

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO PAMPA**

**JEAN JONATHAN SCHUSTER**

**ESTUDO DA TRANSIÇÃO DE ESCOAMENTO CAUSADA PELA ESTRATIFICAÇÃO  
ESTÁVEL EM UM ESCOAMENTO DE COUETTE PLANO UTILIZANDO SIMULAÇÃO  
DE GRANDES TURBILHÕES**

**Alegrete**

**2018**

**JEAN JONATHAN SCHUSTER**

**ESTUDO DA TRANSIÇÃO DE ESCOAMENTO CAUSADA PELA ESTRATIFICAÇÃO  
ESTÁVEL EM UM ESCOAMENTO DE COUETTE PLANO UTILIZANDO SIMULAÇÃO  
DE GRANDES TURBILHÕES**

Dissertação de Pós-Graduação apresentada ao Programa de Pós Graduação Stricto sensu em Engenharia da Universidade Federal do Pampa (UNIPAMPA, RS), como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Engenharia.

Orientador: Prof. Felipe Denardin Costa

**Alegrete**

**2018**

Ficha catalográfica elaborada automaticamente com os dados fornecidos  
pelo(a) autor(a) através do Módulo de Biblioteca do  
Sistema GURI (Gestão Unificada de Recursos Institucionais) .

S395e Schuster, Jean Jonathan

Estudo da transição de escoamento causada pela  
estratificação estável em um escoamento de Couette plano  
utilizando simulação de grandes turbilhões / Jean Jonathan  
Schuster.

72 p.

Dissertação(Mestrado)-- Universidade Federal do Pampa,  
MESTRADO EM ENGENHARIAS, 2018.

"Orientação: Felipe Denardin Costa".

1. Simulação de Grandes Turbilhões. 2. Intermitência. 3.  
Camada Limite Estável. 4. Transição Laminar-Turbulenta. I.  
Título.

**JEAN JONATHAN SCHUSTER**


**ESTUDO DA TRANSIÇÃO DE ESCOAMENTO CAUSADA PELA ESTRATIFICAÇÃO ESTÁVEL EM UM ESCOAMENTO DE COUETTE PLANO UTILIZANDO SIMULAÇÃO DE GRANDES TURBILHÕES**

Dissertação de Pós-Graduação apresentada ao Programa de Pós Graduação Stricto sensu em Engenharia da Universidade Federal do Pampa (UNIPAMPA, RS), como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Engenharia.

Área de concentração: Fenômenos de Transporte

Dissertação de Pós-Graduação defendida e aprovada em: 23 de fevereiro de 2018.

Banca examinadora:



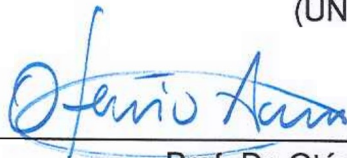
---

Prof. Dr. Felipe Denardin Costa  
Orientador  
(UNIPAMPA)



---

Prof. Dr. Luiz Eduardo Medeiros  
(UNIPAMPA)



---

Prof. Dr. Otávio Costa Acevedo  
(UFSM)

## RESUMO

Em mecânica de fluidos podem destacar-se três tipos de escoamento, escoamento laminar, escoamento transicional e o escoamento turbulento, onde estes ocorrem em uma região denominada de camada limite, sendo está a região que sofre influência direta de uma superfície limítrofe. A existência de tal região ocorre sempre que há fluido em movimento, desde escoamentos em dutos, escoamento na foz de um rio e também no escoamento atmosférico sobre a superfície terrestre. O escoamento na camada limite atmosférica (CLA) é predominantemente turbulento, porém, após o pôr do sol, a incidência de radiação solar sobre a superfície deixa de ocorrer, e esta passa a perder calor através da radiação de ondas longas, originando uma camada limite estável (CLE). Nesta camada as escalas de turbulência podem ser diminuídas em praticamente todas as escalas sendo a produção de turbulência predominantemente mecânica. Em noites de céu claro e ventos fracos pode ocorrer forte estratificação das camadas adjacentes a superfície terrestre, o que faz com que a turbulência seja reduzida em várias ordens de grandeza, podendo ressurgir de forma abrupta e imprevisível. Esse fenômeno recebe o nome de intermitência global e ocorre de forma similar a transição laminar-turbulenta. Para tanto, fará-se uso de um método de simulação de grandes turbilhões onde as escalas de sub-grade serão parametrizadas através de um modelo de uma equação. Os resultados mostram que para um conjunto de parâmetros é possível reproduzir um escoamento intermitente semelhante ao observado em experimentos de túnel de vento e em dados obtidos de escoamentos naturais. Além disso, também foram encontradas evidências da existência de um fenômeno caótico para o escoamento intermitente, mas esse fato será levado apenas como uma hipótese pois essa ideia foge do escopo deste trabalho.

Palavras-chave: Simulação de Grandes Turbilhões. Intermitência. Camada Limite Estável. Transição Laminar-Turbulenta.

## ABSTRACT

In fluid mechanics three types of flow can be highlighted, laminar flow, transitional flow and turbulent flow, they occur in a region called boundary layer, being this region directly influenced by a boundary surface. The existence of such a region occurs when there is fluid motion, from flows in ducts, flow in a riverbed and also in the atmospheric flow on earth's surface. The flow in the atmospheric boundary layer (ABL) is predominantly turbulent, however, after sunset, the incidence of solar radiation on the surface ceases and then the surface start to lose heat through the radiation of long waves, giving place to a stable boundary layer (SBL), where the turbulence scales can be decreased in practically all the scales being the production of turbulence predominantly mechanical. In clear sky night with low winds, strong stratification of the layers adjacent to the Earth's surface can take place, which causes the turbulence scales to be reduced by several orders of magnitude and may suddenly and unpredictably arise. This phenomenon receives the name of global intermittence and is similar to a laminar-turbulent transition and occurs in the SBL. So, we will use a Large Eddy Simulation method where the sub-grid scales will be parametrized through a one equation model. The results show that for a set of parameters it is possible to reproduce an intermittent flow, similar to those observed in wind tunnel experiments and data sampled from natural flows. In addition, evidence of the existence of a chaotic phenomena for intermittent flow has been found, but this fact is only taken as a hypothesis because this idea goes beyond the scope of this work.

Keywords: Large Eddy Simulation. Intermittence. Stable Boundary Layer. Laminar-Turbulent Transition.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Camada limite de velocidade sobre uma placa plana. ....	15
Figura 2 – Trajetória de uma partícula em regime laminar e turbulento. ....	16
Figura 3 – A série temporal de velocidade do vento a partir de 8 anemômetros sônicos (linhas sólidas coloridas) com o gradiente de temperatura vertical negativo em cada nível marcado na cor dessa altura (a), a velocidade vertical em cada um dos 8 níveis (b), e (c) a velocidade do vento a 1,5 m para a noite de 6 de outubro. As ocorrências de turbulência moderada sob ventos fracos são marcadas em vermelho em (c). Em (b), a velocidade vertical zero na altura de observação acima de 1,5 m é incrementada em $1 \text{ m s}^{-1}$ do nível abaixo para visibilidade. Cada ponto em ambos (a) e (c) representa um segmento de dados de 5 min. ....	20
Figura 4 – Série temporal para a componente $w$ do escoamento para $z = 20 \text{ mm}$ (acima, caso 1 em que $U_{max} = 1,51 \text{ m s}^{-1}$ e $\Delta T = 27,9 \text{ }^\circ\text{C}$ ; abaixo, caso 2 em que $U_{max} = 1,18 \text{ m s}^{-1}$ e $\Delta T = 28,4 \text{ }^\circ\text{C}$ ). ....	20
Figura 5 – Evolução da temperatura do ar nos níveis mais baixos da atmosfera (painéis da esquerda) e velocidade de fricção para estes mesmo níveis (painéis da direita) para diferentes valores de vento geostrófico indicados acima dos painéis. Simulações considerando solo seco de trufa e CLE de 50 m. ...	22
Figura 6 – Série temporal da velocidade vertical para as alturas indicadas. Onde $Z^+ = zu_*/\nu$ . ....	22
Figura 7 – Tensões em um elemento infinitesimal de volume. ....	25
Figura 8 – Pontos $A$ e $B$ movendo-se para $A'$ e $B'$ . ....	27
Figura 9 – (a) Compressão quase estática; (b) movimento oscilatório de uma massa fluida de forma esférica. ....	31
Figura 10 – Comparação de um escoamento sobre dois cilindros paralelos: (a) experimento e (b) simulação numérica. ....	36
Figura 11 – Fluxograma de funções principais de uma análise CFD. ....	36
Figura 12 – Espectro de velocidade unidimensional longitudinal ao escoamento. Símbolos são medições através de experimentos e linhas são modelo para $R_\lambda = 30, 70, 130, 300, 600$ e $1500$ . Para cada experimento o número final na legenda representa o valor de $R_\lambda$ . ....	38
Figura 13 – Características do domínio utilizado. ....	42
Figura 14 – Lei de parede para a velocidade média adimensional pela distância do centro do elemento de volume finito com relação a fronteira inferior. ....	48
Figura 15 – Espectro de energia para a última hora do período inicial de simulação. .	48
Figura 16 – Séries temporais da componente horizontal paralela ao escoamento $u$ ( $C_{\Delta T=2K}$ ), para os níveis indicados na legenda. ....	49

Figura 17 – Séries temporais da componente horizontal ortogonal ao escoamento $w$ ( $C_{\Delta T=2K}$ ), para os níveis indicados na legenda. ....	50
Figura 18 – Série temporal de temperatura $T$ ( $C_{\Delta T=2K}$ ), para os níveis indicados na legenda. ....	50
Figura 19 – Série temporal de $k$ para os níveis indicados ( $C_{\Delta T=2K}$ ). ....	51
Figura 20 – Série temporal da componente horizontal paralela ao escoamento $u$ ( $C_{\Delta T=1K}$ ). 52	
Figura 21 – Série temporal da componente horizontal ortogonal ao escoamento $w$ ( $C_{\Delta T=1K}$ ). ....	52
Figura 22 – Série temporal de temperatura para os níveis indicados ( $C_{\Delta T=1K}$ ). ....	53
Figura 23 – Série temporal de $k$ para os níveis indicados ( $C_{\Delta T=1K}$ ). ....	54
Figura 24 – Transformada de <i>wavelet</i> de Morlet para a série temporal de $u$ no nível $0,2\ m$ ( $C_{\Delta T=1K}$ ). A linha preta na seção superior mostra a série temporal e a linha vermelha a série reconstruída pela transformada de <i>wavelet</i> . Na seção inferior, a região interna as áreas laterais com transparência branca representa o cone de influência onde a confiabilidade é de 95 %. As regiões vermelhas representam as frequências mais relevantes enquanto as azuis as menos relevantes. Foram realizadas 1000 simulações para a reconstrução da série temporal e posterior geração da figura. ....	55
Figura 25 – Snapshot do escoamento em três diferentes momentos em um plano $yz$ com $B_x/2$ . ....	56
Figura 26 – Perfis normalizados de velocidade para a última hora. ....	57
Figura 27 – Perfis normalizados de temperatura para a última hora. ....	57
Figura 28 – Perfis normalizados de $\overline{u'v'}$ para a última hora. ....	58
Figura 29 – Perfis normalizados de $\overline{v'T'}$ para a última hora. ....	59
Figura 30 – Perfis normalizados de $k$ para a última hora. ....	59
Figura 31 – Série temporal $Ri$ e $k$ para os níveis indicados ( $C_{\Delta T=2K}$ ). ....	60
Figura 32 – Série temporal $Ri$ e $k$ para os níveis indicados ( $C_{\Delta T=1K}$ ). ....	61
Figura 33 – Espectro de energia intermitente ( $C_{\Delta T=1K}$ ) para a componente $u$ no nível $0,02\ m$ . ....	62
Figura 34 – Espectro de energia para a componente $u$ do escoamento no nível de $0,02\ m$ acima do limite inferior do domínio. ....	62



## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Propriedades do ar a 300 <i>K</i> .....	42
Tabela 2 – Métodos computacionais.....	45

## LISTA DE SIGLAS

<i>CFD</i>	Computational Fluid Dynamics
<i>CLA</i>	Camada Limite Atmosférica
<i>CLC</i>	Camada Limite Convectiva
<i>CLE</i>	Camada Limite Estável
<i>DNS</i>	Direct Numerical Simulation
<i>ECT</i>	Energia Cinética Turbulenta
<i>LES</i>	Large Eddy Simulation
<i>RANS</i>	Reynolds-Averaged Navier–Stokes
<i>SGS</i>	Sub-Grid Scale
<i>TKE</i>	Turbulent Kinetic Energy

## LISTA DE SÍMBOLOS

$\alpha$	Difusividade térmica
$\alpha_{eff}$	Difusividade térmica efetiva
$\beta$	Coeficiente de expansão térmica
$\delta$	Espessura da camada limite
$\delta$	Tensor de Kronecker
$\Delta$	Comprimento característico das escalas de sub-grade
$\dot{\epsilon}$	Tensor de taxa de deformação
$\theta$	Temperatura média
$\lambda$	Constante de proporcionalidade
$\rho$	Densidade
$\sigma$	Tensão normal
$\sigma$	Tensor de tensões
$\bar{\sigma}$	Tensões médias
$\tau$	Tensão de cisalhamento
$\tau$	Tensor de tensões viscosas
$\Phi$	Função dissipação
$\vec{\omega}$	Velocidade angular
$C_{\Delta}$	Constante da função comprimento característico das escalas de sub-grade
$C_{\epsilon}$	Constante da função dissipação
$C_o$	Número de Courant
$C_p$	Calor específico a pressão constante
$C_k$	Contante do modelo de viscosidade de sub-grade
$D(\mathbf{u})$	Tensor taxa de deformação
$e$	Energia interna por unidade de massa
$E_t$	Energia total

$\vec{f}$	Força de corpo por unidade de volume
$g$	Aceleração da gravidade
$\hat{G}$	Coeficiente de Fourier
$h$	Entalpia específica
$\vec{i}$	Vetor unitário ao longo do eixo x
$\vec{j}$	Vetor unitário ao longo do eixo y
$k$	Energia cinética turbulenta por unidade de massa
$k$	Constante de von Kàrmàn
$k_{SGS}$	Energia cinética turbulenta das escala de sub-grade
$K$	Condutividade térmica
$\vec{k}$	Vetor unitário ao longo do eixo z
$M$	Massa molar
$\mu$	Viscosidade dinâmica
$\mu_{SGS}$	Viscosidade dinâmica das escalas de sub-grade
$\mu_{eff}$	Viscosidade dinâmica efetiva
$\nu$	Viscosidade cinemática
$\nu_{SGS}$	Viscosidade cinemática das escalas de sub-grade
$\nu_{eff}$	Viscosidade cinemática efetiva
$\nu_t$	Viscosidade cinemática turbulenta
$p$	Pressão
$Pr$	Número de Prandtl
$Pr_t$	Número de Prandtl turbulento
$\vec{P}$	Força de superfície por unidade de volume
$\vec{q}$	Fluxo de calor
$\dot{Q}$	Taxa de calor

$R_\lambda$	Número de Reynolds baseados na escala de Taylor
$Ri_c$	Número de Richardson crítico
$Re$	Número de Reynolds
$Re_\tau$	Número de Reynolds baseado na velocidade de fricção
$Ri$	Número de Richardson
$s$	Entropia específica
$T$	Temperatura
$u$	Componente horizontal do vetor velocidade paralelo ao escoamento
$U^+$	Velocidade adimensionalizada pela velocidade de fricção
$\bar{U}$	Magnitude média da velocidade
$\overline{u'v'}$	Fluxo turbulento de momento
$u_*$	Escala de velocidade de fricção
$v$	Componente vertical do vetor velocidade
$\vec{v}$	Vetor velocidade
$\overline{v'T'}$	Fluxo turbulento de calor sensível
$w$	Componente horizontal do vetor velocidade ortogonal ao escoamento
$\dot{W}$	Potência
$\overline{w'v'}$	Fluxo turbulento de momento
$y^+$	Distância adimensional do centro da célula adjacente a fronteira

