melhor solução foi obtida pelo FA.

A comparação entre o NhFA-M e o NhFA-R já não é tão intuitiva assim, para realizar esta análise de uma maneira mais sistemática foi realizado o teste de Friedman. Na Tabela 7 são relacionados os três métodos de acordo com o rank médio.

Assumindo-se um nível de significância  $\alpha = 0,01$ , a única conclusão que pôde ser tirada é que o NhFA-R tende a apresentar um melhor desempenho que o FA. No entanto, considerando-se um nível de significância um pouco maior, como  $\alpha = 0,05$ , pôde-se concluir que o NhFA-R foi melhor do que o NhFA-M, e este por sua vez, foi melhor do que o FA.

Na Figura 13 são mostrados os gráficos de convergência para as funções teste consideradas. Para a plotagem dos gráficos, foram considerados os dados da execução que conduziu ao melhor resultado de cada método.

Figura 13: Convergência dos métodos nas funções teste

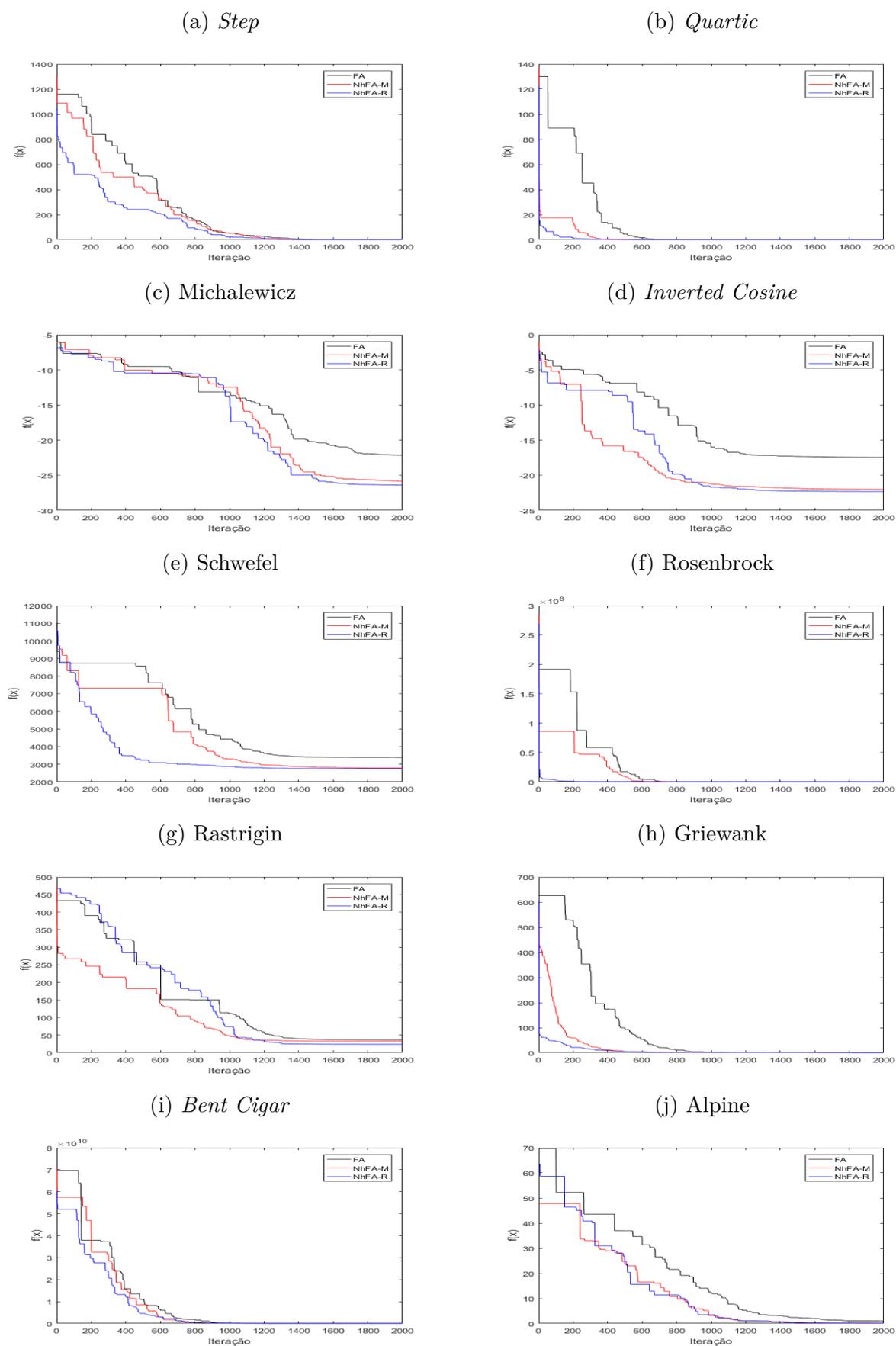


Tabela 6: Melhor solução encontrada

Função	Ótimo	FA	NhFA-M	NhFA-R
<i>Bent Cigar</i>	0	$2,42e + 04$	$1,26e + 04$	<b><math>1.02e+04</math></b>
<i>Quartic</i>	0	$4,22e - 11$	<b><math>4,63e-12</math></b>	$4,68e - 12$
<i>Step</i>	0	$0,00e + 00$	$0,00e + 00$	$0,00e + 00$
Griewank	0	$6,66e - 02$	$3,26e - 02$	<b><math>2,47e-02</math></b>
Rosenbrock	0	<b><math>1,43e+01</math></b>	$2,53e + 01$	$2,44e + 01$
Rastrigin	0	$3,68e + 01$	$3,28e + 01$	<b><math>2,39e+01</math></b>
Schwefel	0	$3,38e + 03$	$2,79e + 03$	<b><math>2,75e+03</math></b>
Michalewicz	-29,63	$-2,21e + 01$	$-2,58e + 01$	<b><math>-2.64e+01</math></b>
Alpine	0	$1,00e + 00$	$1,62e - 01$	<b><math>6,98e-02</math></b>
<i>Inverted Co-sine</i>	-29	$-1,74e + 01$	$-2,20e + 01$	<b><math>-2,23e+01</math></b>

Fonte: Elaborado pelo autor

Tabela 7: Rank médio dos métodos de acordo com a melhor solução

Método	Rank médio
NhFA-R	1,30
NhFA-M	2,00
FA	2,70

Fonte: Elaborado pelo autor

A Figura 13 apresenta os gráficos de convergência dos métodos em cada uma das funções teste. Na função *step*, o NhFA-R convergiu com maior velocidade. O NhFA-M por sua vez ainda apresentou uma velocidade de convergência maior do que o FA.

Nas funções *quartic* e de Rosenbrock, verifica-se uma convergência muito rápida do NhFA-R. Entretanto, nestas duas funções a melhor solução foi obtida pelo FA (na função de Rosenbrock) e pelo NhFA-M (na função *quartic*).

Além disso, na função de Michalewicz não é possível verificar uma diferença significativa na velocidade de convergência dos métodos. Apenas, a partir das 1000 iterações de busca, o NhFA-R mostrou maior velocidade de convergência, além de convergir à melhor solução do problema. Ainda, o NhFA-M apresentou maior velocidade de convergência que o FA.

Considerando-se a função *inverted cosine*, o NhFA-M convergiu a uma velocidade

maior até cerca de 900 iterações de busca, a partir deste ponto, o NhFA-R destacou-se um pouco, convergindo a uma solução final melhor.

Na função de Schwefel, a maior velocidade de convergência foi obtida pelo NhFA-R. Adicionalmente, o NhFA-M apresentou uma velocidade de convergência maior em relação ao FA nesta função.

Por outro lado, na função de Rastrigin, a convergência com maior velocidade foi obtida pelo NhFA-M, apesar de que, a partir de cerca de 1200 iterações, o NhFA-R tenha convergido a uma solução melhor.

Na função de Griewank, o NhFA-R teve a convergência mais rápida, e para a melhor solução. Em adição, o NhFA-M convergiu a uma velocidade maior do que o FA. O mesmo aconteceu na função *bent cigar*, mas especificamente, a partir das 200 iterações da busca.

Finalmente, na função Alpine, o NhFA-R e o NhFA-M foram bastante semelhantes na questão de convergência. Ainda, ambos convergiram a uma velocidade maior do que o FA.

Em síntese, tratando-se da melhor solução encontrada pelos métodos e de sua convergência à melhor solução, pôde-se verificar que o as duas estratégias adotadas para o NhFA tiveram melhor desempenho que o FA. No entanto, não foi possível determinar com o nível de significância esperado ( $\alpha = 0,01$ ), qual das duas estratégias do NhFA (NhFA-R e NhFA-M) foi melhor. Para tornar essa comparação mais clara foi necessário analisar o desempenho dos métodos de uma outra perspectiva: a solução média.

### 6.3.2 ANÁLISE DA SOLUÇÃO MÉDIA

Na análise da melhor solução dos métodos para cada problema foi possível concluir: O quão bem cada método pode se sair considerando um caso extremamente positivo e a que velocidade ocorre a convergência para a solução. No entanto, esta análise se restringe a apenas uma execução e não a todo o conjunto das 100 execuções realizadas. Logo não há como saber se a tendência do método é de apresentar soluções próximas ou distantes da melhor solução. Se a melhor solução for muito distante da média, significa que o método pode apresentar uma solução muito ruim da mesma forma que pode apresentar uma solução muito boa também. Da mesma forma, se a melhor solução for próxima da média significa que o método tem uma grande tendência a apresentar soluções próximas da solução média. Luke (2009) exemplifica a importância desta análise com uma questão: "Se você só pudesse realizar uma única execução com uma quantia fixa de  $m$  avaliações da função objetivo, e precisasse de uma solução com a melhor qualidade possível, qual método você escolheria?". Segundo Luke (2009) esta questão é equivalente a questão: "Qual método tem a melhor solução esperada para uma execução qualquer (média)?"

A Tabela 8 apresenta a solução média dos métodos para os problemas propostos.

A partir da Tabela 8 verifica-se uma diferença mais nítida entre os métodos. O

Tabela 8: Solução média encontrada pelos métodos

Função	Ótimo	FA	NhFA-M	NhFA-R
<i>Bent Cigar</i>	0	$4,15e + 04$	$2,59e + 04$	<b><math>1,69e+04</math></b>
<i>Quartic</i>	0	$1,39e - 10$	$3,21e - 11$	<b><math>1,44e-11</math></b>
<i>Step</i>	0	<b><math>3,95e+00</math></b>	$4,03e + 00$	$4,93e + 00$
Griewank	0	$1,37e - 01$	$8,01e - 02$	<b><math>5,07e-02</math></b>
Rosenbrock	0	$3,91e + 02$	$3,63e + 02$	<b><math>2,67e+02</math></b>
Rastrigin	0	$8,43e + 01$	$6,17e + 01$	<b><math>5,99e+01</math></b>
Schwefel	0	$5,26e + 03$	$5,09e + 03$	<b><math>5.08e+03</math></b>
Michalewicz	-29,63	$-1,77e + 01$	$-2,11e + 01$	<b><math>-2,20e+01</math></b>
Alpine	0	$4,24e + 00$	$1,96e + 00$	<b><math>1,71e+00</math></b>
<i>Inverted Co-sine</i>	-29	$-1,22e + 01$	$-1,70e + 01$	<b><math>-1,83e+01</math></b>

Fonte: Elaborado pelo autor

NhFA-R obteve a melhor solução média para quase todas as funções, com exceção apenas da função *step*, onde a melhor solução média foi obtida pelo FA. O NhFA-M, por sua vez, encontrou solução média melhor do que o FA em todas as funções, com exceção também, da função *step*.

Para realizar uma análise estatística significativa, também foi aplicado o teste de Friedman sobre os dados das soluções médias encontradas pelos métodos. A Tabela 9 apresenta o rank médio de cada método.

Tabela 9: Rank médio dos métodos de acordo com a solução média

Método	Rank médio
NhFA-R	1,20
NhFA-M	2,00
FA	2,80

Fonte: Elaborado pelo autor

Considerando-se um nível de significância  $\alpha = 0,01$ , novamente pôde-se constatar que ambos o NhFA-M e o NhFA-R são melhores que o FA. Também foi possível neste caso constatar que o NhFA-R é melhor do que o NhFA-M. Logo, tratando-se das soluções médias obtidas nas funções teste, pode-se afirmar com 99% de certeza que as afirmações mencionadas são verdadeiras.

## 6.4 PROBLEMA DE DESPACHO ECONÔMICO

Como foi descrito no Capítulo 3, no problema de despacho econômico podem ser considerados diversos efeitos e situações, que refletem na função custo e nas restrições do problema. Na literatura existem diversos sistemas de teste propostos. Assim como no caso das funções teste, para o problema de despacho econômico não se pode também comparar os métodos em apenas um caso. Por exemplo, em um determinado sistema o NhFA pode encontrar uma melhor solução, em outro, o FA. Assim, para que a comparação seja significativa, é necessário considerar um número maior de sistemas de teste.

Tabela 10: Características dos sistemas para PDE

	Função custo	Limites de Rampa	Zonas proibidas	Perdas
Sis-3	VPE			
Sis-6	Quadrática	X	X	X
Sis-10	MF-VPE			
Sis-13	VPE			
Sis-15	Quadrática	X	X	X
Sis-18	Quadrática			
Sis-20	Quadrática			X
Sis-26	Cúbica			
Sis-38	Quadrática			
Sis-40	VPE			
Sis-110	Quadrática			
Sis-140	Quadrática-VPE	X	X	

Fonte: Elaborado pelo autor

Para este estudo, foram selecionados ao todo 12 sistemas de teste para o PDE, com diferentes características e dimensões. A Tabela 10 apresenta resumidamente as características de cada sistema. Cada sistema é identificado na tabela por sua dimensionalidade, sendo Sis-3 o sistema de 3 unidades geradoras, e assim por diante. A função custo de cada sistema é classificada como quadrática, cúbica, função com efeito de ponto de válvula (VPE) ou função com múltiplos combustíveis (MF). Além disso, as restrições presentes no sistema em questão são marcadas com um “X”. No sistema de 140 unidades, a função é classificada como quadrática-VPE, pois para a maioria das unidades a função custo é quadrática, mas para algumas unidades em especial, existe também o efeito de ponto de válvula. Adicionalmente, no sistema de 10 unidades, tem-se a função custo com múltiplos combustíveis e o efeito de ponto de válvula combinados.

Tabela 11: Limites de avaliações definidos para os sistemas

Sistema	Limite de avaliações
Sis-3	5.000
Sis-6	20.000
Sis-10	15.000
Sis-13	30.000
Sis-15	50.000
Sis-18	40.000
Sis-20	50.000
Sis-26	40.000
Sis-38	50.000
Sis-40	100.000
Sis-110	75.000
Sis-140	200.000

Fonte: Elaborado pelo autor

Como o tamanho e as restrições dos sistemas variam, então o limite de avaliações da função objetivo foi definido de acordo com cada caso em particular. Para cada problema, o limite de avaliações foi estipulado baseando-se nos limites utilizados nos trabalhos da literatura. Por exemplo, no sistema de 15 unidades, geralmente se utiliza um limite de 50.000 avaliações (YANG; HOSSEINI; GANDOMI, 2012) ou mais (QIN et al., 2017), logo, foi considerado um limite de avaliações próximo aos utilizados. Os limites adotados nas simulações deste Trabalho foram definidos de maneira a se aproximar dos definidos no trabalhos dos quais foram retirados os sistemas. A Tabela 11 apresenta os limites utilizados como critério de parada.

Para a análise dos resultados de cada sistema, foram considerados o menor custo, o custo médio, o maior custo e o desvio padrão dos custos obtidos por cada método. Adicionalmente, também foi feito o diagrama de caixa dos custos, para verificar a faixa de custos obtida por cada método, e também a possível interferência de *outliers* na média e desvio padrão obtidos. Além disso, também foi utilizada a execução que conduziu à solução de menor custo de cada método para plotar o gráfico de convergência. Como o espaço ocupado pelas tabelas com dados de entrada dos problemas e soluções ótimas encontradas foi grande, estas tabelas foram movidas para o apêndice do texto.

Esta Seção está estruturada da seguinte forma: da Subseção 6.4.1 até a Subseção 6.4.12 são apresentados os resultados referentes a cada um dos sistemas de teste do PDE. Por fim, na Subseção 6.4.13 são apresentadas as conclusões obtidas com as simulações.

### 6.4.1 SISTEMA DE 3 UNIDADES

Tabela 12: Resultados das execuções - sistema 3 unidades

Método	Melhor solução (\$/h)	Média (\$/h)	Pior Solução (\$/h)	Desvio Padrão (\$/h)
FA	8.220,93	8.223,47	8.276,85	11,01
NhFA-M	8.220,93	8.223,83	8.276,85	12,19
NhFA-R	8.220,93	8.221,72	8.276,85	5,72

Fonte: Elaborado pelo autor

Neste sistema, a função custo considera o efeito de ponto de válvula. Como restrições, são considerados apenas os limites de operação. A potência demandada é de 850MW e as perdas nas linhas de transmissão são desconsideradas. Os dados deste problema são apresentados na Tabela 32 do apêndice A. Este problema foi retirado do trabalho de Aragón, Esquivel e Coello (2015).

Para a solução deste problema, foi definido um limite de 5000 avaliações da função objetivo. Este limite de avaliações conduziu a 198 iterações por execução para cada método. O tempo médio de execução dos métodos foi de 0,81 segundos. Não houve diferença significativa do tempo consumido pelo FA e pelo NhFA.

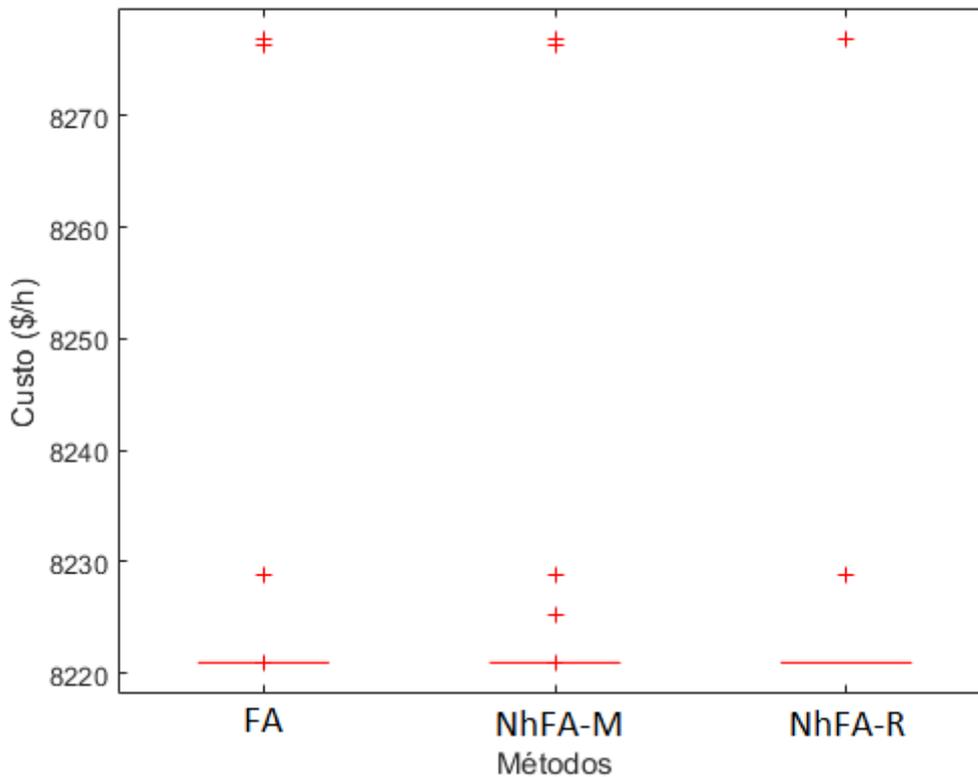
Na Tabela 12 são apresentadas a melhor, a pior, a média e o desvio padrão do custo das soluções encontradas nas 100 execuções. Além disso, na Tabela 46 são apresentadas as soluções encontradas por cada método, que conduziram ao menor custo.

O NhFA-M foi o método que encontrou a solução de menor custo, embora o FA e o NhFA-R tenham encontrado custos bem próximos. No entanto, o NhFA-R foi o método com melhor solução média e menor desvio padrão, o que sugere que este método apresenta a melhor solução esperada para uma execução arbitrária.

Na Figura 14 são apresentados os diagramas de caixa dos custos obtidos nas 100 execuções, para cada um dos métodos correspondentes. Como muitas das soluções encontradas apresentaram custos bem próximos à média, o diagrama de caixa não mostrou uma informação muito relevante da dispersão dos custos. Apesar disso, ainda pôde-se identificar que as soluções com custos mais elevados (8.276,85 \$/h) se tratavam de *outliers*. Em adição, o NhFA-R foi o método com menor ocorrência de *outliers*, o que mostra que este método apresenta a melhor solução esperada para uma execução arbitrária.

A convergência dos métodos, nas execuções que obtiveram melhor custo, é apresentada na Figura 15. O NhFA-M convergiu à solução final mais rapidamente, seguido pelo FA, e finalmente pelo NhFA-R. Embora o FA tenha convergido um pouco antes que o NhFA-R, vale notar que o NhFA-R, a partir das 20 iterações (aproximadamente), mostrou maior velocidade de convergência em relação ao FA.

Figura 14: Diagrama de caixa de custos - sistema de 3 unidades



Fonte: Elaborado pelo autor

#### 6.4.2 SISTEMA DE 6 UNIDADES

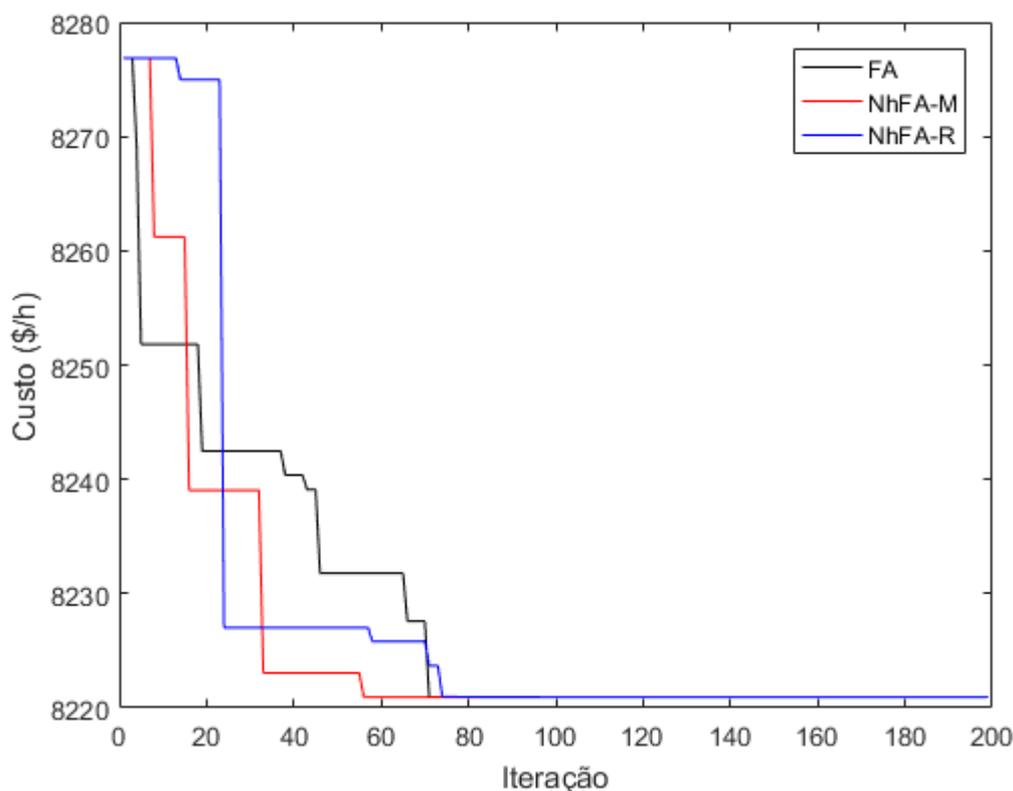
Tabela 13: Resultados das execuções - sistema 6 unidades

Método	Melhor solução (\$/h)	Média (\$/h)	Pior Solução (\$/h)	Desvio Padrão (\$/h)
FA	15.442,56	15.444,63	15.455,91	2,69
NhFA-M	15.442,56	15.443,58	15.455,57	1,62
NhFA-R	15.442,58	15.443,39	15.446,59	0,87

Fonte: Elaborado pelo autor

Neste sistema, a função custo é quadrática. Além disso, são considerados, além dos limites de operação, os limites de rampa, zonas proibidas e perdas nas linhas de transmissão. A potência demandada é de 1263MW. Em relação às perdas, a matriz  $B$ , o vetor  $B_0$  e o coeficiente  $B_{00}$  são apresentados nas Equações (A.1), (A.2) e (A.3). Os dados referentes a este sistema se encontram na Tabela 33, no apêndice A. Além disso, as

Figura 15: Gráfico de convergência - sistema de 3 unidades



Fonte: Elaborado pelo autor

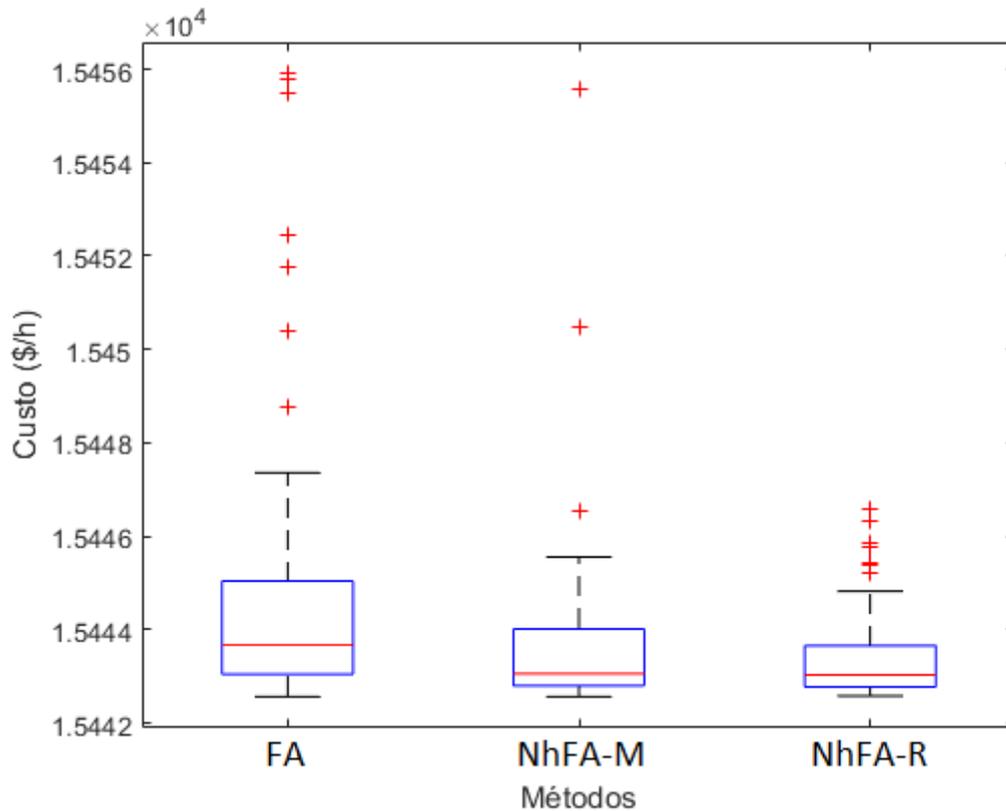
zonas proibidas de cada unidade geradora são apresentadas na Tabela 34. Este sistema foi retirado do trabalho de Aragón, Esquivel e Coello (2015).

Como neste problema são consideradas perdas nas linhas de transmissão, a rotina de reparo para o balanço de potência não foi aplicável. Então, foi utilizado o método da penalização, e a constante de penalização  $\phi$  foi definida como 50. Adicionalmente, foi estipulado um limite de 20.000 avaliações da função objetivo como critério de parada dos métodos. Com este limite de avaliações, o número de iterações correspondente foi de 798 iterações. O tempo médio de execução por execução do FA foi de 3,47 segundos. Já, o NhFA-M e o NhFA-R apresentaram tempo médio de 3,53 e 3,60 segundos, respectivamente.

Pela Tabela 13, verifica-se que o FA encontrou a melhor solução, seguido pelo NhFA-M. No entanto, o FA e o NhFA-M também encontraram as piores soluções. Deste aspecto o NhFA-R se mostrou melhor, além de também ser o método que apresentou a média de custos mais baixa e com menor desvio padrão, o que sugere que o NhFA-R apresenta a melhor solução esperada para uma execução qualquer.

Na Tabela 47 é apresentada a solução de menor custo encontrada por cada um dos métodos. O NhFA-M e o NhFA-R encontraram soluções com uma violação um pouco maior

Figura 16: Diagrama de caixa de custos - sistema de 6 unidades



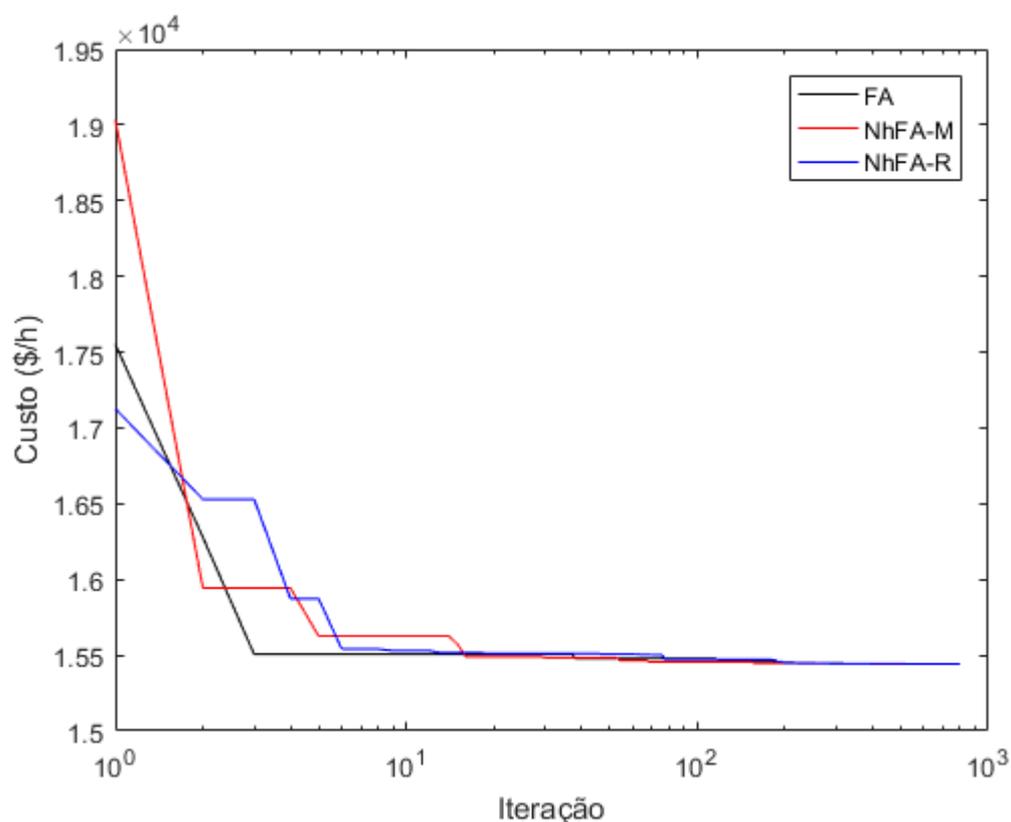
Fonte: Elaborado pelo autor

do balanço de potência, o que contribuiu para o aumento do custo de suas soluções, devido à penalização. Entretanto, pode-se considerar que o balanço de potência foi respeitado com uma precisão aceitável nos três métodos.