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>13</b>
<b>2</b>	<b>REVISÃO BIBLIOGRÁFICA</b>	<b>15</b>
2.1	Camada limite	15
2.2	Regimes de escoamento	15
2.2.1	Escoamentos submetidos a gradientes térmicos	17
2.2.1.1	Intermitência em escoamentos termicamente estratificados	18
2.3	Equações de campo para escoamento de fluidos Newtonianos	23
2.3.1	Equação da continuidade	23
2.3.2	Equações de momento	24
2.3.3	Estado geral de tensões em corpos deformáveis	24
2.3.4	Estado geral de deformação em escoamento de fluidos	27
2.3.5	Relação entre tensões e taxa de deformação	28
2.3.6	Hipótese de Stokes	29
2.3.7	Viscosidade volumétrica ou de massa e pressão termodinâmica	30
2.3.8	Equações Navier-Stokes	32
2.3.9	Equação da energia	33
2.4	Fluidodinâmica computacional (CFD)	35
2.4.1	Métodos de solução	36
2.4.1.1	Solução numérica através de LES	37
2.4.1.2	Equações Navier-Stokes filtradas	38
2.4.1.3	Modelo de turbulência	40
<b>3</b>	<b>METODOLOGIA</b>	<b>42</b>
3.0.1	Condições de contorno e condições iniciais	45
<b>4</b>	<b>RESULTADOS</b>	<b>47</b>
4.1	Séries temporais	49
4.2	Análise dos perfis verticais médios	56
4.3	Efeitos da estratificação estável sobre a turbulência do escoamento	60
<b>5</b>	<b>CONCLUSÃO</b>	<b>64</b>
	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b>	<b>66</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Logo após o pôr do Sol a incidência de radiação de onda curta sobre a superfície cessa, e essa passa por um processo de resfriamento radiativo devido à emissão de radiação de onda longa. Como consequência deste processo, as camadas de ar adjacentes à superfície também são resfriadas, dando origem a uma camada limite estratificada conhecida como camada limite estável (CLE) (STULL, 1988); (ARYA, 2001). Em tais condições a produção de turbulência é exclusivamente mecânica, através do cisalhamento do vento, enquanto que o empuxo, que durante o dia atua na geração de turbulência, neste caso é um sumidouro de turbulência devido a estratificação da CLE. Em noites de céu claro e com pouco vento a perda radiativa da superfície é intensa ocasionando uma estratificação térmica capaz de suprimir em muitas escalas a atividade turbulenta (MAHRT; VICKERS, 2006), e assim, afetando diretamente os processos difusivos que ocorrem na camada limite atmosférica (CLA).

Os regimes de escoamento na CLE são classificados como sendo muito estável e pouco estável (MAHRT et al., 1998) e, geralmente, a transição entre esses ocorre de maneira abrupta (ACEVEDO; COSTA; DEGRAZIA, 2012). Além disso, durante o regime muito estável a turbulência é praticamente suprimida em quase todas as suas escalas, todavia, essa ressurge de maneira abrupta e imprevisível dando origem a um fenômeno conhecido como intermitência global (MAHRT, 1999). Costa et al. (2011) sugerem, através dos resultados obtidos com um modelo simplificado, que a intermitência global, ou simplesmente intermitência, é um modo natural do escoamento na CLE e esta somente surge em condições nas quais fatores térmicos e mecânicos externos ao escoamento a favorecem. Wiel et al. (2012) e Wiel, Moene e Jonker (2012) identificam valores mínimos de velocidade do vento geostrófico e de radiação incidente na superfície que permitem a manutenção da turbulência completamente desenvolvida na CLE, ou seja, condições ideais para a manutenção do regime fracamente estável.

Apesar dos recentes avanços no entendimento da dinâmica física dos parâmetros térmicos e mecânicos que controlam o escoamento na camada limite noturna, estes ainda não são completamente compreendidos, assim como o surgimento de intermitência de maneira natural no escoamento também não é um consenso na comunidade científica de camada limite. Muitos dos trabalhos que apresentam estudos numéricos sobre intermitência fazem uso de forçantes externos ao escoamento que são responsáveis pelo ressurgimento da turbulência (CUXART; JIMÉNEZ, 2007; BOING et al., 2010).

Assim, a presente proposta visa o desenvolvimento de um experimento numérico para o estudo da transição laminar-turbulenta utilizando fluidodinâmica computacional, fazendo-se uso do método de simulação de grandes turbilhões. Neste caso uma estratificação por densidade será aplicada a um escoamento turbulento completamente desenvolvido, para obter-se condições de forte estabilidade e tentar reproduzir um escoamento

intermitente. Através deste experimento pretende obter-se a velocidade e gradiente de temperatura mínimo para que ocorra a transição entre os escoamentos, e como essa transição afeta a difusão de momento e energia na forma de calor.

O presente trabalho é subdividido em capítulos, no qual no primeiro foram apresentadas a contextualização do tema e do problema de pesquisa, bem como os objetivos do trabalho. O segundo consiste em descrever aspectos considerados como importantes para o trabalho, abordando-se noções básicas de mecânica de fluidos, camadas limite, regimes de escoamento, equações de campo para escoamentos newtonianos e fluidodinâmica computacional. No capítulo três são apresentados e detalhados os métodos utilizados para alcançar os objetivos do trabalho. Já no quarto capítulo será apresentado os resultados e análises provenientes dos dados obtidos do experimento numérico. Por fim, no quinto e último capítulo serão apresentadas as conclusões obtidas durante o experimento.



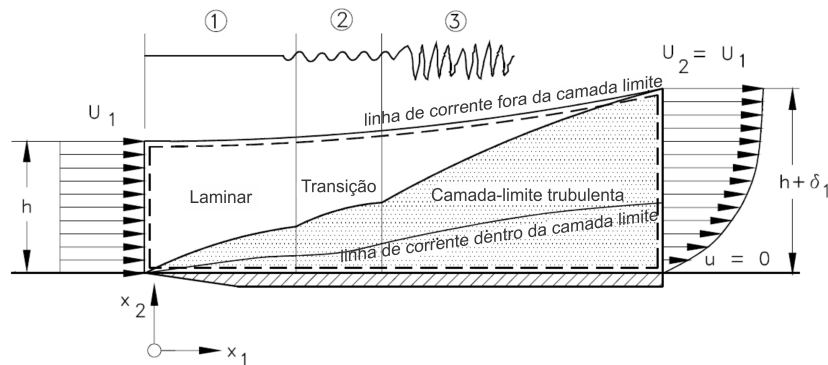
## 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

### 2.1 Camada limite

O conceito de camada limite foi introduzido pelo alemão Ludwig Prandtl no início do século  $XX$ , promovendo uma mudança de paradigma através da introdução das equações de camada limite que descrevem os efeitos viscosos que devem ser considerados próximos a contornos sólidos, independente de quão pequena seja a viscosidade do fluido. As equações propostas por Prandtl são muito mais simples que as equações de Navier-Stokes e respeitam a condição de não deslizamento junto a um contorno sólido em um fluido escoando (CATALDI, 2002).

De acordo com Incropera e Dewitt (2008) e Çengel (2009), quando partículas de fluido entram em contato com uma superfície elas passam a ter velocidade zero, essas partículas junto a parede retardam o movimento das partículas em camadas adjacentes, que retardam o livre movimento da próxima camada de partículas e assim sucessivamente. Esse fenômeno vai diminuindo de intensidade em cada camada até o momento que este efeito de retardamento torna-se desprezível, isto acontece a uma distância  $y = \delta$  da superfície (onde  $\delta$  é a espessura da camada limite). Este retardo é devido a viscosidade do fluido que introduz uma tensão de cisalhamento  $\tau$  entre as finas camadas de fluido paralelas a direção do escoamento. A Figura 1 mostra o desenvolvimento da camada limite de velocidade sobre uma placa plana. Com o aumento da distância  $X_2$  da placa a velocidade  $U$  deve aumentar até atingir a velocidade de corrente livre.

Figura 1 – Camada limite de velocidade sobre uma placa plana.



Fonte: Adaptado de Schobeiri (2010) p. 6.

### 2.2 Regimes de escoamento

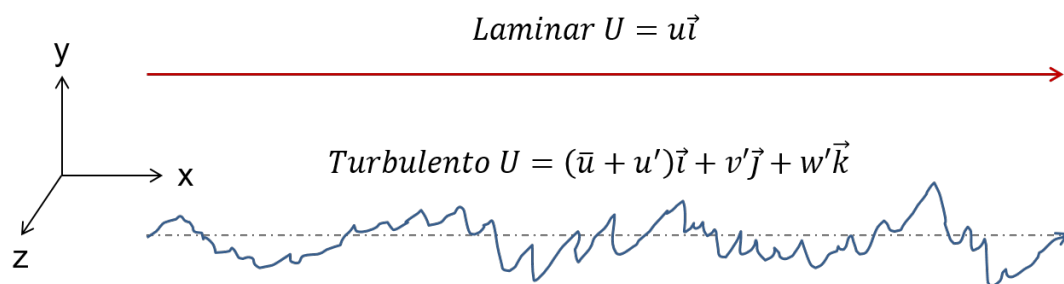
O escoamento de fluidos pode ser de três tipos: laminar, de transição e turbulento; cada um destes com características próprias. Essa teoria foi proposta por Osborne Reynolds e data do final do século 19. Reynolds ao injetar um corante em um tubo submetido a um escoamento de líquido observou a existência de dois regimes distintos e um regime transitório.

No regime laminar de escoamento o movimento das partículas de fluido é ordenado em laminas. Este escoamento tem como principal característica ser unidimensional, ou seja, o vetor velocidade é função da sua componente de direção e do tempo ( $U(\vec{u}, t)$ ) (WHITE, 2010; FOX; MCDONALD; PRITCHARD, 2011).

Já no regime de escoamento turbulento o vetor velocidade é função de uma componente média na direção do escoamento ( $\bar{u}$ ) mais uma componente de flutuação desordenada (caótica e imprevisível) nas três dimensões do espaço ( $u'\vec{i}, v'\vec{j}, w'\vec{k}$ ) mais o tempo, logo  $U(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, t)$  (ÇENGEL, 2009; FOX; MCDONALD; PRITCHARD, 2011).

A Figura 2 mostra a trajetória de uma partícula em regime laminar e turbulento.

Figura 2 – Trajetória de uma partícula em regime laminar e turbulento.



Fonte: Adaptado de Fox, Pritchard e McDonald (2011, p. 38).

Tomando com exemplo o escoamento em um tubo inicialmente em repouso. Em um dado momento este fluido começa a escoar, a velocidade que inicialmente era zero começa a aumentar até um certo valor em que o escoamento, antes completamente laminar, começa a apresentar alguns pontos em que ocorre uma maior "mistura" (difusão de momento, calor, massa...) sob a forma de pequenas "explosões" de forma oscilatória até que, para uma dada velocidade, esses pontos de maior mistura tornem-se predominantes e tomem completamente o escoamento, tornando este turbulento. Nesta situação as forças viscosas que inicialmente eram predominantes são subjugadas pelas forças inerciais devido ao movimento da massa de fluido, e esse é o mecanismo que desencadeia a transição de regime de escoamento.

A fim de quantificar a turbulência um parâmetro adimensional que correlaciona as forças viscosas com as forças inerciais de fluidos Newtonianos foi derivado. Esse parâmetro é conhecido como número de Reynolds ( $Re$ ) e é função da velocidade média do escoamento  $U$ , de um comprimento característico do escoamento  $L$ , e das propriedades do fluido, como densidade  $\rho$  e viscosidade  $\mu$  conforme a Equação 1 (WHITE, 2010).

$$Re = \frac{\rho UL}{\mu} = \frac{UL}{\nu} \quad (1)$$

Desta forma para baixos  $Re$  o escoamento é laminar, para  $Re$  intermediários, ou seja, próximos do valor crítico ( $Re_c$ ), não pode-se afirmar com certeza qual o regime já que este encontra-se num período de transição, e para  $Re$  acima do valor crítico o regime torna-se turbulento. O valor de  $Re_c$  é fortemente dependente da geometria em que ocorre

o escoamento (tubos, dutos, etc...) e esse valor é determinado experimentalmente. Para um duto de seção transversal circular tem-se um valor próximo de  $Re_c$  de 2300 (WHITE, 2010; FOX; MCDONALD; PRITCHARD, 2011).

Além das questões geométricas  $Re_c$  é fortemente dependente das condições de entrada por onde esse fluido irá escoar e das condições em que o mesmo encontra-se no momento em que começa a escoar. Isso já havia sido previsto por Reynolds que enunciou que  $Re_c$  é maior quanto menor forem os distúrbios no escoamento do fluido antes de entrar no tubo, por exemplo (SCHLICHTING; GERSTEN, 2003).

### 2.2.1 Escoamentos submetidos a gradientes térmicos

Em grande parte dos escoamentos, sejam em aplicações de engenharia ou fenômenos naturais, o escoamento não é ou em algum momento deixa de ser isotérmico devido a ação de um gradiente de temperatura imposto pelos mais diversos motivos.

Dependendo da intensidade desse gradiente de temperatura, um escoamento altamente turbulento pode ter suas escalas de turbulência diminuída em várias ordens de grandeza ou até mesmo serem suprimidas, tornando o escoamento laminar, caso a região de menor temperatura esteja abaixo da região de temperatura mais elevada seguindo a direção de atuação do campo gravitacional (MAHRT; VICKERS, 2006). Quando a região mais quente está em um nível abaixo da região mais fria o contrario acontece, isso deve-se aos efeitos convectivos, onde um escoamento laminar ou de baixa turbulência pode ter um grande aumento de turbulência.

Esse fenômeno em que a região de baixa temperatura está na superfície inferior causa um fluxo de calor negativa (de cima para baixo) e atua como um sumidouro de turbulência. Essa condição ocorre na camada limite planetária estável (CLE) em noites frias e céu claro, onde o solo perde calor e começa a resfriar as camadas de ar adjacentes, causando a estratificação por densidade. Quando a região de maior temperatura está na superfície inferior o fluxo de calor é positivo, pois ocorre de baixo para cima e atua na produção de turbulência. Um exemplo onde isso ocorre é na camada limite planetária convectiva (CLC), onde o aquecimento da superfície pelo sol desencadeia grandes processos de convecção (STULL, 1988; ARYA, 2001).

A fim de quantificar a influência do gradiente de temperatura no escoamento Lewis Fry Richardson derivou um parâmetro adimensional que leva seu nome no início do século XX. O número de Richardson ( $Ri$ ) é definido como a razão entre o termo de produção/destruição de turbulência por empuxo e o termo de produção de turbulência por cisalhamento na equação da energia cinética turbulenta. Ou seja,  $Ri$  representa a relação entre os forçantes térmicos e mecânicos na produção de turbulência. O número de Richardson "bulk" é definido segundo a Equação 2 (STULL, 1988):

$$Ri = \frac{g}{T} \frac{\Delta T \Delta z}{(\Delta U)^2}, \quad (2)$$

seguindo Donda et al. (2015), o número de Richardson "bulk" é calculado entre o nível de análise e o primeiro nível acima da superfície inferior do domínio. Em um escoamento estavelmente estratificado, a superfície inferior é mais fria que o escoamento acima desta, gerando assim um gradiente de temperatura positivo, e o termo de empuxo passa a atuar destruindo turbulência. Quando a razão entre os termos de destruição e produção é superior a valores entre 0,2 e 0,25, o escoamento passa a ser laminarizado pela ação da estratificação por densidade. O valor para o qual ocorre a transição é conhecido como número de Richardson crítico ( $Ri_c$ ).