De acordo com o diagrama de caixa dos custos encontrados nas 100 execuções, na Figura 16, pôde-se verificar que o NhFA-R apresentou um agrupamento mais denso de soluções de menor custo em relação aos outros métodos. Portanto, o NhFA-R tem a tendência a encontrar uma melhor solução para uma execução arbitrária. Além disso, os *outliers* que ocorreram no NhFA-R não foram tão distantes do conjunto de custos como os que ocorreram no NhFA-M e no FA. Esta observação reforça a afirmação de que o NhFA-R tende a apresentar melhores soluções.

A Figura 17 apresenta o gráfico de convergência das execuções que conduziram à solução de menor custo. O gráfico foi desenhado em escala logarítmica para melhor visualização. A escala normal não permitiu uma visualização muito clara devido à convergência muito rápida dos três métodos. O FA obteve uma convergência mais rápida neste caso.

Figura 17: Gráfico de convergência - sistema de 6 unidades



Fonte: Elaborado pelo autor

Tabela 14: Resultados das execuções - sistema 10 unidades

Método	Melhor solução (\$/h)	Média (\$/h)	Pior Solução (\$/h)	Desvio Padrão (\$/h)
FA	623,94	624,06	624,21	0,05
NhFA-M	623,95	624,03	624,16	0,04
NhFA-R	623,95	624,03	624,11	0,03

Fonte: Elaborado pelo autor

### 6.4.3 SISTEMA DE 10 UNIDADES

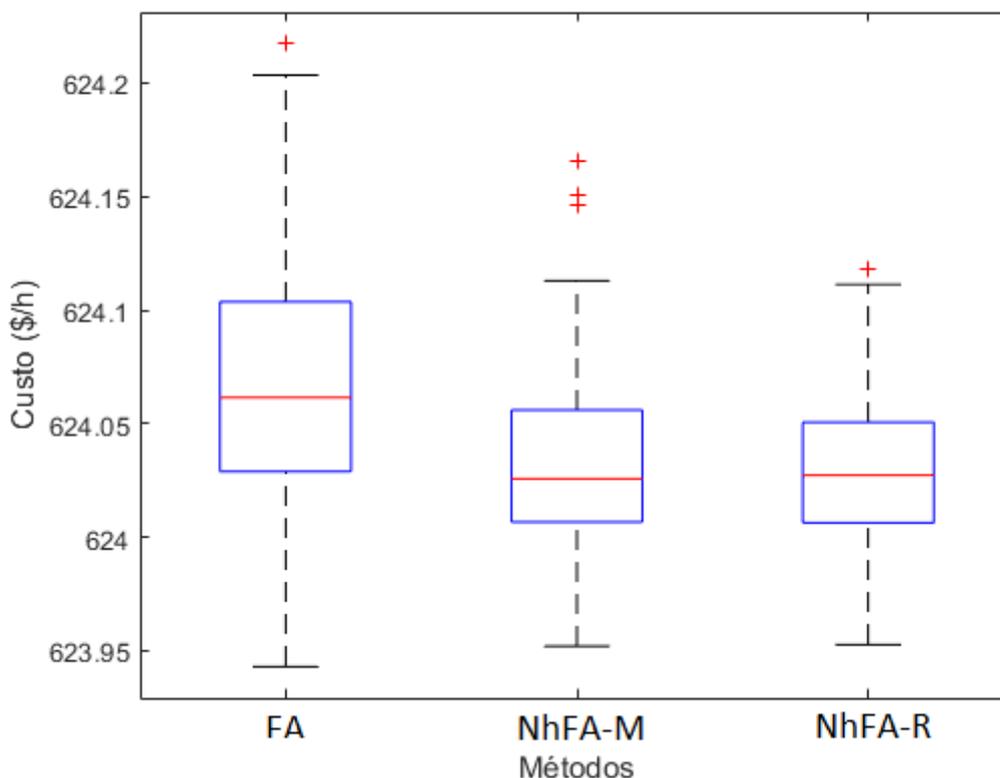
Neste sistema é considerada a presença de múltiplos combustíveis e também do efeito de ponto de válvula na função custo. Além disso, são consideradas as restrições de limites de operação e de balanço de potência. A potência demandada neste sistema é de 2700MW, e as perdas nas linhas de transmissão são desconsideradas. No trabalho de Lin e Viviani (1984) é apresentado este sistema, considerando a função custo quadrática para cada combustível. No entanto, Chiang (2005) apresenta uma adaptação deste sistema,

onde a função para cada combustível considera o efeito de ponto de válvula. Para este Trabalho, será considerado o sistema com efeito de ponto de válvula.

Os dados relacionados a este sistema se encontram na Tabela 35, onde são considerados três tipos de combustíveis para cada unidade geradora (exceto para as unidades 1 e 9). Como existem três opções de combustíveis, os coeficientes  $a_i$ ,  $b_i$ ,  $c_i$ ,  $e_i$  e  $f_i$  devem ser definidos para cada uma das opções. Além disso, cada opção de combustível é vinculada a um determinado intervalo de operação. Desta forma, na Tabela 35 são apresentados os coeficientes de custo para cada unidade geradora, em cada respectivo limite de operação.

Para a solução do PDE neste sistema, foi estipulado um limite de 15.000 avaliações da função objetivo. Além disso, como neste problema não são consideradas perdas nas linhas de transmissão, para satisfazer o balanço de potência, foi utilizada a rotina de reparo de soluções não factíveis. O limite de avaliações estipulado conduziu a um número de 598 iterações. O tempo médio de execução do FA e NhFA-M foi de 2,76 segundos. Curiosamente, o NhFA-R apresentou um tempo médio um pouco menor, de 2,69 segundos.

Figura 18: Diagrama de caixa de custos - sistema de 10 unidades

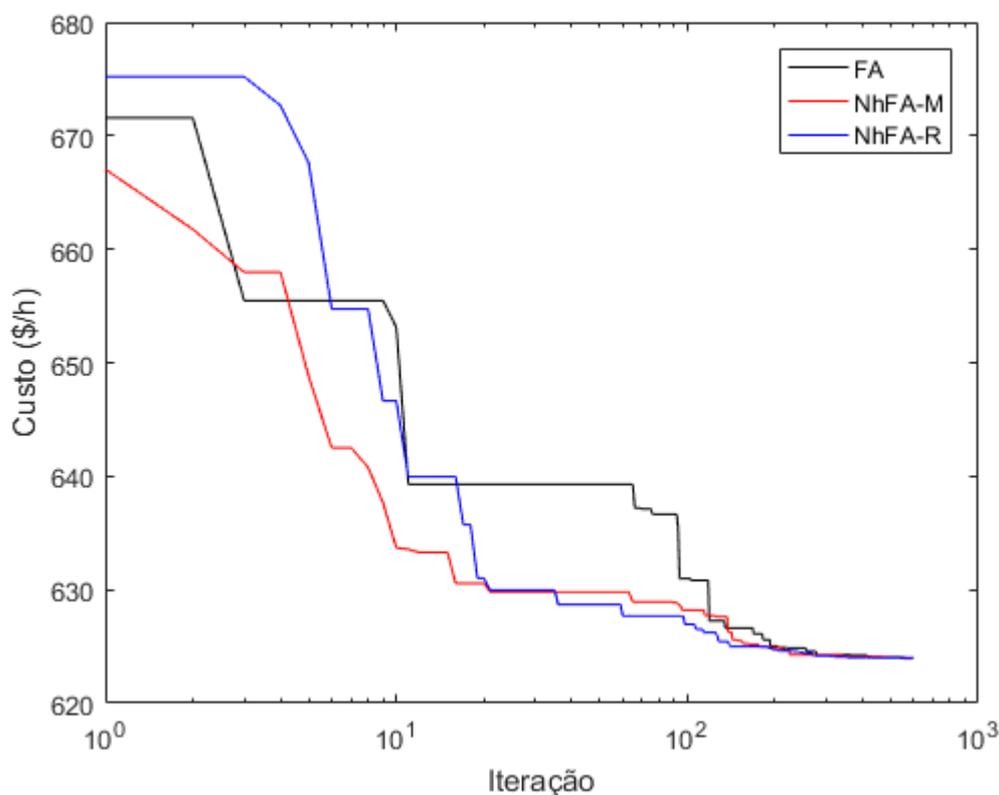


Fonte: Elaborado pelo autor

Pela Tabela 14 é possível verificar que o FA foi o método que encontrou a melhor

solução para este problema, e também a pior. Em contrapartida, o NhFA-R, apesar de não ter encontrado uma solução de custo tão baixo quanto as encontradas pelo FA e NhFA-M, obteve a melhor média de soluções. Além disso, o menor desvio padrão de custos apresentado pelo NhFA-R sugere que existe uma concentração mais densa de custos em torno da média. A melhor solução encontrada por cada método é contemplada na Tabela 48.

Figura 19: Gráfico de convergência - sistema de 10 unidades



Fonte: Elaborado pelo autor

De acordo com o diagrama de caixa da Figura 18, o NhFA-M e o NhFA-R encontraram soluções com uma faixa de custos mais baixa que o FA. Ainda, cerca de 20% das soluções do FA mostraram custos mais elevados do que o pior custo encontrado pelo NhFA-R. Apesar dos diagramas de caixa dos custos do NhFA-R e do NhFA-M terem ficado bem parecidos, ainda pode-se concluir que o NhFA-R tende a apresentar uma melhor solução esperada. Isso porque o desvio padrão e a ocorrência de *outliers* no NhFA-R foram menores do que no NhFA-M.

A Figura 19 mostra a convergência dos métodos em função do número de iterações (em escala logarítmica). Pode-se verificar que o NhFA-M e o NhFA-R apresentaram uma maior velocidade de convergência em relação ao FA. Ainda, o NhFA-M mostrou maior

velocidade de convergência em relação ao NhFA-R apenas nas primeiras iterações. Levando-se em conta a maior parte da execução pode-se notar que a convergência apresentada pelo NhFA-R for mais rápida.

#### 6.4.4 SISTEMA DE 13 UNIDADES

Tabela 15: Resultados das execuções - sistema 13 unidades

Método	Melhor solução (\$/h)	Média (\$/h)	Pior Solução (\$/h)	Desvio Padrão (\$/h)
FA	18.040,00	18.198,83	18.353,74	74,95
NhFA-M	18.028,16	18.161,86	18.370,60	74,88
NhFA-R	18.014,29	18.133,83	18.317,72	70,79

Fonte: Elaborado pelo autor

Para este sistema, o efeito de ponto de válvula é considerado na função custo. A única restrição considerada são os limites mínimo e máximo de operação. A potência demandada é de 1800MW e, as perdas de transmissão são desconsideradas. Os dados deste sistema foram retirados de Aragón, Esquivel e Coello (2015), e são apresentados na Tabela 36.

Para a solução deste problema, foi definido um limite de 30.000 avaliações da função objetivo. Este limite de avaliações conduziu a 1198 iterações. O tempo médio de execução neste caso foi de 5,01 segundos para o FA e NhFA-R. O NhFA-M, por sua vez, apresentou um tempo um pouco mais elevado, de 5,85 segundos.

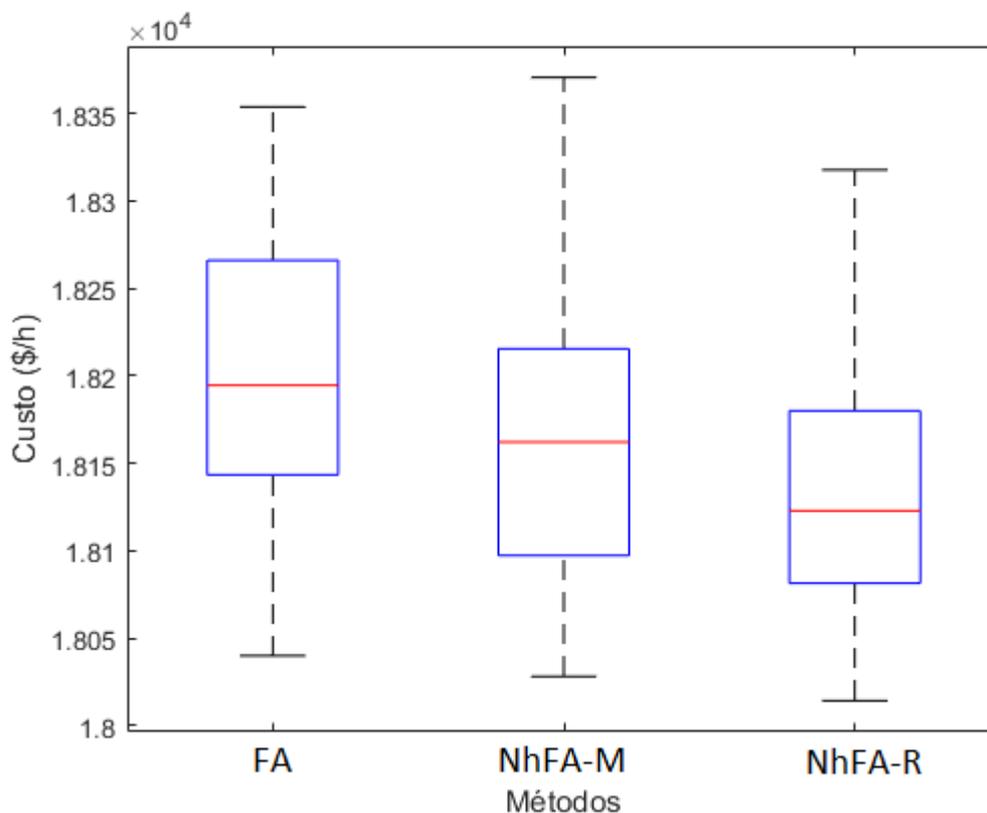
De acordo com a Tabela 15, verifica-se que o NhFA-R encontrou a solução de menor custo para este sistema, seguido pelo NhFA-M. O NhFA-M por sua vez, encontrou a solução de maior custo. Adicionalmente, o NhFA-R também obteve a melhor média de custos com o menor desvio padrão.

A melhor solução encontrada por cada um dos métodos é mostrada na Tabela 49.

A Figura 20 mostra o diagrama de caixa dos custos, relativo a cada um dos métodos. É possível visualizar que o NhFA-R obteve soluções com a faixa de custos menores, em relação ao NhFA-M e ao FA. Com isso, pode-se concluir que o NhFA-R apresenta melhores soluções esperadas, além de, no caso deste sistema, ter encontrado a solução de menor custo entre os três métodos.

Na Figura 21 é apresentado o gráfico de convergência dos métodos. Nota-se que o FA convergiu mais rapidamente na maior parte da execução. No entanto, o NhFA-M e o NhFA-R convergiram a soluções melhores na parte final da execução.

Figura 20: Diagrama de caixa de custos - sistema de 13 unidades



Fonte: Elaborado pelo autor

Tabela 16: Resultados das execuções

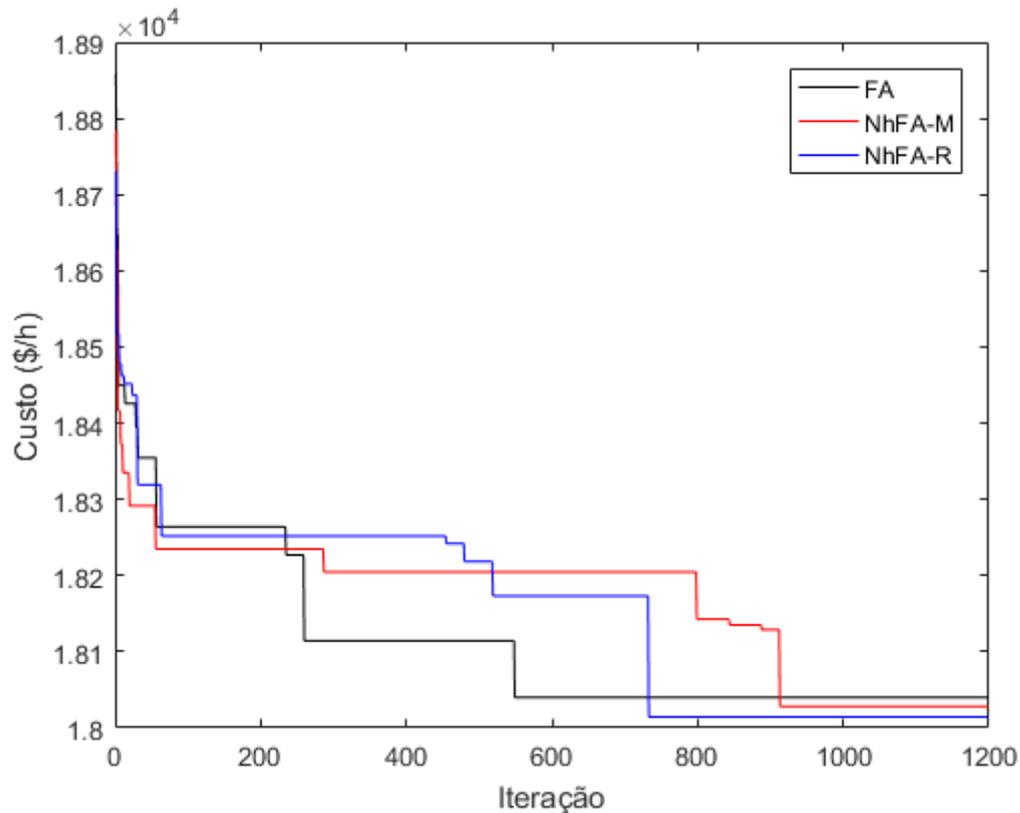
Método	Melhor solução (\$/h)	Média (\$/h)	Pior Solução (\$/h)	Desvio Padrão (\$/h)
FA	32.717,10	32.779,82	32.899,38	39,71
NhFA-M	32.703,75	32.759,59	32.884,55	39,15
NhFA-R	32.701,25	32.738,94	32.877,24	34,34

Fonte: Elaborado pelo autor

#### 6.4.5 SISTEMA DE 15 UNIDADES

Neste sistema, a função custo é quadrática. Como restrições são considerados os limites mínimo e máximo de cada unidade geradora, os limites de rampa e as zonas proibidas. Além disso, são consideradas as perdas nas linhas de transmissão, e a potência demandada é de 2630MW. Este problema é descrito por Gaing (2003). No entanto, como existe uma inconsistência nos dados da matriz de perdas  $B$  apresentada por este autor, foram utilizados como base os dados apresentados por Aragón, Esquivel e Coello (2015).

Figura 21: Gráfico de convergência - sistema de 13 unidades



Fonte: Elaborado pelo autor

Os dados deste problema são apresentados na Tabela 37, do apêndice A. Além disso, os dados referentes às zonas proibidas são relacionados na Tabela 38.

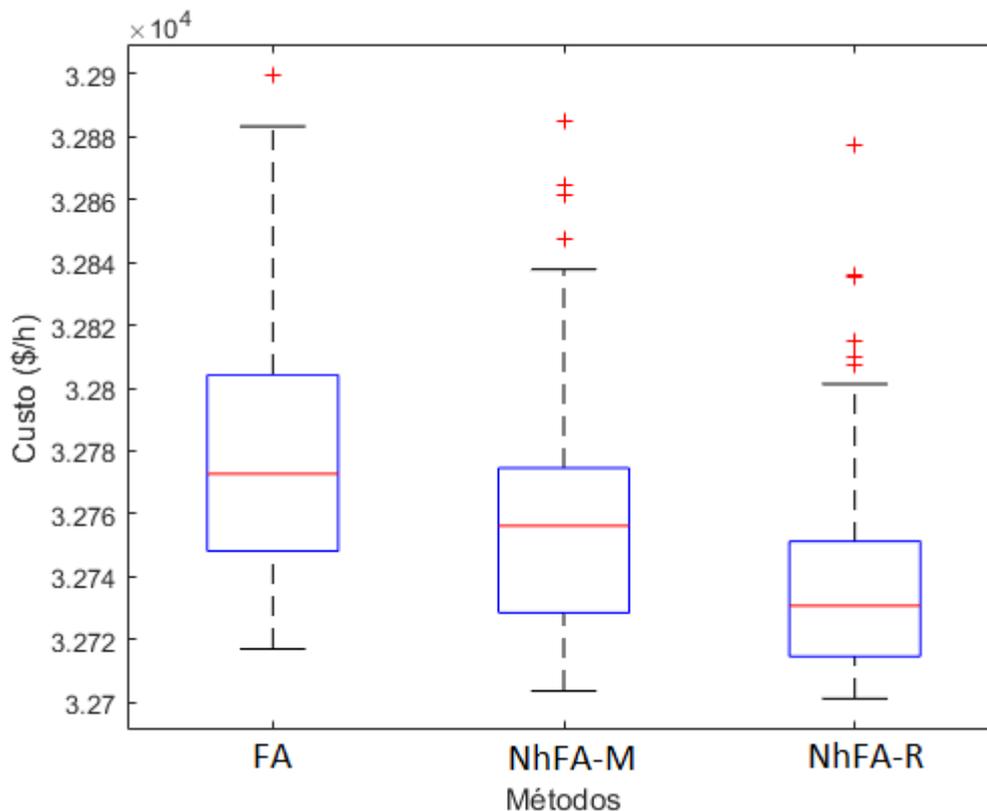
A existência de zonas proibidas forma um espaço de busca não convexo que constitui uma grande dificuldade para métodos exatos (SUN et al., 2014). Tratando-se deste problema em particular, a existência das zonas proibidas mencionadas na Tabela 38 forma um espaço de busca não convexo constituído de 192 subespaços convexos (YANG; HOSSEINI; GANDOMI, 2012).

A matriz de perdas  $B$ , o vetor de perdas  $B_0$  e o coeficiente de perdas  $B_{00}$  são definidos de acordo com as Equações (A.4), (A.5) e (A.6), respectivamente.

Para a solução deste problema foi definido um limite de 50.000 avaliações da função objetivo. Além disso, como neste problema são consideradas as perdas nas linhas de transmissão, foi utilizado o método de penalização para tratar esta restrição, e a constante de penalização  $\phi$  foi definida como 50. O número de iterações neste caso foi de 1998. O tempo médio de execução do FA foi de 9,19 segundos. Já no caso do NhFA-M e NhFA-R, os tempos foram de 9,73 e 9,64 segundos, respectivamente.

Na Tabela 16 são apresentados o melhor, o pior, a média e o desvio padrão

Figura 22: Diagrama de caixa de custos - sistema de 15 unidades



Fonte: Elaborado pelo autor

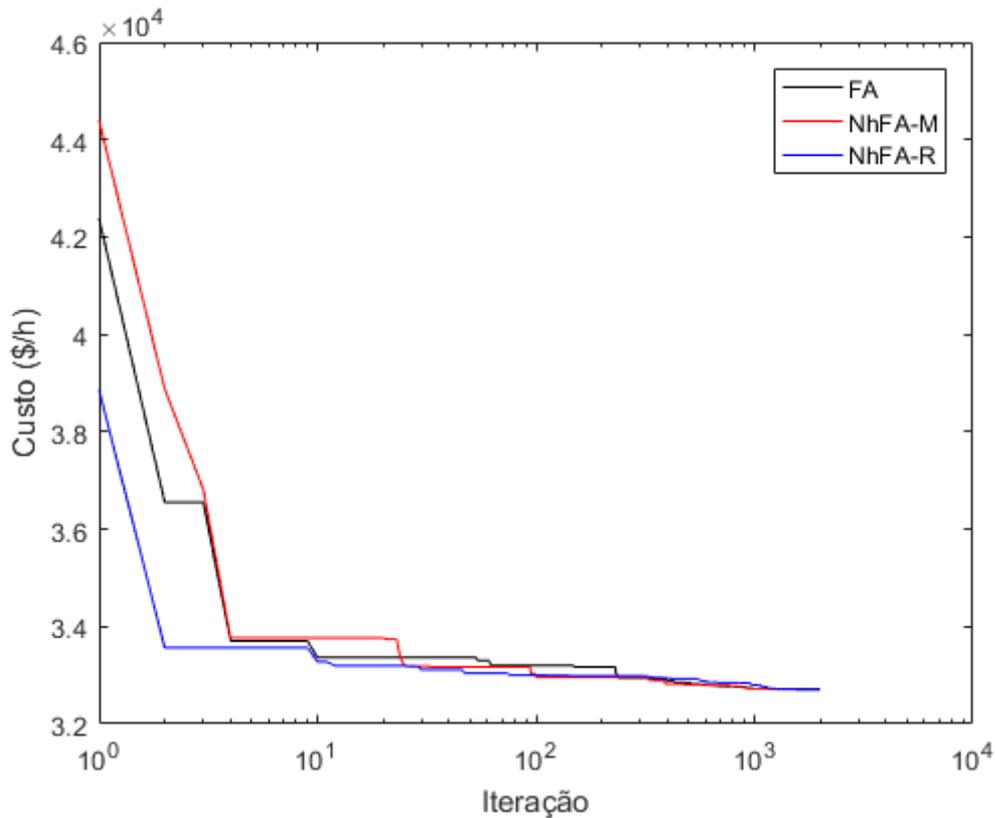
dos custos das soluções encontradas por cada método. Todos os métodos executaram exatamente 623 iterações. O tempo médio de execução do FA foi de 30,05 segundos, enquanto o NhFA mostrou uma pequena diferença apresentando um tempo de médio de execução de 32,68 segundos.

Pela Tabela 16, verifica-se que a solução de menor custo foi encontrada pelo NhFA-R, e a de pior custo foi encontrada pelo FA. Em adição, o NhFA-R encontrou soluções com a melhor média de custos, e também com desvio padrão menor em relação ao NhFA-M e ao FA. Na Tabela 50 é apresentada a melhor solução encontrada por cada um dos métodos.

O NhFA-M encontrou a solução com menor violação do balanço de potência. Por outro lado, a solução encontrada pelo NhFA-R apresentou a maior violação no balanço de potência, o que contribuiu para o aumento do custo desta solução. Apesar disso, o custo desta solução ainda foi menor do que o das soluções encontradas pelo NhFA-M e pelo FA.

Pelo diagrama de caixa dos custos na Figura 22, nota-se que os custos das soluções encontradas pelo NhFA-R foram menores. Cerca de 75% das soluções encontradas pelo NhFA-R tiveram custo inferior à metade das soluções do NhFA-M e do FA. Assim, pode-se

Figura 23: Gráfico de convergência - sistema de 15 unidades



Fonte: Elaborado pelo autor

verificar que o NhFA-R apresenta uma melhor solução esperada.

A partir do gráfico de convergência dos métodos (na Figura 23), pode-se verificar que o NhFA-R apresentou maior velocidade de convergência durante a maior parte da execução, além de ter convergido à melhor solução. Quanto ao FA e ao NhFA-M não houve uma diferença significativa na velocidade de convergência.

#### 6.4.6 SISTEMA DE 18 UNIDADES

Tabela 17: Resultados das execuções - sistema de 18 unidades

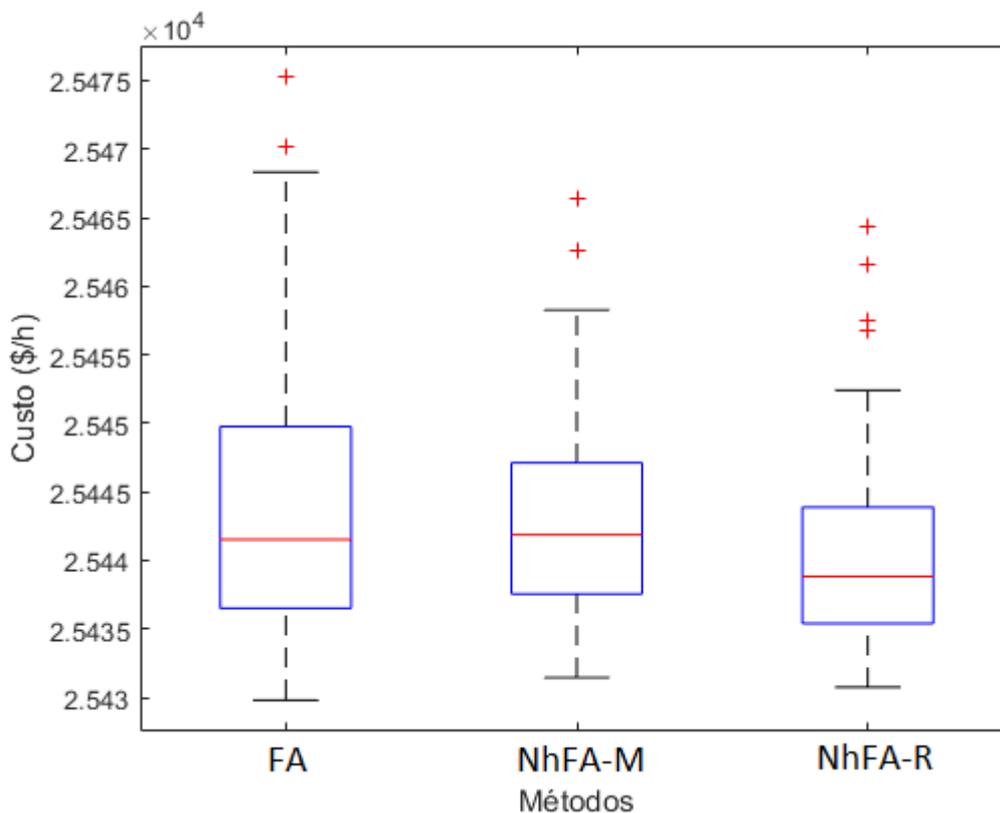
Método	Melhor solução (\$/h)	Média (\$/h)	Pior Solução (\$/h)	Desvio Padrão (\$/h)
FA	25.429,80	25.444,06	25.475,27	9,78
NhFA-M	25.431,45	25.442,63	25.466,45	6,83
NhFA-R	25.430,75	25.440,07	25.464,34	6,66

Fonte: Elaborado pelo autor

Neste sistema, a função custo é quadrática e a única restrição considerada são os limites mínimos e máximos das geradoras. A potência demandada é de 365MW e as perdas nas linhas de transmissão são desconsideradas. Na Tabela 39 são apresentados os dados referentes a este sistema. Os dados deste sistema foram retirados do Trabalho de Aragón, Esquivel e Coello (2015).

Para a solução deste problema, definiu-se um limite de 40.000 avaliações da função objetivo. Adicionalmente, como neste caso não são consideradas as perdas nas linhas de transmissão, foi utilizada a rotina de reparo de solução para atender o balanço de potência. O número de iterações neste caso foi 1598. O tempo médio de execução foi de 7,39 segundos no caso do FA. O NhFA-M e NhFA-R, apresentaram tempo médio de 7,82 e 7,61 segundos, respectivamente.