### 2.2.1.1 Intermitência em escoamentos termicamente estratificados

Em escoamentos estáveis, ou termicamente estratificados por densidade, como os que ocorrem na CLE, os níveis de turbulência são reduzidos, podendo apresentar o fenômeno conhecido como intermitência global. Este fenômeno é caracterizado pelo surgimento abrupto e imprevisível de períodos em que a intensidade da turbulência aumenta em várias ordens de grandeza (MAHRT, 1999; COSTA, 2011).

Os mecanismos que desencadeiam o fenômeno de intermitência global, apesar de bastante estudados, ainda não estão claros. O que sabe-se pela observações e que o surgimento destes eventos ocorre de forma semelhante a transição do escoamento laminar/turbulento.

A importância do estudo da intermitência global para as ciências atmosféricas é tal que no mês de outubro de 1999 a Universidade do Colorado elaborou um experimento em um terreno praticamente plano no sudeste do estado do Kansas, nos Estados Unidos da América, a fim de estudar a CLE. Este experimento gerou uma infinidade de dados aos quais, passados quase vinte anos, ainda tem grande relevância nos estudos da CLE. Esse experimento foi chamado de *Cooperative Atmosphere–Surface Exchange Study - 1999*, que numa tradução livre do inglês seria "Estudo Cooperativo de troca entre atmosfera e superfície", e ficou conhecido como CASES-99.

Com os dados gerados pelo CASES-99 uma série de artigos a respeito da CLE foram elaborados. Um destes trabalhos realizado por Sun et al. (2012) os autores separam os regimes de turbulência em três categorias: regime 1, 2 e 3; e sugerem três categorias de turbulência intermitente: A, B e C. Segundo os autores os regimes 1 e 2 são baseado na relação entre velocidade do escoamento e a escala de velocidade de turbulência  $V_{TKE}$  ( $V_{TKE} = [\frac{1}{2}(\sigma_u^2 + \sigma_v^2 + \sigma_w^2)]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{k}$ , onde  $k$  é a energia cinética turbulenta,  $u$ ,  $v$  e  $w$  são respectivamente a componente zonal, meridional e vertical do escoamento, enquanto  $\sigma$  representa o desvio padrão de cada variável), já no regime 3 a turbulência se difunde de cima para baixa como consequência da instabilidade de Kelvin–Helmholtz que ocorre em

níveis superiores. Na categoria de turbulência intermitente A, a turbulência é aumentada quando a velocidade excede o seu valor limiar e é reduzida quando a velocidade cai abaixo dela (isto é, a turbulência muda entre o regime 1 e o regime 2). Na categoria B, quando a velocidade do vento resultante de perturbações atmosféricas permanece menor do que o valor limiar, as perturbações reduzem de forma intermitente a estabilidade local e aumentam ligeiramente a turbulência (isto é, a turbulência aumenta episodicamente dentro do regime 1). Na categoria C, quando eventos turbulentos de cima para baixo se introduzem subitamente em um ambiente de fraca turbulência, ocorre o regime de turbulência 3.

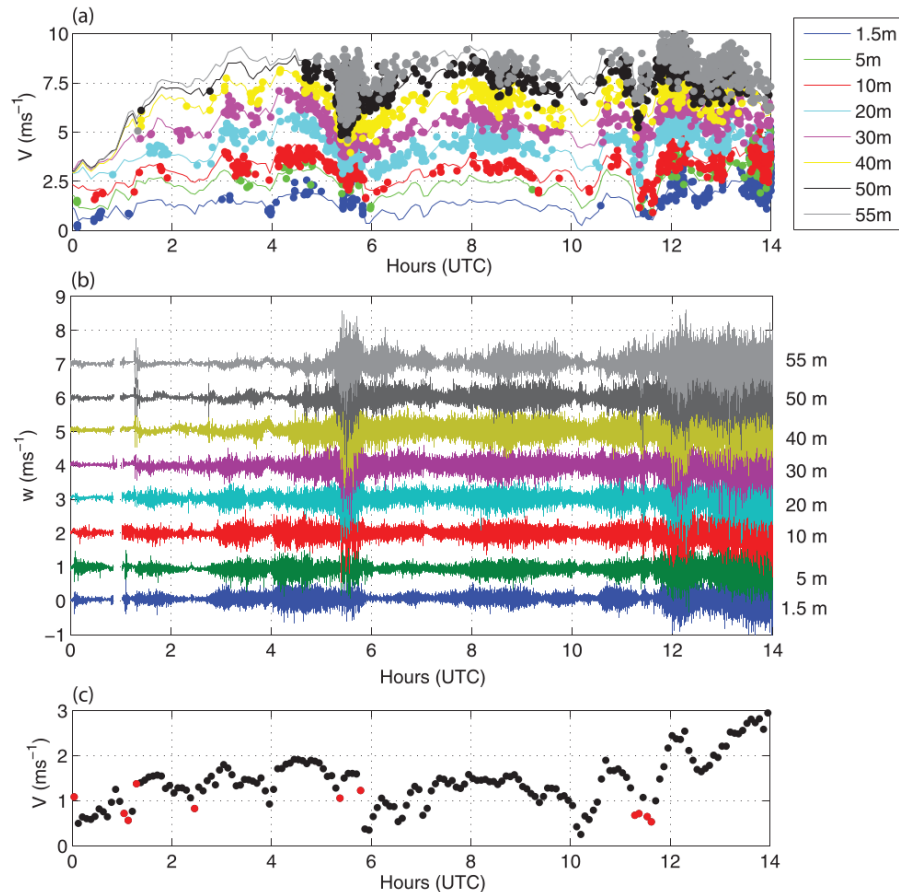
Na Figura 3 é mostrado um regime de turbulência intermitente de categoria C segundo Sun et al. (2012). Durante esta noite ocorrem eventos moderados de turbulência quando o vento é fraco, como mostrado pelos pontos vermelhos na Figura 3 c). Como resultado dos turbilhões associado a instabilidade Kelvin–Helmholtz, gradientes de temperatura negativos são frequentemente observados e o número total de ocorrências de pequenos gradiente de temperatura negativa aumenta com a altura à medida que a turbulência se espalha em direção ao solo, como mostrado na Figura 3 a).

Da mesma forma que Sun et al. (2012), estudos anteriores associaram a intermitência global a fenômenos de mesoescala, como correntes de densidade, ondas de gravidade, jatos de baixo nível e instabilidades de Kelvin-Helmholtz (SUN et al., 2002, 2004; CUXART; JIMÉNEZ, 2007; BANTA, 2008).

Além de experimentos que coletam dados atmosféricos experimentos em túnel de vento são bastante utilizados para estudo de escoamentos estáveis. Em um destes estudos Ohya, Nakamura e Uchida (2008) fez uso de um túnel de vento para simular uma CLE na presença de jatos de baixo nível (que serão chamados de LLJ, numa abreviação do inglês para *Low-Level Jets*). O experimento foi realizado em um túnel de vento de sucção com seção retangular com 1,5 m de largura e 1,2 m de altura, contando com 13,5 m de comprimento. O equipamento conta com dois sistemas independentes de temperatura, um para aquecimento do fluxo de ar e outro para controle da temperatura da superfície inferior.

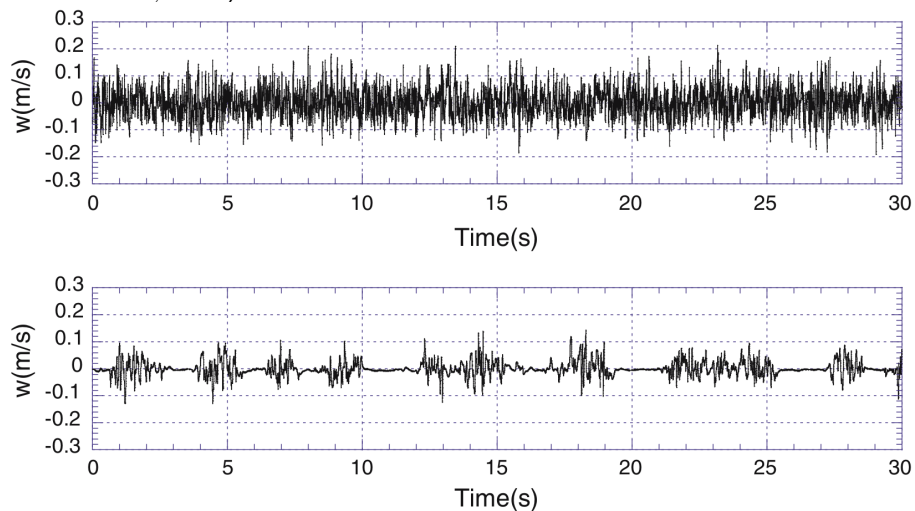
De posse desse equipamento dois experimentos foram realizados, no caso 1 foi reproduzido um camada limite fracamente estável: velocidade máxima de  $1,51 \text{ m s}^{-1}$ ,  $Re = 16100$ ,  $Ri = 0,074$  e gradiente de temperatura de  $27,9 \text{ }^\circ\text{C}$ ; e caso 2 em que uma camada limite fortemente estável foi reproduzida: velocidade máxima de  $1,18 \text{ m s}^{-1}$ ,  $Re = 12600$ ,  $Ri = 0,13$  e gradiente de temperatura de  $28,4 \text{ }^\circ\text{C}$ . A Figura 4 mostra a série temporal da componente  $w$  do escoamento para os dois casos simulados em  $z = 20 \text{ mm}$  a partir da superfície. Para o caso 1, serie temporal superior na Figura 4, mostra fraca estabilidade e a existência de movimentos turbulentos com maior amplitude e frequência, indicando grandes processos de mistura nas camadas inferiores da camada limite. Já para o caso 2 em que existe forte estabilidade, serie temporal inferior na Figura 4, mostra períodos intermitentes de turbulência (OHYA; NAKAMURA; UCHIDA, 2008).

Figura 3 – A série temporal de velocidade do vento a partir de 8 anemômetros sônicos (linhas sólidas coloridas) com o gradiente de temperatura vertical negativo em cada nível marcado na cor dessa altura (a), a velocidade vertical em cada um dos 8 níveis (b), e (c) a velocidade do vento a  $1,5\text{ m}$  para a noite de 6 de outubro. As ocorrências de turbulência moderada sob ventos fracos são marcadas em vermelho em (c). Em (b), a velocidade vertical zero na altura de observação acima de  $1,5\text{ m}$  é incrementada em  $1\text{ m s}^{-1}$  do nível abaixo para visibilidade. Cada ponto em ambos (a) e (c) representa um segmento de dados de 5 min.



Fonte: Sun et al. (2012, p. 349).

Figura 4 – Série temporal para a componente  $w$  do escoamento para  $z = 20\text{ mm}$  (acima, caso 1 em que  $U_{max} = 1,51\text{ m s}^{-1}$  e  $\Delta T = 27,9\text{ }^{\circ}\text{C}$ ; abaixo, caso 2 em que  $U_{max} = 1,18\text{ m s}^{-1}$  e  $\Delta T = 28,4\text{ }^{\circ}\text{C}$ ).



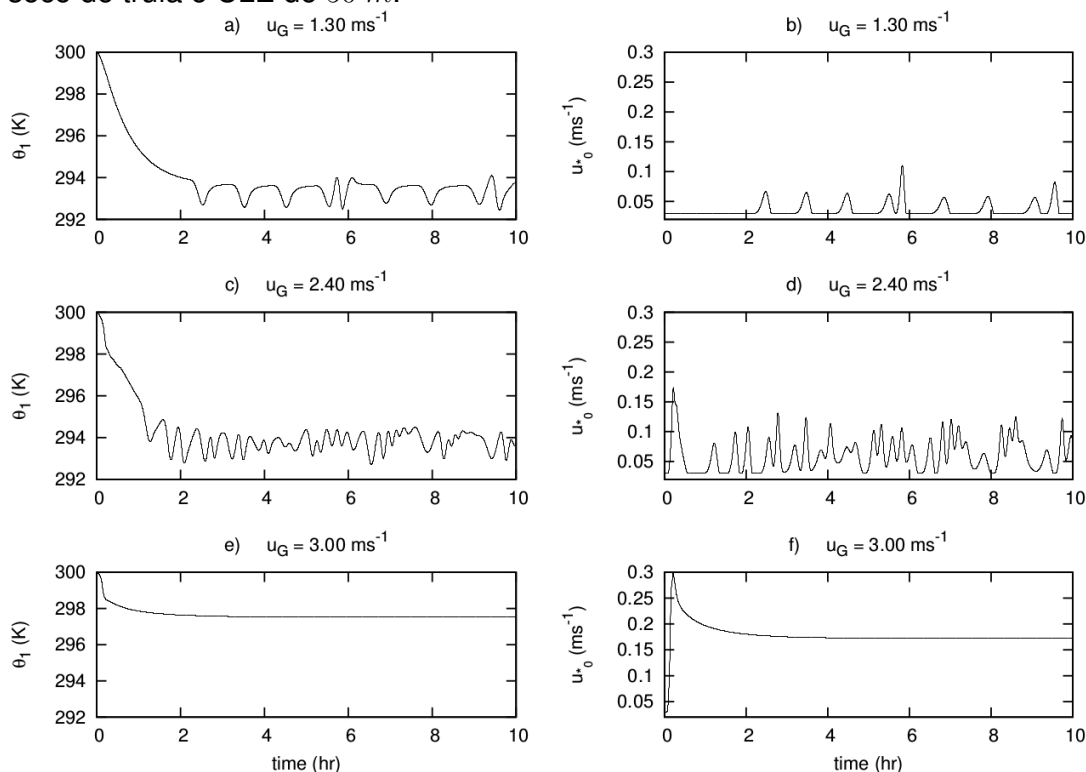
Fonte: Ohya, Nakamura e Uchida (2008, p. 357).

Assim como Ohya, Nakamura e Uchida (2008) outros estudos foram realizado com sucesso em túneis de vento em camada limite estável, como o estudo da CLE sobre uma superfície rugosa (OHYA, 2001), ou a análise das estruturas de turbulência em camada limite estratificada sob forte estabilidade (OHYA; NEFF; MERONEY, 1997), para citar alguns.

Outra maneira muito utilizada para o estudo de escoamentos de fluidos é através da modelagem matemática e simulação. Para estudo da CLE com forte estabilidade Costa et al. (2011) usou um modelo semelhante ao proposto por Blackadar (1979), porém no modelo de Costa et al. (2011) uma equação prognostica para a energia cinética turbulenta ( $k$ ) foi utilizada, ao contrario de uma função de estabilidade como usada na trabalho original. Além disso, variáveis como coeficientes de troca e taxa de dissipação de turbulência foram parametrizados baseados em análise dimensional. O objetivo principal dos autores era entender como a interação entre a superfície e as camadas próximas a esta são capazes de causar eventos de turbulência intermitente (intermitência global) de forma não periódica.

Com os dados obtido pelo modelo, para uma CLE de  $50\text{ m}$ , velocidades de  $3\text{ m.s}^{-1}$  no topo da camada limite foram suficientes para manter a superfície acoplada aos níveis mais altos, ou seja, o escoamento foi turbulento por todo o período. Para velocidades menores a solução mostrou-se intermitente, conforme Figura 5, observou-se pequenas médias de velocidades de fricção ( $u_*$ , que é uma medida de intensidade de turbulência) (Figura 5 a) e c)) e temperatura (Figura 5 b) e d)). Ao aumentar a velocidade do escoamento de  $1,3$  para  $2,4\text{ m.s}^{-1}$  a intermitência ocorre com maior frequência e intensidade. Ao aumentar a velocidade para  $3\text{ m.s}^{-1}$  uma transição abrupta ocorre, e a temperatura da superfície aumenta em  $4\text{ K}$  quando comparado com o caso com velocidade mais baixa (Figura 5 a) e e)). No último caso a velocidade de fricção não mais varia e atinge um estado de equilíbrio próximo de  $0,2\text{ m.s}^{-1}$  indicando que um estado acoplado foi atingido (COSTA et al., 2011).

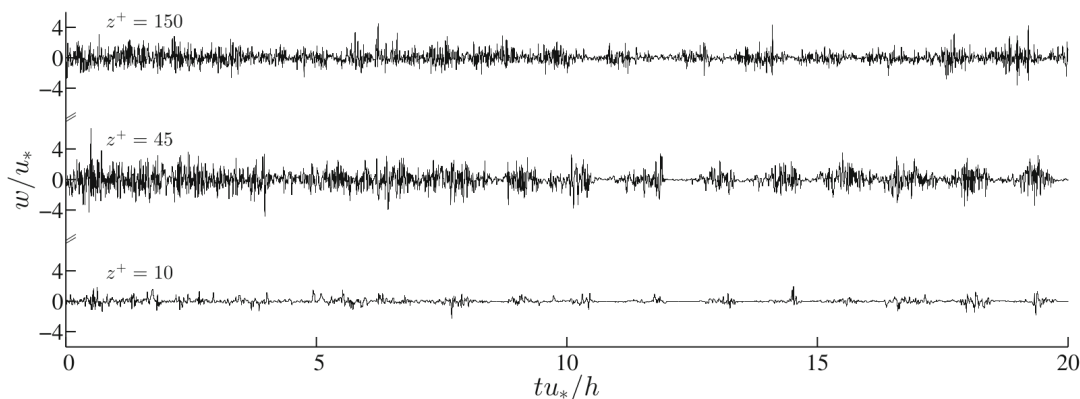
Figura 5 – Evolução da temperatura do ar nos níveis mais baixos da atmosfera (painéis da esquerda) e velocidade de fricção para estes mesmo níveis (painéis da direita) para diferentes valores de vento geostrófico indicados acima dos painéis. Simulações considerando solo seco de trufa e CLE de 50 m.



Fonte: Costa et al. (2011, p. 40).

Resultados semelhantes aos encontrados por Ohya, Nakamura e Uchida (2008), Costa et al. (2011) foram encontrados por He e Basu (2015) através DNS. A Figura 6 mostra a série temporal da componente vertical de velocidade, onde é possível observar que após a metade do período simulado ocorrem períodos intercalados de maior e menor turbulência.

Figura 6 – Série temporal da velocidade vertical para as alturas indicadas. Onde  $Z^+ = zu_*/\nu$ .



Fonte: Adaptado de He e Basu (2015, p. 12).

O domínio utilizado na trabalho de He e Basu (2015) para gerar a Figura 6 trata-se de um canal aberto e conta com  $8\pi/h$  na direção do escoamento e  $4\pi/h$  da direção



perpendicular ao escoamento, sendo  $h$  a altura média na direção vertical e tendo valor igual a 1. O método de discretização utilizado nas equações foi o de volumes finitos, as derivativas espaciais foram discretizadas através de um esquema central de segunda ordem e as derivativas temporais através de um esquema *back-ward* implícito de segunda ordem.  $Re_\tau$  e  $Re$  foram de 240 e 6990 respectivamente.

### 2.3 Equações de campo para escoamento de fluidos Newtonianos

O movimento tridimensional de um campo de escoamento é dado pelo vetor velocidade  $\vec{v} = u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k}$ , sendo as três componentes  $u$ ,  $v$  e  $w$  paralelas aos eixos  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  e  $\vec{k}$  em um plano cartesiano, pela pressão  $p$  e temperatura  $T$ . Para determinar essas cinco variáveis existem cinco equações, que são a equação da continuidade (conservação da massa), as três equações de conservação de momento e a equação da energia (conservação de energia). Essas equações são obtidas pelas leis de movimento de Newton e pela primeira e segunda leis da termodinâmica, unidas através do teorema de transporte de Reynolds para um volume de controle fixo e imutável. Estas cinco equações de conservação contém elementos que expressam propriedades físicas dependentes da temperatura e pressão, como a densidade  $\rho(T, p)$ , o calor específico a pressão constante  $C_p(T, p)$ , a viscosidade  $\mu(T, p)$  e a condutividade térmica  $K(T, p)$  (WHITE, 2010).

Nesta seção serão apresentadas as equações básicas para os campos de escoamento de fluidos Newtonianos. Aqui o fluido será considerado como contínuo, isotrópico, respeitando a lei de Fourier da condução de calor.

#### 2.3.1 Equação da continuidade

A equação da continuidade, também conhecida com equação da conservação da massa, expressa o fato de que, por unidade de volume, a soma de toda a massa entrando ou saindo de um volume de controle, por unidade de tempo, deve ser igual à alteração da massa devido à mudança da densidade por unidade de tempo. De uma forma geral podemos expressar essa lei pela Equação 3 (YOUNG et al., 2010).

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (3)$$

Onde  $\frac{D\rho}{Dt}$  é a derivada total ou substancial da densidade em relação ao tempo e pode ser escrita conforme a Equação 4. Sendo composta pela porção local  $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ , quando o escoamento não está em regime permanente e pela porção convectiva,  $\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \rho$ , como consequência da alteração na posição.

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}(\rho) \quad (4)$$

Para pressões em que o fluido possa ser considerado como incompressível a deri-

vado total da densidade com respeito ao tempo é zero ( $\frac{D\rho}{Dt} = 0$ ), pois a densidade não será função do tempo. Então para escoamentos incompressíveis a equação da continuidade se reduz a Equação 5 (FOX; MCDONALD; PRITCHARD, 2011).

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \quad (5)$$

Nos casos onde existe grande estratificação por densidade, mesmo o fluido estando dentro de condições em que possa ser considerado incompressível, a densidade do fluido é variável, mas cada partícula fluida mantém sua densidade. Uma vez que a densidade constante no escoamento inteiro é uma condição necessária, mas não suficiente para o escoamento incompressível (SCHLICHTING; GERSTEN, 2003).

### 2.3.2 Equações de momento

Estas equações advêm da segunda lei de Newton, que diz que o produto entre a massa e a aceleração é diretamente proporcional à resultante de todas as forças atuando sobre o corpo. Estas forças são forças de corpo (devido à aceleração da massa pela gravidade, ou forças eletromagnéticas quando o fluido for ferro magnético) e forças de superfície (forças de pressão ou fricção). As forças de corpo são forças externas, enquanto as forças de superfície dependem do estado de movimento do fluido (estado de deformação).

Se a força de corpo por unidade de volume for o produto entre a densidade e a aceleração da gravidade ( $\vec{f} = \rho\vec{g}$ ) e  $\vec{P}$  a força de superfície por unidade de volume, tem-se a Equação 6 representando a equação de momento (KUNDU; COHEN; DOWLING, 2015).

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{f} + \vec{P} \quad (6)$$

Onde a derivada material de aceleração  $\frac{D\vec{v}}{Dt}$  é composta pela aceleração local  $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$  mais a aceleração convectiva  $\frac{d\vec{v}}{dt}$ , esta última como consequência da mudança de posição e é representada pela Equação 7 (SCHLICHTING; GERSTEN, 2003).

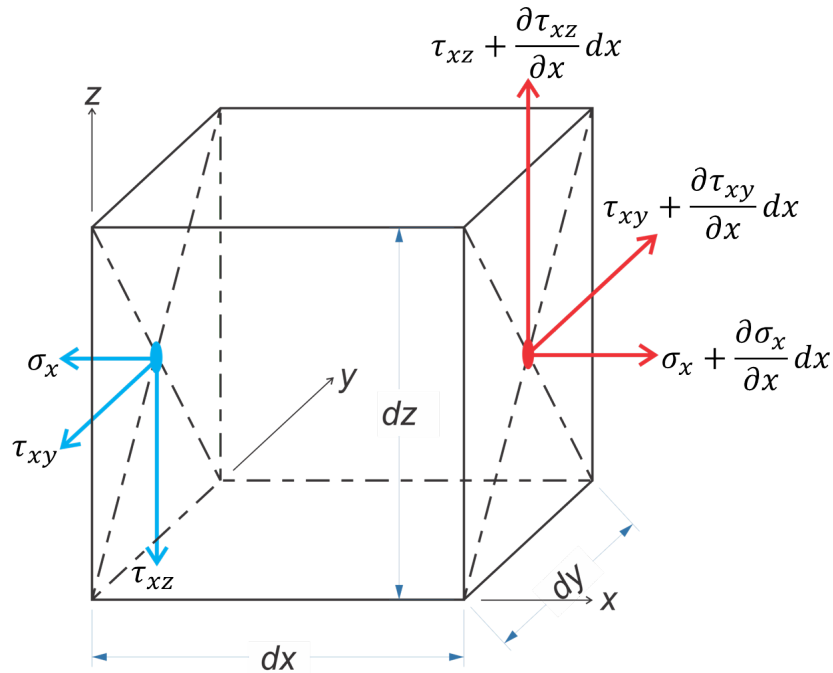
$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{\nabla} \left( \frac{1}{2} \vec{v}^2 \right) - \vec{v} \times \vec{\nabla} \times \vec{v} \quad (7)$$

### 2.3.3 Estado geral de tensões em corpos deformáveis

Considerando um elemento infinitesimal de volume  $dV = dxdydz$  como pode ser visto na Figura 7. Existem tensões atuando nas duas superfícies ortogonais ao eixo  $x$ ,  $\partial x$  e  $\partial x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx$ , onde a superfície desta face do elemento infinitesimal tem área  $dydz$ . A componente  $\sigma$  denota a tensão normal a superfície e o índice  $x$  indica a direção de atuação da tensão. A componente  $\tau$  é chamada tensão tangencial ou de cisalhamento e recebe índice duplo, a primeira posição indica em qual eixo a superfície é perpendicular e a segunda posição indica a direção de atuação desta tensão (SCHLICHTING; GERSTEN,

2003).

Figura 7 – Tensões em um elemento infinitesimal de volume.



Fonte: Adaptado de Schlichting e Gersten (2003) p. 54.

Termos similares são obtidos nas superfícies  $dx dz$ , ortogonais ao eixo  $y$  e  $dx dy$ , ortogonais ao eixo  $z$ .

Essas tensões ou forças de superfície, representadas pelo vetor  $\vec{P}$  por unidade de volume  $dV$ , resultante de um balanço das forças de superfície do estado de tensões da Figura 7, são expressas pela Equação 8 (SCHLICHTING; GERSTEN, 2003).

$$\vec{P} = \frac{\partial \vec{p}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{p}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{p}_z}{\partial z} \quad (8)$$

Assim pode-se definir a força de superfície para o plano Cartesiano conforme as Equações 9.

$$\begin{aligned} \vec{p}_x &= \sigma_x \vec{i} + \tau_{xy} \vec{j} + \tau_{xz} \vec{k} \\ \vec{p}_y &= \tau_{yx} \vec{i} + \sigma_y \vec{j} + \tau_{yz} \vec{k} \\ \vec{p}_z &= \tau_{zx} \vec{i} + \tau_{zy} \vec{k} + \sigma_z \vec{k} \end{aligned} \quad (9)$$

Pode-se concluir que o estado de tensões é dado por nove quantidades escalares, que quando expressas na forma matricial são conhecidas com tensor de tensões ou matriz de tensões, e são apresentadas na Equação 10 (KUNDU; COHEN; DOWLING, 2015).

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix} \quad (10)$$

A matriz do tensor de tensões é simétrica, onde as forças de cisalhamento ape-

nas diferem pela ordem do índice, tendo mesma magnitude, porém sinais opostos, isto é expresso pelo conjunto de Equações 11.

$$\begin{aligned}\tau_{xy} - \tau_{yx} &= 0 \rightarrow \tau_{xy} = \tau_{yx} \\ \tau_{xz} - \tau_{zx} &= 0 \rightarrow \tau_{xz} = \tau_{zx} \\ \tau_{yz} - \tau_{zy} &= 0 \rightarrow \tau_{yz} = \tau_{zy}\end{aligned}\quad (11)$$

Substituindo as Equações 9 e 11 na Equação 8 encontra-se a força de superfície por unidade de volume conforme a Equação 12.

$$\vec{P} = \left( \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \right) \vec{k} \quad (12)$$

Quando não existe movimento ou escoamento do fluido, a velocidade é zero, isso implica que as tensões de cisalhamento serão nulas, uma vez que não existe gradiente de velocidade. Assim restam apenas as tensões normais ( $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ , onde cada uma contribui com um terço da pressão sobre o elemento) atuando sobre o elemento de volume, sendo estas iguais entre si e de sinal negativo, uma vez que atuam sobre as faces do elemento de volume  $dV$  mostrado na Figura 7. Isso é chamado de estado hidrostático de tensões e a pressão neste caso (pressão hidrostática) é igual a pressão termodinâmica. Isto também é válido para escoamentos em que não ha nenhum processo de relaxamento, como sera mostrado nas próximas seções (WHITE, 2010).

Separando a pressão das tensões normais tem-se que:  $\tau_{xx} = \sigma_x + p$ ,  $\tau_{yy} = \sigma_y + p$ ,  $\tau_{zz} = \sigma_z + p$ . Decompondo as tensões na parte normal que é igual em todas as direções, e a parte cisalhante na Equação 12, substituindo esta última na Equação 8 tem-se as três equações de momento para um sistema de coordenadas cartesiano, Equações 13 (FOX; MCDONALD; PRITCHARD, 2011).

$$\begin{aligned}\rho \frac{Du}{Dt} &= f_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \left( \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) \\ \rho \frac{Dv}{Dt} &= f_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \left( \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right) \\ \rho \frac{Dw}{Dt} &= f_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \left( \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right)\end{aligned}\quad (13)$$

Na forma vetorial para qualquer sistema coordenado as Equações 13 tem a forma da Equação 14, onde  $\tau$  é chamado e tensor de tensões viscosas e é composto pelos últimos termos entre parêntesis do lado direito da igualdade nas Equações 13 (KUNDU; COHEN; DOWLING, 2015).

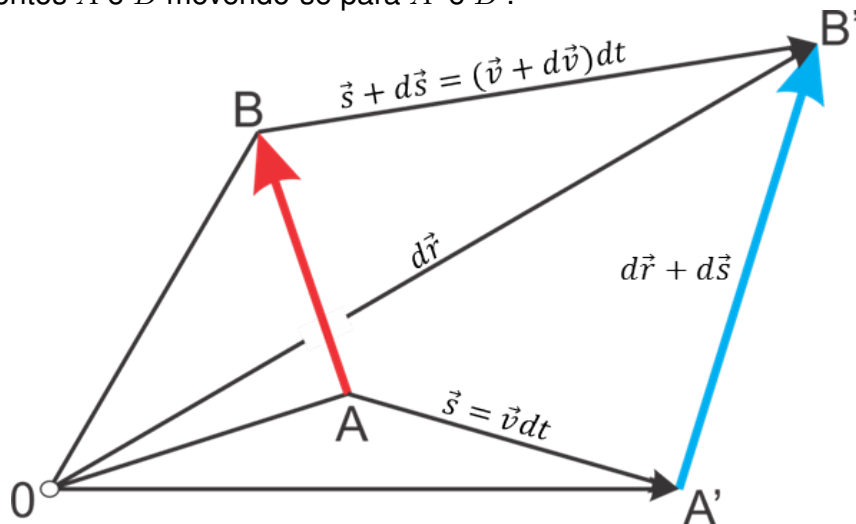
$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \vec{f} - \vec{\nabla}(p) + \vec{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\tau}) \quad (14)$$

### 2.3.4 Estado geral de deformação em escoamento de fluidos

Quando um fluido parte do repouso e iniciando seu movimento, cada partícula de fluido encontra-se em uma nova posição a cada instante de tempo, este elemento fluido experimenta deformações ao longo deste escoamento. Conhecendo-se o vetor velocidade como função das três coordenadas do espaço e do tempo pode-se estabelecer relações cinemáticas entre a taxa de deformação e o vetor velocidade, através do movimento relativo entre dois de seus pontos.