Figura 24: Diagrama de caixa de custos - sistema de 18 unidades

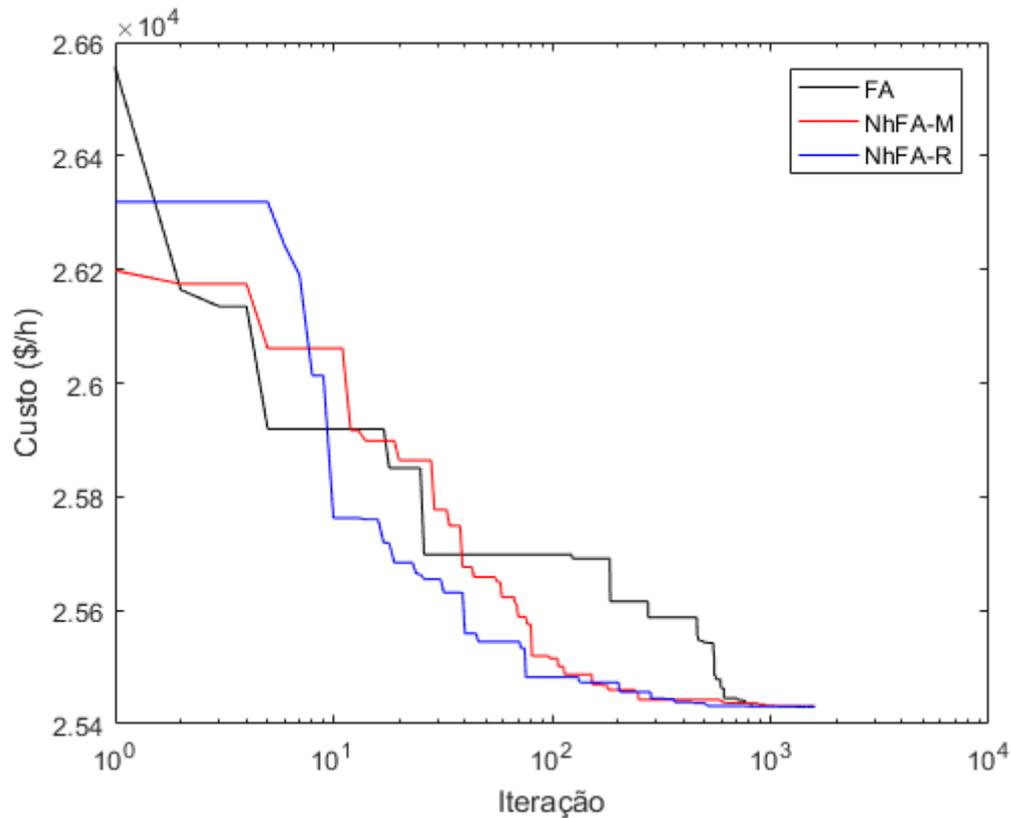


Fonte: Elaborado pelo autor

Pela Tabela 17, verifica-se que o FA encontrou a solução de menor custo, e também a de maior custo. Por outro lado, o NhFA-R obteve soluções com a melhor média de custos, apresentando também o menor desvio padrão. Na Tabela 51 é apresentada a solução de menor custo encontrada por cada método.

No diagrama de caixa dos custos, apresentado na Figura 24, é possível verificar

Figura 25: Gráfico de convergência - sistema de 18 unidades



Fonte: Elaborado pelo autor

que os custos das soluções encontradas pelo NhFA-R foram menores. Ainda, as piores soluções do NhFA-R se caracterizam como *outliers*. Os custos das soluções encontradas pelo FA foram mais elevados, apesar da ocorrência de um caso muito bom, onde a melhor solução foi encontrada. O NhFA-M, tratando-se do primeiro e do segundo quartil, foi bastante similar ao FA. Já, tratando-se do terceiro quartil e do pior custo (excetuando-se os *outliers*), o NhFA-M mostrou um comportamento melhor. Adicionalmente, a solução do NhFA-M com pior custo se trata de um *outlier*, e está abaixo do limite superior das soluções do FA.

O gráfico de convergência dos métodos para a execução que conduziu ao melhor custo é apresentado na Figura 25. É possível verificar que, na maior parte da busca o NhFA-R apresentou a maior velocidade de convergência, especialmente a partir das 10 iterações. O NhFA-M por sua vez, mostrou maior velocidade de convergência em relação ao FA a partir das 50 iterações.

Tabela 18: Resultados das execuções - sistema de 20 unidades

Método	Melhor solução (\$/h)	Média (\$/h)	Pior Solução (\$/h)	Desvio Padrão (\$/h)
FA	62.466,51	62.489,87	62.531,49	11,71
NhFA-M	62.464,97	62.481,44	62.508,04	9,74
NhFA-R	62.464,12	62.480,03	62.530,98	9,96

Fonte: Elaborado pelo autor

### 6.4.7 SISTEMA DE 20 UNIDADES

Neste sistema, a função custo é quadrática e são consideradas apenas as restrições de limite mínimo e máximo de operação das unidades geradoras. A potência demandada é de 2500MW, e são consideradas também as perdas nas linhas de transmissão.

Este problema foi adaptado de Aragón, Esquivel e Coello (2015). Os dados deste sistema são apresentados na Tabela 40. Além disso, a matriz de perdas  $B$  é apresentada na equação (A.7). O vetor  $B_0$  e o coeficiente  $B_{00}$  das perdas são nulos.

Para a solução deste problema foi definido um limite de 50.000 avaliações da função objetivo. Além disso, como são consideradas as perdas nas linhas de transmissão, foi utilizado o método da penalização para atender a restrição de balanço de potência. A constante de penalização  $\phi$  foi definida como 100.

Neste caso, foram executadas 1998 iterações por execução. O tempo médio de execução do FA foi de 9,92 segundos. Já o NhFA-M e NhFA-R, apresentaram tempos um pouco mais elevados, de 10,64 e 11,10 segundos.

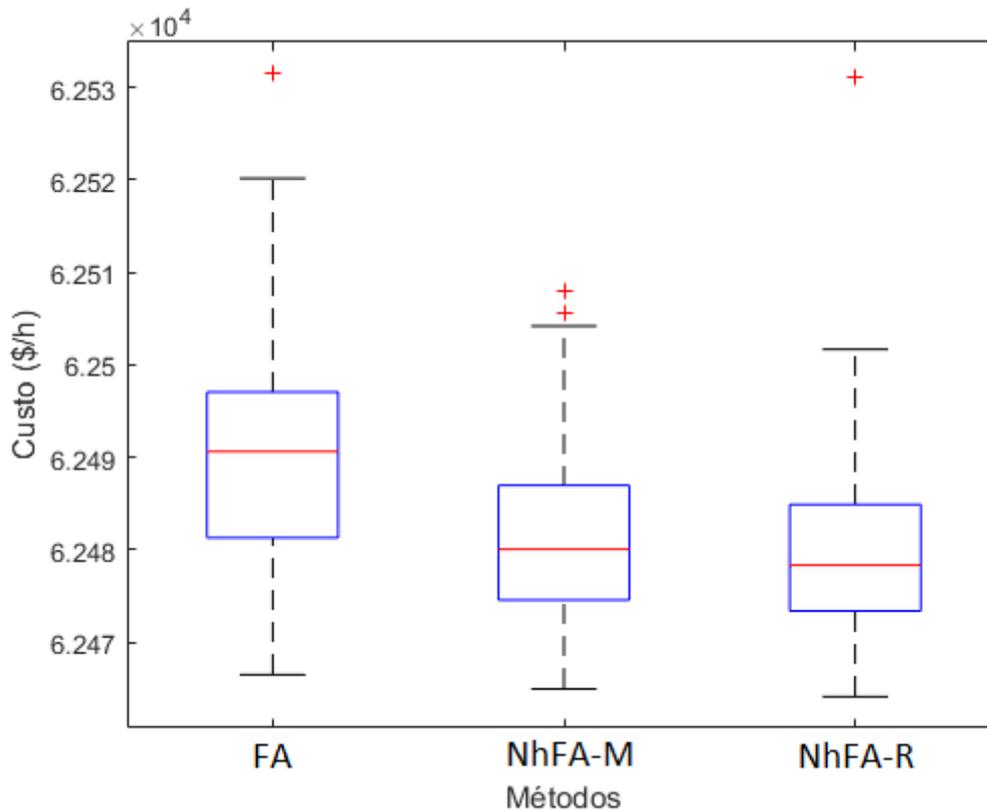
Os resultados obtidos são apresentados na Tabela 18. Neste problema, a solução de menor custo foi obtida pelo NhFA-R, e a de maior custo, foi obtida pelo FA. O NhFA-R encontrou soluções com a melhor média de custos. Entretanto, o NhFA-M foi o método com menor desvio padrão de custos das soluções.

É importante notar que, a diferença de desvio padrão do NhFA-R e do NhFA-M não foi muito grande. Ainda, esta diferença provavelmente se justifica com a diferença considerável dos soluções de maior custo encontradas pelo NhFA-R e pelo NhFA-M.

A solução de menor custo encontrada por cada método é apresentada na Tabela 52. O FA foi o método que encontrou a solução com menor violação do balanço de potência. No entanto, esta solução, apesar de ser menos penalizada, teve um custo um pouco mais elevado do que as encontradas pelo NhFA-M e NhFA-R. Ainda, apesar desta diferença, as soluções encontradas pelos três métodos respeitaram de forma aceitável a restrição de balanço de potência.

De acordo com o diagrama de caixa, na Figura 26, é possível verificar que a solução de custo mais elevado encontrada pelo NhFA-R foi um caso isolado das outras

Figura 26: Diagrama de caixa de custos - sistema de 20 unidades



Fonte: Elaborado pelo autor

execuções (um *outlier*). Excetuando-se os *outliers*, o NhFA-R apresentou o menor custo no intervalo superior. O NhFA-M teve uma dispersão de custos parecida com a apresentada pelo NhFA-R. No entanto, no NhFA-M e no NhFA-R, cerca de 75% dos custos encontrados foram menores do que a metade dos custos encontrados pelo FA.

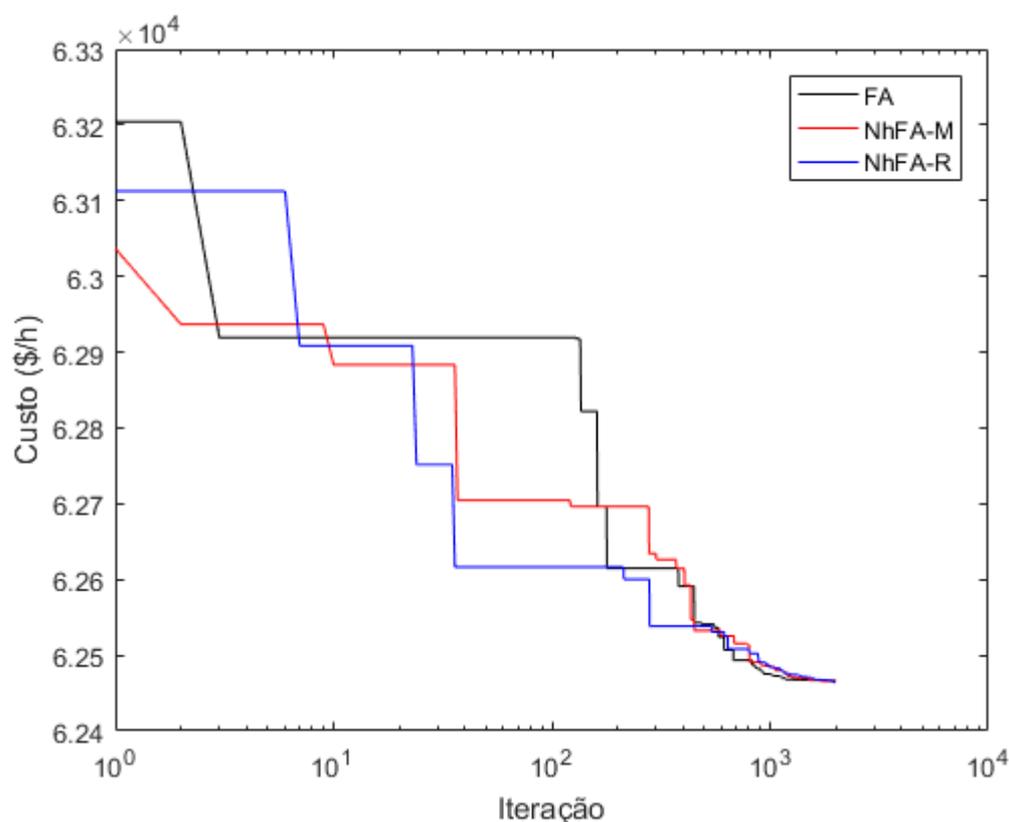
Pelo gráfico de convergência, na Figura 27, verifica-se que o NhFA-R convergiu com maior velocidade na parte inicial da busca. A partir de cerca de 500 iterações da busca, o FA mostrou maior velocidade de convergência. O NhFA-M não se destacou significativamente em questão de velocidade de convergência.

#### 6.4.8 SISTEMA DE 26 UNIDADES

Neste sistema, é considerada uma função custo cúbica e a restrição de limites mínimos e máximos de operação de cada unidade geradora. A potência demandada é de 2.400MW e as perdas nas linhas de transmissão são desconsideradas. Este problema é descrito por Moon et al. (2000). Os dados referentes a este sistema são apresentados na Tabela 41, no apêndice A.

Para a solução deste problema, foi definido um limite de 40.000 avaliações da

Figura 27: Gráfico de convergência - sistema de 20 unidades



Fonte: Elaborado pelo autor

Tabela 19: Resultados das execuções - sistema de 26 unidades

Método	Melhor solução (\$/h)	Média (\$/h)	Pior Solução (\$/h)	Desvio Padrão (\$/h)
FA	32.650,11	32.760,88	33.063,07	85,53
NhFA-M	32.644,33	32.780,93	33.234,53	93,13
NhFA-R	32.646,76	32.770,55	33.058,90	89,88

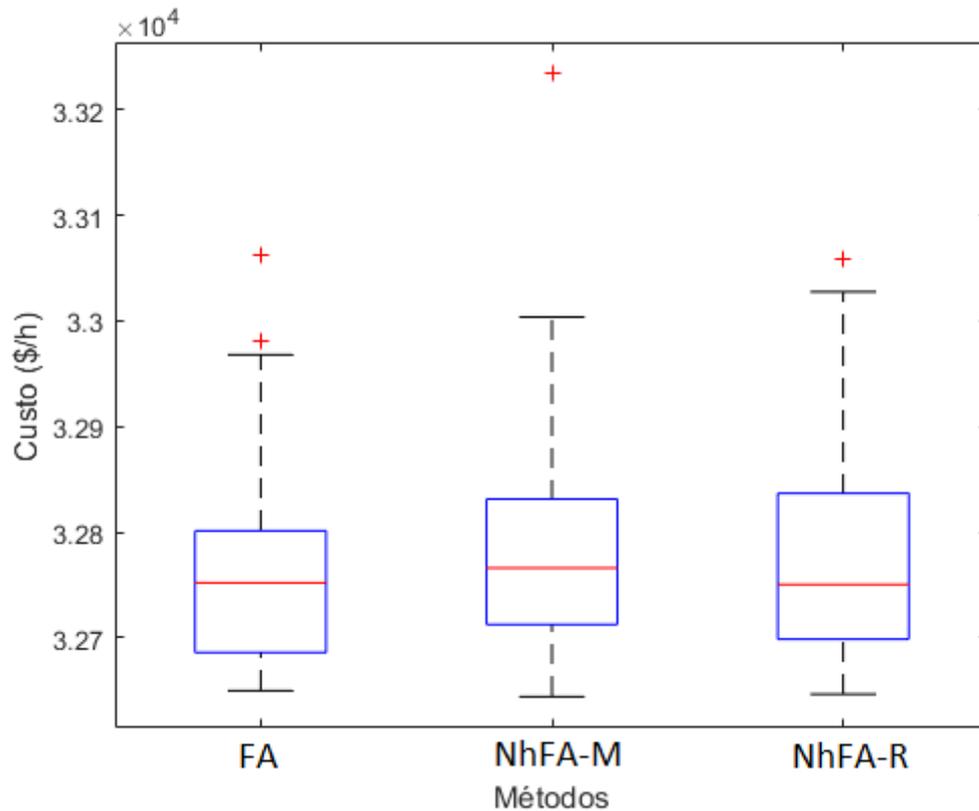
Fonte: Elaborado pelo autor

função objetivo. Como as perdas nas linhas de transmissão não são consideradas, então foi utilizada a rotina de reparo para soluções que não atendiam o balanço de potência.

Neste caso, foram realizadas 1598 iterações em cada execução. Os tempos médios de execução do FA, do NhFA-M e do NhFA-R, foram de 7,51 segundos, 7,77 segundos e 7,57 segundos.

Na Tabela 19, são apresentados os resultados das execuções. A solução de menor custo foi encontrada pelo NhFA-M, seguido pelo NhFA-R. A solução de maior custo foi encontrada pelo NhFA-M. Neste caso, o FA obteve soluções com a melhor média de custos

Figura 28: Diagrama de caixa de custos - sistema de 26 unidades



Fonte: Elaborado pelo autor

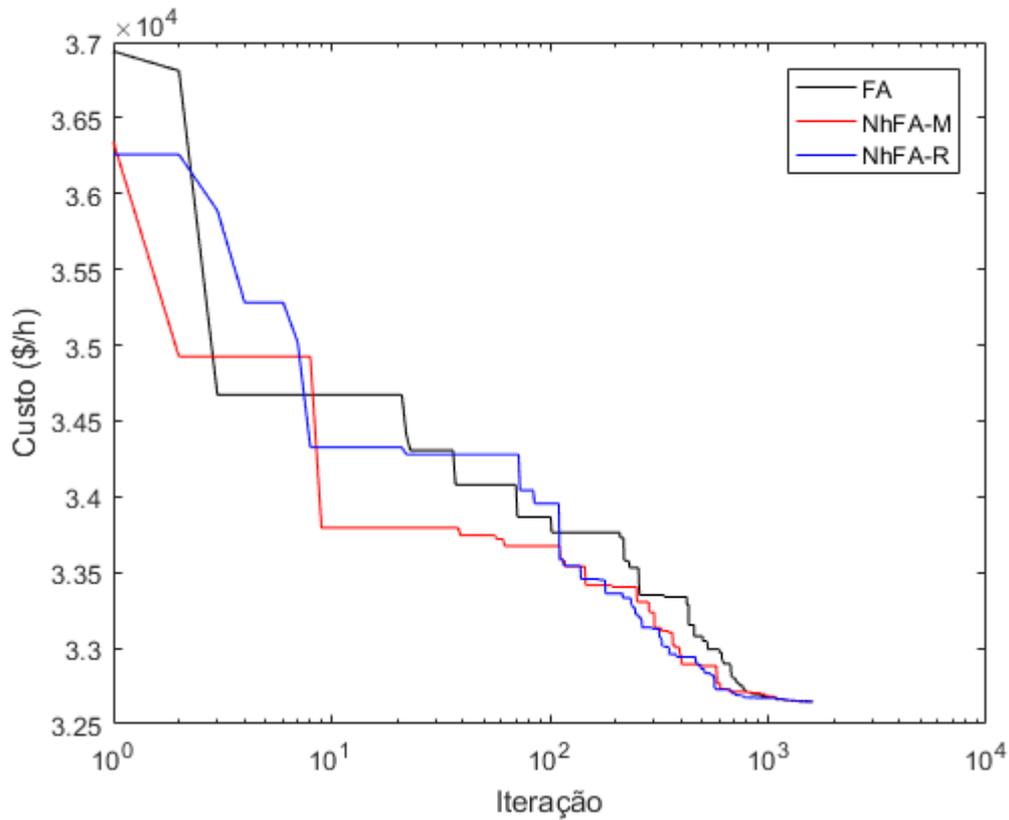
e menor desvio padrão. A solução de menor custo encontrada por cada método consta na Tabela 53.

Pelo diagrama de caixa dos custos, na Figura 28, verifica-se que o FA encontrou soluções com custos menores. A mediana dos custos dos três métodos não são muito diferentes, no entanto, o primeiro e o terceiro quartil dos custos do FA são consideravelmente menores em relação ao NhFA-M e ao NhFA-R. Ainda, pode-se verificar que a solução de custo mais elevado, no NhFA-M, trata-se de um *outlier* bastante distante dos custos das demais soluções.

Na Figura, 29 é apresentado o gráfico de convergência dos métodos neste problema. Pode-se verificar nitidamente, a partir das 100 iterações de busca, que o NhFA-R e o NhFA-M apresentaram maior velocidade de convergência em relação ao FA. No entanto, sobre o NhFA-R e o NhFA-M é mais difícil verificar a diferença de velocidade de convergência.

O gráfico da Figura 29 não permite uma visualização muito clara da diferença de velocidade de convergência entre o NhFA-M e o NhFA-R. Um dos motivos dessa dificuldade é a escala logarítmica utilizada no gráfico, que não mostra muitos detalhes do meio até o final da busca. O gráfico da Figura 30 está em escala normal. Em adição, neste gráfico

Figura 29: Gráfico de convergência - sistema de 26 unidades



Fonte: Elaborado pelo autor

as 100 primeiras iterações foram omitidas. Finalmente, pelo gráfico da Figura 30 pode-se notar que o NhFA-R mostrou maior velocidade de convergência durante a maior parte da busca.

#### 6.4.9 SISTEMA DE 38 UNIDADES

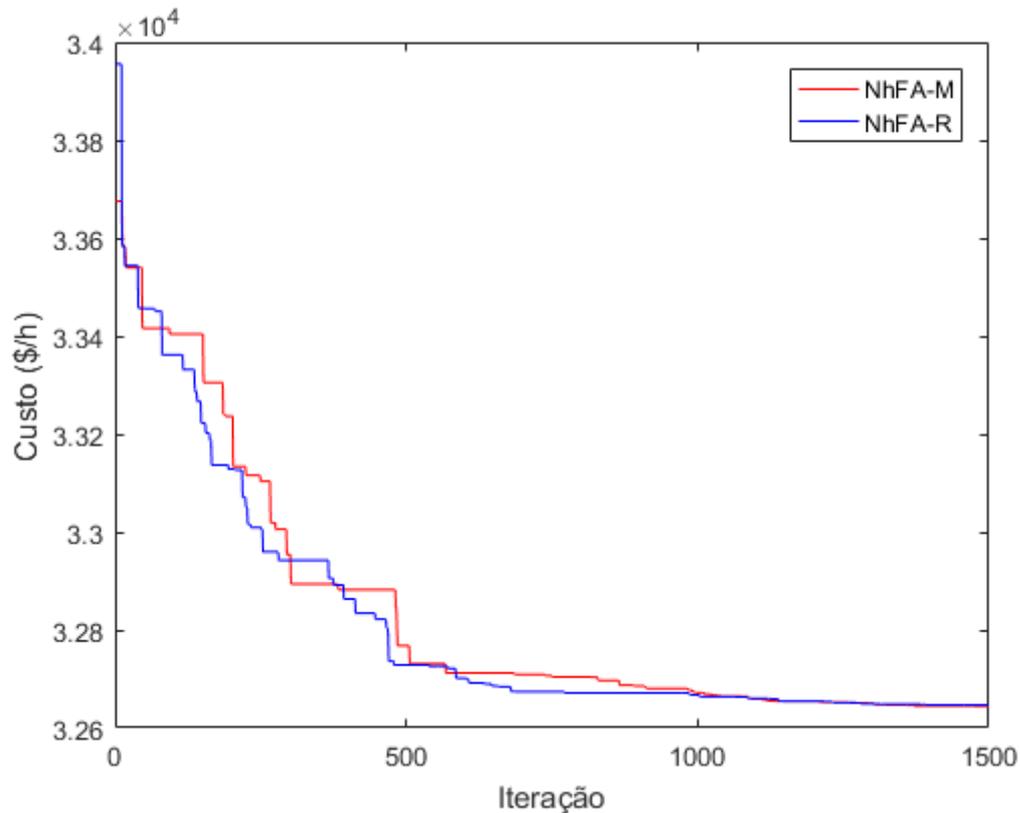
Tabela 20: Resultados das execuções - sistema de 38 unidades

Método	Melhor solução (\$/h)	Média (\$/h)	Pior Solução (\$/h)	Desvio Padrão (\$/h)
FA	9.416.957,84	9.428.703,55	9.441.181,94	5.549,79
NhFA-M	9.416.838,34	9.427.480,53	9.445.372,37	5.153,50
NhFA-R	9.416.017,99	9.425.300,13	9.439.078,12	4.295,66

Fonte: Elaborado pelo autor

Este é um sistema de dimensionalidade um pouco maior, com função de custo quadrática e restrição de limite mínimo e máximo de operação para cada unidade geradora.

Figura 30: Gráfico de convergência (NhFA-M x NhFA-R) - sistema de 26 unidades



Fonte: Elaborado pelo autor

A potência demandada neste problema é de 6.000MW, e as perdas na linhas de transmissão não são consideradas. Os dados de entrada deste problema foram retirados de Yang, Yang e Huang (1997), e são apresentados na Tabela 42, no apêndice A.

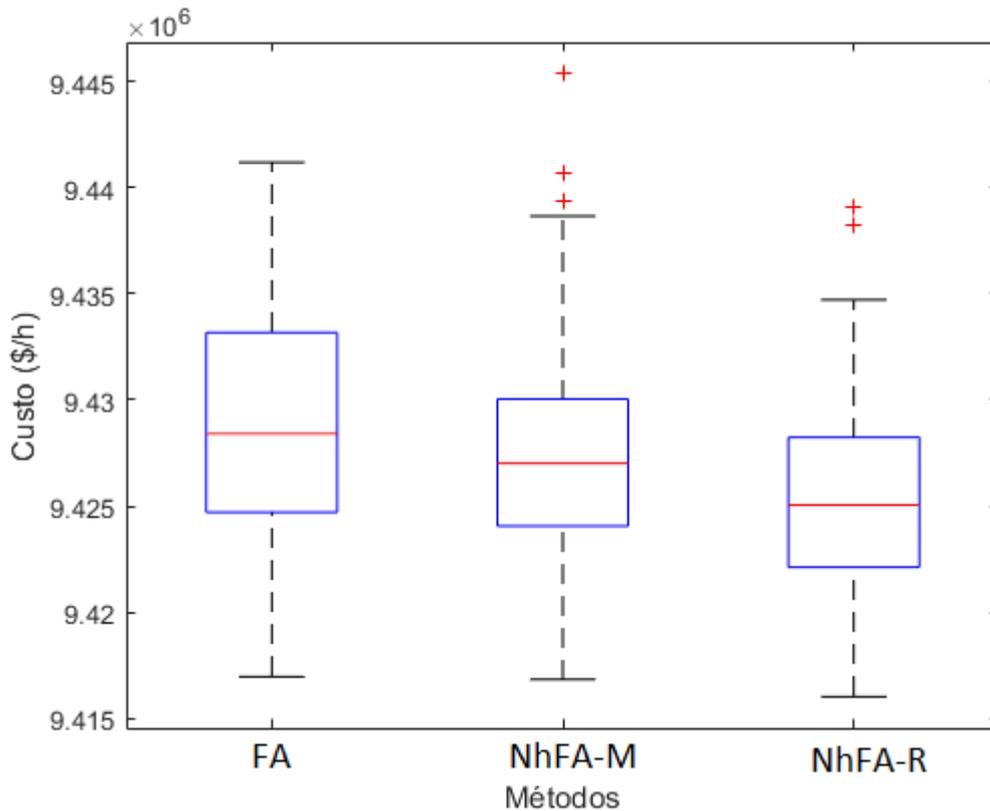
Para a solução deste problema, foi definido um limite de 50.000 avaliações da função objetivo. Além disso, como as perdas nas linhas de transmissão não foram consideradas, foi utilizada a rotina de reparo para soluções que apresentavam violação do balanço de potência.

Neste problema, cada método realizou 1998 iterações por execução. O tempo de execução do FA e do NhFA-R, foi de 9,31 segundos e 9,70 segundos.

Na Tabela 20, são apresentados os resultados obtidos para este problema. O NhFA-M foi o método que encontrou a solução de custo mais elevado. Além disso, o FA obteve soluções com a média de custos mais alta e o desvio padrão mais elevado. O NhFA-R por sua vez, além de encontrar a solução de menor custo, obteve soluções com a menor média de custos e o desvio padrão mais baixo. A solução de menor custo encontrada por cada método é apresentada na Tabela 54.

Com os diagramas de caixa da Figura 31, pode-se verificar que as soluções

Figura 31: Diagrama de caixa de custos - sistema de 38 unidades



Fonte: Elaborado pelo autor

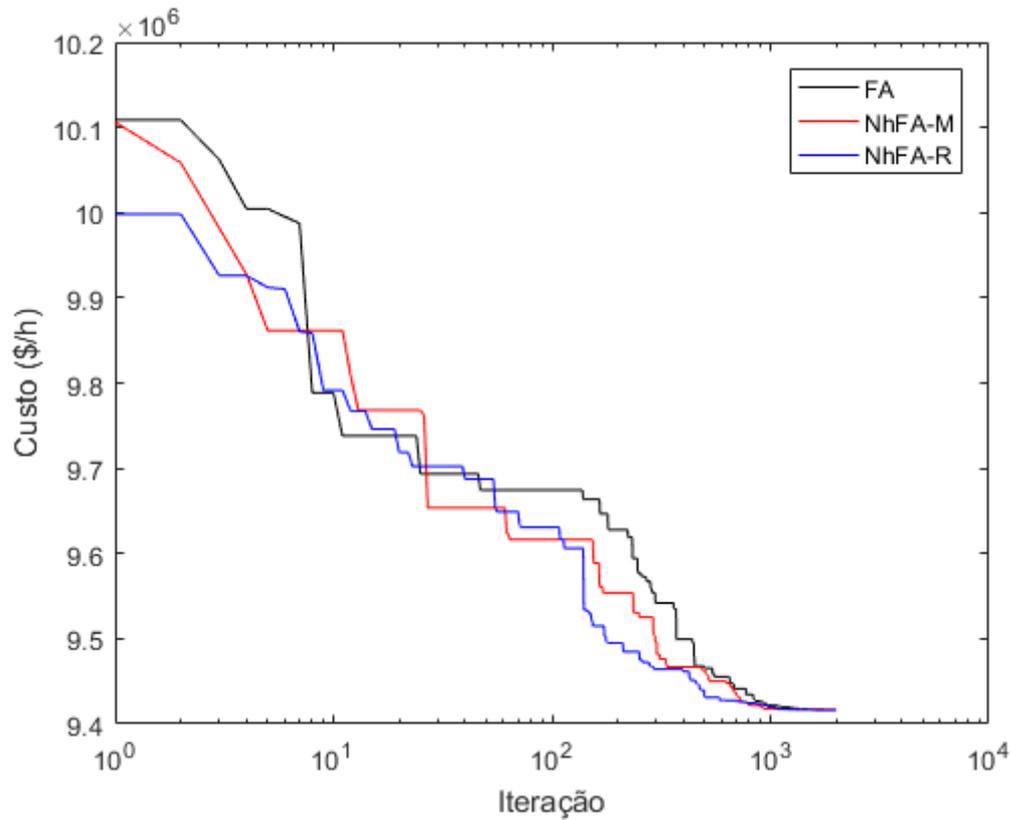
encontradas pelo NhFA-R apresentam faixas de custo inferiores em relação ao NhFA-M e ao FA. Isto fica claro observando-se que, o primeiro, o segundo e o terceiro quartil dos custos do NhFA-R têm valores consideravelmente menores. Já o NhFA-M, apresenta uma diferença significativa em relação ao FA apenas no terceiro quartil. Além disso, também é nítida a diferença entre os métodos tratando-se do extremo superior, onde o NhFA-R e o NhFA-M apresentam valores menores que o FA. Adicionalmente, a solução de maior custo encontrada pelo NhFA-M é explicada como um *outlier*.

A Figura 32 apresenta o gráfico de convergência dos métodos neste problema. Pode-se verificar claramente a maior velocidade de convergência do NhFA-R e do NhFA-M em relação ao FA a partir de cerca de 50 iterações de busca. Além disso, a diferença entre NhFA-R e NhFA-M fica mais clara a partir das 100 iterações de busca, onde o NhFA-R mostra uma convergência mais rápida.

#### 6.4.10 SISTEMA DE 40 UNIDADES

Neste sistema, a função custo considera o efeito de ponto de válvula. Além disso, é considerada a restrição de limite mínimo e máximo de operação. A potência demandada

Figura 32: Gráfico de convergência - sistema de 38 unidades



Fonte: Elaborado pelo autor

Tabela 21: Resultados das execuções - sistema de 40 unidades

Método	Melhor solução (\$/h)	Média (\$/h)	Pior Solução (\$/h)	Desvio Padrão (\$/h)
FA	121.630,43	122.116,97	122.816,70	276,20
NhFA-M	121.649,77	122.344,93	124.154,05	550,06
NhFA-R	121.536,30	122.322,77	124.323,28	527,07

Fonte: Elaborado pelo autor

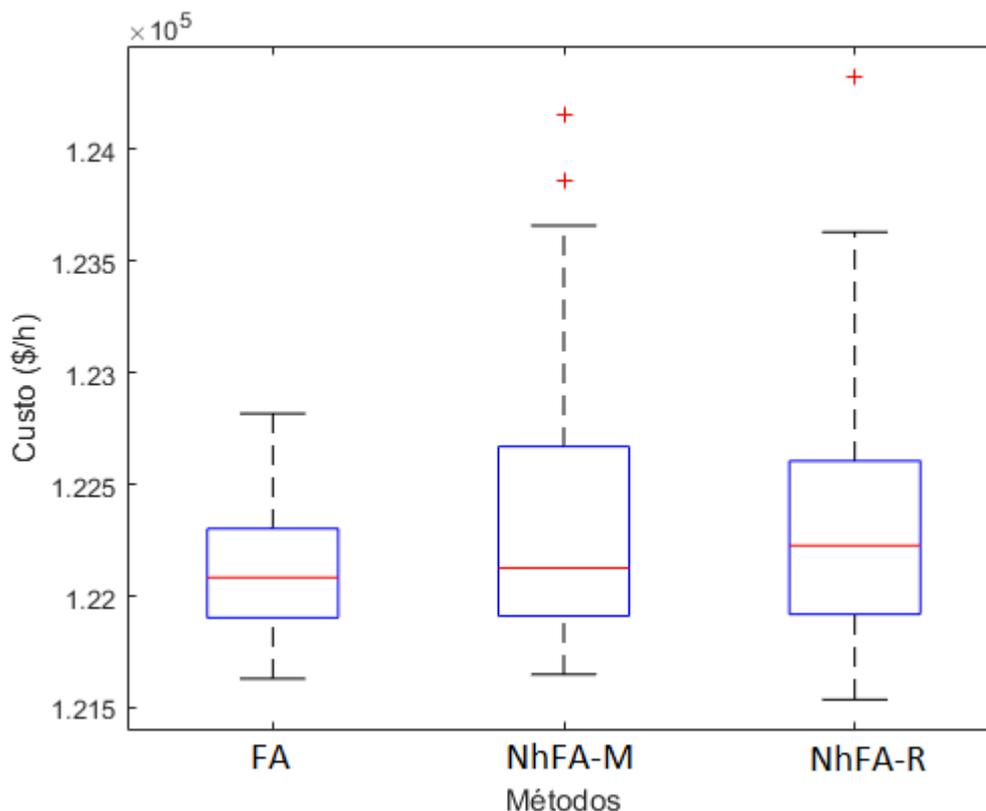
é de 10.500MW, e as perdas nas linhas de transmissão são desconsideradas. Os dados deste problema são apresentados por Sinha, Chakrabarti e Chattopadhyay (2003), e se encontram na Tabela 43, do apêndice A.

Para a solução deste problema, foi definido um limite de 100.000 avaliações da função objetivo. Em adição, como as perdas nas linhas de transmissão são desconsideradas, foi utilizada a rotina de reparo para soluções que violavam o balanço de potência.

Neste problema, foram realizadas 3.998 iterações por execução. Os tempos de execução do FA, do NhFA-M e do NhFA-R, foram de 21,18 segundos, 21,40 segundos e

21,98 segundos, respectivamente.

Figura 33: Diagrama de caixa de custos - sistema de 40 unidades



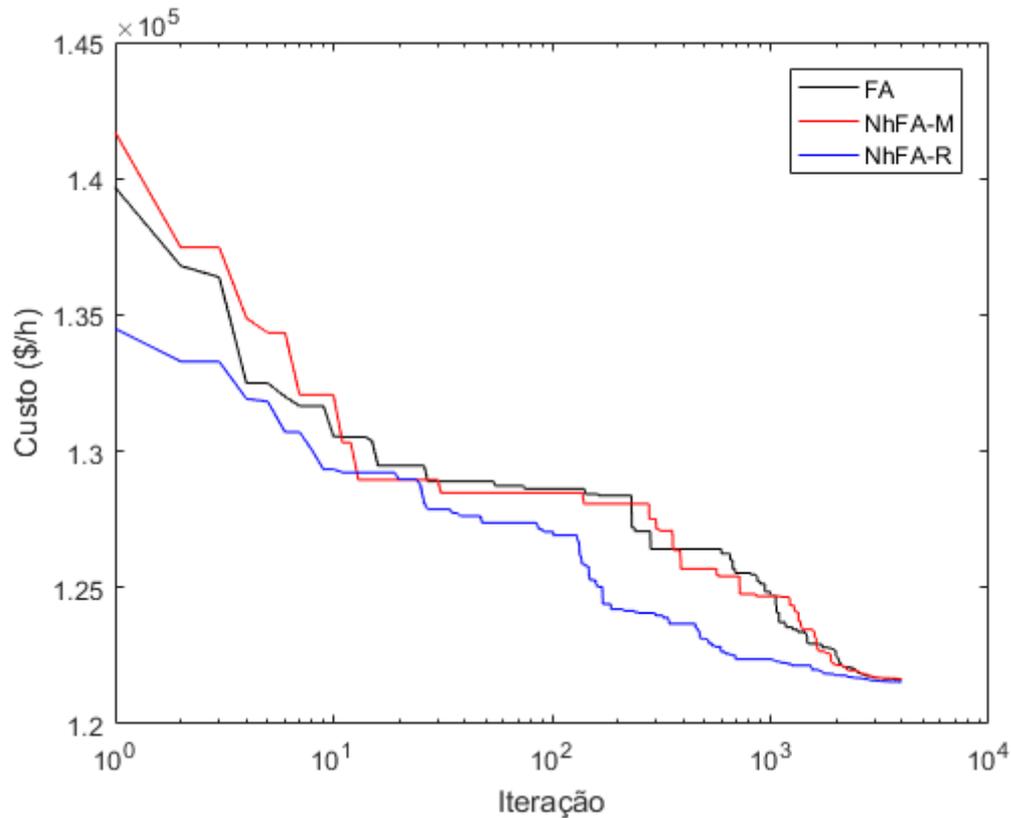
Fonte: Elaborado pelo autor

Os resultados são apresentados na Tabela 21. Neste problema, a solução de menor custo e também a de maior custo foram encontradas pelo NhFA-R. Por outro lado, o FA obteve soluções com a melhor média de custos e menor desvio padrão. Ainda, entre o NhFA-R obteve melhor média de custos e menor desvio padrão do que o NhFA-M. A solução de menor custo obtida por cada método é apresentada na Tabela 55.

Pelos diagramas de caixa da Figura 33, nota-se que o FA encontrou soluções onde houve a menor dispersão de valores de custos. A diferença não é tão evidente analisando-se o extremo inferior, o primeiro quartil e a mediana. Já, analisando-se o terceiro quartil e o extremo superior, pode-se verificar nitidamente que o valor apresentado no caso do FA é consideravelmente menor do que no caso do NhFA-M e do NhFA-R. Outro detalhe também importante, é que os custos encontrados pelo NhFA-M e NhFA-R são mais dispersos para valores superiores à mediana do que os custos encontrados pelo FA. Isso também justifica o aumento da média de custos e do desvio padrão obtidos para o NhFA-M e para o NhFA-R.

Na Figura 34 é apresentado o gráfico de convergência dos métodos para este problema. Verifica-se que o NhFA-R apresentou uma convergência mais rápida à solução

Figura 34: Gráfico de convergência - sistema de 40 unidades



Fonte: Elaborado pelo autor

ótima. Já, sobre o FA e o NhFA-M, é mais difícil identificar qual método foi melhor em termos de velocidade de convergência. Isso porque, em algumas partes da busca o FA mostrou maior velocidade de convergência, já em outras, o NhFA-M foi que mostrou.

#### 6.4.11 SISTEMA DE 110 UNIDADES

Tabela 22: Resultados das execuções - sistema de 110 unidades

Método	Melhor solução (\$/h)	Média (\$/h)	Pior Solução (\$/h)	Desvio Padrão (\$/h)
FA	198.947,74	199.539,82	200.472,68	273,16
NhFA-M	198.742,66	199.389,10	200.106,76	258,74
NhFA-R	198.594,47	199.341,17	200.025,08	295,22

Fonte: Elaborado pelo autor

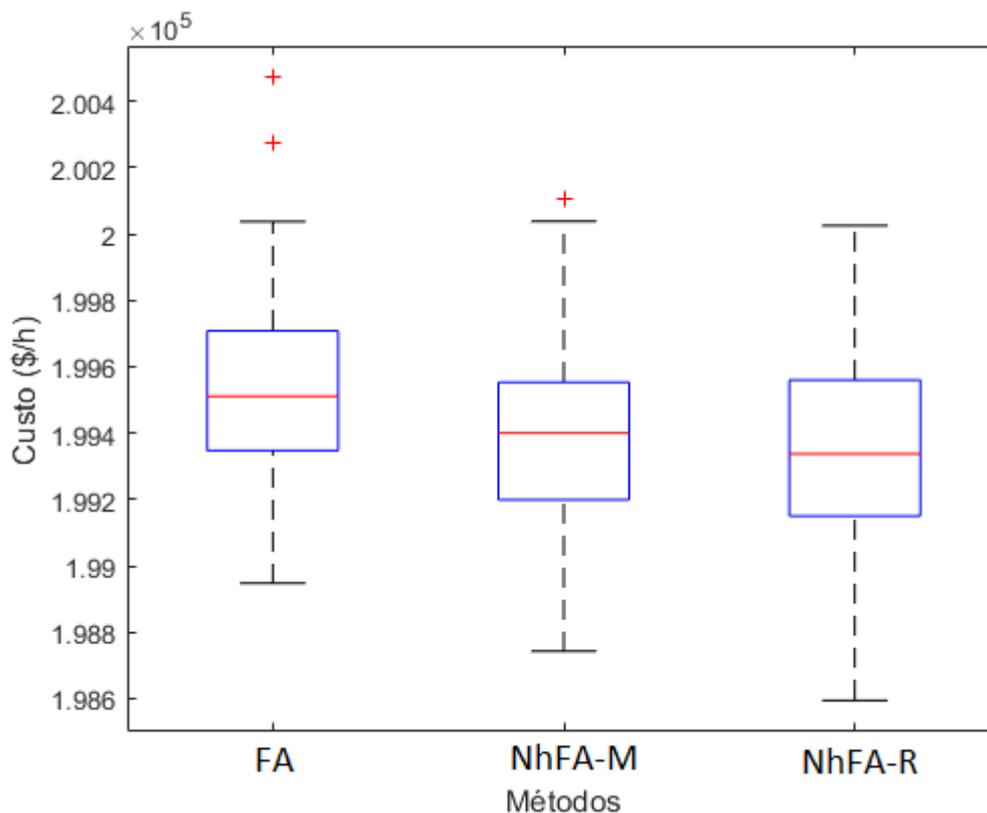
Neste sistema, a função de custo considerada é quadrática, e a restrição de limite mínimo e máximo de cada unidade geradora é considerada. A potência demandada neste

problema é de 15.000MW, e as perdas nas linhas de transmissão são desconsideradas. Os dados deste problema foram retirados de Lee, Sode-Yome e Park (1998), e são apresentados na Tabela 44, no apêndice A.

Para a solução deste problema, foi definido um limite de 75.000 avaliações da função objetivo. Como as perdas nas linhas de transmissão foram desconsideradas, foi utilizada a rotina de reparo para soluções que violavam o balanço de potência.

Neste caso, foram realizadas 2.998 iterações por execução de cada método. O tempo médio de execução do FA foi de 19,19 segundos. No caso do NhFA-M e do NhFA-R, os tempos foram de 21,12 segundos e 19,99 segundos, respectivamente.

Figura 35: Diagrama de caixa de custos - sistema de 110 unidades

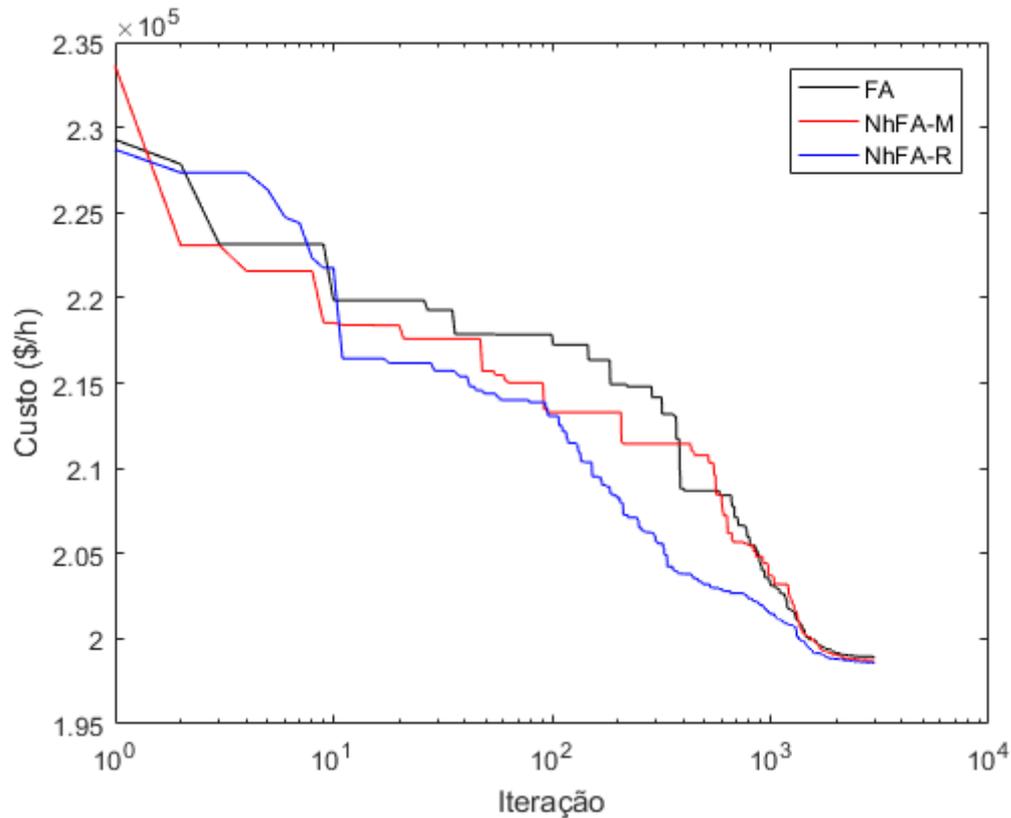


Fonte: Elaborado pelo autor

Os resultados obtidos para este problema são apresentados na Tabela 22. A solução de menor custo foi obtida pelo NhFA-R, e a de maior custo, pelo FA. Em adição, as soluções encontradas pelo NhFA-R apresentaram a melhor média de custos. Entretanto, o menor desvio padrão ocorreu para os custos das soluções do NhFA-M, e o maior desvio padrão, para os custos das soluções do NhFA-R. A solução de menor custo encontrada pelos métodos é apresentada na Tabela 56.

De acordo com os diagramas de caixa da 35, verifica-se que o extremo inferior e os

Figura 36: Gráfico de convergência - sistema de 110 unidades



Fonte: Elaborado pelo autor

quartis dos custos do NhFA-R e do NhFA-M são todos menores do que os dos custos do FA. Já comparando-se o NhFA-M e o NhFA-R, a maior diferença se dá no primeiro extremo inferior e no primeiro e segundo quartil, que são um pouco menores no caso do NhFA-R. Ainda, o diagrama correspondente ao NhFA-R é o que apresenta maior amplitude, o que sugere que a dispersão de custos é maior neste método. Ainda assim, esta diferença na amplitude se dá principalmente devido à diferença do extremo inferior, e ao tamanho um pouco maior da caixa no NhFA-R (maior distância inter-quartil).

O gráfico de convergência dos métodos neste problema é apresentado na Figura 36. Pode-se verificar que o NhFA-R apresentou a maior velocidade de convergência durante a busca. O NhFA-M e o FA mostraram uma velocidade de convergência parecida durante a maior parte da busca, excetuando-se apenas a parte inicial da busca (até cerca de 300 iterações), onde o NhFA-M convergiu com maior velocidade.

#### 6.4.12 SISTEMA DE 140 UNIDADES

Neste sistema, a função custo é quadrática, mas também considera o efeito de ponto de válvula para algumas unidades geradoras em especial. São consideradas as

Tabela 23: Resultados das execuções - sistema de 140 unidades

Método	Melhor solução (\$/h)	Média (\$/h)	Pior Solução (\$/h)	Desvio Padrão (\$/h)
FA	1.667.802,03	1.673.552,61	1.686.956,11	3.311,82
NhFA-M	1.666.196,54	1.673.527,82	1.680.609,18	3.031,43
NhFA-R	1.666.657,49	1.671.874,63	1.682.891,56	3.003,40

Fonte: Elaborado pelo autor

restrições de limites mínimo e máximo de operação, limites de rampa e zonas proibidas. A potência demandada neste problema é de 42.432MW, e as perdas nas linhas de transmissão são desconsideradas. Os dados deste problema foram adaptados de Park et al. (2010), e são apresentados na Tabela 45.

Para a solução deste problema, foi definido um limite de 200.000 avaliações da função objetivo. Como as perdas não são consideradas, foi utilizada a rotina de reparo para soluções que violavam o balanço de potência.

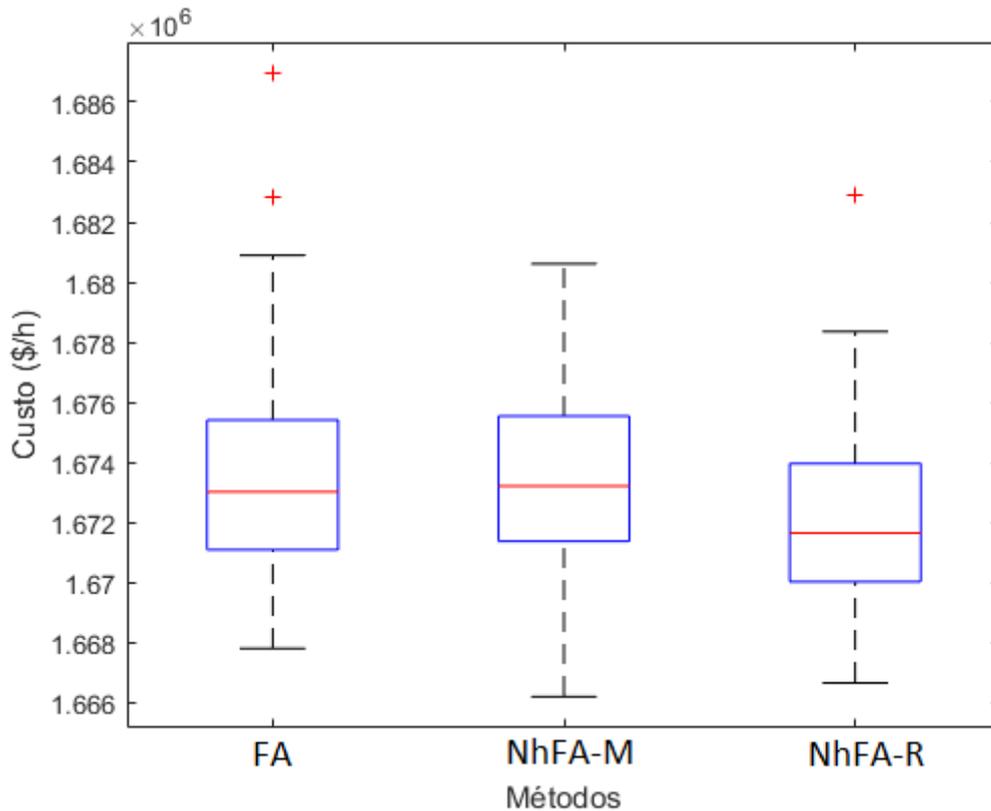
Neste caso, foram realizadas 7998 iterações a cada execução. O tempo médio de execução do FA foi de 58,77 segundos. Já nos casos do NhFA-M e NhFA-R, se obtiveram tempos bem próximos, sendo de aproximadamente 61,65 segundos.

Os resultados obtidos neste problema são apresentados na Tabela 23. A solução de menor custo foi encontrada pelo NhFA-M, e a de maior custo, foi encontrada pelo FA. O NhFA-R obteve soluções com a melhor média de custos e menor desvio padrão. Ainda, o desvio padrão dos custos do NhFA-M e do NhFA-R foram bem próximos. A solução de menor custo obtida pelos métodos é apresentada na Tabela 57.

Pelos diagramas de caixa da Figura 37, pode-se notar que a solução de custo mais elevado do NhFA-M corresponde ao extremo superior, diferente do caso do NhFA-R e do FA, onde os custos elevados (na Tabela 23) correspondem a *outliers*. Além disso, vale notar que, as soluções encontradas pelo NhFA-R correspondem a uma faixa de custos menor do que a dos outros métodos. Isto pode ser constatado verificando que os quartis e o extremo superior dos custos do NhFA-R são menores do que os correspondentes ao NhFA-M e ao FA.

Na Figura 38 é apresentado o gráfico de convergência dos métodos para este problema. O NhFA-M foi o método que apresentou a convergência mais rápida, excetuando-se o começo da busca (até cerca de 50 iterações). Além disso, o NhFA-R apresentou uma convergência mais rápida que o FA.

Figura 37: Diagrama de caixa de custos - sistema de 140 unidades



Fonte: Elaborado pelo autor

### 6.4.13 ANÁLISE GERAL

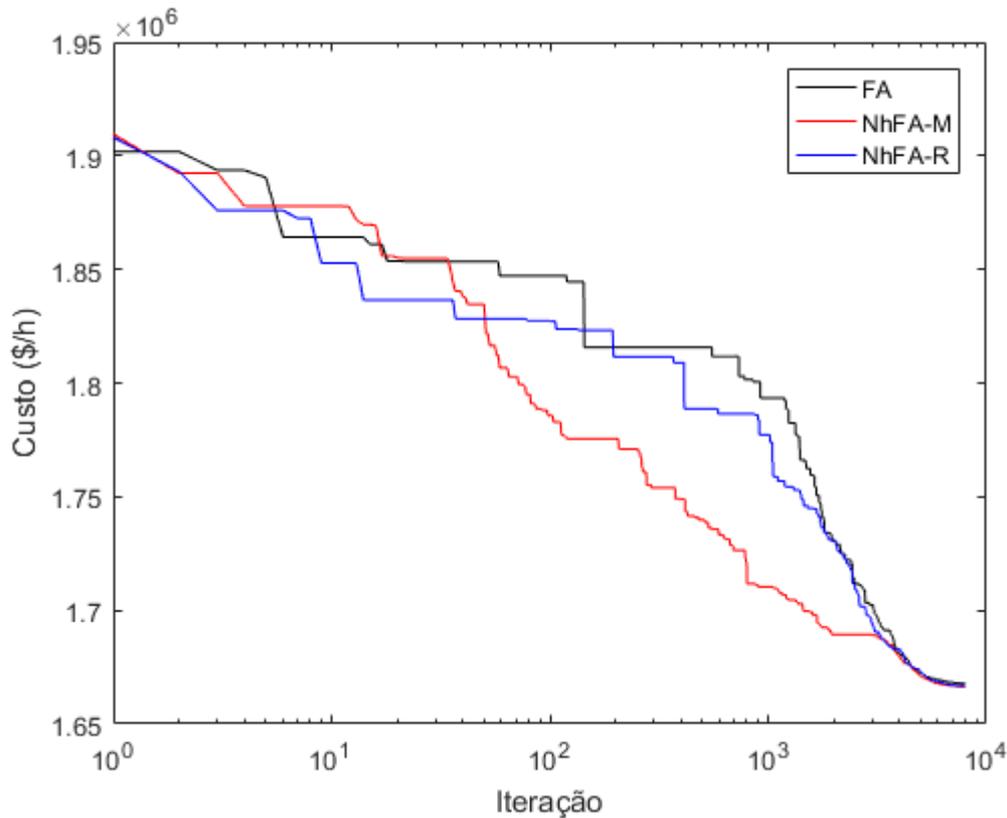
Nesta Subseção será apresentada uma análise dos resultados obtidos nos 12 sistemas de teste do PDE.

Na Tabela 24, os resultados obtidos nos problemas de despacho são classificados considerando o método que encontrou menor custo, melhor média de custos, menor dispersão de custos e maior velocidade de convergência. Nota-se que, para a grande maioria dos sistemas, o NhFA-R obteve melhor média de custos, menor dispersão e maior velocidade de convergência. Ainda, a maioria das soluções de menor custo foi também encontrada pelo NhFA-R. Tratando-se de média de custos e dispersão, o NhFA-M não se destacou em nenhum dos problemas. O FA, por sua vez, se destacou com melhor média nos sistemas de 26 e 40 unidades.

Considerando todas as características, o NhFA se mostrou melhor na resolução de sistemas maiores, excetuando-se o sistema de 40 unidades apenas.

Na Tabela 25, são apresentados os custos mínimos encontrados pelos métodos em cada um dos sistemas de teste do PDE. O NhFA-R foi o método que encontrou a maior parte das soluções de menor custo (em 6 sistemas). Por outro lado, o NhFA-M e o FA

Figura 38: Gráfico de convergência - sistema de 140 unidades



Fonte: Elaborado pelo autor

encontraram a solução de menor custo para 2 dos sistemas cada um. Os sistemas de 3 e 6 unidades não houve uma definição clara de qual dos métodos encontrou a solução de menor custo, devido à ocorrência de empates. Ainda, no casos onde o FA encontrou as soluções de menor custo (sistemas de 10 e 18 unidades), a diferença de custo em relação às soluções encontradas pelo NhFA (R e M) foram pequenas.

Para analisar a relevância estatística das diferenças entre os métodos, foi conduzido o teste de Friedman. O *rank* médio de cada método, considerando os 12 sistemas, é relacionado na Tabela 26. A partir do *rank* médio de cada método, pode-se concluir que o NhFA-R foi o melhor, e o FA foi o pior. No entanto, isso não pôde ser verificado com um nível de significância aceitável, pois os dados obtidos não permitiram que a hipótese nula fosse rejeitada.

Na Tabela 27, são apresentadas as médias de custos obtidas por cada método nos sistemas de teste do PDE. Nesta perspectiva já é possível notar uma diferença mais nítida, onde o NhFA-R apresentou a melhor média de custos para quase todos os sistemas, excetuando-se apenas os sistemas de 26 e 40 unidades. Ainda, vale notar que o NhFA-M obteve melhor média de soluções que o FA em quase todos os problemas também, apenas

Tabela 24: Características destacadas no PDE

Método	Menor custo	Média de custos	Dispersão	Convergência
Sis-3	-	<b>NhFA-R</b>	<b>NhFA-R</b>	<b>NhFA-M</b>
Sis-6	FA	<b>NhFA-R</b>	<b>NhFA-R</b>	FA
Sis-10	FA	<b>NhFA-R</b>	<b>NhFA-R</b>	<b>NhFA-R</b>
Sis-13	<b>NhFA-R</b>	<b>NhFA-R</b>	<b>NhFA-R</b>	<b>NhFA-R</b>
Sis-15	<b>NhFA-R</b>	<b>NhFA-R</b>	<b>NhFA-R</b>	<b>NhFA-R</b>
Sis-18	FA	<b>NhFA-R</b>	<b>NhFA-R</b>	<b>NhFA-R</b>
Sis-20	<b>NhFA-R</b>	<b>NhFA-R</b>	<b>NhFA-R</b>	FA
Sis-26	<b>NhFA-M</b>	FA	FA	<b>NhFA-R</b>
Sis-38	<b>NhFA-R</b>	<b>NhFA-R</b>	<b>NhFA-R</b>	<b>NhFA-R</b>
Sis-40	<b>NhFA-R</b>	FA	FA	<b>NhFA-R</b>
Sis-110	<b>NhFA-R</b>	<b>NhFA-R</b>	FA	<b>NhFA-R</b>
Sis-140	<b>NhFA-M</b>	<b>NhFA-R</b>	<b>NhFA-R</b>	<b>NhFA-M</b>

Fonte: Elaborado pelo autor

Tabela 25: Custos das soluções para PDE - melhor caso

Sistema	FA	NhFA-M	NhFA-R
Sis-3	<b>8.220,93</b>	<b>8.220,93</b>	<b>8.220,93</b>
Sis-6	<b>15.442,56</b>	<b>15.442,56</b>	15.442, 58
Sis-10	<b>623,94</b>	623, 95	623, 95
Sis-13	18.040, 00	18.028, 16	<b>18.014,29</b>
Sis-15	32.717, 10	32.703, 75	<b>32.701,25</b>
Sis-18	<b>25.429,80</b>	25.431, 45	25.430, 75
Sis-20	62.466, 51	62.464, 97	<b>62.464,12</b>
Sis-26	32.650, 11	<b>32.644,33</b>	32.646, 76
Sis-38	9.416.957, 84	9.416.838, 34	<b>9.416.017,99</b>
Sis-40	121.630, 43	121.649, 77	<b>121.536,30</b>
Sis-110	198.947, 74	198.742, 66	<b>198.594,47</b>
Sis-140	1.667.802, 03	<b>1.666.196,54</b>	1.666.657, 49

Fonte: Elaborado pelo autor

Tabela 26: *Rank* médio dos métodos - soluções de menor custo

Método	<i>Rank</i> médio
NhFA-R	1,62
NhFA-M	2,00
FA	2,37

Fonte: Elaborado pelo autor

Tabela 27: Custos das soluções para PDE - média

Sistema	FA	NhFA-M	NhFA-R
Sis-3	8.223, 47	8.223, 83	<b>8.221,72</b>
Sis-6	15.444, 63	15.443, 58	<b>15.443,39</b>
Sis-10	624, 06	<b>624,03</b>	<b>624,03</b>
Sis-13	18.198, 83	18.161, 86	<b>18.133,83</b>
Sis-15	32.779, 82	32.759, 59	<b>32.738,94</b>
Sis-18	25.444, 06	25.442, 63	<b>25.440,07</b>
Sis-20	62.489, 87	62.481, 44	<b>62.480,03</b>
Sis-26	<b>32.760,88</b>	32.780, 93	32.770, 55
Sis-38	9.428.703, 55	9.427.480, 53	<b>9.425.300,13</b>
Sis-40	<b>122.116,97</b>	122.344, 93	122.322, 77
Sis-110	199.539, 82	199.389, 10	<b>199.341,17</b>
Sis-140	1.673.552, 61	1.673.527, 82	<b>1.671.874,63</b>

Fonte: Elaborado pelo autor

com a exceção dos sistemas de 3, 26 e 40 unidades.