Considerando 2 pontos vizinhos  $A$  e  $B$  mostrados na Figura 8 (SCHLICHTING; GERSTEN, 2003).

Figura 8 – Pontos  $A$  e  $B$  movendo-se para  $A'$  e  $B'$ .



Fonte: Adaptado de Schlichting e Gersten (2003) p. 57.

O ponto  $A$  é movido para a posição  $A'$  em um intervalo  $dt$ , onde  $\vec{s} = \vec{v} dt$ . Já o ponto  $B$  a uma distancia  $d\vec{r}$  de  $A$ , com velocidade diferente de  $A$ . Então  $B$  é movido para o ponto  $B'$  que está a distância  $\vec{s} + d\vec{s} = (\vec{v} + d\vec{v}) dt$  do ponto  $B$ . Desta forma sendo  $u, v$  e  $w$  os componentes de velocidade no ponto  $A$ , os componentes da velocidade no ponto  $B$  podem ser encontrados através de uma expansão em série de Taylor de primeira ordem, sendo expressas pelas Equações 15.

$$\begin{aligned} u + du &= u + \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz \\ v + dv &= v + \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz \\ w + dw &= w + \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz \end{aligned} \quad (15)$$

Rearranjando as expressões para as componentes de velocidade relativa  $du, dv$  e  $dw$  da Equação 15 em termos de taxa de deformação  $\dot{\epsilon}$  e componentes  $\omega_x = \frac{1}{2}(\partial w/\partial y -$

$\partial u/\partial z$ ),  $\omega_y = \frac{1}{2}/(\partial u/\partial z - \partial w/\partial x)$  e  $\omega_z = \frac{1}{2}/(\partial v/\partial x - \partial u/\partial y)$ , da velocidade angular ( $\vec{\omega} = \frac{1}{2}rot\vec{v}$ ), tem-se um tensor simétrico representando a taxa de deformação  $\dot{\epsilon}$ , dado pela Equação 16 (SCHLICHTING; GERSTEN, 2003).

$$\dot{\epsilon} = \begin{pmatrix} \dot{\epsilon}_x & \dot{\epsilon}_{xy} & \dot{\epsilon}_{xz} \\ \dot{\epsilon}_{yx} & \dot{\epsilon}_y & \dot{\epsilon}_{yz} \\ \dot{\epsilon}_{zx} & \dot{\epsilon}_{zy} & \dot{\epsilon}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (16)$$

As expressões mostradas pelas Equações 16 e  $\omega_x$ ,  $\omega_y$  e  $\omega_z$  estão relacionadas a dilatação de volume, deformação por cisalhamento e velocidade angular, Schlichting e Gersten (2003) explicam detalhadamente seu significado entre as páginas 59 e 62.

### 2.3.5 Relação entre tensões e taxa de deformação

As equações de acoplamento das forças de superfície ao campo de escoamento somente podem ser obtidas através da interpretação de resultados obtidos experimentalmente. Nas seções anteriores foram obtidas as ferramentas matemáticas para estabelecer estas relações para um fluido contínuo, isotrópico e Newtoniano (WHITE, 2010).

Das seções anteriores sabe-se que as componentes do tensor de tensões viscosas dependem somente das componentes do tensor de taxa de deformação, uma vez que a translação instantânea e a rotação de corpo rígido instantâneo de um elemento fluido não gera nenhuma tensão de superfície, a não ser as componentes de pressão descritas anteriormente. Pode-se concluir a partir disto, que as componentes do tensor de tensões viscosas  $\tau_{ij}$ , podem depender somente do gradiente de velocidade  $\partial u/\partial x \dots \partial w/\partial z$  em combinações apropriadas.

Estas relações devem ser lineares e permanecerem inalteradas quando o sistema de coordenadas é rotacionado, e devido a isotropia, quando os eixos são trocados. A isotropia exige ainda que o eixo principal do tensor de tensões permaneça coincidente com o eixo do tensor de taxa de deformação em todos os pontos do campo, para que essas condições sejam satisfeitas, um ponto arbitrário do campo é escolhido e o sistema de coordenadas local  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$  e  $\bar{z}$ , arranjado de forma que seus eixos estejam alinhados com os eixos do tensor de tensões. E sendo as componentes da velocidade neste sistema  $\bar{u}$ ,  $\bar{v}$  e  $\bar{w}$  (KUNDU; COHEN; DOWLING, 2015).

Sendo todas estas condições respeitadas, observa-se que a isotropia só pode ser conservada se cada uma das três componentes de tensão normal  $\tau_{xx}$ ,  $\tau_{yy}$  e  $\tau_{zz}$ , dependa apenas das componentes do tensor de taxa de deformação nas mesmas direções e na soma dessas três componentes.

Desta forma obtém-se as Equações 17, com expressões que contém apenas derivadas espaciais das componentes da velocidade (SCHLICHTING; GERSTEN, 2003).

$$\begin{aligned} \bar{\tau}_{xx} &= \lambda \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} \right) + 2\mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} \\ \bar{\tau}_{yy} &= \lambda \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} \right) + 2\mu \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} \\ \bar{\tau}_{zz} &= \lambda \left( \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} \right) + 2\mu \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} \end{aligned} \quad (17)$$

O primeiro termo a direita da igualdade nestas equações representa a alteração de volume ou dilatação volumétrica, o que equivale à alteração de densidade. A constante de proporcionalidade  $\lambda$  multiplicando este termo só tem significado quando o fluido em questão for compressível, já que, para fluidos incompressíveis, o termo entre parênteses que multiplica  $\lambda$  (este termo é igual ao divergente do vetor velocidade  $\vec{\nabla} \cdot \vec{v}$ ) é igual a zero, restando apenas o termo a extrema direita da Equação . Este termo a extrema direita representa a dilatação linear, ou mudança na forma do elemento de volume, o fator 2 multiplicando esse termo é introduzido para relacionar  $\mu$  com a viscosidade. A isotropia exige ainda que as constantes de proporcionalidade  $\mu$  e  $\lambda$  dever ter o mesmo valor em cada uma das equações mostradas pelas Equações 17. Também observa-se que a troca de qualquer um dos três pares de eixos das quantidades  $(\bar{u}, \bar{x})$ ,  $(\bar{v}, \bar{y})$  e  $(\bar{w}, \bar{z})$ , mantém as equações inalteradas.

As Equações 17 podem ser escrita para qualquer sistema de coordenadas usando cálculo tensorial e são mostradas pelas Equações 18. Note que os índices  $x$ ,  $y$  e  $z$ , as componentes de velocidade  $u$ ,  $v$  e  $w$  e as coordenadas  $x$ ,  $y$  e  $z$  podem ser permutadas ciclicamente (KUNDU; COHEN; DOWLING, 2015).

$$\begin{aligned}
 \tau_{xx} &= \lambda \vec{\nabla} \cdot \vec{v} + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \\
 \tau_{yy} &= \lambda \vec{\nabla} \cdot \vec{v} + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \\
 \tau_{zz} &= \lambda \vec{\nabla} \cdot \vec{v} + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} \\
 \tau_{xy} = \tau_{yx} &= \mu \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \\
 \tau_{yz} = \tau_{zy} &= \mu \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \\
 \tau_{zx} = \tau_{xz} &= \mu \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)
 \end{aligned} \tag{18}$$

Usando-se as Equações 17 em um escoamento entre duas placas paralelas infinitas (escoamento de Couette), estas reduzem-se a Lei de Newton da fricção, esta diz que  $\tau = \mu(\partial u/\partial y)$ , mostrando que as generalizações adotadas são adequadas, demonstrando que o fator  $\mu$  é idêntico a viscosidade do fluido, e justificando a introdução do fator 2 (YOUNG et al., 2010). O significado físico do fator  $\lambda$  será discutido no próximo capítulo.

### 2.3.6 Hipótese de Stokes

A interpretação física do fator  $\lambda$  presente nas Equações 17 e 18, para escoamentos onde o  $\vec{\nabla} \cdot \vec{v}$  é diferente de zero, ainda é motivo de controvérsias atualmente, portanto, nas equações de movimento seu valor é determinado usando a hipótese introduzida por G. G. Stokes (1849), e será assumida como verdadeira a relação entre  $\lambda$  e  $\mu$  mostradas pela Equação 19. Esta relação entre  $\lambda$  e  $\mu$  ainda trás a vantagem de que se escrevendo  $\lambda$  em função de  $\mu$ , consegue-se reduzir o número de propriedades físicas que caracterizam o campo de tensões em um escoamento compressível de duas para uma única propriedade (SCHLICHTING; GERSTEN, 2003).

$$3\lambda + 2\mu = 0 \rightarrow \lambda = -\frac{2}{3}\mu \quad (19)$$

Substituindo o valor de  $\lambda$  na Equação 18 e substituindo  $\tau$  pela diagonal principal do tensor de tensões viscosas ( $\tau_{xx} = \sigma_x + p$ ,  $\tau_{yy} = \sigma_y + p$ ,  $\tau_{zz} = \sigma_z + p$ ), tem-se o conjunto de Equações 20, que corresponde a componente normal do tensor de tensões  $\sigma$  (Equação 10).

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -p - \frac{2}{3}\mu \vec{\nabla} \cdot \vec{v} + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \\ \sigma_y &= -p - \frac{2}{3}\mu \vec{\nabla} \cdot \vec{v} + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \\ \sigma_z &= -p - \frac{2}{3}\mu \vec{\nabla} \cdot \vec{v} + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} \end{aligned} \quad (20)$$

As tensões de cisalhamento não sofrem alteração decorrente da hipótese de Stokes, e as equações de movimento que surgem da introdução dessa hipótese podem ser aceitas, pois foram confirmadas por um grande número de experimentos fornecendo assim uma boa descrição dos processos físicos.

O tensor de tensões viscosas representa as tensões as quais levam a dissipação em um escoamento isotérmico, outros processos de dissipação no campo de temperatura ocorrem devido a condução de calor. Como  $\lambda$  apenas aparece nas tensões normais to tensor de tensões viscosas,  $\tau_{xx} = \sigma_x + p$ ,  $\tau_{yy} = \sigma_y + p$ ,  $\tau_{zz} = \sigma_z + p$ , termos esses que também contém a pressão termodinâmica ( $p$ ), fica claro que o significado físico de  $\lambda$  está ligado com o mecanismo de dissipação (se o volume do fluido é alterado por uma quantidade finita), e com a relação entre o tensor de tensões e a pressão termodinâmica (SCHLICHTING; GERSTEN, 2003).

Neste ponto Schlichting e Gersten (2003 apud DYKE et al., 1962) conclui que se  $\lambda$  for proporcional a  $\mu$ , os termos multiplicando  $\lambda$  podem ser desconsiderados até mesmo na teoria da camada limite de segunda ordem.

### 2.3.7 Viscosidade volumétrica ou de massa e pressão termodinâmica

Assumindo que não se conheça a hipótese de Stokes e restringindo-se ao caso em que não a tensão de cisalhamento, já que sua interpretação física e origem estão claras. Considerando um sistema fluido onde a tensão normal atua igualmente em toda a fronteira como visto na esfera representada pela Figura 9.

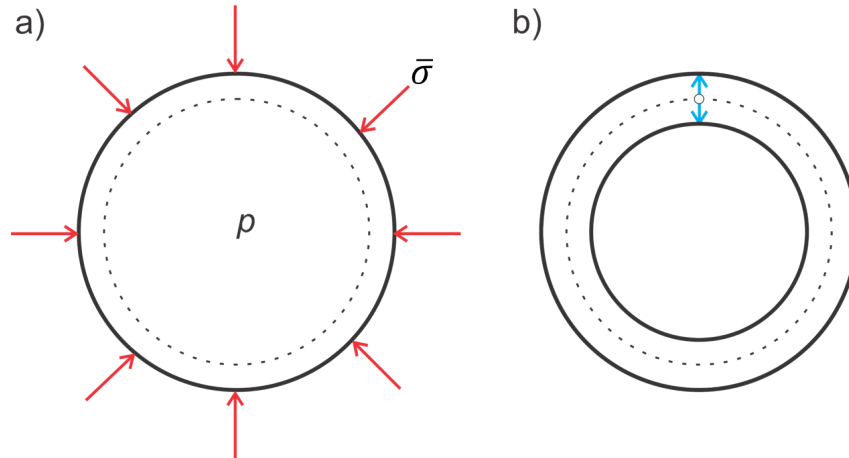
Para o caso ilustrado na Figura 9a, não existe movimento então a tensão normal deve necessariamente ser igual a pressão termodinâmica  $p$ , porém com sentido oposto. Já para o caso em que há movimento, como ilustrado na Figura 9b, substitui-se o conjunto de Equações 17 e usando  $\tau_{xx} = \sigma_x + p$ ,  $\tau_{yy} = \sigma_y + p$  e  $\tau_{zz} = \sigma_z + p$  obtém-se a Equação 23 (SCHLICHTING; GERSTEN, 2003).

$$\bar{\sigma} = -p + \left( \lambda + \frac{2}{3}\mu \right) \vec{\nabla} \cdot \vec{v} \quad (21)$$

Este movimento quase estático tem velocidade muito pequena quando comparada a velocidade de propagação das perturbações na pressão, de modo a formar uma pressão uniforme



Figura 9 – (a) Compressão quase estática; (b) movimento oscilatório de uma massa fluida de forma esférica.



Fonte: Schlichting e Gersten (2003) p. 66.

no elemento fluido esférico. Se o sistema for comprimido quase estaticamente e então revertido ao seu estado prévio assintoticamente, neste caso o trabalho por unidade de tempo e unidade de volume em um processo termodinâmico reversível é expresso pela Equação 23 (KUNDU; COHEN; DOWLING, 2015).

$$\frac{\dot{W}}{dV} = -p\vec{\nabla} \cdot \vec{v} \quad (22)$$

Para valores finitos de  $\vec{\nabla} \cdot \vec{v}$  onde existe compressão, expansão ou oscilação a amplitudes finitas, a tensão média  $\bar{\sigma}$  e a pressão  $-p$  são iguais apenas se o coeficiente expresso pela Equação 23 for zero, caso contrário  $\bar{\sigma}$  e  $-p$  não são iguais, da mesma como enunciada pela hipótese de Stokes.

$$\mu' = \lambda + \frac{2}{3}\mu \quad (23)$$

Nos casos em que  $\mu' \neq 0$  o movimento oscilatório do sistema simétrico esférico da Figura 9b é conduzido a dissipação, mesmo o gás no volume de controle permanecendo com temperatura constante, acontecendo o mesmo para compressões e expansões finitas. Desta forma o coeficiente  $\mu'$  é chamado de viscosidade volumétrica (ou de massa), sendo esta propriedade responsável pela dissipação de energia em um fluido com distribuição de temperatura suave devido a uma finita alteração no volume. A propriedade física  $\mu'$  é análoga a viscosidade dinâmica  $\mu$  no caso de deformação (SCHLICHTING; GERSTEN, 2003).

A viscosidade volumétrica (ou de massa) é a segunda propriedade física de um fluido compressível, isotrópico e Newtoniano, e surge nas relações constitutivas dadas pelo conjunto de Equações 18, devendo ser mensurado juntamente ao coeficiente  $\mu$ . Ficando claro que  $\mu' = 0 \rightarrow p = \bar{\sigma}$  e  $\mu' \neq 0 \rightarrow p \neq \bar{\sigma}$  (KUNDU; COHEN; DOWLING, 2015).