Tabela 28: *Rank* médio dos métodos - custo médio de soluções

Método	<i>Rank</i> médio
NhFA-R	1,16
NhFA-M	2,25
FA	2,58

Fonte: Elaborado pelo autor

Foi realizado o teste de Friedman considerando-se a média de custos do métodos (apresentada na Tabela 27), o *rank* médio de cada método se encontra na Tabela 28. Apesar do NhFA-M ter sido superado pelo FA em apenas 3 sistemas de teste, o *rank* médio deste método não ficou muito distante do *rank* do FA. Isso aconteceu porque o NhFA-M não apresentou a melhor média em nenhum dos problemas. Assumindo-se um nível de significância  $\alpha = 0,01$ , consegue-se rejeitar a hipótese nula e constatar que o NhFA-R é melhor do que ambos, o FA e o NhFA-M. Já entre o NhFA-M e o FA não pôde-se constatar uma diferença significativa.

Tabela 29: Custos das soluções para PDE - pior caso

Sistema	FA	NhFA-M	NhFA-R
Sis-3	<b>8.276,85</b>	<b>8.276,85</b>	<b>8.276,85</b>
Sis-6	15.455,91	15.455,57	<b>15.446,59</b>
Sis-10	624,21	624,16	<b>624,11</b>
Sis-13	18.353,74	18.370,60	<b>18.317,72</b>
Sis-15	32.899,38	32.884,55	<b>32.877,24</b>
Sis-18	25.475,27	25.466,45	<b>25.464,34</b>
Sis-20	62.531,49	<b>62.508,04</b>	62.530,98
Sis-26	33.063,07	33.234,53	<b>33.058,90</b>
Sis-38	9.441.181,94	9.445.372,37	<b>9.439.078,12</b>
Sis-40	<b>122.816,70</b>	124.154,05	124.323,28
Sis-110	200.472,68	200.106,76	<b>200.025,08</b>
Sis-140	1.686.956,11	<b>1.680.609,18</b>	1.682.891,56

Fonte: Elaborado pelo autor

Finalmente, a Tabela 29 apresenta os custos encontrados pelos métodos nos sistemas de teste, considerando-se o pior caso (a pior solução encontrada). Neste aspecto, o FA levou vantagem em apenas um dos sistemas de teste, o sistema de 40 unidades. O NhFA-M por sua vez, levou vantagem em dois dos sistemas de teste, o de 20 e o de 140 unidades. Para o restante dos sistemas, a vantagem foi do NhFA-R. Vale notar também que, o FA havia encontrado as soluções de menor custo nos sistemas de 10 e 18 unidades, no entanto pode-se verificar que nestes dois sistemas o FA obteve também as soluções de custo mais elevado. O mesmo caso pode ser verificado se for comparado o NhFA-M com o NhFA-R. O NhFA-M encontrou soluções de menor custo para os sistemas de 26 e 140 unidades, no entanto este método também encontrou as soluções de custo mais elevado para estes sistemas comparando-se ao NhFA-R.

Tabela 30: *Rank* médio dos métodos - custo máximo de soluções

Método	<i>Rank</i> médio
NhFA-R	1,41
NhFA-M	2,08
FA	2,50

Fonte: Elaborado pelo autor

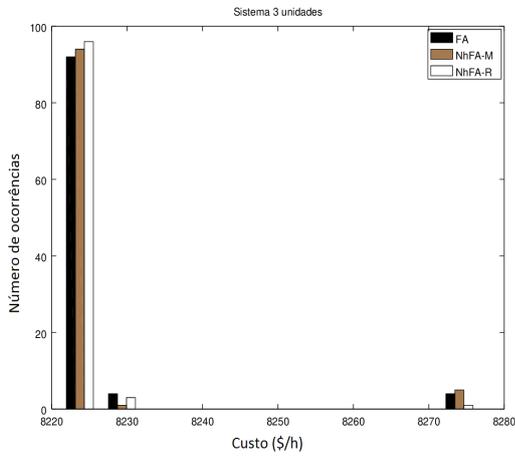
Ainda, desta última perspectiva (pior caso de custo), foi conduzida uma análise utilizando o teste de Friedman. Na Tabela 30, é apresentado o *rank* médio correspondente a cada método. Novamente, o NhFA-R obteve o melhor *rank*. Ainda, utilizando-se um nível de significância  $\alpha = 0,05$ , pôde-se constatar que o NhFA-R foi melhor do que o FA.

Nas Figuras 39 e 40, são apresentados os histogramas dos custos obtidos pelo FA (em preto), pelo NhFA-M (em marrom) e pelo NhFA-R (em branco). Verifica-se que o NhFA-R encontrou a maior quantia de soluções na menor faixa de custos, e também a menor quantia de soluções na faixa de custos mais elevados (com exceção dos sistemas de 26 e 40 unidades). Ainda, é importante notar que à medida que se considera faixas de custos mais altas, o NhFA-R tende a apresentar menor ocorrência de soluções. Por outro lado, o NhFA-M, na maior parte dos casos (com exceção do sistema de 18 unidades), apresentou maior quantidade de soluções em faixas de custo menores em relação ao FA. Em adição, para faixas de custos mais elevadas, em alguns casos o FA apresentou menor quantia de soluções (sistema de 3 e 38 unidades) e, para outros, o NhFA-M apresentou a menor quantia de soluções (demais casos, com exceção dos sistemas de 26 e 40 unidades). Em contrapartida, como havia sido mencionado anteriormente, o FA obteve um melhor desempenho médio nos sistemas de 26 e 40 unidades, e esta diferença fica bastante nítida nos histogramas. Neste casos, a faixa de custos mais baixa teve maior ocorrências por parte do FA, assim como também as faixas de custos mais elevados apresentaram menor ocorrência de soluções por parte deste.

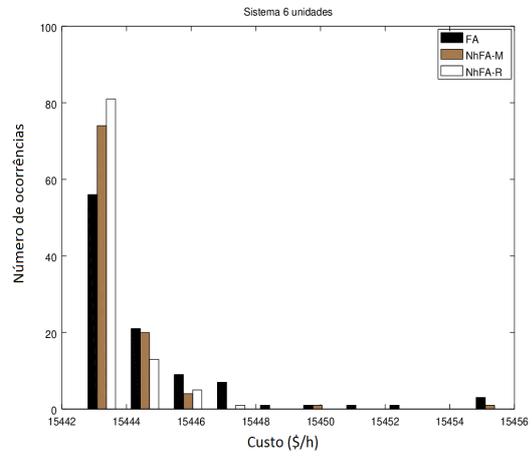
Na Tabela 31, são sumarizados os tempos médios de execução dos métodos. Na maioria dos casos, o FA apresentou um tempo médio de execução menor, embora em alguns casos (como nos sistemas de 10, 13, 38 e 110 unidades) o NhFA tenha apresentado um tempo menor. No entanto, estas diferenças podem acontecer por diversos fatores externos relacionados ao estado do sistema operacional. Logo, como a diferença dos tempos de execução dos métodos não foi muito grande, pode-se verificar que a implementação do NhFA não aumenta o custo computacional em relação ao algoritmo original.

Figura 39: Histograma dos custos - sistemas de 3, 6, 10, 13, 15 e 18 unidades

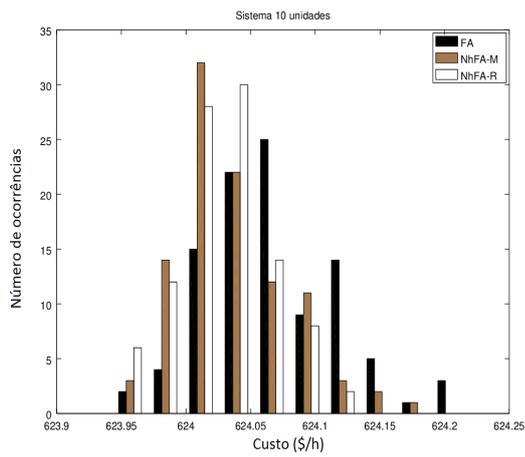
(a) Sistema de 3 unidades



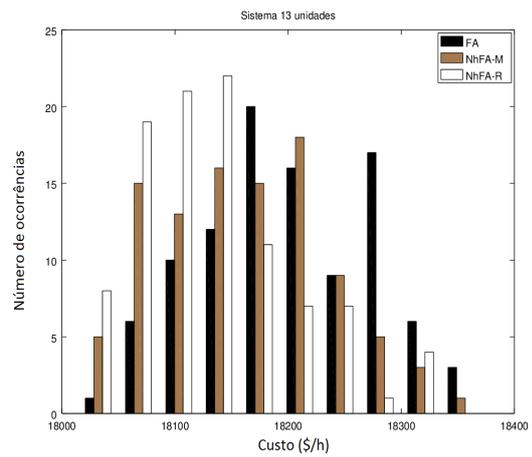
(b) Sistema de 6 unidades



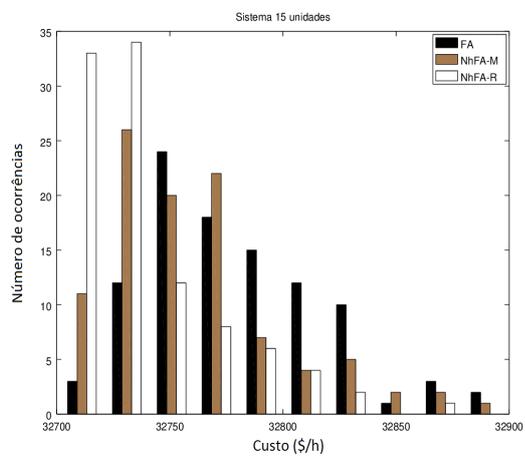
(c) Sistema de 10 unidades



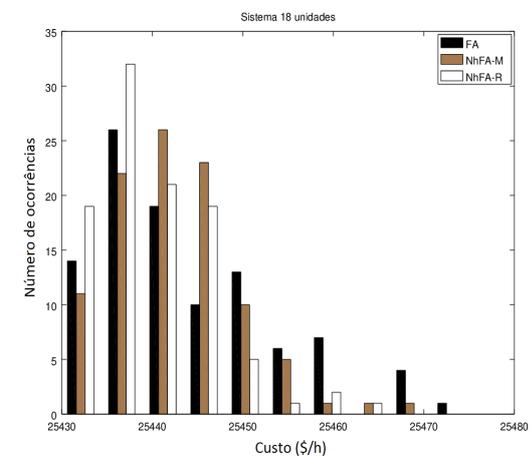
(d) Sistema de 13 unidades



(e) Sistema de 15 unidades



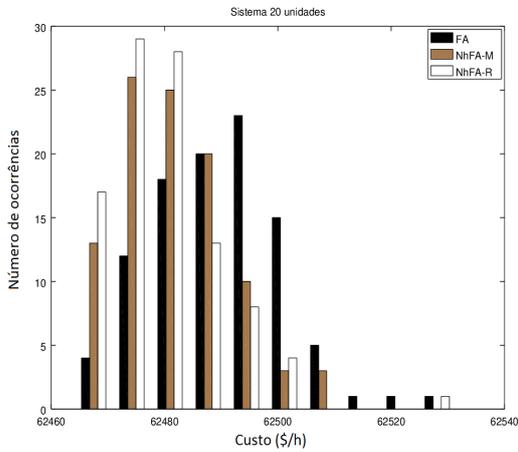
(f) Sistema de 18 unidades



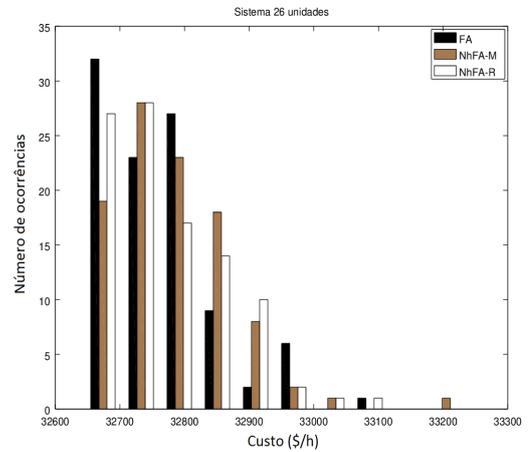
Fonte: Elaborado pelo autor

Figura 40: Histograma dos custos - sistemas de 20, 26, 38, 40, 110 e 140 unidades

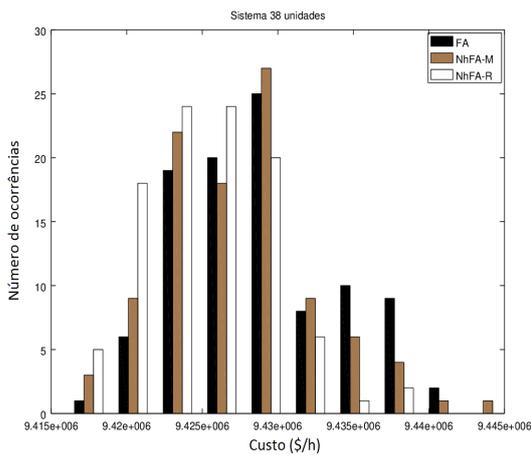
(a) Sistema de 20 unidades



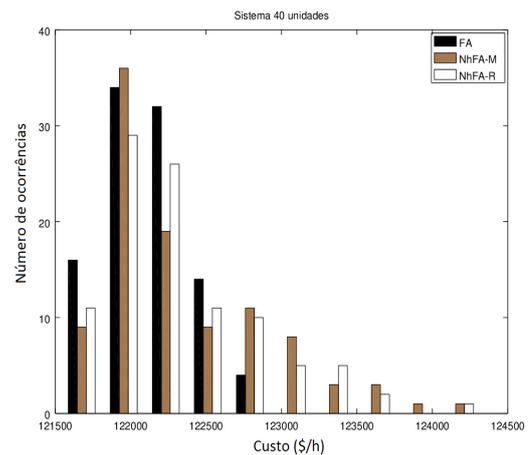
(b) Sistema de 26 unidades



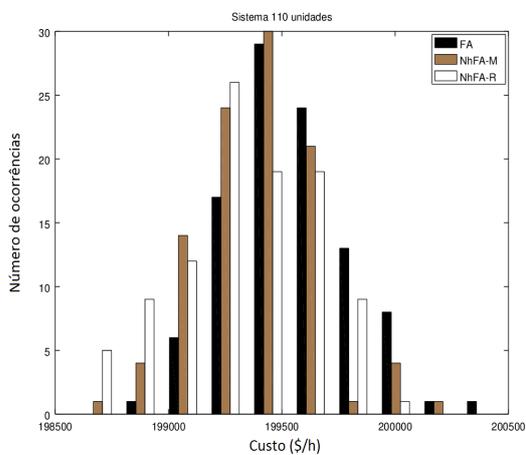
(c) Sistema de 38 unidades



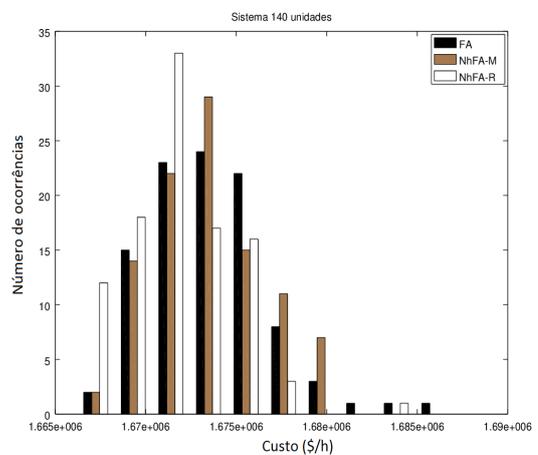
(d) Sistema de 40 unidades



(e) Sistema de 110 unidades



(f) Sistema de 140 unidades



Fonte: Elaborado pelo autor

Tabela 31: Tempo médio de execução dos métodos (s)

Sistema	FA	NhFA-M	NhFA-R
Sis-3	0,81	0,80	0,82
Sis-6	3,47	3,53	3,60
Sis-10	2,76	2,76	2,69
Sis-13	5,01	5,85	5,00
Sis-15	9,19	9,73	9,64
Sis-18	7,39	7,82	7,61
Sis-20	9,92	10,64	11,10
Sis-26	7,51	7,77	7,57
Sis-38	9,31	9,15	9,70
Sis-40	21,18	21,40	21,98
Sis-110	24,73	21,12	19,99
Sis-140	58,77	67,19	61,69

Fonte: Elaborado pelo autor

## 7 CONCLUSÃO E PERSPECTIVAS FUTURAS

Neste trabalho foi proposta uma nova variante do FA, o NhFA. Esta variante foi validada em um conjunto de 10 funções teste, e foi comparada ao algoritmo original também em 12 sistemas de teste do problema de despacho econômico. Foram propostos dois cenários principais do NhFA: o NhFA-R (todos parâmetros aleatórios) e o NhFA-M (metade da população com parâmetros aleatórios e outra metade com parâmetros do FA). Destes dois, o que apresentou melhor resultado foi o NhFA-R. Este cenário em particular tem uma grande vantagem em aplicações que é a dispensabilidade de ajuste de parâmetros, uma vez que foi proposto com base nos limites teóricos destes.

Considerando-se as funções teste, o NhFA-R encontrou as melhores soluções na maior parte dos problemas. Além disso, o NhFA-M, apesar de não ter se saído tão bem quanto o NhFA-R, obteve melhor desempenho do que o FA para quase todos os problemas. As exceções se deram nas funções de Rosenbrock (analisando-se a melhor solução) e *step* (analisando-se a média de soluções), onde o melhor desempenho foi obtido pelo FA. Ainda, tratando-se da melhor solução encontrada pôde-se concluir (pelo teste de Friedman) com 99% de certeza que o NhFA-R apresenta melhor desempenho que o FA, e com 95% de certeza que o NhFA-M apresenta melhor desempenho do que o FA. Já, tratando-se da média de soluções, pôde-se verificar com 99% de certeza que o NhFA-R e o NhFA-M apresentam melhor desempenho do que o FA. Vale lembrar também que, o NhFA-R também apresentou melhor desempenho do que o NhFA-M, podendo-se verificar esta diferença com 95% de certeza na perspectiva da melhor solução, e com 99% de certeza na média das soluções. Quanto à velocidade de convergência, o NhFA-R e o NhFA-M apresentaram uma melhor convergência comparando-se ao FA. No entanto, não foi possível verificar de maneira geral uma diferença entre estes dois métodos, pois, para alguns problemas o NhFA-R foi o método que convergiu mais rápido, e para outros o NhFA-M.

No problema de despacho econômico, não houve uma grande diferença em sistemas pequenos, no entanto, para sistemas de larga escala o NhFA-R obteve melhor desempenho. O NhFA-R encontrou soluções de menor custo para a maior parte dos sistemas (6 sistemas). O NhFA-M e o FA por sua vez, obtiveram as soluções de menor custo para 2 sistemas cada um. No entanto, apesar destes resultados serem bons para o NhFA-R, não foi possível verificar com o teste de Friedman que o NhFA apresentou melhor desempenho do que o FA no conjunto de sistemas considerado. Considerando as piores soluções de cada método (soluções de custo mais elevado), o NhFA-R também foi o método com melhores resultados, apresentando soluções de pior caso com custo mais baixo também na maior parte dos sistemas (8 sistemas). Desta perspectiva, os resultados permitiram verificar, através do teste de Friedman, com 95% de certeza, que o NhFA-R apresenta melhor desempenho que o FA no conjunto de sistemas considerado. Finalmente, analisando-se a média de custos das soluções, verificou-se a vantagem do NhFA-R, conseguindo constatar com 99% de certeza que este método apresentou melhor desempenho do que ambos o NhFA-M e o FA.

Logo, com os resultados obtidos neste Trabalho, foi verificado que o NhFA se mostrou uma proposta bastante promissora. Das duas estratégias definidas, o NhFA-R foi a que mostrou melhores resultados. O NhFA-M por sua vez, apesar de não ter apresentado melhores resultados do que o NhFA-R, mostrou um bom desempenho se comparado ao FA. Vale lembrar que neste trabalho não foi considerado nenhum ajuste de parâmetros, os parâmetros do FA foram definidos de acordo com a literatura, e os intervalos para a inicialização dos parâmetros no NhFA-R foram baseados nos limites teóricos destes.

Com a finalização deste trabalho, ficam nítidas duas direções de pesquisa futura: o aprofundamento do estudo do NhFA e a aplicação a mais problemas práticos da engenharia.

O NhFA permite muitas possibilidades de ajuste, mesmo utilizando-se das duas técnicas de inicialização propostas neste Trabalho (inicialização aleatória e inicialização por grupos). Na inicialização por grupos, um detalhe a ser estudado é o impacto dos tamanhos dos grupos. Já na inicialização aleatória, pode-se considerar outros intervalos de inicialização, ou até mesmo outras distribuições para a geração dos parâmetros.

Por outro lado, sobre as aplicações a serem abordadas pode-se destacar o problema de despacho econômico dinâmico, onde o PDE deve ser resolvido para um horizonte de 24 horas. Este tipo de problema envolve um grande número de variáveis de controle, totalizando  $24 \times N$  variáveis de controle, para um sistema de  $N$  unidades geradoras.

## REFERÊNCIAS

- ABDULLAH, M. N. et al. Economic dispatch with valve point effect using iteration particle swarm optimization. In: IEEE. *Universities Power Engineering Conference (UPEC), 2012 47th International*. [S.l.], 2012. p. 1–6. Citado na página 29.
- AGRESTI, A.; AGRESTI, B. F. Statistical methods for the. *Social Sciences. CA: Dellen Publishers*, 1970. Citado na página 145.
- AL-ROOMI, A. R.; EL-HAWARY, M. E. A new realistic optimization-free economic load dispatch method based on maps gathered from sliced fuel-cost curves. In: IEEE. *Electrical and Computer Engineering (CCECE), 2017 IEEE 30th Canadian Conference on*. [S.l.], 2017. p. 1–6. Citado 3 vezes nas páginas 29, 30 e 36.
- ALI, M. M.; KHOMPATRAPORN, C.; ZABINSKY, Z. B. A numerical evaluation of several stochastic algorithms on selected continuous global optimization test problems. *Journal of global optimization*, Springer, v. 31, n. 4, p. 635–672, 2005. Citado 2 vezes nas páginas 24 e 25.
- ALROOMI, A. R. The farm of unconstrained benchmark functions. *University of Bahrain, Electrical and Electronics Department, Bahrain*, 2013. Citado na página 19.
- ALROOMI, A. R. *Power Systems and Evolutionary Algorithms*. 2015. <<http://al-roomi.org/>>. Acesso em 18 de janeiro de 2018. Citado 2 vezes nas páginas 27 e 28.
- ANDREI, N. An unconstrained optimization test functions collection. *Adv. Model. Optim.*, v. 10, n. 1, p. 147–161, 2008. Citado 2 vezes nas páginas 24 e 26.
- APOSTOLOPOULOS, T.; VLACHOS, A. Application of the firefly algorithm for solving the economic emissions load dispatch problem. *International Journal of Combinatorics*, Hindawi Publishing Corporation, v. 2011, 2010. Citado na página 37.
- ARAGÓN, V. S.; ESQUIVEL, S. C.; COELLO, C. C. An immune algorithm with power redistribution for solving economic dispatch problems. *Information Sciences*, Elsevier, v. 295, p. 609–632, 2015. Citado 8 vezes nas páginas 73, 75, 80, 81, 85, 87, 121 e 122.
- ARORA, S.; SINGH, S. The firefly optimization algorithm: convergence analysis and parameter selection. *International Journal of Computer Applications*, Foundation of Computer Science, v. 69, n. 3, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 41 e 42.
- BAKIRTZIS, A.; PETRIDIS, V.; KAZARLIS, S. Genetic algorithm solution to the economic dispatch problem. *IEE proceedings-generation, transmission and distribution*, IET, v. 141, n. 4, p. 377–382, 1994. Citado na página 36.
- BOX, G. E.; MULLER, M. E. et al. A note on the generation of random normal deviates. *The annals of mathematical statistics*, Institute of Mathematical Statistics, v. 29, n. 2, p. 610–611, 1958. Citado na página 53.
- CHANDRAM, K.; SUBRAHMANYAM, N.; SYDULU, M. Root finding techniques for economic dispatch problems. In: IEEE. *Power and Energy Society General Meeting-Conversion and Delivery of Electrical Energy in the 21st Century, 2008 IEEE*. [S.l.], 2008. p. 1–8. Citado na página 36.

- CHATTERJEE, A.; MAHANTI, G. K.; CHATTERJEE, A. Design of a fully digital controlled reconfigurable switched beam concentric ring array antenna using firefly and particle swarm optimization algorithm. *Progress In Electromagnetics Research*, EMW Publishing, v. 36, p. 113–131, 2012. Citado na página 17.
- CHATURVEDI, K. T.; PANDIT, M.; SRIVASTAVA, L. Self-organizing hierarchical particle swarm optimization for nonconvex economic dispatch. *IEEE transactions on power systems*, IEEE, v. 23, n. 3, p. 1079–1087, 2008. Citado 3 vezes nas páginas 34, 36 e 37.
- CHEN, P.-H.; CHANG, H.-C. Large-scale economic dispatch by genetic algorithm. *IEEE transactions on power systems*, IEEE, v. 10, n. 4, p. 1919–1926, 1995. Citado 2 vezes nas páginas 33 e 36.
- CHEUNG, N. J.; DING, X.-M.; SHEN, H.-B. Adaptive firefly algorithm: parameter analysis and its application. *PloS one*, Public Library of Science, v. 9, n. 11, p. e112634, 2014. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 44.
- CHEUNG, N. J.; DING, X.-M.; SHEN, H.-B. A non-homogeneous firefly algorithm and its convergence analysis. *Journal of Optimization Theory and Applications*, Springer, v. 170, n. 2, p. 616–628, 2016. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 44.
- CHIANG, C.-L. Improved genetic algorithm for power economic dispatch of units with valve-point effects and multiple fuels. *IEEE transactions on power systems*, IEEE, v. 20, n. 4, p. 1690–1699, 2005. Citado 3 vezes nas páginas 30, 77 e 122.
- CLERC, M. The swarm and the queen: towards a deterministic and adaptive particle swarm optimization. In: IEEE. *Evolutionary Computation, 1999. CEC 99. Proceedings of the 1999 Congress on*. [S.l.], 1999. v. 3, p. 1951–1957. Citado 2 vezes nas páginas 25 e 26.
- CONOVER, W. *Practical nonparametric statistics*. [S.l.]: Wiley, 1998. 294–302 p. Citado na página 146.
- DIETERICH, J. M.; HARTKE, B. Empirical review of standard benchmark functions using evolutionary global optimization. *arXiv preprint arXiv:1207.4318*, 2012. Citado na página 25.
- EIBEN, A. E.; SMITH, J. E. et al. *Introduction to evolutionary computing*. [S.l.]: Springer, 2003. v. 53. Citado na página 55.
- FARAG, A.; AL-BAIYAT, S.; CHENG, T. Economic load dispatch multiobjective optimization procedures using linear programming techniques. *IEEE Transactions on Power systems*, IEEE, v. 10, n. 2, p. 731–738, 1995. Citado na página 36.
- FISTER, I.; YANG, X.-S.; BREST, J. A comprehensive review of firefly algorithms. *Swarm and Evolutionary Computation*, Elsevier, v. 13, p. 34–46, 2013. Citado 3 vezes nas páginas 41, 42 e 52.
- FISTER, I.; YANG, X.-S.; BREST, J. On the randomized firefly algorithm. In: *Cuckoo Search and Firefly Algorithm*. [S.l.]: Springer, 2014. p. 27–48. Citado 2 vezes nas páginas 54 e 55.
- FISTER, I. et al. Firefly algorithm: a brief review of the expanding literature. In: *Cuckoo Search and Firefly Algorithm*. [S.l.]: Springer, 2014. p. 347–360. Citado na página 17.

FLETCHER, R. Practical optimization methods. *Chichester: John Wiley and Sons*, 1987. Citado na página 17.

FLETCHER, R.; REEVES, C. M. Function minimization by conjugate gradients. *The computer journal*, Oxford University Press, v. 7, n. 2, p. 149–154, 1964. Citado na página 22.

FRANCISCO, R. B.; COSTA, M. F. P.; ROCHA, A. M. A. Experiments with firefly algorithm. In: SPRINGER. *International Conference on Computational Science and Its Applications*. [S.l.], 2014. p. 227–236. Citado na página 52.

GAING, Z.-L. Particle swarm optimization to solving the economic dispatch considering the generator constraints. *IEEE transactions on power systems*, IEEE, v. 18, n. 3, p. 1187–1195, 2003. Citado 4 vezes nas páginas 36, 81, 123 e 124.

GALASSI, M. et al. Gnu scientific library reference manual , isbn 0954612078. *Library available online at <http://www.gnu.org/software/gsl>*, 2015. Citado 2 vezes nas páginas 53 e 54.

GANDOMI, A. et al. Firefly algorithm with chaos. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, Elsevier, v. 18, n. 1, p. 89–98, 2013. Citado na página 17.

GLOVER, F. Future paths for integer programming and links to artificial intelligence. *Computers & operations research*, Elsevier, v. 13, n. 5, p. 533–549, 1986. Citado 2 vezes nas páginas 22 e 23.

GLOVER, F. Tabu search—part i. *ORSA Journal on computing*, INFORMS, v. 1, n. 3, p. 190–206, 1989. Citado na página 23.

GRIEWANK, A. O. Generalized descent for global optimization. *Journal of optimization theory and applications*, Springer, v. 34, n. 1, p. 11–39, 1981. Citado na página 25.

HANSEN, N. et al. *Real-parameter black-box optimization benchmarking 2009: Noiseless functions definitions*. Tese (Doutorado) — INRIA, 2009. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 25.

HOLLAND, J. H. *Adaptation in Natural and Artificial Systems*. [S.l.]: The University of Michigan Press, 1975. Citado na página 23.

HORNG, M.-H. Vector quantization using the firefly algorithm for image compression. *Expert Systems with Applications*, Elsevier, v. 39, n. 1, p. 1078–1091, 2012. Citado na página 17.

ISOTALO, J. Basics of statistics. *Finland: University of Tampere*, 2001. Citado 2 vezes nas páginas 145 e 146.

IZMAILOV, A.; SOLODOV, M. *Otimização, volume 1: condições de otimalidade, elementos de análise convexa e de dualidade*. [S.l.]: Impa, 2005. Citado na página 21.

JAMIL, M.; YANG, X.-S. A literature survey of benchmark functions for global optimisation problems. *International Journal of Mathematical Modelling and Numerical Optimisation*, Inderscience Publishers Ltd, v. 4, n. 2, p. 150–194, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 24.