A premissa da hipótese de Stokes é equivalente a suposição de que a pressão termodinâmica é igual ao valor constante de  $1/3(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$  mesmo se ocorrer ciclos finitos de compressão e expansão. Além disso, também é equivalente supor que o movimento oscilatório de um grande sistema esférico é reversível contanto que se mantenha isotérmico. Para determinar em quais

condições  $\mu'$  de um fluido compressível desaparece é preciso realizar-se experimentos, ou então, através de métodos estatísticos termodinâmicos que permitem obter coeficientes de transporte a partir de bases fundamentais (WHITE, 2010).

### 2.3.8 Equações Navier-Stokes

Ao inserirem-se o conjunto de Equações Equações 18, que são equações de transporte, nas equações de momento, Equação 13, e levando-se em consideração a hipótese de Stokes, Equação 19, obtêm-se as seguintes equações de movimento em coordenadas Cartesianas conforme a Equação 24 (FOX; MCDONALD; PRITCHARD, 2011).

$$\begin{aligned}
 \rho \frac{Du}{Dt} &= f_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \mu \left( 2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \vec{\nabla} \cdot \vec{v} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \\
 &\quad \frac{\partial}{\partial z} \left[ \mu \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] \\
 \rho \frac{Dv}{Dt} &= f_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \left( 2 \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} \vec{\nabla} \cdot \vec{v} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \mu \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] + \\
 &\quad \frac{\partial}{\partial x} \left[ \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] \\
 \rho \frac{Dw}{Dt} &= f_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \mu \left( 2 \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{2}{3} \vec{\nabla} \cdot \vec{v} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \mu \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] + \\
 &\quad \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right]
 \end{aligned} \tag{24}$$

Estas são as equações diferenciais de Navier-Stokes que descrevem o escoamento de fluidos, permitindo determinar os campos de velocidade e pressão nesses escoamentos. Usando notação vetorial, estas equações podem ser dadas numa forma em que serão válidas para qualquer sistema de coordenadas, conforme é apresentado pela Equação 25:

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \vec{f} - \vec{\nabla}(p) + \vec{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\tau}), \text{ onde } \boldsymbol{\tau} = \mu \left( 2\dot{\boldsymbol{\epsilon}} - \frac{2}{3} \delta \vec{\nabla} \cdot \vec{v} \right), \tag{25}$$

e  $\delta$  é a unidade do tensor de Kronecker, também conhecido como Delta de Kronecker ( $\delta_{ij} = 1$  para  $i = j$  e  $\delta_{ij} = 0$  para  $i \neq j$ ) (SCHLICHTING; GERSTEN, 2003).

A hipótese Stokes prevê que as tensões normais e cisalhantes são funções lineares da taxa de deformação, conforme visto na seção 2.3.6, e está em conformidade com a lei da viscosidade de Newton. Esta hipótese de linearidade é arbitrária e a priori não se pode ter certeza que as equações de Navier-Stokes descrevem corretamente o movimento do fluido, sendo necessário verificá-las experimentalmente. Porém, deve-se levar em consideração que a grande dificuldade matemática dessas equações nos traz apenas uma pequena quantidade de soluções onde os termos convectivos interagem de maneira geral com os termos de fricção. Estas soluções são geralmente bastante restritivas e nem sempre descrevem uma condição real (WHITE, 2010).

Multiplicando-se as equações de Navier-Stokes na direção de  $x$  por uma velocidade  $u$ , na direção de  $y$  por uma velocidade  $v$  e na direção de  $z$  uma velocidade  $w$ , e então somar-se estes termos para encontrar uma equação para a energia mecânica na forma vetorial, e assumindo a energia potencial com independente do tempo ( $\vec{g}$  é constante)  $\vec{f} = -\rho \text{grad}(\psi)$  tem-se a Equação

26 (SCHLICHTING; GERSTEN, 2003).

$$\rho \frac{D\left(\frac{1}{2}\vec{v}^2 + \psi\right)}{Dt} = -\vec{v}\vec{\nabla}(p) + \vec{v}\vec{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\tau}) \quad (26)$$

O campo de escoamento só descrito completamente com a equação da continuidade, as equações de Navier-Stokes e a equação da energia que será tema do próximo capítulo.

### 2.3.9 Equação da energia

Para conseguir uma equação para o balanço de energia em um escoamento, será considerado uma partícula fluida de massa  $dM = \rho dV$  e o volume  $dV = dx dy dz$  em um sistema de coordenadas cartesianas que segue o fluxo da partícula. Para esta formulação usará-se a primeira lei da termodinâmica, esta diz que o ganho total de energia  $DE_t$  (o índice t indica energia total) em unidades de tempo  $Dt$ , deve ser igual ao calor fornecido para a partícula  $\dot{Q}Dt$  mais o trabalho realizado  $\dot{W}Dt$ , conforme Equação 27 (HOLMAN, 2009).

$$\frac{DE_t}{Dt} = \dot{Q} + \dot{W} \quad (27)$$

O calor pode ser fornecido através de condução e radiação, esta última geralmente pequena para baixas temperaturas, portanto será ignorada. Fontes de calor fornecidas por geração decorrentes de reações químicas ou através do efeito Joule em gases eletromagnéticos também não serão levadas em consideração.

Desta forma, define-se fluxo de calor como o calor transferido por unidade de área e tempo e é expresso pelo vetor  $\vec{q}(q_x, q_y, q_z)$  dado em  $J/m^2s$ . O calor entrando no elemento de volume na face perpendicular ao eixo  $x$  por unidade de tempo é  $q_x dy dz$ , enquanto o calor saindo por unidade de tempo na face oposta é  $[q_x + (\partial q_x / \partial x) dx] dy dz$ . Portanto o calor fornecido na direção do eixo  $x$  por unidade de tempo é  $\dot{Q}_x = -(\partial q_x / \partial x) dx dy dz = -(\partial q_x / \partial x) dV$ , então o calor total fornecido pode ser expresso pela Equação 28 (FOX; MCDONALD; PRITCHARD, 2011).

$$\dot{Q} = -dV \left( \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right) = -dV \vec{\nabla} \cdot (\vec{q}) \quad (28)$$

Uma vez que o divergente é uma medida de intensidade da fonte do campo vetorial em questão, o termo  $\dot{Q}$  também é essencialmente um termo de fonte, e a expressão a extrema direita representa a equação na forma vetorial.

A energia total  $E_t$  pode ser definida por três componentes: energia interna  $dMe_t$ , energia cinética  $1/2(dM\vec{v}^2)$  e a energia potencial gravitacional  $dM\psi$ . Desta forma, arranjando os termos chega-se a Equação 29:

$$dE_t = dMe_t = dV \rho e_t = dV \rho \left( e + \frac{1}{2}\vec{v}^2 + \psi \right) \quad (29)$$

onde  $e$  é a energia interna específica (por unidade de massa) dada em  $m^2/s^2$  (SCHLICHTING; GERSTEN, 2003). Assim a taxa de energia total é dada pela Equação 30.

$$\frac{DE_t}{Dt} = dV\rho\frac{De_t}{Dt} = dV\rho\frac{D(e + \frac{1}{2}\vec{v}^2 + \psi)}{Dt} \quad (30)$$

Para determinar a potência  $\dot{W}$  considera-se primeiramente o trabalho realizado no elemento de volume, onde todas as tensões normais e de cisalhamento realizam trabalho. Então a taxa de trabalho total realizado sobre o elemento de volume  $dV$  é dado pela Equação 31. Nesta equação  $\sigma_x, \sigma_y \dots \tau_{xy}$  são as componentes do tensor de tensões  $\sigma$  mostrado na Equação 10 (SCHLICHTING; GERSTEN, 2003).

$$\begin{aligned} \dot{W} &= dV \left[ \frac{\partial}{\partial x}(u\sigma_x + v\tau_{xy} + w\tau_{xz}) + \frac{\partial}{\partial y}(u\tau_{yx} + v\sigma_y + w\tau_{yz}) + \frac{\partial}{\partial z}(u\tau_{zx} + v\tau_{zy} + w\sigma_z) \right] \\ &= dV\vec{\nabla} \cdot (\sigma\vec{v}) \end{aligned} \quad (31)$$

As tensões normais  $\sigma$  e cisalhantes  $\tau$  nesta equação são as tensões totais mostradas pelo tensor de tensões, este tensor consiste numa matriz simétrica onde as tensões normais estão na diagonal principal e as tensões tangenciais completam a matriz. Já a expressão a extrema direita da segunda igualdade dessa equação é a forma vetorial para a equação de taxa de trabalho (potência) (WHITE, 2010).

Substituindo-se as Equações 28, 30 e 31 na equação da primeira lei da termodinâmica (Equação 27) tem-se a Equação 32, que é a equação da energia (SCHLICHTING; GERSTEN, 2003).

$$\rho\frac{D(e + \frac{1}{2}\vec{v}^2 + \psi)}{Dt} = -\vec{\nabla} \cdot (\vec{q}) + \vec{\nabla} \cdot (\sigma\vec{v}) \quad (32)$$

Somando-se a energia interna, cinética e potencial tem-se o calor fornecido por condução e o trabalho realizado pelas forças de superfície. Levando-se a relação entre o tensor de tensões  $\sigma$  e o tensor de tensões viscosas  $\tau$  em conta, tem-se que  $\sigma = -\delta p + \tau$ , então a Equação 32 pode ser escrita da forma encontrada na Equação 33. Esta equação formulada a partir de uma lei de balanço tem uma forma divergente ou estritamente conservativa.

$$\frac{\partial(\rho e_t)}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot [(p - \rho e_t)\vec{v} - \tau\vec{v} + \vec{q}] \quad (33)$$

Pode-se expressar a Equação 33 como uma equação de balanço para entalpia específica total, como mostrado pela Equação 34.

$$h_t = e_t + \frac{p}{\rho} \rightarrow \rho\frac{Dh_t}{Dt} = -\vec{\nabla} \cdot (\vec{q}) + \frac{\partial p}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\tau\vec{v}) \quad (34)$$

Ao subtrair-se a Equação da energia mecânica<sup>26</sup>, da Equação 32 para a energia específica total, obtém-se a Equação 35, que é uma lei de balanço de energia interna (SCHLICHTING; GERSTEN, 2003):

$$\rho\frac{De}{Dt} = -\vec{\nabla} \cdot (\vec{q}) - p\vec{\nabla} \cdot \vec{v} + \Phi \quad (35)$$

onde  $\Phi$  é chamada função dissipação e é dada pela Equação 36 (HOLMAN, 2009).

$$\Phi = \vec{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\tau} \vec{v}) - \vec{v} \vec{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\tau}) \quad (36)$$

Substituindo-se as Equações 18 e 19, que são equações de transporte e a hipótese de Stokes, respectivamente, na função dissipação Equação 37, obtém-se a Equação em coordenadas Cartesianas (HOLMAN, 2009).

$$\begin{aligned} \frac{\Phi}{\mu} = \frac{2}{3} & \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right] \\ & + \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \end{aligned} \quad (37)$$

Equações para diferentes estados termodinâmicos podem ser derivadas, como por exemplo a Equação 40, que através de um balanço de entalpia específica  $h$ , representa uma equação de balanço para a entropia específica  $s$ . Essa equação faz uso da relação proposta por Kestin (1966), Equação 38, da capacidade térmica a pressão constante  $C_p$  e do coeficiente de expansão térmica  $\beta$ , mostrado pela Equação 39 (HOLMAN, 2009).

$$\frac{Dh}{Dt} = c_p \frac{DT}{Dt} + \frac{1 - \beta T}{\rho} \frac{Dp}{Dt} \quad (38)$$

$$\beta = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \quad (39)$$

Então a para a entropia específica tem-se a Equação 40:

$$\rho \frac{Ds}{Dt} = -\vec{\nabla} \cdot \left( \frac{\vec{q}}{T} \right) - \frac{\vec{q}}{T^2} \vec{\nabla}(T) + \frac{1}{T} \Phi \quad (40)$$

Nesta equação todos os termos do lado direito da igualdade implicam em produção de entropia. De acordo com a segunda lei da termodinâmica, a entropia de um sistema adiabático não pode diminuir, uma vez que não existe fluxo de calor através das fronteiras, isto implica que o ultimo e penúltimo termo dessa equação não serão negativos. Pela Equação 37 conclui-se que a viscosidade deve ser uma quantidade positiva, e pelo segundo termo do lado direito da Equação 40 a condutividade térmica  $K$  também deve ser positiva. A equação de transporte que relaciona o vetor de fluxo de calor com o campo de temperatura, que deve ser adicionada a equação de balanço de energia, é chamada lei de Fourier da condução térmica, e é dada por  $\vec{q} = -K \text{grad}(T)$ . Então a equação da energia em sua forma final é dada pela Equação 41, onde  $\Phi$  é dado pela Equação 37 (SCHLICHTING; GERSTEN, 2003).

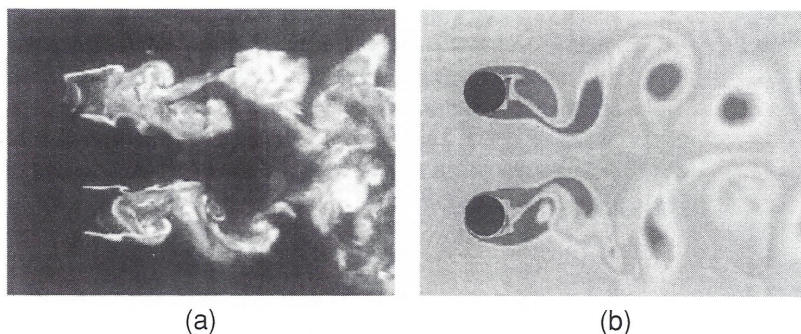
$$\rho C_p \frac{DT}{Dt} = \vec{\nabla} \cdot (K \vec{\nabla}(T)) + \beta T \frac{Dp}{Dt} + \Phi \quad (41)$$

## 2.4 Fluidodinâmica computacional (CFD)

A fluidodinâmica computacional ou CFD, do inglês *computational fluid dynamics*, antes restrita apenas a grandes indústrias ou laboratórios de pesquisa avançada, vem tornando-se cada vez

mais comum e de fácil acesso a todos que estiverem interessados. Embora a maioria dos softwares sejam pagos, como por exemplos o ANSYS® Inc. e Fluent®, estão disponíveis também softwares livres, como o OpenFOAM®. Tu, Yeoh e Liu (2012) comparam um escoamento sobre dois cilindros paralelos, visto na Figura 10, onde (a) foi obtido através de experimento e (b) através de uma simulação numérica (CFD).

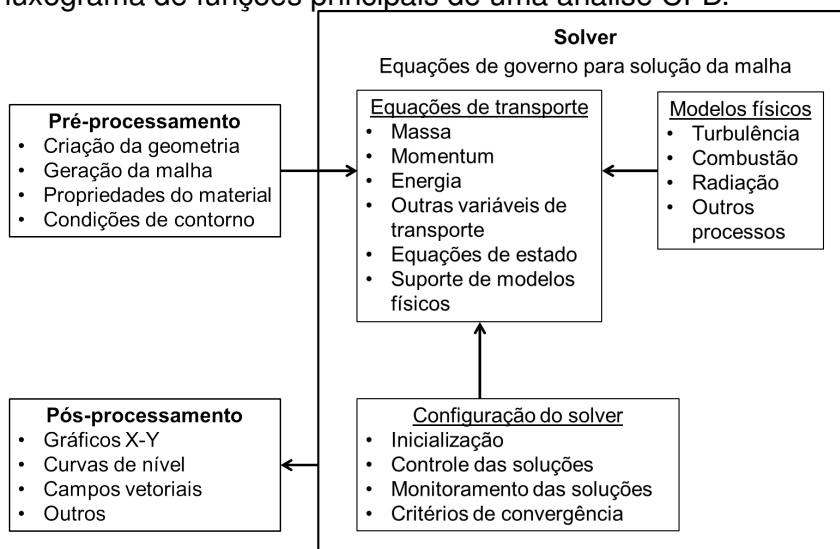
Figura 10 – Comparação de um escoamento sobre dois cilindros paralelos: (a) experimento e (b) simulação numérica.



Fonte: Tu, Yeoh e Liu (2012) p. 7.

A análise de um escoamento em CFD consiste em três elementos principais, são estes o pré-processamento, solução e pós-processamento. A Figura 11 mostra o fluxograma exemplificando as funções de cada um dos três elementos principais (TU; YEOH; LIU, 2012).

Figura 11 – Fluxograma de funções principais de uma análise CFD.



Fonte: Adaptado de Tu, Yeoh e Liu (2012) p. 31.

### 2.4.1 Métodos de solução

Depois da construção da geometria, geração da malha, definição das propriedades da substância e das condições de contorno, é preciso adotar um método para a solução desse conjunto de dados inicialmente configurados. Entre os vários métodos de solução das equações de governo, principalmente as equações de Navier-Stokes, tem-se os métodos de média de Reynolds (ou RANS do inglês *Reynolds-averaged Navier–Stokes*), simulação de grandes turbilhões (ou LES do inglês *Large Eddy Simulation*) e simulação numérica direta (ou DNS do inglês *Direct Numerical Simula-*

tion). Na subseções seguintes será abordado o método LES que será utilizado neste trabalho.

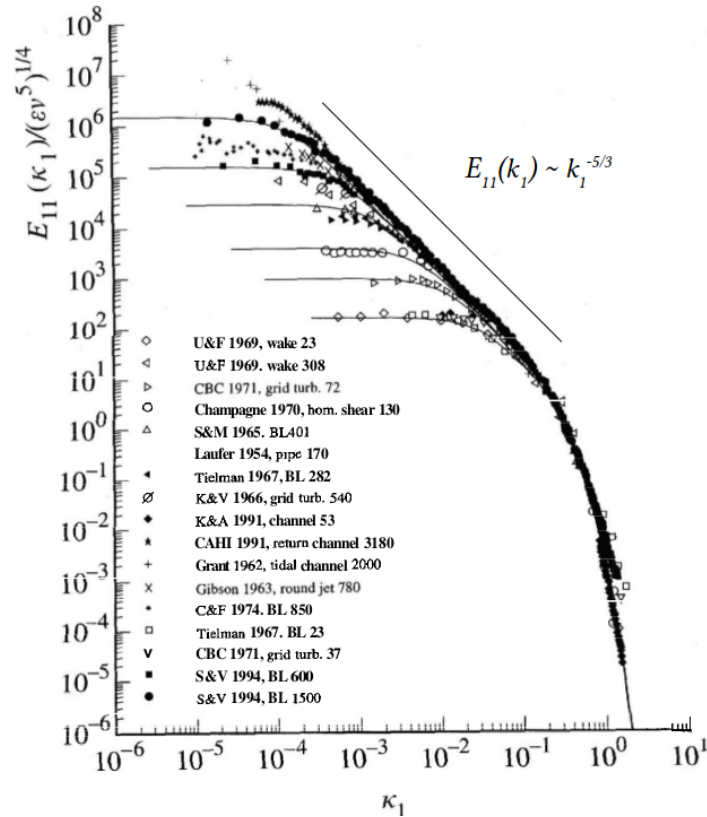
#### 2.4.1.1 Solução numérica através de LES

O método de simulação de grandes turbilhões ou LES consiste em calcular os grandes turbilhões como funções do tempo, usando para isso um conjunto de equações manipuladas das equações de Navier-Stokes de forma que essas removam apenas os pequenos turbilhões. Esses pequenos turbilhões são usualmente do tamanho da malha. A vantagem do método LES está no fato de que a modelagem da turbulência é mais simples, reduzindo significativamente o erro induzido pelo modelo de turbulência. Este método exige grandes recursos computacionais, uma vez que o tamanho da malha e o passo de tempo são pequenos. Esse tipo de simulação só pode ser realizada em 3D, dado o fato de que a natureza do escoamento turbulento ocorre nas três dimensões do espaço (WENDT, 2009).

Este método foi proposto inicialmente por Smagorinsky em meados dos anos de 1960 como uma alternativa ao DNS, já que os recursos computacionais disponíveis naquela época eram muito limitados. Smagorinsky baseou-se na teoria da cascata de energia proposta por Kolmogorov (teoria K41) (VILLIERS, 2006; BERSELLI; ILIESCU; LAYTON, 2006), onde as grandes escalas de turbulência são instáveis e acabam quebrando-se em escalas menores e estas por sua vez dão origem a escalas ainda menores, este processo de cascata vai ocorrendo até as escalas de turbulência atingirem um tamanho em que não mais é possível a quebra em turbilhões menores, e finalmente a energia é dissipada sob forma de calor (KOLMOGOROV, 1941).

A Figura 12 mostra o espectro de energia para vários números de Reynolds baseados na escala de Taylor ( $R_\lambda$ ) de diferentes experimentos (símbolos na figura) e o modelo proposto por Kolmogorov (linhas sólidas na figura), também é possível ver que na região inercial o decaimento de energia segue de maneira linear com coeficiente angular de  $-5/3$ .

Figura 12 – Espectro de velocidade unidimensional longitudinal ao escoamento. Símbolos são medições através de experimentos e linhas são modelo para  $R_\lambda = 30, 70, 130, 300, 600$  e 1500. Para cada experimento o número final na legenda representa o valor de  $R_\lambda$ .



Fonte: Adaptado de Pope (2000) p. 235.

Através da teoria K41, Smagorinsky sugeriu que as grandes escalas deveriam ser resolvidas, já que estas contem a maior parte da energia e são responsáveis pela maioria do transporte, sendo fortemente afetadas pelas condições de contorno, enquanto as pequenas escalas do movimento poderiam ser aproximadas, uma vez que estas são uniformes e tem como principal característica a drenagem de energia das grandes escalas de turbulência. Estava definindo a base dos modelos LES (VILLIERS, 2006; BERSELLI; ILIESCU; LAYTON, 2006; GERMANO; SAGAUT, 2013).

#### 2.4.1.2 Equações Navier-Stokes filtradas

Como a proposta do LES é resolver as escalas de turbulência que contem a maior parte da energia e modelar as escalas dissipativas algum tipo de filtragem das equações de governo devem ser adotadas.

Este processo de filtragem consiste numa média ponderada de propriedades do fluxo localmente derivada sobre um volume de fluido, ao contrario do método RANS, onde uma média global é realizada. Para isso usa-se um filtro passa-baixa, onde as escalas maiores que o comprimento característico  $\Delta$ , também chamado de largura do filtro, são retidas e as escalas menores (SGS do inglês *Sub-Grid Scales*) precisam ser modeladas (GERMANO; SAGAUT, 2013).

O fluxo de qualquer variável  $f$  em LES é composto por uma contribuição de larga escala,  $\bar{f}$ , e uma de pequena escala,  $f'$ , conforme a Equação 42.



$$f = \bar{f} + f' \equiv \bar{f} = f - f' \quad (42)$$

A fim de extrair-se as componentes de larga escala uma operação de filtragem precisa ser realizada. Essa filtragem é realizada por uma função localizada, também conhecida como função com suporte compacto, ou seja, a componente espacial  $x$  e  $x'$  estão próximas, satisfazendo a condição imposta pela Equação 43:

$$\oint G(x, x'; \Delta) dx' = 1, \quad (43)$$

onde  $\Delta$ , além de representar a largura do filtro, é também proporcional ao comprimento de onda das pequenas escalas retidas na filtragem (VILLIERS, 2006).

Finalmente a função filtrada pode ser dada pela Equação 44 (VILLIERS, 2006; BERSELLI; ILIESCU; LAYTON, 2006).

$$\bar{f}(x) = \oint G(x, x'; \Delta) f(x') dx' \quad (44)$$

Os três principais filtros encontrados na literatura são o filtro gaussiano, o filtro de caixa do inglês *box filter*, também conhecido como *top hat filter*, e finalmente o filtro de corte afiado de Fourier (numa tradução livre do inglês *sharp Fourier cutoff filter*) (VILLIERS, 2006; BERSELLI; ILIESCU; LAYTON, 2006; GERMANO; SAGAUT, 2013).

O filtro gaussiano é mostrado pela Equação 45 e tem como principal vantagem ser suave, e por isso diferenciável.

$$G(x, \Delta) = \sqrt{\frac{6}{\pi \Delta^2}} e\left(-\frac{6x^2}{\Delta^2}\right) \quad (45)$$

O filtro de corte de Fourier, que é descrito no espaço de Fourier, retem todos os números de onda  $k$  superiores a frequência de corte escolhida, sendo as frequências menores modeladas. Este filtro é dado pelas relações mostradas pela Equação 46, onde  $\hat{G}$  denota o coeficiente de Fourier. Este filtro é difícil de ser aplicado em escoamentos não homogêneos e ao contrario do filtro gaussiano não torna suave as escalas resolvidas, tendo aplicação principal em métodos espectrais (GERMANO; SAGAUT, 2013).

$$\hat{G}(k, \Delta) = \begin{cases} 1 & : \text{ se } k \leq \frac{\pi}{\Delta} \\ 0 & : \text{ senão} \end{cases} \quad (46)$$

Por último temos o *top-hat filter* que é o método mais utilizado quando usa-se o método de volumes finitos. Neste método as médias das variáveis do escoamento são feitas sobre os elementos de volume da malha onde estas são funções lineares por partes de  $x$ . Isso implica que se  $\Delta$  for definido com o mesmo comprimento que o espaçamento da malha, a média e o valor local de  $\bar{f}$  serão iguais. Este é um método implícito, ou seja, as variáveis não sofrem um processo de filtragem explícito através de funções conforme os métodos citados anteriormente. As relações mostradas pela Equação 47 exibem o *kernel* deste filtro. Portanto, a filtragem é fornecida implicitamente por duas causas, a grade computacional, que induz um corte na frequência de Nyquist, e a discreti-

zação usada no código, que pode mudar a forma da função de transferência implícita (DENARO, 2011).

$$G(x, \Delta) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta} & : \text{ se } x' \leq \frac{\Delta}{2} \\ 0 & : \text{ senão} \end{cases} \quad (47)$$

### 2.4.1.3 Modelo de turbulência

Durante a filtragem das equações um efeito indesejado acontece, o processo de médias de Reynolds que ocorre leva ao surgimento de novas variáveis. Essas variáveis são os fluxos turbulentos e são termos desconhecidos, como nenhuma nova equação pode ser derivada o sistema fica em aberto. Esse é o bem conhecido problema de fechamento e até o momento não existe solução. Visando contornar este problema um modelo que relaciona as variáveis desconhecidas com quantidades conhecidas deve ser utilizado.

Estes modelos são chamados de modelos de turbulência e para o tensor de Reynolds das SGS (escalas de sub grade numa tradução do inglês para *sub-grid scales*) e os fluxos turbulentos escalares existem uma série de teorias que visam aproximar o valor destes termos. Dentre os tipos de modelos de turbulência mais utilizados em LES pode-se citar os modelos de viscosidade turbulenta de Boussinesq, modelos de comprimento de mistura de Prandtl e a hipótese de similaridade de Von-Kármán (HOLZMANN, 2016; VILLIERS, 2006; WILCOX, 2006).

Aqui será abordado brevemente apenas o modelo de viscosidade turbulenta pois este será utilizado no decorrer do trabalho.

Assim como grande parte dos modelos de turbulência os modelos de SGS fazem uso da hipótese introduzida por Joseph Boussinesq. Em sua teoria Boussinesq introduz o conceito de viscosidade de turbilhões (numa tradução do inglês de *eddy viscosity*), ou viscosidade turbulenta, onde em um escoamento com grande turbulência, existe um aumento no aspecto caótico decorrente de um maior número de vórtices que podem transportar calor, adicionalmente ao fenômeno de transporte já existente, por exemplo. Dessa forma relaciona-se a turbulência de um escoamento a um aumento na viscosidade do fluido o que aumenta o coeficiente de difusão na equação de momento (YOSHIKAWA, 1986; BERSELLI; ILIESCU; LAYTON, 2006; GERMANO; SAGAUT, 2013).

O método da viscosidade turbulenta nos permite eliminar os fluxos turbulentos escalares, e assim o tensor de Reynolds, fazendo relações com quantidades conhecidas, porém neste processo novas variáveis como a própria viscosidade turbulenta  $\mu_t$  e a energia cinética turbulenta  $k$  surgem. Normalmente a viscosidade turbulenta ( $\mu_t$ ) é caracterizada através da energia cinética turbulenta ( $k$ ) e um comprimento característico  $L$ . Como  $k$  está relacionado ao campo de velocidade  $u = \sqrt{k}$ , correlações entre  $u$ ,  $L$  e  $\mu_t$  podem ser derivadas. Esta correlação é dada pela Equação 48, onde  $C_\mu$  é uma constante adimensional com valor próximo de 0,17 (BERSELLI; ILIESCU; LAYTON, 2006; HOLZMANN, 2016).

$$\mu_t \approx C_\mu \rho u L \quad (48)$$

Com a aproximação da viscosidade turbulenta (Equação 48) o modelo de turbulência a ser usado precisa fazer uma relação de  $L$  e  $u$  com quantidades já conhecidas. Para maiores detalhes

sobre modelos de turbulência e sua derivação as obras de Pope (2000), Berselli, Iliescu e Layton (2006), Wilcox (2006), Germano e Sagaut (2013) podem ser consultadas.

### 3 METODOLOGIA

Neste trabalho será realizado um experimento numérico visando reproduzir um escoamento de Couette onde existe um gradiente de temperatura entre a superfície inferior e superior. Com isso pretende estudar-se os efeitos da estratificação térmica na camada limite, visando obter um escoamento intermitente entre laminar (ou praticamente laminar) e turbulento utilizando como fluido de trabalho o ar a temperatura de  $300\text{ K}$ , onde este será considerado como gás ideal. A Tabela 1 mostra as propriedades físico-químicas utilizadas no experimento, estas propriedades foram obtidas na Tabela A-5 da obra de Holman (2009).

Tabela 1 – Propriedades do ar a  $300\text{ K}$ .

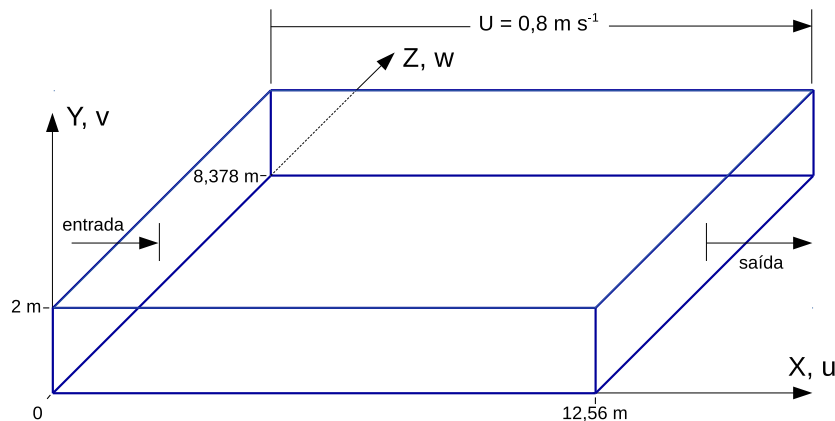
$\mu$ [ $kg(m\ s)^{-1}$ ]	$\nu$ [ $m^2\ s^{-1}$ ]	Pr	$M$ [ $g\ mol^{-1}$ ]	$C_p$ [ $kJ(kg\ ^\circ C)^{-1}$ ]	$P. ref.$ [ $Pa$ ]
$1.846 \times 10^{-5}$	$1.569 \times 10^{-5}$	0,708	28.97	1006	$1.013 \times 10^5$

Fonte: Elaborado pelo autor.