- JONG, K. A. D. Analysis of the behavior of a class of genetic adaptive systems. 1975. Citado na página 26.
- JR, I. F. et al. A brief review of nature-inspired algorithms for optimization. *arXiv preprint arXiv:1307.4186*, 2013. Citado na página 26.
- KENNEDY, J.; EBERHART, R. Particle swarm optimization. In: *Proceedings of IEEE International Conference on Neural Networks IV*, pages. [S.l.: s.n.], 1995. v. 1000. Citado na página 23.
- KIRKPATRICK, S. et al. Optimization by simulated annealing. *science*, Washington, v. 220, n. 4598, p. 671–680, 1983. Citado na página 22.
- KRON, G. Tensorial analysis of integrated transmission systems part i. the six basic reference frames. *Transactions of the American Institute of Electrical Engineers*, IEEE, v. 70, n. 2, p. 1239–1248, 1951. Citado na página 35.
- KRON, G. Tensorial analysis of integrated transmission systems; part ii. off-nominal turn ratios. *Transactions of the American Institute of Electrical Engineers. Part III: Power Apparatus and Systems*, IEEE, v. 71, n. 1, p. 505–512, 1952. Citado na página 35.
- KRON, G. Tensorial analysis of integrated transmission systems; part iii. the "primitive" division. *Transactions of the American Institute of Electrical Engineers. Part III: Power Apparatus and Systems*, IEEE, v. 71, n. 1, p. 814–822, 1952. Citado na página 35.
- KRON, G. Tensorial analysis of integrated transmission systems; part iv. the interconnection of transmission systems. *Transactions of the American Institute of Electrical Engineers. Part III: Power Apparatus and Systems*, IEEE, v. 72, n. 2, p. 827–839, 1953. Citado na página 35.
- LEE, K. Y.; SODE-YOME, A.; PARK, J. H. Adaptive hopfield neural networks for economic load dispatch. *IEEE transactions on power systems*, IEEE, v. 13, n. 2, p. 519–526, 1998. Citado 2 vezes nas páginas 97 e 129.
- LEONIDOPOULOS, G. Economic operation of a power system. *Engineering costs and production economics*, Elsevier, v. 14, n. 4, p. 275–279, 1988. Citado na página 35.
- LIN, C.; VIVIANI, G. Hierarchical economic dispatch for piecewise quadratic cost functions. *IEEE transactions on power apparatus and systems*, IEEE, n. 6, p. 1170–1175, 1984. Citado 2 vezes nas páginas 31 e 77.
- LINDEN, R. *Algoritmos genéticos (2a edição)*. [S.l.]: Brasport, 2008. Citado na página 17.
- LUKASIK, S.; ZAK, S. Firefly algorithm for continuous constrained optimization tasks. In: SPRINGER. *ICCCI*. [S.l.], 2009. p. 97–106. Citado 5 vezes nas páginas 48, 50, 51, 52 e 61.
- LUKE, S. *Essentials of metaheuristics*. [S.l.]: Lulu Raleigh, 2009. v. 113. Citado 4 vezes nas páginas 23, 54, 62 e 69.

- MATSUMOTO, M.; NISHIMURA, T. Mersenne twister: a 623-dimensionally equidistributed uniform pseudo-random number generator. *ACM Transactions on Modeling and Computer Simulation (TOMACS)*, ACM, v. 8, n. 1, p. 3–30, 1998. Citado na página 54.
- MICHALEWICZ, Z.; FOGEL, D. B. *How to solve it: modern heuristics*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2013. Citado na página 54.
- MOLGA, M.; SMUTNICKI, C. Test functions for optimization needs. *Test functions for optimization needs*, p. 101, 2005. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 25.
- MOON, Y.-H. et al. A new economic dispatch algorithm for thermal unit generation scheduling in power system. In: IEEE. *Power Engineering Society Winter Meeting, 2000. IEEE*. [S.l.], 2000. v. 2, p. 1034–1039. Citado 2 vezes nas páginas 88 e 125.
- MOUSTAFA, F. S.; BADRA, N.; ABDELAZIZ, A. Y. Evaluation of the performance of different firefly algorithms to the economic load dispatch problem in electrical power systems. *International Journal of Engineering, Science and Technology*, MultiCraft Limited, v. 9, n. 2, p. 1–14, 2017. Citado na página 37.
- NARESH, R.; DUBEY, J.; SHARMA, J. Two-phase neural network based modelling framework of constrained economic load dispatch. *IEE Proceedings-Generation, Transmission and Distribution*, IET, v. 151, n. 3, p. 373–378, 2004. Citado na página 34.
- NIKNAM, T.; MOJARRAD, H. D.; MEYMAND, H. Z. Non-smooth economic dispatch computation by fuzzy and self adaptive particle swarm optimization. *Applied Soft Computing*, Elsevier, v. 11, n. 2, p. 2805–2817, 2011. Citado na página 37.
- OBIOMA, D. D.; IZUCHUKWU, A. M. Comparative analysis of techniques for economic dispatch of generated power with modified lambda-iteration method. In: IEEE. *Emerging & Sustainable Technologies for Power & ICT in a Developing Society (NIGERCON), 2013 IEEE International Conference on*. [S.l.], 2013. p. 231–237. Citado na página 36.
- PARK, J.-B. et al. An improved particle swarm optimization for nonconvex economic dispatch problems. *IEEE Transactions on Power Systems*, IEEE, v. 25, n. 1, p. 156–166, 2010. Citado 3 vezes nas páginas 37, 99 e 132.
- POHLHEIM, H. Examples of objective functions. 2007. Citado na página 25.
- QIN, Q. et al. Solving non-convex/non-smooth economic load dispatch problems via an enhanced particle swarm optimization. *Applied Soft Computing*, Elsevier, 2017. Citado 2 vezes nas páginas 37 e 72.
- RAHNAMAYAN, S.; TIZHOOSH, H. R.; SALAMA, M. M. A novel population initialization method for accelerating evolutionary algorithms. *Computers & Mathematics with Applications*, Elsevier, v. 53, n. 10, p. 1605–1614, 2007. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 24.
- RAO, S. S.; RAO, S. S. *Engineering optimization: theory and practice*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2009. Citado 2 vezes nas páginas 22 e 23.
- REDDY, K. S.; REDDY, M. D. Economic load dispatch using firefly algorithm. *International Journal of Engineering Research and Applications*, v. 2, n. 4, p. 2325–2330, 2012. Citado 2 vezes nas páginas 29 e 37.

- ROSENBROCK, H. An automatic method for finding the greatest or least value of a function. *The Computer Journal*, Oxford University Press, v. 3, n. 3, p. 175–184, 1960. Citado na página 24.
- SANDHUL, A.; SAINI, O.; SHALINI. Steepest descent method for economic load dispatch using matlab. *Journal of Engineering Computers and Applied Sciences*, v. 4, n. 6, 2015. Citado na página 36.
- SANTOS, A. F. d. et al. Firefly optimization to determine the precipitation field on south america. *Inverse Problems in Science and Engineering*, Taylor & Francis, v. 21, n. 3, p. 451–466, 2013. Citado na página 17.
- SINHA, N.; CHAKRABARTI, R.; CHATTOPADHYAY, P. Evolutionary programming techniques for economic load dispatch. *IEEE Transactions on evolutionary computation*, IEEE, v. 7, n. 1, p. 83–94, 2003. Citado 3 vezes nas páginas 17, 94 e 127.
- SÖRENSEN, K.; GLOVER, F. W. Metaheuristics. In: *Encyclopedia of operations research and management science*. [S.l.]: Springer, 2013. p. 960–970. Citado na página 22.
- SORENSEN, K.; SEVAUX, M.; GLOVER, F. A history of metaheuristics. *arXiv preprint arXiv:1704.00853*, 2017. Citado na página 17.
- SRIDHARAN, R. *Statistics for Research Projects*. 2015. <<http://www.mit.edu/~6.s085/notes/lecture1.pdf>>. Acesso em 29 de junho de 2018. Citado na página 145.
- SUBRAMANIAN, R.; THANUSHKODI, K. An efficient firefly algorithm to solve economic dispatch problems. *International Journal of Soft Computing and Engineering*, v. 2, n. 1, p. 52–55, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 29 e 37.
- SULAIMAN, M. H. et al. Firefly algorithm technique for solving economic dispatch problem. In: IEEE. *Power Engineering and Optimization Conference (PEDCO) Melaka, Malaysia, 2012 Ieee International*. [S.l.], 2012. p. 90–95. Citado na página 37.
- SUN, J. et al. Solving the power economic dispatch problem with generator constraints by random drift particle swarm optimization. *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, IEEE, v. 10, n. 1, p. 222–232, 2014. Citado 5 vezes nas páginas 17, 22, 36, 37 e 82.
- TALBI, E.-G. *Metaheuristics: from design to implementation*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2009. v. 74. Citado 3 vezes nas páginas 17, 22 e 23.
- VANARET, C. et al. Certified global minima for a benchmark of difficult optimization problems. 2014. Citado na página 25.
- WALTERS, D. C.; SHEBLE, G. B. Genetic algorithm solution of economic dispatch with valve point loading. *IEEE transactions on Power Systems*, IEEE, v. 8, n. 3, p. 1325–1332, 1993. Citado na página 30.
- WANG, C.; SHAHIDEHPOUR, S. Effects of ramp-rate limits on unit commitment and economic dispatch. *IEEE Transactions on Power Systems*, IEEE, v. 8, n. 3, p. 1341–1350, 1993. Citado na página 34.
- WANG, H. et al. Randomly attracted firefly algorithm with neighborhood search and dynamic parameter adjustment mechanism. *Soft Computing*, Springer, v. 21, n. 18, p. 5325–5339, 2017. Citado 3 vezes nas páginas 41, 42 e 43.

- WANG, H. et al. Firefly algorithm with random attraction. *International Journal of Bio-Inspired Computation*, Inderscience Publishers (IEL), v. 8, n. 1, p. 33–41, 2016. Citado na página 18.
- WILSON, R. A simplicial method for convex programming. *PhD thesis*, Harvard University Press, 1963. Citado na página 22.
- WOLPERT, D. H.; MACREARY, W. G. No free lunch theorems for optimization. *IEEE transactions on evolutionary computation*, IEEE, v. 1, n. 1, p. 67–82, 1997. Citado na página 26.
- WOOD, A. J.; WOLLENBERG, B. F. *Power generation, operation, and control*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2012. Citado na página 35.
- XING, B.; GAO, W.-J. *Innovative computational intelligence: a rough guide to 134 clever algorithms*. [S.l.]: Springer, 2014. Citado na página 26.
- YANG, H.-T.; YANG, P.-C.; HUANG, C.-L. A parallel genetic algorithm approach to solving the unit commitment problem: Implementation on the transputer networks. *IEEE Transactions on Power Systems*, IEEE, v. 12, n. 2, p. 661–668, 1997. Citado 3 vezes nas páginas 29, 92 e 126.
- YANG, X.-S. Firefly algorithms for multimodal optimization. In: SPRINGER. *International symposium on stochastic algorithms*. [S.l.], 2009. p. 169–178. Citado 17 vezes nas páginas 17, 26, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 46, 48, 50, 51, 52, 53, 54, 55 e 62.
- YANG, X.-S. Harmony search as a metaheuristic algorithm. In: *Music-inspired harmony search algorithm*. [S.l.]: Springer, 2009. p. 1–14. Citado na página 22.
- YANG, X.-S. Firefly algorithm, levy flights and global optimization. *Research and development in intelligent systems XXVI*, Springer, p. 209–218, 2010. Citado 2 vezes nas páginas 48 e 54.
- YANG, X.-S. *Nature-inspired metaheuristic algorithms*. [S.l.]: Luniver press, 2010. Citado 2 vezes nas páginas 46 e 55.
- YANG, X.-S. Efficiency analysis of swarm intelligence and randomization techniques. *Journal of Computational and Theoretical Nanoscience*, American Scientific Publishers, v. 9, n. 2, p. 189–198, 2012. Citado na página 52.
- YANG, X.-S. Multiobjective firefly algorithm for continuous optimization. *Engineering with Computers*, Springer, v. 29, n. 2, p. 175–184, 2013. Citado 4 vezes nas páginas 47, 48, 51 e 62.
- YANG, X.-S.; HE, X. Firefly algorithm: recent advances and applications. *International Journal of Swarm Intelligence*, Inderscience Publishers Ltd, v. 1, n. 1, p. 36–50, 2013. Citado na página 17.
- YANG, X.-S.; HOSSEINI, S. S. S.; GANDOMI, A. H. Firefly algorithm for solving non-convex economic dispatch problems with valve loading effect. *Applied soft computing*, Elsevier, v. 12, n. 3, p. 1180–1186, 2012. Citado 8 vezes nas páginas 17, 29, 37, 52, 61, 62, 72 e 82.

YAO, X.; LIU, Y.; LIN, G. Evolutionary programming made faster. *IEEE Transactions on Evolutionary computation*, IEEE, v. 3, n. 2, p. 82–102, 1999. Citado na página 24.

YU, S. et al. A novel wise step strategy for firefly algorithm. *International Journal of Computer Mathematics*, Taylor & Francis, v. 91, n. 12, p. 2507–2513, 2014. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 44.

ZHANG, L. et al. A novel hybrid firefly algorithm for global optimization. *PloS one*, Public Library of Science, v. 11, n. 9, p. e0163230, 2016. Citado 2 vezes nas páginas 48 e 52.

## **Apêndices**



## APÊNDICE A – DADOS DOS PROBLEMAS DE DESPACHO ECONÔMICO

Tabela 32: Dados do problema de DE com 3 unidades

Unidade	$P_i^{min}$	$P_i^{max}$	$a_i$	$b_i$	$c_i$	$e_i$	$f_i$
1	150	600	0,001562	7,92	561	300	0,0315
2	100	400	0,001940	7,85	310	200	0,0420
3	50	200	0,004820	7,97	78	150	0,0630

Fonte: Adaptado de Aragón, Esquivel e Coello (2015)

Tabela 33: Dados do problema de DE com 6 unidades

Unidade	$P_i^{min}$	$P_i^{max}$	$a_i$	$b_i$	$c_i$	$UR_i$	$DR_i$	$P_0$
1	100	500	0,0070	7,0	240	120	80	440
2	50	200	0,0095	10,0	200	90	50	170
3	80	300	0,0090	8,5	220	100	65	200
4	50	150	0,0090	11,0	200	90	50	150
5	50	200	0,0080	10,5	220	90	50	190
6	50	120	0,0075	12,0	190	90	50	110

Fonte: Adaptado de Aragón, Esquivel e Coello (2015)

Tabela 34: Zonas proibidas - sistema de 6 unidades

Unidade	Zonas proibidas
1	[210,240] [350,380]
2	[90,110] [140,160]
3	[150,170] [210,240]
4	[80, 90] [110,120]
5	[90,110] [140,150]
6	[75,85] [100,105]

Fonte: Adaptado de Aragón, Esquivel e Coello (2015)

$$B = \begin{bmatrix} 1,70 & 1,20 & 0,70 & -0,10 & -0,50 & -0,20 \\ 1,20 & 1,40 & 0,90 & 0,10 & -0,60 & -0,10 \\ 0,70 & 0,90 & 3,10 & 0,00 & -1,00 & -0,60 \\ -0,10 & 0,10 & 0,00 & 0,24 & -0,60 & -0,80 \\ -0,50 & -0,60 & -0,10 & -0,60 & 12,90 & -0,20 \\ -0,20 & -0,10 & -0,60 & -0,80 & -0,20 & 15,00 \end{bmatrix} \times 10^{-4} \quad (\text{A.1})$$

$$B_0 = [-0,39 \ -0,13 \ 0,70 \ 0,06 \ 0,22 \ -0,66] \times 10^{-3} \quad (\text{A.2})$$

$$B_{00} = 0,056 \quad (\text{A.3})$$

Tabela 35: Dados do problema de DE com 10 unidades

Unidade	Limites	$a_i$	$b_i$	$c_i$	$e_i$	$f_i$
1	[100, 196]	2,176e-3	-3,975e-1	2,697e+1	2,697e-2	-3,975e+0
	[196, 250]	1,861e-3	-3,059e-1	2,113e+1	2,113e-2	-3,059e+0
	-	-	-	-	-	-
2	[157, 230]	4,194e-3	-1,269e+0	1,184e+2	1,184e-1	-1,269e+1
	[50, 114]	1,138e-3	-3,988e-2	1,865e+0	1,865e-3	-3,988e-1
	[114, 157]	1,620e-3	-1,980e-1	1,365e+1	1,365e-2	-1,980e+0
3	[200, 332]	1,457e-3	-3,116e-1	3,979e+1	3,979e-2	-3,116e+0
	[388, 500]	1,176e-5	4,864e-1	-5,914e+1	-5,914e-2	4,864e+0
	[332, 388]	8,035e-4	3,389e-2	-2,876e+0	-2,876e-3	3,389e-1
4	[99, 138]	1,049e-3	-3,114e-2	1,983e+0	1,983e-3	-3,114e-1
	[138, 200]	2,758e-3	-6,348e-1	5,285e+1	5,285e-2	-6,348e+0
	[200, 265]	5,935e-3	-2,338e+0	2,668e+2	2,668e-1	-2,338e+1
5	[190, 338]	1,066e-3	-8,733e-2	1,392e+1	1,392e-2	-8,733e-1
	[338, 407]	1,597e-3	-5,206e-1	9,976e+1	9,976e-2	-5,206e+0
	[407, 490]	1,498e-4	4,462e-1	-5,399e+1	-5,399e-2	4,462e+0
6	[138, 200]	2,758e-3	-6,348e-1	5,285e+1	5,285e-2	-6,348e+0
	[85, 138]	1,049e-3	-3,114e-2	1,983e+0	1,983e-3	-3,114e-1
	[200, 265]	5,935e-3	-2,338e+0	2,668e+2	2,668e-1	-2,338e+1
7	[200, 331]	1,107e-3	-1,325e-1	1,893e+1	1,893e-2	-1,325e+0
	[331, 391]	1,165e-3	-2,267e-1	4,377e+1	4,377e-2	-2,267e+0
	[391, 500]	2,454e-4	3,559e-1	-4,335e+1	-4,335e-2	3,559e+0
8	[99, 138]	1,049e-3	-3,114e-2	1,983e+0	1,983e-3	-3,114e-1
	[138, 200]	2,758e-3	-6,348e-1	5,285e+1	5,285e-2	-6,348e+0
	[200, 265]	5,935e-3	-2,338e+0	2,668e+2	2,668e-1	-2,338e+1
9	[213, 370]	1,554e-3	-5,675e-1	8,853e+1	8,853e-2	-5,675e+0
	[370, 440]	6,121e-4	-1,817e-2	1,423e+1	1,423e-2	-1,817e-1
	[130, 213]	6,121e-4	-1,817e-2	1,423e+1	1,423e-2	-1,817e-1
10	[200, 362]	1,102e-3	-9,938e-2	1,397e+1	1,397e-2	-9,938e-1
	[407, 490]	4,164e-5	5,084e-1	-6,113e+1	-6,113e-2	5,084e+0
	[362, 407]	1,137e-3	-2,024e-1	4,671e+1	4,671e-2	-2,024e+0

Fonte: Adaptado de Chiang (2005)

Tabela 36: Dados do problema de DE com 13 unidades

Unidade	$P_i^{min}$	$P_i^{max}$	$a_i$	$b_i$	$c_i$	$e_i$	$f_i$
1	0	680	0,000280	8,10	550	300	35
2	0	360	0,000560	8,10	309	200	42
3	0	360	0,000560	8,10	307	150	42
4	60	180	0,003240	7,74	240	150	63
5	60	180	0,003240	7,74	240	150	63
6	60	180	0,003240	7,74	240	150	63
7	60	180	0,003240	7,74	240	150	63
8	60	180	0,003240	7,74	240	150	63
9	60	180	0,003240	7,74	240	150	63
10	40	120	0,002840	8,60	126	100	84
11	40	120	0,002840	8,60	126	100	84
12	55	120	0,002840	8,60	126	100	84
13	55	120	0,002840	8,60	126	100	84

Fonte: Adaptado de Aragón, Esquivel e Coello (2015)

Tabela 37: Dados do problema de DE com 15 unidades

Unidade	$P_i^{min}$	$P_i^{max}$	$a_i$	$b_i$	$c_i$	$UR_i$	$DR_i$	$P_i^0$
1	150	455	0,000299	10,10	671	80	120	400
2	150	455	0,000183	10,20	574	80	120	300
3	20	130	0,001126	8,80	374	130	130	105
4	20	130	0,001126	8,80	374	130	130	100
5	150	470	0,000205	10,40	461	80	120	90
6	135	460	0,000301	10,10	630	80	120	400
7	135	465	0,000364	9,80	548	80	120	350
8	60	300	0,000338	11,20	227	65	100	95
9	25	162	0,000807	11,20	173	60	100	105
10	25	160	0,001203	10,70	175	60	100	110
11	20	80	0,003586	10,20	186	80	80	60
12	20	80	0,005513	9,90	230	80	80	40
13	25	85	0,000371	13,10	225	80	80	30
14	15	55	0,001929	12,10	309	55	55	20
15	15	55	0,004447	12,40	323	55	55	20

Fonte: Adaptado de Gaing (2003)

Tabela 38: Zonas proibidas do problema de DE

Unidade	Zonas proibidas		
2	[185 225]	[305 335]	[420 450]
5	[180 200]	[305 335]	[390 420]
6	[230 255]	[365 395]	[430 455]
12	[30 40]	[55 65]	

Fonte: Adaptado de Gaing (2003)

$$B = \begin{bmatrix} 1,4 & 1,2 & 0,7 & -0,1 & -0,3 & -0,1 & -0,1 & -0,1 & -0,3 & -0,5 & -0,3 & -0,2 & 0,4 & 0,3 & -0,1 \\ 1,2 & 1,5 & 1,3 & 0,0 & -0,5 & -0,2 & 0,0 & 0,1 & -0,2 & -0,4 & -0,4 & -0,0 & 0,4 & 1,0 & -0,2 \\ 0,7 & 1,3 & 7,6 & -0,1 & -1,3 & -0,9 & -0,1 & 0,0 & -0,8 & -1,2 & -1,7 & -0,0 & -2,6 & 11,1 & -2,8 \\ -0,1 & 0,0 & -0,1 & 3,4 & -0,7 & -0,4 & 1,1 & 5,0 & 2,9 & 3,2 & -1,1 & -0,0 & 0,1 & 0,1 & -2,6 \\ -0,3 & -0,5 & -1,3 & -0,7 & 9,0 & 1,4 & -0,3 & -1,2 & -1,0 & -1,3 & 0,7 & -0,2 & -0,2 & -2,4 & -0,3 \\ -0,1 & -0,2 & -0,9 & -0,4 & 1,4 & 1,6 & -0,0 & -0,6 & -0,5 & -0,8 & 1,1 & -0,1 & -0,2 & -1,7 & 0,3 \\ -0,1 & 0,0 & -0,1 & 1,1 & -0,3 & -0,0 & 1,5 & 1,7 & 1,5 & 0,9 & -0,5 & 0,7 & -0,0 & -0,2 & -0,8 \\ -0,1 & 0,1 & 0,0 & 5,0 & -1,2 & -0,6 & 1,7 & 16,8 & 8,2 & 7,9 & -2,3 & -3,6 & 0,1 & 0,5 & -7,8 \\ -0,3 & -0,2 & -0,8 & 2,9 & -1,0 & -0,5 & 1,5 & 8,2 & 12,9 & 11,6 & -2,1 & -2,5 & 0,7 & -1,2 & -7,2 \\ -0,5 & -0,4 & -1,2 & 3,2 & -1,3 & -0,8 & 0,9 & 7,9 & 11,6 & 20,0 & -2,7 & -3,4 & 0,9 & -1,1 & -8,8 \\ -0,3 & -0,4 & -1,7 & -1,1 & 0,7 & 1,1 & -0,5 & -2,3 & -2,1 & -2,7 & 14,0 & 0,1 & 0,4 & -3,8 & 16,8 \\ -0,2 & -0,0 & -0,0 & -0,0 & -0,2 & -0,1 & 0,7 & -3,6 & -2,5 & -3,4 & 0,1 & 5,4 & -0,1 & -0,4 & 2,8 \\ 0,4 & 0,4 & -2,6 & 0,1 & -0,2 & -0,2 & -0,0 & 0,1 & 0,7 & 0,9 & 0,4 & -0,1 & 10,3 & -10,1 & 2,8 \\ 0,3 & 1,0 & 11,1 & 0,1 & -2,4 & -1,7 & -0,2 & 0,5 & -1,2 & -1,1 & -3,8 & -0,4 & -10,1 & 57,8 & -9,4 \\ -0,1 & -0,2 & -2,8 & -2,6 & -0,3 & 0,3 & -0,8 & -7,8 & -7,2 & -8,8 & 16,8 & 2,8 & 2,8 & -9,4 & 128,3 \end{bmatrix} \times 10^{-5} \quad (\text{A.4})$$

$$B_0 = [-0,1 \ -0,2 \ 2,8 \ -0,1 \ 0,1 \ -0,3 \ -0,2 \ -0,2 \ 0,6 \ 3,9 \ -1,7 \ -0,0 \ -3,2 \ 6,7 \ -6,4] \times 10^{-3} \quad (\text{A.5})$$

$$B_{00} = 0,0055 \quad (\text{A.6})$$

Tabela 39: Dados do problema de DE com 18 unidades

Unidade	$P_i^{min}$	$P_i^{max}$	$a_i$	$b_i$	$c_i$
1	7,00	15,00	0,602842	22,455260	85,741580
2	7,00	45,00	0,602842	22,455260	85,741580
3	13,00	25,00	0,214263	22,527890	108,983700
4	16,00	25,00	0,077837	26,752630	49,062630
5	16,00	25,00	0,077837	26,752630	49,062630
6	3,00	14,75	0,734763	80,393450	677,730000
7	3,00	14,75	0,734763	80,393450	677,730000
8	3,00	12,28	0,514474	13,194740	44,390000
9	3,00	12,28	0,514474	13,194740	44,390000
10	3,00	12,28	0,514474	13,194740	44,390000
11	3,00	12,28	0,514474	13,194740	44,390000
12	3,00	24,00	0,657079	56,709470	574,960300
13	3,00	16,20	1,236474	84,675790	820,377600
14	3,00	36,20	0,394571	59,590260	603,023700
15	3,00	45,00	0,420789	56,709470	567,936300
16	3,00	37,00	0,420789	55,965000	567,936300
17	3,00	45,00	0,420789	55,965,00	567,936300
18	3,00	16,20	1,236474	84,675790	820,377600

Fonte: Adaptado de Gaing (2003)

Tabela 40: Dados do problema de DE com 20 unidades

Unidade	$P_i^{min}$	$P_i^{max}$	$a_i$	$b_i$	$c_i$
1	150	600	0,00068	18,19	1.000
2	50	200	0,00071	19,26	970
3	50	200	0,00650	19,80	600
4	50	200	0,00500	19,10	700
5	50	160	0,00738	18,10	420
6	20	100	0,00612	19,26	360
7	25	125	0,00790	17,14	490
8	50	150	0,00813	18,92	660
9	50	200	0,00522	18,27	765
10	30	150	0,00573	18,92	770
11	100	300	0,00480	16,69	800
12	150	500	0,00310	16,76	970
13	40	160	0,00850	17,36	900
14	20	130	0,00511	18,70	700
15	25	185	0,00398	18,70	450
16	20	80	0,07120	14,26	370
17	30	85	0,00890	19,14	480
18	30	120	0,00713	18,92	680
19	40	120	0,00622	18,47	700
20	30	100	0,00773	19,79	850

Fonte: Adaptado de Gaing (2003)

$$B = \begin{bmatrix} 8,70 & 0,43 & -4,61 & 0,36 & 0,32 & -0,66 & 0,96 & -1,60 & 0,80 & -0,10 & 3,60 & 0,64 & 0,79 & 2,10 & 1,70 & 0,80 & -3,20 & 0,70 & 0,48 & -0,70 \\ 0,43 & 8,30 & -0,97 & 0,22 & 0,75 & -0,28 & 5,04 & 1,70 & 0,54 & 7,20 & -0,28 & 0,98 & -0,46 & 1,30 & 0,80 & -0,20 & 0,52 & -1,70 & 0,80 & 0,20 \\ -4,61 & -0,97 & 9,00 & -2,00 & 0,63 & 3,00 & 1,70 & -4,30 & 3,10 & -2,00 & 0,70 & -0,77 & 0,93 & 4,60 & -0,30 & 4,20 & 0,38 & 0,70 & -2,00 & 3,60 \\ 0,36 & 0,22 & -2,00 & 5,30 & 0,47 & 2,62 & -1,96 & 2,10 & 0,67 & 1,80 & -0,45 & 0,92 & 2,40 & 7,60 & -0,20 & 0,70 & -1,00 & 0,86 & 1,60 & 0,87 \\ 0,32 & 0,75 & 0,63 & 0,47 & 8,60 & -0,80 & 0,37 & 0,72 & -0,90 & 0,69 & 1,80 & 4,30 & -2,80 & -0,70 & 2,30 & 3,60 & 0,80 & 0,20 & -3,00 & 0,50 \\ -0,66 & -0,28 & 3,00 & 2,62 & -0,80 & 11,80 & -4,90 & 0,30 & 3,00 & -3,00 & 0,40 & 0,78 & 6,40 & 2,60 & -0,20 & 2,10 & -0,40 & 2,30 & 1,60 & -2,10 \\ 0,96 & 5,04 & 1,70 & -1,96 & 0,37 & -4,90 & 8,24 & -0,90 & 5,90 & -0,60 & 8,50 & -0,83 & 7,20 & 4,80 & -0,90 & -0,10 & 1,30 & 0,70 & 1,90 & 1,30 \\ -1,60 & 1,70 & -4,30 & 2,10 & 0,72 & 0,30 & -0,90 & 1,20 & -0,96 & 0,56 & 1,60 & 0,80 & -0,40 & 0,23 & 0,75 & -0,56 & 0,80 & -0,30 & 5,30 & 0,80 \\ 0,80 & 0,54 & 3,10 & 0,67 & -0,90 & 3,00 & 5,90 & -0,96 & 0,93 & -0,30 & 6,50 & 2,30 & 2,60 & 0,58 & -0,10 & 0,23 & -0,30 & 1,50 & 0,74 & 0,70 \\ -0,10 & 7,20 & -2,00 & 1,80 & 0,69 & -3,00 & -0,60 & 0,56 & -0,30 & 0,99 & -6,60 & 3,90 & 2,30 & -0,30 & 2,80 & -0,80 & 0,38 & 1,90 & 0,47 & -0,26 \\ 3,60 & -0,28 & 0,70 & -0,45 & 1,80 & 0,40 & 8,50 & 1,60 & 6,50 & -6,60 & 10,70 & 5,30 & -0,60 & 0,70 & 1,90 & -2,60 & 0,93 & -0,60 & 3,80 & -1,50 \\ 0,64 & 0,98 & -0,77 & 0,92 & 4,30 & 0,78 & -0,83 & 0,80 & 2,30 & 3,90 & 5,30 & 8,00 & 0,90 & 2,10 & -0,70 & 5,70 & 5,40 & 1,50 & 0,70 & 0,10 \\ 0,79 & -0,46 & 0,93 & 2,40 & -2,80 & 6,40 & 7,20 & -0,40 & 2,60 & 2,30 & -0,60 & 0,90 & 11,00 & 0,87 & -1,00 & 3,60 & 0,46 & -0,90 & 0,60 & 1,50 \\ 2,10 & 1,30 & 4,60 & 7,60 & -0,70 & 2,60 & 4,80 & 0,23 & 0,58 & -0,30 & 0,70 & 2,10 & 0,87 & 3,80 & 0,50 & -0,70 & 1,90 & 2,30 & -0,97 & 0,90 \\ 1,70 & 0,80 & -0,30 & -0,20 & 2,30 & -0,20 & -0,90 & 0,75 & -0,10 & 2,80 & 1,90 & -0,70 & -1,00 & 0,50 & 11,00 & 1,90 & -0,80 & 2,60 & 2,30 & -0,10 \\ 0,80 & -0,20 & 4,20 & 0,70 & 3,60 & 2,10 & -0,10 & -0,56 & 0,23 & -0,80 & -2,60 & 5,70 & 3,60 & -0,70 & 1,90 & 10,80 & 2,50 & -1,80 & 0,90 & -2,60 \\ -3,20 & 0,52 & 0,38 & -1,00 & 0,80 & -0,40 & 1,30 & 0,80 & -0,30 & 0,38 & 0,93 & 5,40 & 0,46 & 1,90 & -0,80 & 2,50 & 8,70 & 4,20 & -0,30 & 0,68 \\ 0,70 & -1,70 & 0,70 & 0,86 & 0,20 & 2,30 & 0,76 & -0,30 & 1,50 & -0,60 & 1,50 & -0,90 & 2,30 & 2,60 & -1,80 & 4,20 & 2,20 & 0,16 & -0,30 & 0,68 \\ 0,48 & 0,80 & -2,00 & 1,60 & -3,00 & 1,60 & 1,90 & 5,30 & 0,74 & 0,47 & 3,80 & 0,70 & 0,60 & -0,97 & 2,30 & 0,90 & -0,30 & 0,16 & 7,60 & 0,69 \\ -0,70 & 0,20 & 3,60 & 0,87 & 0,50 & -2,10 & 1,30 & 0,80 & 0,70 & -0,26 & -1,50 & 0,10 & 1,50 & 0,90 & -0,10 & -2,60 & 0,68 & -0,30 & 0,69 & 7,00 \end{bmatrix} \times 10^{-5} \tag{A.7}$$

Tabela 41: Dados do problema de DE com 26 unidades

Unidade	$P_i^{min}$	$P_i^{max}$	$a_i$	$b_i$	$c_i$	$d_i$
1	2,40	12,00	5,08e-009	0,025	25,54	24,38
2	2,40	12,00	-1,01e-008	0,026	25,67	24,41
3	2,40	12,00	1,01e-008	0,028	25,80	24,63
4	2,40	12,00	-5,08e-009	0,028	25,93	24,76
5	2,40	12,00	-5,72e-016	0,028	26,06	24,88
6	4,00	20,00	8,31e-008	0,011	37,55	117,75
7	4,00	20,00	8,56e-008	0,012	37,66	118,10
8	4,00	20,00	8,15e-008	0,013	37,77	118,45
9	4,00	20,00	8,29e-008	0,014	37,88	118,82
10	15,20	76,00	-5,80e-010	0,008	13,32	81,13
11	15,20	76,00	-5,47e-010	0,008	13,35	81,29
12	15,20	76,00	-5,49e-010	0,009	13,38	81,46
13	15,20	76,00	-5,50e-010	0,009	13,40	81,62
14	25,00	100,00	1,25e-018	0,006	18,00	217,89
15	25,00	100,00	-1,19e-018	0,006	18,09	218,33
16	25,00	100,00	2,44e-018	0,005	18,20	218,77
17	54,25	155,00	1,11e-010	0,004	10,69	142,73
18	54,25	155,00	1,03e-010	0,004	10,71	143,02
19	54,25	155,00	1,03e-010	0,004	10,73	143,31
20	54,25	155,00	1,03e-010	0,004	10,75	143,59
21	68,95	197,00	1,07e-010	0,002	23,00	259,13
22	68,95	197,00	1,04e-010	0,002	23,10	259,64
23	68,95	197,00	1,00e-010	0,002	23,20	260,17
24	140,00	350,00	-4,42e-019	0,001	10,86	177,05
25	100,00	400,00	-1,10e-019	0,001	7,49	310,00
26	100,00	400,00	-3,55e-020	0,001	7,50	311,91

Fonte: Adaptado de Moon et al. (2000)

Tabela 42: Dados do sistema de 38 unidades

Unidade	$P_{min}$	$P_{max}$	$a_i$	$b_i$	$c_i$
1	220	550	0,3133	796,90	64.782
2	220	550	0,3133	796,90	64.782
3	200	500	0,3127	795,50	64.670
4	200	500	0,3127	795,50	64.670
5	200	500	0,3127	795,50	64.670
6	200	500	0,3127	795,50	64.670
7	200	500	0,3127	795,50	64.670
8	200	500	0,3127	795,50	64.670
9	114	500	0,7075	915,70	172.832
10	114	500	0,7075	915,70	172.832

Continua na próxima página

Continuação da Tabela 42					
11	114	500	0,7515	884,20	176.003
12	114	500	0,7083	884,20	173.028
13	110	500	0,4211	1.250,10	91.340
14	90	365	0,5145	1.298,60	63.440
15	82	365	0,5691	1.298,60	65.468
16	120	325	0,5691	1.290,80	72.282
17	65	315	2,5881	238,10	190.928
18	65	315	3,8734	1.149,50	285.372
19	65	315	3,6842	1.269,10	271.376
20	120	272	0,4921	696,10	39.197
21	120	272	0,5728	660,20	45.576
22	110	260	0,3572	803,20	28.770
23	80	190	0,9415	818,20	36.902
24	10	150	52,1230	33,50	105.510
25	60	125	1,1421	805,40	22.233
26	55	110	2,0275	707,10	30.953
27	35	75	3,0744	833,60	17.044
28	20	70	16,7650	2.188,70	81.079
29	20	70	26,3550	1.024,40	124.767
30	20	70	30,5750	837,10	121.915
31	20	70	25,0980	1.305,20	120.780
32	20	60	33,7220	716,60	104.441
33	25	60	23,9150	1.633,90	83.224
34	18	60	32,5620	969,60	111.281
35	8	60	18,3620	2625,80	64.142
36	25	60	23,9150	1633,90	103.519
37	20	38	8,4820	694,70	13.547
38	20	38	9,6930	655,90	13.518

Fonte: Adaptado de Yang, Yang e Huang (1997)

Tabela 43: Dados do sistema de 40 unidades

Unidade	$P_{min}$	$P_{max}$	$a_i$	$b_i$	$c_i$	$e_i$	$f_i$
1	36	114	0,006900	6,73	94,70	100	0,0840
2	36	114	0,006900	6,73	94,70	100	0,0840
3	60	120	0,020280	7,07	309,54	100	0,0840
4	80	190	0,009420	8,18	369,03	150	0,0630
5	47	97	0,011400	5,35	148,89	120	0,0770
6	68	140	0,011420	8,05	222,33	100	0,0840
7	110	300	0,003570	8,03	278,71	200	0,0420
8	135	300	0,004920	6,99	391,98	200	0,0420
9	135	300	0,005730	6,60	455,76	200	0,0420
10	130	300	0,006050	12,90	722,82	200	0,0420
11	94	375	0,005150	12,90	635,20	200	0,0420
12	94	375	0,005690	12,80	654,69	200	0,0420
13	125	500	0,004210	12,50	913,40	300	0,0350
14	125	500	0,007520	8,84	1.760,40	300	0,0350
15	125	500	0,007080	9,15	1.728,30	300	0,0350
16	125	500	0,007080	9,15	1.728,30	300	0,0350
17	220	500	0,003130	7,97	647,85	300	0,0350
18	220	500	0,003130	7,95	649,69	300	0,0350
19	242	550	0,003130	7,97	647,83	300	0,0350
20	242	550	0,003130	7,97	647,81	300	0,0350
21	254	550	0,002980	6,63	785,96	300	0,0350

Continua na próxima página

Continuação da Tabela 43							
22	254	550	0,002980	6,63	785,96	300	0,0350
23	254	550	0,002840	6,66	794,53	300	0,0350
24	254	550	0,002840	6,66	794,53	300	0,0350
25	254	550	0,002770	7,10	801,32	300	0,0350
26	254	550	0,002770	7,10	801,32	300	0,0350
27	10	150	0,521240	3,33	1.055,10	120	0,0770
28	10	150	0,521240	3,33	1.055,10	120	0,0770
29	10	150	0,521240	3,33	1.055,10	120	0,0770
30	47	97	0,011400	5,35	148,89	120	0,0770
31	60	190	0,001600	6,43	222,92	150	0,0630
32	60	190	0,001600	6,43	222,92	150	0,0630
33	60	190	0,001600	6,43	222,92	150	0,0630
34	90	200	0,000100	8,95	107,87	200	0,0420
35	90	200	0,000100	8,62	116,58	200	0,0420
36	90	200	0,000100	8,62	116,58	200	0,0420
37	25	110	0,016100	5,88	307,45	80	0,0980
38	25	110	0,016100	5,88	307,45	80	0,0980
39	25	110	0,016100	5,88	307,45	80	0,0980
40	242	550	0,003130	7,97	647,83	300	0,0350

Fonte: Adaptado de Sinha, Chakrabarti e Chattopadhyay (2003)

Tabela 44: Dados do sistema de 110 unidades

Unidade	$P_{min}$	$P_{max}$	$a_i$	$b_i$	$c_i$
1	2,4	12	0,0253	25,547	24,389
2	2,4	12	0,0265	25,675	24,411
3	2,4	12	0,0280	25,803	24,638
4	2,4	12	0,0284	25,932	24,760
5	2,4	12	0,0286	26,061	24,888
6	4,0	20	0,0120	37,551	117,755
7	4,0	20	0,0126	37,664	118,108
8	4,0	20	0,0136	37,777	118,458
9	4,0	20	0,0143	37,890	118,821
10	15,2	76	0,0088	13,327	81,136
11	15,2	76	0,0089	13,354	81,298
12	15,2	76	0,0091	13,800	81,464
13	15,2	76	0,0093	13,407	81,626
14	25,0	100	0,0062	18,000	217,895
15	25,0	100	0,0061	18,100	218,335
16	25,0	100	0,0060	18,200	218,775
17	54,3	155	0,0046	10,694	142,735
18	54,3	155	0,0047	10,715	143,029
19	54,3	155	0,0048	10,737	143,318
20	54,3	155	0,0049	10,758	143,597
21	68,9	197	0,0026	23,000	259,131
22	68,9	197	0,0026	23,100	259,649
23	68,9	197	0,0026	23,200	260,176
24	140,0	350	0,0015	10,862	177,057
25	100,0	400	0,0019	7,492	210,002
26	100,0	400	0,0019	7,503	211,910
27	140,0	500	0,0014	12,000	210,000
28	140,0	500	0,0013	12,100	180,000
29	50,0	200	0,0026	12,200	240,000
30	25,0	100	0,0039	12,500	220,000

Continua na próxima página

Continuação da Tabela 44					
31	10,0	50	0,0051	23,000	60,000
32	5,0	20	0,0050	13,500	50,000
33	20,0	80	0,0078	13,200	200,000
34	75,0	250	0,0012	12,400	140,000
35	110,0	360	0,0038	10,300	120,000
36	130,0	400	0,0043	9,900	90,000
37	10,0	40	0,0011	13,400	80,000
38	20,0	70	0,0023	13,300	70,000
39	25,0	100	0,0034	12,900	115,000
40	20,0	120	0,0067	12,800	150,000
41	40,0	180	0,0056	12,700	40,000
42	50,0	220	0,0023	12,600	300,000
43	120,0	440	0,0012	7,400	250,000
44	160,0	560	0,0045	6,600	100,000
45	150,0	660	0,0022	6,500	160,000
46	200,0	700	0,0067	6,200	130,000
47	5,4	32	0,0353	26,547	34,389
48	5,4	32	0,0365	26,675	34,411
49	8,4	52	0,0380	26,803	34,638
50	8,4	52	0,0384	26,932	34,761
51	8,4	52	0,0386	17,061	34,888
52	12,0	60	0,0320	38,551	127,755
53	12,0	60	0,0326	36,664	128,108
54	12,0	60	0,0236	38,777	128,458
55	12,0	60	0,0243	38,890	128,821
56	25,2	96	0,0098	14,327	82,136
57	25,2	96	0,0099	14,354	82,298
58	35,0	100	0,0092	14,380	82,464
59	35,0	100	0,0094	14,407	82,626
60	45,0	120	0,0072	19,000	218,895
61	45,0	120	0,0071	19,100	219,335
62	45,0	120	0,0070	19,200	219,775
63	54,3	185	0,0066	11,694	143,735
64	54,3	185	0,0057	11,715	144,029
65	54,3	185	0,0058	11,737	144,318
66	54,3	185	0,0059	11,758	144,597
67	70,0	197	0,0036	24,000	269,131
68	70,0	197	0,0036	24,100	269,649
69	70,0	197	0,0036	24,200	270,176
70	150,0	360	0,0025	11,862	187,057
71	160,0	400	0,0029	8,492	320,002
72	160,0	400	0,0030	8,503	321,910
73	60,0	300	0,0054	13,327	52,136
74	50,0	250	0,0055	12,354	42,298
75	30,0	90	0,0099	11,380	32,464
76	12,0	50	0,0031	9,407	23,626
77	160,0	450	0,0024	14,000	220,000
78	150,0	600	0,0023	13,100	190,000
79	50,0	200	0,0036	13,200	250,000
80	20,0	120	0,0049	13,500	230,000
81	10,0	55	0,0061	24,000	70,000
82	12,0	40	0,0070	14,500	60,000
83	20,0	80	0,0088	14,200	210,000
84	50,0	200	0,0022	13,400	150,000
85	80,0	325	0,0048	11,300	130,000
86	120,0	440	0,0053	8,900	80,000

Continua na próxima página

Continuação da Tabela 44					
87	10,0	35	0,0021	14,400	90,000
88	20,0	55	0,0033	14,300	80,000
89	20,0	100	0,0034	13,900	125,000
90	40,0	220	0,0037	13,800	160,000
91	30,0	140	0,0066	13,700	50,000
92	40,0	100	0,0043	13,600	400,000
93	100,0	440	0,0022	8,400	260,000
94	100,0	500	0,0055	7,600	110,000
95	100,0	600	0,0032	7,500	170,000
96	200,0	700	0,0077	7,200	140,000
97	3,6	15	0,0353	26,547	26,389
98	3,6	15	0,0365	26,675	25,411
99	4,4	22	0,0380	26,803	25,638
100	4,4	22	0,0384	26,932	25,760
101	10,0	60	0,0210	15,300	65,000
102	10,0	80	0,0230	16,000	82,000
103	20,0	100	0,0240	20,200	86,000
104	20,0	120	0,0350	20,200	84,000
105	40,0	150	0,0340	25,600	75,000
106	40,0	280	0,0370	30,500	56,000
107	50,0	520	0,0390	32,500	67,000
108	30,0	150	0,0350	26,000	68,000
109	40,0	320	0,0280	25,800	69,000
110	20,0	200	0,0260	27,000	72,000

Fonte: Adaptado de Lee, Sode-Yome e Park (1998)

Tabela 45: Dados do sistema de 140 unidades

Unidade	$P_{min}$	$P_{max}$	$a_i$	$b_i$	$c_i$	$UR_i$	$DR_i$	$P^0$
1	71	119	0,032888	61,242	1.220,645	30	120	98,4
2	120	189	0,008280	41,095	1.315,118	30	120	134,0
3	125	190	0,003849	46,310	874,288	60	60	141,5
4	125	190	0,003849	46,310	874,288	60	60	183,3
5	90	190	0,042468	54,242	1.976,469	150	150	125,0
6	90	190	0,014992	61,215	1.338,087	150	150	91,3
7	280	490	0,007039	11,791	1.818,299	180	300	401,1
8	280	490	0,003079	15,055	1.133,978	180	300	329,5
9	260	496	0,005063	13,226	1.320,636	300	510	386,1
10	260	496	0,005063	13,226	1.320,636	300	510	427,3
11	260	496	0,005063	13,226	1.320,636	300	510	412,2
12	260	496	0,003552	14,498	1.106,539	300	510	370,1
13	260	506	0,003901	14,651	1.176,504	600	600	301,8
14	260	509	0,003901	14,651	1.176,504	600	600	368,0
15	260	506	0,003901	14,651	1.176,504	600	600	301,9
16	260	505	0,003901	14,651	1.176,504	600	600	476,4
17	260	506	0,002393	15,669	1.017,406	600	600	283,1
18	260	506	0,002393	15,669	1.017,406	600	600	414,1
19	260	505	0,003684	14,656	1.229,131	600	600	328,0
20	260	505	0,003684	14,656	1.229,131	600	600	389,4
21	260	505	0,003684	14,656	1.229,131	600	600	354,7
22	260	505	0,003684	14,656	1.229,131	600	600	262,0
23	260	505	0,004004	14,378	1.267,894	600	600	461,5
24	260	505	0,003684	14,656	1.229,131	600	600	371,6
25	280	537	0,001619	16,261	975,926	300	300	462,6

Continua na próxima página

Continuação da Tabela 45								
26	280	537	0,005093	13,362	1.532,093	300	300	379,2
27	280	549	0,000993	17,203	641,989	360	360	530,8
28	280	549	0,000993	17,203	641,989	360	360	391,9
29	260	501	0,002473	15,274	911,533	180	180	480,1
30	260	501	0,002547	15,212	910,533	180	180	319,0
31	260	506	0,003542	15,033	1.074,810	600	600	329,5
32	260	506	0,003542	15,033	1.074,810	600	600	333,8
33	260	506	0,003542	15,033	1.074,810	600	600	390,0
34	260	506	0,003542	15,033	1.074,810	600	600	432,0
35	260	500	0,003132	13,992	1.278,460	660	660	402,0
36	260	500	0,001323	15,679	861,742	900	900	428,0
37	120	241	0,002950	16,542	408,834	180	180	178,4
38	120	241	0,002950	16,542	408,834	180	180	194,1
39	423	774	0,000991	16,518	1.288,815	600	600	474,0
40	423	769	0,001581	15,815	1.436,251	600	600	609,8
41	3	19	0,902360	75,464	669,988	210	210	17,8
42	3	28	0,110295	129,544	134,544	366	366	6,9
43	160	250	0,024493	56,613	3.427,912	702	702	224,3
44	160	250	0,029156	54,451	3.751,772	702	702	210,0
45	160	250	0,024667	54,736	3.918,780	702	702	212,0
46	160	250	0,016517	58,034	3.379,580	702	702	200,8
47	160	250	0,026584	55,981	3.345,296	702	702	220,0
48	160	250	0,007540	61,520	3.138,754	702	702	232,9
49	160	250	0,016430	58,635	3.453,050	702	702	168,0
50	160	250	0,045934	44,647	5.119,300	702	702	208,4
51	165	504	0,000044	71,584	1.898,415	1350	1350	443,9
52	165	504	0,000044	71,584	1.898,415	1350	1350	426,0
53	165	504	0,000044	71,584	1.898,415	1350	1350	434,1
54	165	504	0,000044	71,584	1.898,415	1350	1350	402,5
55	180	471	0,002528	85,120	2.473,390	1350	1350	357,4
56	180	561	0,000131	87,682	2.781,705	720	720	423,0
57	103	341	0,010372	69,532	5.515,508	720	720	220,0
58	198	617	0,007627	78,339	3.478,300	2700	2700	369,4
59	100	312	0,012464	58,172	6.240,909	1500	1500	273,5
60	153	471	0,039441	46,636	9.960,110	1656	1656	336,0
61	163	500	0,007278	76,947	3.671,997	2160	2160	432,0
62	95	302	0,000044	80,761	1.837,383	900	900	220,0
63	160	511	0,000044	70,136	3.108,395	1200	1200	410,6
64	160	511	0,000044	70,136	3.108,395	1200	1200	422,7
65	196	490	0,018827	49,840	7.095,484	1014	1014	351,0
66	196	490	0,010852	65,404	3.392,732	1014	1014	296,0
67	196	490	0,018827	49,840	7.095,484	1014	1014	411,1
68	196	490	0,018827	49,840	7.095,484	1014	1014	263,2
69	130	432	0,034560	66,465	4.288,320	1350	1350	370,3
70	130	432	0,081540	22,941	13.813,001	1350	1350	418,7
71	137	455	0,023534	64,314	4.435,493	1350	1350	409,6
72	137	455	0,035475	45,017	9.750,750	1350	1350	412,0
73	195	541	0,000915	70,644	1.042,366	780	780	423,2
74	175	536	0,000044	70,959	1.159,895	1650	1650	428,0
75	175	540	0,000044	70,959	1.159,895	1650	1650	436,0
76	175	538	0,001307	70,302	1.303,990	1650	1650	428,0
77	175	540	0,000392	70,662	1.156,193	1650	1650	425,0
78	330	574	0,000087	71,101	2.118,968	1620	1620	497,2
79	160	531	0,000521	37,854	779,519	1482	1482	510,0
80	160	531	0,000498	37,768	829,888	1482	1482	470,0
81	200	542	0,001046	67,983	2.333,690	1668	1668	464,1

Continua na próxima página

Continuação da Tabela 45								
82	56	132	0,132050	77,838	2.028,954	120	120	118,1
83	115	245	0,096968	63,671	4.412,017	180	180	141,3
84	115	245	0,054868	79,458	2.982,219	120	180	132,0
85	115	245	0,054868	79,458	2.982,219	120	180	135,0
86	207	307	0,014382	93,966	3.174,939	120	180	252,0
87	207	307	0,013161	94,723	3.218,359	120	180	221,0
88	175	345	0,016033	66,919	3.723,822	318	318	245,9
89	175	345	0,013653	68,185	3.551,405	318	318	247,9
90	175	345	0,028148	60,821	4.322,615	318	318	183,6
91	175	345	0,013470	68,551	3.493,739	318	318	288,0
92	360	580	0,000064	2,842	226,799	18	18	557,4
93	415	645	0,000252	2,946	382,932	18	18	529,5
94	795	984	0,000022	3,096	156,987	36	36	800,8
95	795	978	0,000022	3,040	154,484	36	36	801,5
96	578	682	0,000203	1,709	332,834	138	204	582,7
97	615	720	0,000198	1,668	326,599	144	216	680,7
98	612	718	0,000215	1,789	345,306	144	216	670,7
99	612	720	0,000218	1,815	350,372	144	216	651,7
100	758	964	0,000193	2,726	370,377	48	48	921,0
101	755	958	0,000197	2,732	367,067	48	48	916,8
102	750	1007	0,000324	2,651	124,875	36	54	911,9
103	750	1006	0,000344	2,798	130,785	36	54	898,0
104	713	1013	0,000690	1,595	878,746	30	30	905,0
105	718	1020	0,000650	1,503	827,959	30	30	846,5
106	791	954	0,000233	2,425	432,007	30	30	850,9
107	786	952	0,000239	2,499	445,606	30	30	843,7
108	795	1006	0,000261	2,674	467,223	36	36	841,4
109	795	1013	0,000259	2,692	475,940	36	36	835,7
110	795	1021	0,000707	1,633	899,462	36	36	828,8
111	795	1015	0,000786	1,816	1.000,367	36	36	846,0
112	94	203	0,014355	89,830	1.269,132	120	120	179,0
113	94	203	0,014355	89,830	1.269,132	120	120	120,8
114	94	203	0,014355	89,830	1.269,132	120	120	121,0
115	244	379	0,030266	64,125	4.965,124	480	480	317,4
116	244	379	0,030266	64,125	4.965,124	480	480	318,4
117	244	379	0,030266	64,125	4.965,124	480	480	335,8
118	95	190	0,024027	76,129	2.243,185	240	240	151,0
119	95	189	0,001580	81,805	2.290,381	240	240	129,5
120	116	194	0,022095	81,140	1.681,533	120	120	130,0
121	175	321	0,076810	46,665	6.743,302	180	180	218,9
122	2	19	0,953443	78,412	394,398	90	90	5,4
123	4	59	0,000044	112,088	1.243,165	90	90	45,0
124	15	83	0,072468	90,871	1.454,740	300	300	20,0
125	9	53	0,000448	97,116	1.011,051	162	162	16,3
126	12	37	0,599112	83,244	909,269	114	114	20,0
127	10	34	0,244706	95,665	689,378	120	120	22,1
128	112	373	0,000042	91,202	1.443,792	1080	1080	125,0
129	4	20	0,085145	104,501	535,553	60	60	10,0
130	5	38	0,524718	83,015	617,734	66	66	13,0
131	5	19	0,176515	127,795	90,966	12	6	7,5
132	50	98	0,063414	77,929	974,447	300	300	53,2
133	5	10	2,740485	92,779	263,810	6	6	6,4
134	42	74	0,112438	80,950	1.335,594	60	60	69,1
135	42	74	0,041529	89,073	1.033,871	60	60	49,9
136	41	105	0,000911	161,288	1.391,325	528	528	91,0
137	17	51	0,005245	161,829	4.477,110	300	300	41,0

Continua na próxima página

Continuação da Tabela 45

138	7	19	0,234787	84,972	57,794	18	30	13,7
139	7	19	0,234787	84,972	57,794	18	30	7,4
140	26	40	1,111878	16,087	1.258,437	72	120	28,6

Fonte: Adaptado de Park et al. (2010)

## APÊNDICE B – SOLUÇÕES ÓTIMAS PARA OS PROBLEMAS DE DESPACHO ECONÔMICO

Tabela 46: Melhor solução - sistema de 3 unidades

Potência (MW)	Método		
	FA	NhFA-M	NhFA-R
$P_1$	349,4662	349,4662	349,4662
$P_2$	400,0000	400,0000	400,0000
$P_3$	100,5337	100,5337	100,5337
Custo (\$/h)	8.220,93	8.220,93	8.220,93

Fonte: Elaborado pelo autor

Tabela 47: Melhor solução - sistema de 6 unidades

Potência (MW)	Método		
	FA	NhFA-M	NhFA-R
$P_1$	448,0948	445,6155	446,0474
$P_2$	174,0206	174,5542	173,3460
$P_3$	262,4715	262,5782	261,7121
$P_4$	142,3638	142,4498	143,4172
$P_5$	162,7705	163,4236	162,1136
$P_6$	85,5882	86,6883	88,6302
$\sum P_i$	1.275,309709	1.275,309908	1.275,266701
$P_L$	12,309707	12,309935	12,266787
Custo (\$/h)	15.442,56	15.442,56	15.442,58

Fonte: Elaborado pelo autor

Tabela 48: Melhor solução - sistema de 10 unidades

Potência (MW)	Método		
	FA	NhFA-M	NhFA-R
$P_1$	218,8562	218,5185	219,0715
$P_2$	212,4440	210,4702	212,7072
$P_3$	281,7618	281,4849	280,6871
$P_4$	240,5794	239,9086	239,6344
$P_5$	279,5068	276,1217	277,1690
$P_6$	239,7734	239,3699	239,5021
$P_7$	287,9301	286,5191	286,4797
$P_8$	239,6421	239,6440	240,0432
$P_9$	429,0060	432,9527	428,8148
$P_{10}$	270,5002	275,0105	275,8910
$\sum P_i$	2700	2700	2700
Custo (\$/h)	623,94	623,95	623,95

Fonte: Elaborado pelo autor

Tabela 49: Melhor solução - sistema de 13 unidades

Potência (MW)	Método		
	FA	NhFA-M	NhFA-R
$P_1$	625,8056	554,3571	628,8566
$P_2$	335,1035	347,4504	322,8358
$P_3$	289,0909	348,1925	298,3076
$P_4$	60,0000	60,0000	60,0000
$P_5$	60,0000	60,0000	60,0000
$P_6$	60,0000	60,0000	60,0000
$P_7$	60,0000	60,0000	60,0000
$P_8$	60,0000	60,0000	60,0000
$P_9$	60,0000	60,0000	60,0000
$P_{10}$	40,0000	40,0000	40,0000
$P_{11}$	40,0000	40,0000	40,0000
$P_{12}$	55,0000	55,0000	55,0000
$P_{13}$	55,0000	55,0000	55,0000
$\sum P_i$	1800	1800	1800
Custo (\$/h)	18.040,00	18.028,16	18.014,29

Fonte: Elaborado pelo autor

Tabela 50: Melhor solução - sistema de 15 unidades

Potência (MW)	Método		
	FA	NhFA-M	NhFA-R
$P_1$	454,9423	454,9559	455,0000
$P_2$	380,0000	379,9752	380,0000
$P_3$	130,0000	130,0000	130,0000
$P_4$	129,9525	129,9712	129,9438
$P_5$	169,8089	169,8746	169,9068
$P_6$	459,9735	459,8976	459,4341
$P_7$	429,8408	429,9884	430,0000
$P_8$	74,7199	80,3897	68,8000
$P_9$	108,1956	62,9219	65,0131
$P_{10}$	111,9226	141,5406	156,3801
$P_{11}$	80,0000	79,7888	79,4584
$P_{12}$	74,6409	79,8879	79,8555
$P_{13}$	25,8624	25,2211	25,7925
$P_{14}$	15,0739	15,2434	15,0904
$P_{15}$	15,0845	19,9439	15,3473
$\sum P_i$	2.660,018383	2.659,600776	2.660,022421
$P_L$	30,019068	29,600956	30,021607
Custo (\$/h)	32.717,10	32.703,75	32.701,25

Fonte: Elaborado pelo autor

Tabela 51: Melhor solução - sistema de 18 unidades

Potência (MW)	Método		
	FA	NhFA-M	NhFA-R
$P_1$	15,0000	15,0000	15,0000
$P_2$	45,0000	45,0000	45,0000
$P_3$	24,9997	25,0000	25,0000
$P_4$	25,0000	25,0000	25,0000
$P_5$	25,0000	25,0000	25,0000
$P_6$	4,7312	5,1046	4,9946
$P_7$	4,0380	4,2140	5,1917
$P_8$	12,2795	12,2800	12,2800
$P_9$	12,2800	12,2800	12,2800
$P_{10}$	12,2800	12,2800	12,2800
$P_{11}$	12,2800	12,2800	12,2800
$P_{12}$	22,7086	22,7284	23,0294
$P_{13}$	3,0133	3,0623	3,0000
$P_{14}$	34,7232	35,2371	33,7609
$P_{15}$	34,9051	35,9409	34,5128
$P_{16}$	36,5493	36,7149	36,9700
$P_{17}$	37,2121	34,8609	36,4207
$P_{18}$	3,0000	3,0169	3,0000
$\sum P_i$	365	365	365
Custo (\$/h)	25.429,800763	25.431,455446	25.430,750673

Fonte: Elaborado pelo autor

Tabela 52: Melhor solução - sistema de 20 unidades

Potência (MW)	Método		
	FA	NhFA-M	NhFA-R
$P_1$	512,6427	506,3107	496,7948
$P_2$	134,1359	166,7183	184,5430
$P_3$	130,9025	134,6202	123,8275
$P_4$	106,1591	106,2081	98,8553
$P_5$	112,1791	112,4911	106,5283
$P_6$	79,0799	67,8677	63,5376
$P_7$	121,8333	91,9577	100,2162
$P_8$	121,1589	110,3834	113,9776
$P_9$	88,0010	106,5420	104,8020
$P_{10}$	115,3285	118,4093	97,3574
$P_{11}$	158,7019	161,6212	154,1133
$P_{12}$	289,9667	291,5793	290,1377
$P_{13}$	116,8416	121,7676	117,6914
$P_{14}$	55,2863	45,7966	44,9505
$P_{15}$	109,6085	112,3987	111,7662
$P_{16}$	35,9013	38,6891	36,7955
$P_{17}$	54,9267	61,2089	74,2888
$P_{18}$	85,0278	87,7644	97,3016
$P_{19}$	100,5328	100,8386	106,3113
$P_{20}$	63,7369	49,0035	67,6414
$\sum P_i$	2.591,951589	2.592,176418	2.591,437461
$P_L$	91,951726	92,177329	91,436629
Custo (\$/h)	62.466,519700	62.464,972530	62.464,129297

Fonte: Elaborado pelo autor

Tabela 53: Melhor solução - sistema de 26 unidades

Potência (MW)	Método		
	FA	NhFA-M	NhFA-R
$P_1$	2,4000	2,4000	2,4946
$P_2$	2,4000	2,4000	2,4241
$P_3$	2,4000	2,4000	2,4459
$P_4$	2,4389	2,4236	2,4580
$P_5$	2,4000	2,4267	2,4441
$P_6$	4,0033	4,0072	4,0063
$P_7$	4,0000	4,0060	4,0024
$P_8$	4,0000	4,0048	4,0000
$P_9$	4,0000	4,0059	4,0102
$P_{10}$	75,3303	75,9887	75,9708
$P_{11}$	75,6485	75,9998	75,9846
$P_{12}$	75,9874	75,9990	75,9531
$P_{13}$	75,4993	75,9744	76,0000
$P_{14}$	25,2529	35,6361	33,5059
$P_{15}$	30,2368	26,7895	27,5210
$P_{16}$	37,1526	28,5703	29,6344
$P_{17}$	155,0000	154,9977	155,0000
$P_{18}$	155,0000	154,9854	155,0000
$P_{19}$	155,0000	155,0000	154,9896
$P_{20}$	155,0000	154,9825	155,0000
$P_{21}$	68,9500	69,0875	68,9500
$P_{22}$	68,9500	68,9651	69,0719
$P_{23}$	68,9500	68,9500	69,1330
$P_{24}$	350,0000	350,0000	350,0000
$P_{25}$	400,0000	400,0000	400,0000
$P_{26}$	400,0000	400,0000	400,0000
$\sum P_i$	2.400	2.400	2.400
Custo (\$/h)	32.650,118298	32.644,333085	32.646,766123

Fonte: Elaborado pelo autor

Tabela 54: Melhor solução - sistema de 38 unidades

Potência (MW)	Método		
	FA	NhFA-M	NhFA-R
$P_1$	469,1408	410,5061	389,1033
$P_2$	425,7141	387,3911	443,8121
$P_3$	482,5417	455,6681	452,4361
$P_4$	404,6694	412,2456	430,5739
$P_5$	400,8765	451,7216	390,1661
$P_6$	402,5848	443,9145	438,2126
$P_7$	389,9779	474,7441	420,7473
$P_8$	484,5280	419,5780	456,1010
$P_9$	122,8128	127,5919	119,4323
$P_{10}$	114,4338	114,4527	130,1332
$P_{11}$	117,2136	123,5851	143,5287
$P_{12}$	116,7259	128,2768	137,0496
$P_{13}$	110,0000	110,0000	110,0000
$P_{14}$	90,0337	90,0000	90,0027
$P_{15}$	82,0000	82,0000	82,0009
$P_{16}$	120,0000	120,0160	120,0000
$P_{17}$	164,7340	173,3911	163,1588
$P_{18}$	65,0000	65,0000	65,0000
$P_{19}$	65,0000	65,0000	65,0000
$P_{20}$	271,2031	271,8053	271,6381

Continua na próxima página

Continuação da Tabela 54			
$P_{21}$	272,0000	270,1197	268,0452
$P_{22}$	258,9295	257,5999	253,8202
$P_{23}$	132,7293	120,2817	114,9047
$P_{24}$	10,1302	10,3024	10,5919
$P_{25}$	107,4035	93,2944	103,1870
$P_{26}$	67,8037	62,7615	75,6512
$P_{27}$	35,0000	38,3923	37,9901
$P_{28}$	20,0000	20,0000	20,0000
$P_{29}$	20,0000	20,0000	20,0071
$P_{30}$	20,0000	20,0036	20,0017
$P_{31}$	20,0118	20,0027	20,0017
$P_{32}$	20,0000	20,0000	20,0001
$P_{33}$	25,0000	25,0013	25,0000
$P_{34}$	18,0260	18,0000	18,0029
$P_{35}$	8,0000	8,0043	8,0071
$P_{36}$	25,0000	25,0000	25,0000
$P_{37}$	20,0065	24,3471	20,4020
$P_{38}$	20,7693	20,0012	21,2905
$\sum P_i$	6.000	6.000	6.000
Custo (\$/h)	9.416.957,849935	9.416.838,346630	9.416.017,997367

Fonte: Elaborado pelo autor

Tabela 55: Melhor solução - sistema de 40 unidades

Potência (MW)	Método		
	FA	NhFA-M	NhFA-R
$P_1$	110,8749	113,8424	111,5319
$P_2$	113,8772	112,2472	113,0313
$P_3$	119,9204	101,0588	97,4823
$P_4$	179,7471	180,0234	179,7498
$P_5$	92,7250	92,9372	90,6144
$P_6$	139,9918	139,9612	139,9723
$P_7$	299,9819	265,7506	299,9817
$P_8$	285,6326	285,1752	287,6211
$P_9$	284,6274	287,9360	285,3504
$P_{10}$	204,7809	130,1177	130,0856
$P_{11}$	94,2171	94,0000	94,0130
$P_{12}$	94,0936	168,8706	94,0519
$P_{13}$	125,0000	304,5097	304,5060
$P_{14}$	394,3786	394,1834	304,5097
$P_{15}$	394,2710	304,5634	394,2895
$P_{16}$	304,5675	304,4992	304,5281
$P_{17}$	489,2985	489,2752	489,3393
$P_{18}$	489,4279	489,3498	489,3149
$P_{19}$	511,2684	511,2828	511,2941
$P_{20}$	511,3719	511,2610	511,2531
$P_{21}$	523,3472	523,2762	523,2949
$P_{22}$	523,4262	523,4355	523,2522
$P_{23}$	523,4694	523,2761	523,1954
$P_{24}$	523,3023	523,4302	523,3361
$P_{25}$	523,7224	523,2739	523,3448
$P_{26}$	523,3706	523,3104	523,2910
$P_{27}$	10,0144	10,0409	10,0000

Continua na próxima página

Continuação da Tabela 55			
$P_{28}$	10,0281	10,0177	10,0363
$P_{29}$	10,0000	10,0164	10,0264
$P_{30}$	95,6855	94,1342	88,2851
$P_{31}$	190,0000	190,0000	189,9828
$P_{32}$	190,0000	189,9479	190,0000
$P_{33}$	190,0000	190,0000	189,9799
$P_{34}$	182,8606	187,3014	199,7622
$P_{35}$	199,4762	165,9362	198,4387
$P_{36}$	200,0000	199,9819	199,9689
$P_{37}$	110,0000	109,9552	110,0000
$P_{38}$	109,9990	109,9631	109,9746
$P_{39}$	109,9769	100,4478	109,9869
$P_{40}$	511,2676	511,4102	511,3235
$\sum P_i$	10.500	10.500	10.500
Custo (\$/h)	121.630,435092	121.649,776655	121.536,308797

Fonte: Elaborado pelo autor

Tabela 56: Melhor solução - sistema de 110 unidades

Potência (MW)	Método		
	FA	NhFA-M	NhFA-R
$P_1$	2,4017	2,4000	2,4721
$P_2$	2,4190	2,4042	2,4049
$P_3$	2,4013	2,4042	2,4072
$P_4$	2,4351	2,4302	2,4360
$P_5$	2,4010	2,4023	2,4065
$P_6$	4,0079	4,0055	4,0164
$P_7$	4,0120	4,0112	4,0278
$P_8$	4,0095	4,0046	4,0000
$P_9$	4,0015	4,0138	4,0181
$P_{10}$	20,6833	35,7555	23,5457
$P_{11}$	24,0824	39,1142	46,7794
$P_{12}$	15,8044	15,6812	68,1823
$P_{13}$	69,4124	67,0802	16,0545
$P_{14}$	25,5613	25,0218	25,0822
$P_{15}$	25,0939	25,0730	25,7988
$P_{16}$	26,0759	25,0574	25,3855
$P_{17}$	151,1553	151,2854	154,3346
$P_{18}$	153,8427	154,7796	154,9588
$P_{19}$	150,0231	154,4079	148,5520
$P_{20}$	153,8649	148,7072	153,9701
$P_{21}$	68,9000	68,9214	68,9000
$P_{22}$	68,9634	68,9000	68,9024
$P_{23}$	68,9269	68,9577	68,9748
$P_{24}$	342,9984	347,3640	349,9257
$P_{25}$	399,9871	400,0000	399,9353
$P_{26}$	399,9786	399,9745	400,0000
$P_{27}$	487,3096	440,2199	491,2340
$P_{28}$	489,3813	498,6761	475,8265
$P_{29}$	88,0786	168,8621	199,8958
$P_{30}$	87,2641	86,9938	97,3785
$P_{31}$	10,0267	10,0048	10,0847
$P_{32}$	6,3847	15,0513	16,1683

Continua na próxima página

Continuação da Tabela 56			
$P_{33}$	60,7548	65,1354	23,5335
$P_{34}$	216,4924	207,3264	240,3015
$P_{35}$	346,9849	356,4362	351,3450
$P_{36}$	397,0073	385,6541	399,4384
$P_{37}$	37,7015	12,0614	21,0619
$P_{38}$	66,8663	58,7855	38,5613
$P_{39}$	72,6654	64,4238	78,0031
$P_{40}$	62,6119	33,0291	61,4570
$P_{41}$	153,9087	153,9106	177,2283
$P_{42}$	213,1579	213,0468	219,1554
$P_{43}$	440,0000	439,9660	439,9791
$P_{44}$	559,9012	560,0000	559,9321
$P_{45}$	659,9915	660,0000	659,9833
$P_{46}$	656,7909	677,2217	653,5190
$P_{47}$	5,4155	5,4548	5,4010
$P_{48}$	5,5170	5,4006	5,4230
$P_{49}$	8,4086	8,4000	8,4000
$P_{50}$	8,4382	8,4027	8,4052
$P_{51}$	8,4000	8,5845	8,4752
$P_{52}$	12,0008	12,0008	12,0017
$P_{53}$	12,0037	12,0116	12,0000
$P_{54}$	12,0162	12,0037	12,0000
$P_{55}$	12,0000	12,0000	12,0128
$P_{56}$	25,8461	36,8065	32,0153
$P_{57}$	90,8568	26,4753	55,8529
$P_{58}$	44,3356	54,6325	76,8416
$P_{59}$	35,5318	35,1642	42,2739
$P_{60}$	45,0000	45,0033	45,0264
$P_{61}$	45,0119	45,0000	45,0202
$P_{62}$	45,2046	45,0088	45,0570
$P_{63}$	147,2236	168,6938	184,2190
$P_{64}$	176,0078	180,7368	179,6528
$P_{65}$	184,2713	184,6452	144,1601
$P_{66}$	177,4097	135,0133	176,4703
$P_{67}$	70,0082	70,0798	70,0185
$P_{68}$	70,0006	70,0702	70,0083
$P_{69}$	70,0191	70,1860	70,0129
$P_{70}$	353,9761	358,6591	338,3828
$P_{71}$	399,9293	399,9705	399,9097
$P_{72}$	393,6419	399,9969	399,0345
$P_{73}$	217,7586	147,8910	183,1101
$P_{74}$	147,6243	185,1243	149,8351
$P_{75}$	89,8764	83,7593	89,9091
$P_{76}$	49,9171	49,5351	49,9402
$P_{77}$	163,7825	198,4912	165,4486
$P_{78}$	471,3324	531,4456	365,5910
$P_{79}$	158,4665	161,4130	134,9816
$P_{80}$	108,9537	88,0077	86,9258
$P_{81}$	10,0000	10,0045	10,0049
$P_{82}$	30,0818	16,9861	29,0251
$P_{83}$	79,7222	30,0859	20,6412
$P_{84}$	180,2794	174,6357	177,0924
$P_{85}$	286,2452	321,4546	311,2402
$P_{86}$	438,0538	439,8900	438,0519
$P_{87}$	22,9005	30,5914	30,6735
$P_{88}$	20,0000	38,5218	30,2576

Continua na próxima página

Continuação da Tabela 56			
$P_{89}$	44,3841	51,3298	46,9238
$P_{90}$	107,7404	164,7406	212,7846
$P_{91}$	93,7554	116,2459	123,0965
$P_{92}$	89,5045	97,4653	83,2361
$P_{93}$	439,9937	440,0000	439,9762
$P_{94}$	499,4418	494,5021	499,8568
$P_{95}$	600,0000	600,0000	600,0000
$P_{96}$	554,8215	480,9749	517,9331
$P_{97}$	3,6147	3,6127	3,6072
$P_{98}$	3,6229	3,6000	3,6144
$P_{99}$	4,4798	4,4398	4,4341
$P_{100}$	4,4197	4,4135	4,5552
$P_{101}$	19,6423	19,1637	15,8209
$P_{102}$	34,2284	10,1536	11,7364
$P_{103}$	20,0335	20,0570	20,0070
$P_{104}$	20,0046	20,0289	20,0080
$P_{105}$	40,0966	40,0018	40,0404
$P_{106}$	40,0000	40,0315	40,0053
$P_{107}$	50,0000	50,0000	50,0000
$P_{108}$	30,0000	30,0002	30,0029
$P_{109}$	40,0000	40,0026	40,0000
$P_{110}$	20,0246	20,0358	20,0000
$\sum P_i$	15.000	15.000	15.000
Custo (\$/h)	198.947,740714	198.742,665444	198.594,478928

Fonte: Elaborado pelo autor

Tabela 57: Melhor solução - sistema de 140 unidades

Potência (MW)	Método		
	FA	NhFA-M	NhFA-R
$P_1$	118,9967	104,9313	104,3300
$P_2$	163,9645	163,9743	163,9122
$P_3$	189,9311	178,4462	189,9519
$P_4$	189,9677	189,7354	189,8977
$P_5$	168,5459	129,4825	168,5474
$P_6$	154,5846	186,3544	130,6894
$P_7$	489,9906	489,9301	489,9578
$P_8$	490,0000	489,9829	489,9601
$P_9$	495,9411	495,9876	496,0000
$P_{10}$	495,9410	495,9536	495,9713
$P_{11}$	496,0000	495,9703	495,9997
$P_{12}$	496,0000	495,9307	495,9853
$P_{13}$	505,9549	505,9461	506,0000
$P_{14}$	509,0000	508,9836	508,9841
$P_{15}$	505,9989	506,0000	505,9976
$P_{16}$	505,0000	505,0000	505,0000
$P_{17}$	505,9805	506,0000	505,9541
$P_{18}$	506,0000	505,9990	505,9997
$P_{19}$	505,0000	504,8124	504,9534
$P_{20}$	504,9368	505,0000	504,9840
$P_{21}$	504,9531	505,0000	504,9236
$P_{22}$	504,8574	505,0000	505,0000
$P_{23}$	504,9987	504,9551	504,9466

Continua na próxima página

Continuação da Tabela 57			
$P_{24}$	504,9908	505,0000	505,0000
$P_{25}$	537,0000	536,9813	536,8060
$P_{26}$	536,9695	536,9458	536,8117
$P_{27}$	549,0000	549,0000	548,9884
$P_{28}$	549,0000	548,9575	548,9795
$P_{29}$	500,9228	500,9869	501,0000
$P_{30}$	498,9948	498,9397	498,9838
$P_{31}$	505,9355	505,9938	505,9858
$P_{32}$	505,9404	505,9718	505,8451
$P_{33}$	505,8426	505,9671	506,0000
$P_{34}$	506,0000	505,9876	505,9915
$P_{35}$	500,0000	499,9320	500,0000
$P_{36}$	500,0000	499,9871	499,9532
$P_{37}$	240,9962	241,0000	240,9012
$P_{38}$	240,8732	240,9870	240,9245
$P_{39}$	774,0000	773,9717	773,9723
$P_{40}$	768,9585	769,0000	769,0000
$P_{41}$	7,9636	13,2938	4,7147
$P_{42}$	3,6112	3,1082	3,0150
$P_{43}$	228,1689	245,8970	202,6734
$P_{44}$	244,5943	240,5671	246,0107
$P_{45}$	241,1535	192,6656	214,7895
$P_{46}$	185,8231	249,1504	241,3259
$P_{47}$	161,3815	211,6837	234,3220
$P_{48}$	249,9095	246,4000	232,8646
$P_{49}$	212,4466	202,6117	188,4010
$P_{50}$	249,5165	232,7262	238,3878
$P_{51}$	226,4197	190,5585	183,1079
$P_{52}$	457,2472	311,0526	457,2734
$P_{53}$	299,5723	382,6780	309,4083
$P_{54}$	195,9786	167,9466	287,9527
$P_{55}$	180,0590	182,0234	180,1900
$P_{56}$	180,0000	180,0095	181,0862
$P_{57}$	210,9719	177,5877	236,4432
$P_{58}$	198,3703	198,0830	202,5139
$P_{59}$	184,1411	309,4207	295,3405
$P_{60}$	353,0363	264,6332	238,4218
$P_{61}$	166,8264	165,8769	178,5428
$P_{62}$	159,3272	98,4399	101,9226
$P_{63}$	205,7085	173,7591	506,8744
$P_{64}$	254,1682	229,5126	168,5738
$P_{65}$	435,1942	370,3959	284,5166
$P_{66}$	372,5519	234,9391	275,0128
$P_{67}$	432,5768	474,2237	323,5047
$P_{68}$	485,4282	489,2027	478,2267
$P_{69}$	151,3129	137,7790	155,2326
$P_{70}$	234,6165	235,0342	339,4200
$P_{71}$	400,5984	257,9505	161,4775
$P_{72}$	325,5906	451,1188	451,1597
$P_{73}$	269,1183	401,1555	244,4085
$P_{74}$	278,9048	187,0926	211,7544
$P_{75}$	332,2221	228,1488	238,5277
$P_{76}$	208,3413	264,8979	257,9702
$P_{77}$	274,5973	179,7486	226,5420
$P_{78}$	364,4424	550,7813	334,6135
$P_{79}$	531,0000	530,9207	531,0000

Continua na próxima página

Continuação da Tabela 57			
$P_{80}$	530,4733	530,9088	530,9986
$P_{81}$	210,1404	483,5635	429,5362
$P_{82}$	57,4086	56,3439	57,2749
$P_{83}$	115,4040	155,3108	121,5151
$P_{84}$	115,0006	115,0440	115,0262
$P_{85}$	115,0000	115,0000	121,0409
$P_{86}$	207,0187	208,3466	207,1700
$P_{87}$	207,3347	208,0911	207,9269
$P_{88}$	187,6552	242,4596	258,7264
$P_{89}$	185,0111	183,5491	209,2580
$P_{90}$	180,9313	199,7441	299,6029
$P_{91}$	284,8599	176,4196	184,7143
$P_{92}$	575,3783	575,3997	575,3945
$P_{93}$	547,4659	547,4543	547,4844
$P_{94}$	836,7686	836,7703	836,7697
$P_{95}$	837,4989	837,4784	837,4907
$P_{96}$	682,0000	681,9478	681,9968
$P_{97}$	719,9952	720,0000	719,9826
$P_{98}$	717,9895	717,9279	717,9992
$P_{99}$	719,9435	719,9490	719,9828
$P_{100}$	963,9519	963,9953	963,9655
$P_{101}$	957,9209	957,9927	957,9050
$P_{102}$	947,8542	947,8474	947,8805
$P_{103}$	933,9889	933,9578	933,9731
$P_{104}$	934,9614	934,9881	934,9839
$P_{105}$	876,4209	876,4492	876,5000
$P_{106}$	880,8910	880,8602	880,8795
$P_{107}$	873,6200	873,6529	873,6942
$P_{108}$	877,4000	877,3943	877,3464
$P_{109}$	871,6978	871,6996	871,6671
$P_{110}$	864,7973	864,6932	864,7592
$P_{111}$	881,9492	881,9408	881,9491
$P_{112}$	94,0000	101,6703	96,0883
$P_{113}$	94,6190	94,2721	101,0331
$P_{114}$	95,0082	94,7564	94,6310
$P_{115}$	283,2558	265,1697	248,7321
$P_{116}$	250,8196	244,0876	244,9560
$P_{117}$	251,7391	280,0752	316,3972
$P_{118}$	100,8178	106,4413	98,6232
$P_{119}$	95,0062	95,0521	95,1039
$P_{120}$	116,2290	151,7929	116,5201
$P_{121}$	175,0170	175,0375	175,0332
$P_{122}$	2,2934	13,7970	5,9095
$P_{123}$	4,1937	4,0018	4,0667
$P_{124}$	17,9566	50,4343	17,9704
$P_{125}$	16,8487	9,0428	9,6462
$P_{126}$	12,1057	12,8264	12,0334
$P_{127}$	10,0722	10,1391	10,4186
$P_{128}$	112,1000	113,5356	112,2376
$P_{129}$	5,3383	4,1701	4,7796
$P_{130}$	7,9642	5,8476	12,7858
$P_{131}$	5,6774	5,0516	5,0309
$P_{132}$	87,5833	53,8799	72,2288
$P_{133}$	7,5291	5,1438	5,1156
$P_{134}$	43,9970	42,0021	43,6055
$P_{135}$	42,8666	45,0454	42,4348

Continua na próxima página

Continuação da Tabela 57			
$P_{136}$	41,0096	41,0012	41,0302
$P_{137}$	17,0008	17,0114	17,0742
$P_{138}$	7,0483	15,2244	10,9116
$P_{139}$	18,1326	7,9760	8,3133
$P_{140}$	36,1812	32,2749	27,2827
$\sum P_i$	42.342	42.342	42.342
Custo (\$/h)	1.667.802,032183	1.666.196,543986	1.666.657,491773

Fonte: Elaborado pelo autor



## APÊNDICE C – FUNDAMENTOS DE ESTATÍSTICA

A estatística pode ser definida como um corpo de métodos para coletar e analisar dados (AGRESTI; AGRESTI, 1970), sendo o que é utilizado para descobrir a verdade ou modelo por baixo destes dados (SRIDHARAN, 2015).

Segundo Isotalo (2001), a estatística provê métodos para:

- Planejar e executar estudos de pesquisa (Planejamento);
- Sumarizar e explorar os dados (Descrição);
- Fazer previsões e generalizações sobre os fenômenos representados pelos dados (Inferência).

O planejamento está relacionado com a coleta da amostra para o estudo comparativo. No caso deste trabalho, uma amostra é o conjunto de custos obtidos por uma metaheurística em um dado problema. Ou seja, de um conjunto de 100 execuções, obtêm-se 100 custos que compõem a amostra correspondente ao método e problema em questão.

Como a técnica de composição da amostra já está definida, foram então empregadas algumas técnicas para a análise dos dados gerados, a fim de se obter algumas conclusões.

A descrição dos dados foi realizada com a utilização de medidas como a média e o desvio padrão. Além disso, as medidas separatrizes e o diagrama de caixa também foram utilizados para a análise descritiva dos dados.

Finalmente, para a realização de inferência sobre os dados, foi utilizado o teste de Friedman.

### C.1 DESCRIÇÃO

A medida de centralização dos dados mais comum é a média aritmética (ISOTALO, 2001), que é definida para uma amostra de  $N$  valores segundo a Equação (C.1).

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N} \quad (\text{C.1})$$

Em C.1,  $x_i$  é o  $i$ -ésimo valor da amostra.

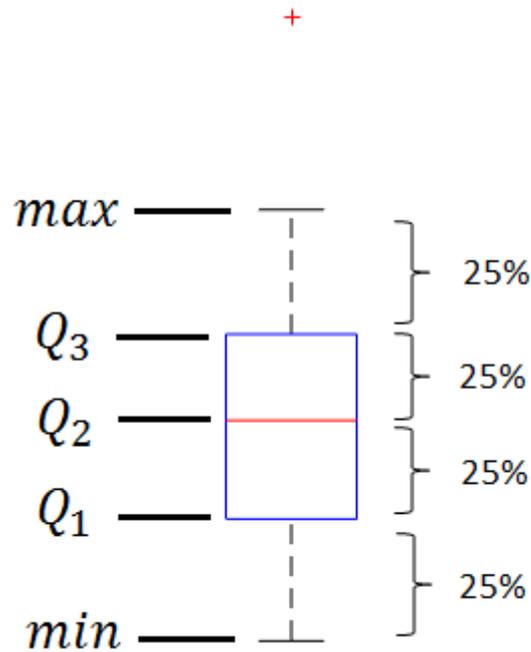
Enquanto a média define a posição central dos valores da amostra, o desvio padrão define a dispersão dos valores em torno deste ponto central. A Equação (C.2) apresenta a definição do desvio padrão para uma amostra de tamanho  $N$ .

$$S_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{N - 1}} \quad (\text{C.2})$$

Quanto menor o valor do desvio padrão, mais denso é o agrupamento de valores em torno da média.

O quartis são valores que dividem a amostra em quatro partes iguais, sendo eles denotados por:  $Q_1$ ,  $Q_2$  e  $Q_3$  (ISOTALO, 2001). O quartil  $Q_1$  é o valor tal que, 25% dos

Figura 41: Exemplo de diagrama de caixa



valores da amostra têm valor inferior a ele, e 75% têm valor superior. De maneira similar, o quartil  $Q_2$  (ou mediana) divide os valores da amostra exatamente na metade, e, o quartil  $Q_3$  tem 75% dos valores abaixo e 25% dos valores acima de si.

O diagrama de caixa por sua vez, é construído utilizando-se um sumário de cinco números da amostra:  $min$ ,  $Q_1$ ,  $Q_2$ ,  $Q_3$  e  $max$  (ISOTALO, 2001). Onde,  $min$  e  $max$  são o menor e o maior valor da amostra, respectivamente. A Figura 41 apresenta um exemplo de diagrama de caixa. No diagrama, os *outliers* são apresentados em vermelho, fora do intervalo  $[min, max]$ .

## C.2 INFERÊNCIA - TESTE DE FRIEDMAN

O teste de Friedman é uma forma de avaliar as diferenças de desempenho entre metaheurísticas baseando-se no conjunto de soluções obtidas. Neste teste, as conclusões tiradas são associadas a um determinado grau de certeza, o que é importante já que permite estabelecer um nível de relevância para os resultados. O teste de Friedman apresentado nesta seção é baseado na descrição de Conover (1998).

Supondo que na análise em questão foram selecionadas para comparação  $k$  metaheurísticas em  $b$  problemas. A tabela de soluções deve ser similar à Tabela 58. Onde  $X_{ij}$  é a solução encontrada pela metaheurística  $j$  no problema  $i$ . É importante notar que  $X_{ij}$  é um termo genérico, podendo ser na prática a melhor ou a média das soluções obtidas de várias execuções da metaheurística para o problema em questão.

Existem duas hipóteses no teste de Friedman, sendo estas a hipótese nula ( $H_0$ ) e

Tabela 58: Tabela exemplo de soluções para análise

Problema	Metaheurística 1	Metaheurística 2	...	Metaheurística $k$
Problema 1	$X_{11}$	$X_{12}$	...	$X_{1k}$
Problema 2	$X_{21}$	$X_{22}$	...	$X_{2k}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
Problema $b$	$X_{b1}$	$X_{b2}$	...	$X_{bk}$

Fonte: Elaborado pelo autor

a hipótese alternativa ( $H_1$ ), as quais podem ser descritas da seguinte forma:

- $H_0$ : Não existe diferença significativa entre as metaheurísticas; e
- $H_1$ : Pelo menos uma das metaheurísticas tende a ter melhores soluções que as outras.

A ideia é que com um determinado grau de certeza possam ser identificadas quais metaheurísticas são melhores. Este grau de certeza é cada vez mais alto a medida que o número de problemas considerados para as metaheurísticas é maior.

O primeiro passo do teste de Friedman é a realização do ranqueamento das metaheurísticas para cada problema, atribuindo 1 para a melhor e  $k$  para a pior. A classificação (*rank*) de uma determinada solução  $X_{ij}$  é representado por  $R(X_{ij})$ . Em seguida devem ser calculados os coeficientes  $A_2$ ,  $B_2$  e  $T_2$ .

A classificação total de uma determinada metaheurística  $j$  nos  $b$  problemas considerados é dado pela Equação (C.3).

$$R_j^{Total} = \sum_{i=1}^b R(X_{ij}) \quad (C.3)$$

De maneira similar, a classificação média da metaheurística  $j$  é calculado segundo a Equação (C.4).

$$R_j^{Mean} = \frac{1}{b} \sum_{i=1}^b R(X_{ij}) \quad (C.4)$$

Os coeficientes  $A_2$  e  $B_2$  são calculados de acordo com as Equações (C.5) e (C.6).

$$A_2 = \sum_{i=1}^b \sum_{j=1}^k [R(X_{ij})]^2 \quad (C.5)$$

$$B_2 = \frac{1}{b} \sum_{j=1}^k [R_j^{Total}]^2 \quad (C.6)$$

Por fim, a estatística do teste é dada pelo coeficiente  $T_2$ , que é calculado de acordo com a Equação (C.7).

$$T_2 = \frac{(b-1)[B_2 - \frac{bk(k+1)^2}{4}]}{A_2 - B_2} \quad (C.7)$$

A hipótese  $H_0$  é rejeitada com um nível de significância  $\alpha$  se  $T_2$  for maior que o quantil  $(1 - \alpha)$  da distribuição F com  $k_1 = k - 1$  e  $k_2 = (k - 1)(b - 1)$  graus de liberdade.

O nível de significância  $\alpha$  está relacionado com o grau de certeza fornecido pela análise. Por exemplo, considerando um nível de significância  $\alpha = 0,05$  tem-se que existe uma probabilidade de 5% de que a hipótese nula  $H_0$  seja rejeitada erroneamente. Desta forma, quanto menor o nível de significância  $\alpha$ , maior é o grau de certeza das conclusões tiradas a partir do conjunto de dados.

A rejeição de  $H_0$  permite concluir com uma determinada certeza que existe pelo menos uma metaheurística que tem um desempenho diferente (melhor ou pior) em relação ao restante, mas não permite analisar qual é diferente (melhor ou pior) de qual. Para esta análise são necessárias comparações em pares.

Pode-se assumir com um nível de significância  $\alpha$  que duas metaheurísticas  $i$  e  $j$  são diferentes se a desigualdade (C.8) for satisfeita.

$$|R_i^{Total} - R_j^{Total}| > t_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\left[ \frac{2b(A_2 - B_2)}{(b-1)(k-1)} \right]} \quad (C.8)$$

Em (C.8),  $t_{1-\frac{\alpha}{2}}$  é o quantil  $1 - \frac{\alpha}{2}$  da distribuição t com  $(b - 1)(k - 1)$  graus de liberdade. Se através da desigualdade (C.8) for constatada uma diferença entre duas metaheurísticas, aquela que tiver o rank médio mais baixo é a melhor.