Desta forma optou-se por um  $Re$  na ordem de  $5 \times 10^4$  aplicando uma velocidade de  $U = 0,8\ m\ s^{-1}$  a superfície superior, enquanto a superfície inferior é estática. Tanto a superfície superior quanto a inferior são sólidas, não havendo escoamento através delas.

O domínio computacional onde ocorrerá a discretização das equações de governo tem dimensões de  $(B_x, B_z) = (4\pi, \frac{8}{3}\pi)/h$  na direção do escoamento e na direção ortogonal ao escoamento respectivamente, já a altura do canal é  $B_y = 2h$ , onde  $h = 1\ m$  é a distância média na direção de  $y$ , conforme a Figura 13. A escolha pela utilização destas dimensões deu-se pelo fato de o mesmo ter sido utilizado por Lee e Kim (1991) em um estudo de escoamento de Couette, porém neste estudo não havia gradiente de temperatura entre as superfícies e o método de solução utilizado foi o DNS.

Figura 13 – Características do domínio utilizado.



Fonte: Elaborado pelo autor.

A resolução da malha utilizada inicialmente será de  $(126 \times 50 \times 126)$  em  $(x, y, z)$ , resultando em 793800 elementos discretos e caso haja necessidade esse número poderá ser alterado. O formato das células é hexagonal e aplicou-se uma relação de expansão de 0,09 em  $y$ , ou seja, a altura das células adjacentes às fronteiras superior e inferior tem dimensão de 9% quando comparadas a altura das células adjacentes ao plano médio na direção de  $y$  ( $h = 1\ m$ ), essa relação de expansão acontece gradativamente entre os planos de células, iniciando com a menor altura junto as fronteira superior e inferior e atingindo o tamanho máximo no centro do domínio.

Para tal experimento fará-se uso de um método numérico LES onde as grandes escalas foram resolvidas e as escalas de sub-grade foram modeladas. Por praticidade escalas de sub-grade será abreviada com SGS do inglês *sub-grid scale*. As grandes escalas serão resolvidas para um escoamento compressível, transiente, turbulento com empuxo, onde a equação da continuidade tem a forma da Equação 49:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (49)$$

onde  $\mathbf{u}$  e  $\rho$  são os campos de velocidade e densidade respectivamente.

Já a equação de momento tem a forma da Equação 50:

$$\frac{\partial (\rho \mathbf{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \mathbf{u}) = -\nabla p + \rho \mathbf{g} + \nabla \cdot (2\mu_{eff} D(\mathbf{u})) - \nabla \left( \frac{2}{3} \mu_{eff} (\nabla \cdot \mathbf{u}) \right), \quad (50)$$

sendo  $p$  o campo de pressão estática e  $\mathbf{g}$  a aceleração da gravidade. Já o termo  $\mu_{eff}$  é a soma da viscosidade molecular e turbulenta e  $D(\mathbf{u})$  é o tensor taxa de deformação definido segundo a Equação 51.

$$D(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \left( \nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T \right) \quad (51)$$

A implementação do gradiente de pressão e forças de corpo oriundas da aceleração da gravidade serão feitas segunda as Equações 52:

$$\begin{aligned} -\nabla p + \rho \mathbf{g} &= -\nabla (p_{rgh} + \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{r}) + \rho \mathbf{g} \\ &= -\nabla p_{rgh} - (\mathbf{g} \cdot \mathbf{r}) \nabla \rho - \rho \mathbf{g} + \rho \mathbf{g} \\ &= -\nabla p_{rgh} - (\mathbf{g} \cdot \mathbf{r}) \nabla \rho, \end{aligned} \quad (52)$$

aqui  $p_{rgh} = p - \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{r}$  e  $\mathbf{r}$  é o vetor posição.

Para a equação da energia a mesma será formulada em termos de entalpia segundo a Equação 53:

$$\frac{\partial (\rho h)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} h) + \frac{\partial (\rho k)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} k) - \frac{\partial p}{\partial t} = \nabla \cdot (\alpha_{eff} \nabla h) + \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{g}, \quad (53)$$

aqui  $k$  é a energia cinética turbulenta por unidade de massa e é dada por  $k \equiv |\mathbf{u}|^2/2$ , já  $h$  é a entalpia por unidade de massa e é definida como a soma entre a energia interna por unidade de massa  $e$  e a pressão cinemática  $h \equiv e + p/\rho$ . Da definição de  $h$  temos as relações matemáticas que podem ser vistas nas Equações 54.

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\rho e)}{\partial t} &= \frac{\partial (\rho h)}{\partial t} - \frac{\partial p}{\partial t} \\ \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} e) &= \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} h) - \nabla \cdot (p \mathbf{u}) \end{aligned} \quad (54)$$

Já a difusividade térmica efetiva  $\alpha_{eff}/\rho$ , é a soma das difusividades térmicas laminar e turbulenta, conforme Equação 55, onde  $K$  é a condutividade térmica,  $C_p$  é o calor específico a pressão constante,  $\mu$  é a viscosidade dinâmica,  $\nu_t$  é a viscosidade cinemática turbulenta,  $Pr$  e  $Pr_t$

são os números de Prandtl e Prandtl turbulento respectivamente.

$$\alpha_{eff} = \frac{\rho\nu_t}{Pr_t} + \frac{\mu}{Pr} = \frac{\rho\nu_t}{Pr_t} + \frac{K}{c_p} \quad (55)$$

De posse das equações estas precisam ser filtradas, para tanto utilizou-se um filtro passa baixa. A filtragem ocorre de forma implícita onde a grade induz o corte na frequência de Nyquist. Como comprimento característico fez-se o uso da raiz cubica do volume da célula que está sendo filtrada, conforme a Equação 56, onde  $C_\Delta$  é uma constante e seu valor é unitário neste caso (GERMANO; SAGAUT, 2013 apud DEARDORFF, 1970).

$$\Delta = C_\Delta(\Delta_1(x)\Delta_2(x)\Delta_3(x))^{\frac{1}{3}} \quad (56)$$

Para a região espacial abaixo das escalas resolvidas (SGS) usou-se um modelo de viscosidade turbulenta para parametrização já que estes são os únicos termos que sofrem do problema de fechamento na equação de momento. Nos modelos de viscosidade turbulenta a troca de energia entre as escalas resolvidas e não resolvidas tenta simular a perda de energia associada a cascata de energia de Kolmogorov (CHAI; MAHESH, 2012; MARTÍN; PIOMELLI; CANDLER, 2000).

Neste trabalho será usado um modelo de viscosidade turbulenta baseado no modelo de Smagorinsky porem aqui uma equação adicional de transporte para  $k$  é resolvida, portanto trata-se de um modelo de uma equação semelhante ao proposto por Yoshizawa (1986). Nos modelos de viscosidade turbulenta tal qual ao proposto por Smagorinsky em 1960 e seus derivados, assume-se uma relação linear entre as tensões de cisalhamento da SGS ( $\tau_{ij}$ ) o tensor taxa de deformação das escalas resolvidas ( $\bar{D}_{ij}$ ), conforme a Equação 57:

$$\tau_{ij} \approx \frac{2}{3}k_{sgs}\delta_{ij} - 2\nu_{sgs}dev(\bar{D})_{ij}, \quad (57)$$

onde  $\nu_{SGS}$  e  $k_{SGS}$  são a viscosidade turbulenta e energia cinética turbulenta das escalas de sub grade e são representadas pelas Equações 58 e 59 respectivamente, onde para a primeira  $C_k$  é uma constante de valor 0,094 e é computada usando o valor de  $k_{SGS}$ , e  $\Delta$  é o tamanho do filtro dado pela Equação 56. Já  $\bar{D}_{ij}$  é o tensor taxa de deformação das escalas resolvidas, conforme mencionado anteriormente, e é representado pela Equação 60.

$$\nu_{sgs} = C_k\sqrt{k_{sgs}}\Delta \quad (58)$$

$$k_{sgs} = \frac{1}{2}\tau_{kk} = \frac{1}{2}(\overline{u_k u_k} - \bar{u}_k \bar{u}_k) \quad (59)$$

$$\bar{D}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i}\right) \quad (60)$$

A seguinte relação para a viscosidade dinâmica das escalas de sub grade é empregada, Equação 61. As viscosidades efetivas são a soma das parcelas de sub-grade com a viscosidade natural do fluido, Equação 62.

$$\mu_{sgs} = \rho\nu_{sgs} \quad (61)$$

$$\mu_{eff} = \mu_{sgs} + \mu \quad (62)$$

$$\nu_{eff} = \nu_{sgs} + \nu$$

A equação de transporte adicional para  $k_{SGS}$  mencionada anteriormente é derivada com a intenção de levar em conta o efeito histórico de  $k_{SGS}$  devido a produção, dissipação e difusão de energia e é representada pela Equação 63.

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho k_{sgs})}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \bar{u}_j k_{sgs})}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \rho(\nu + \nu_{sgs}) \frac{\partial k_{sgs}}{\partial x_j} \right] = \\ - \frac{2}{3} \rho k_{sgs} \frac{\partial \bar{u}_k}{\partial x_k} + \rho \nu_{sgs} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \left( 2\bar{D}_{ij} - \frac{1}{3} tr(2\bar{D}) \delta_{ij} \right) - C_\epsilon \frac{\rho k_{sgs}^{3/2}}{\Delta}, \end{aligned} \quad (63)$$

onde os termos a esquerda da igualdade são respectivamente a taxa de variação temporal, um termo convectivo e um termo difusivo de  $k_{SGS}$ , os dois termos do lado direito da igualdade são um termo de produção e um termo de dissipação de  $k_{SGS}$  respectivamente, onde no último termo  $C_\epsilon$  é uma constante e  $\Delta$  é o filtro passa baixa.

Os métodos computacionais usados foram semelhantes aos usados por Kawamura, Abe e Matsuo (1999) e podem ser vistos na Tabela 2, onde todos são métodos de segunda ordem onde para os esquemas de discretização é empregado o método de diferenças centrais.

Tabela 2 – Métodos computacionais.

<i>Mtdos computacionais</i>		
<i>Passo de tempo</i>	Termo viscoso	Crank-Nicolson
	outros	Euler
<i>Esquemas de discretizao</i>	Termos não lineares	Gauss linear consistente
	Termos viscosos	Gauss linear

Fonte: Elaborado pelo autor.

### 3.0.1 Condições de contorno e condições iniciais

Como condições de contorno ambas as superfícies superior e inferior contam com a condição de não escorregamento, ou seja, a velocidade da camada de fluido adjacente a estas fronteira é nula relativamente a fronteira, estando inicialmente na temperatura de  $300K$ . As demais fronteiras são cíclicas ou periódicas, ou seja, cujas fronteiras opostas são identificadas uma com a outra.

Os campos foram inicializados com temperatura do fluido uniforme de  $300 K$ , tal qual as fronteiras, velocidade de  $0,15 m s^{-1}$  na direção de  $x$ , pressão uniforme de  $1.013 \times 10^5 MPa$ , energia cinética turbulenta por unidade de massa ( $k$ ) de  $9 \times 10^{-5} m^2 s^{-2}$  segundo a Equação 64 sugerida por Pope (2000) onde  $I = 0,16 Re^{-\frac{1}{8}}$ , já a densidade ( $\rho$ ) é obtida através da temperatura, de  $\mu$  e  $\nu$  da Tabela 1.

$$k = \frac{3(UI)^2}{2} \quad (64)$$

Inicialmente o passo de tempo será definido como  $10^{-3}$  e ao decorrer da simulação será ajustado automaticamente de forma a respeitar a condição de Courant–Friedrichs–Lewy, que para um sistema de  $n$  dimensões pode ser representado segundo a Equação 65:

$$Co = \Delta t \sum_{i=1}^n \frac{u_{x_i}}{\Delta x_i} \leq Co_{\max}, \quad (65)$$

essa condição atua como um critério de convergência, e, de forma sucinta, quando  $Co_{\max} \leq 1$  é garantia de que uma perturbação não percorrerá mais de um elemento de volume discreto, modificando a magnitude do Número de Courant ( $Co$ ) por meio do passo de tempo (COURANT; FRIEDRICHS; LEWY, 1967). Por segurança será adotado um  $Co = 0,5$ , haja vista que pretende-se atingir um escoamento com características intermitentes.



## 4 RESULTADOS

A partir do experimento numérico descrito no Capítulo 3, foram realizadas simulações utilizando como condição inicial um escoamento turbulento, completamente desenvolvido, termicamente neutro. O referido escoamento foi alcançado após um período transiente, de aproximadamente 1800  $s$ . O escoamento foi mantido nas condições descritas anteriormente até 7200  $s$ , para garantir que o período transiente não teria mais influência sobre as soluções.

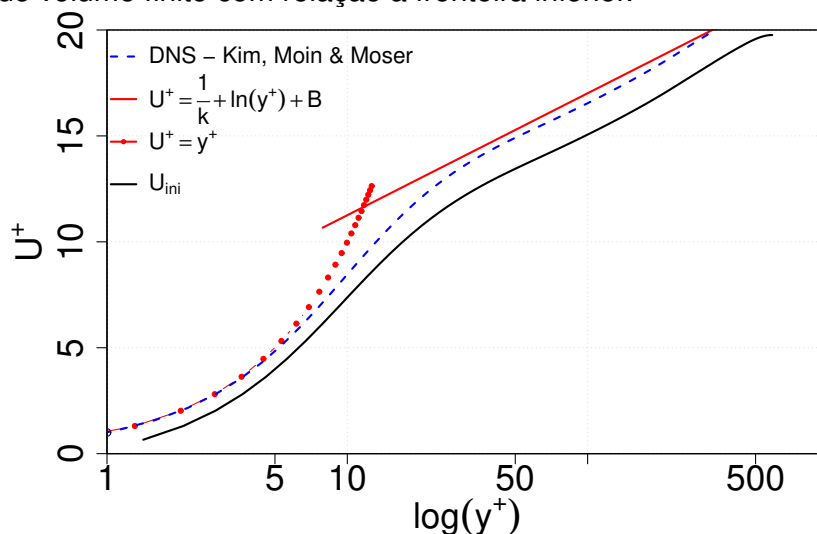
A validade do escoamento turbulento, foi verificada através da representação da lei de parede. Em um escoamento turbulento, existem três regiões, nominalmente: a subcamada viscosa; a camada externa; e a camada intermediária (WHITE, 2010). Na subcamada viscosa, as forças viscosas dominam o escoamento, e nessa região  $U^+ = y^+$ , se estendendo até  $y^+ \approx 10$  (KIM; MOIN; MOSER, 1987; LAGHA et al., 2011). Nas expressões  $U^+ = u/u_*$  é a média para todas as células do domínio, adimensionalizada pela velocidade de fricção  $u_*$  e  $y^+ = yu_*/\nu$ , sendo  $y$  é a distância co centro da célula até a parede e  $\nu$  é a viscosidade cinemática. Na subcamada externa  $U^+$ , segue um perfil logarítmico, dado por:

$$U^+ = \frac{1}{k} \ln(y^+) + B, \quad (66)$$

na Equação 66  $k = 0,40$  é a constante de von Kàrmàn e  $B$  é uma constante com valor de aproximadamente 5,0 (WHITE, 2010). Kim, Moin e Moser (1987) utilizaram  $B = 5,5$ , mesmo valor utilizado aqui (Fig. 14). A Figura 14 mostra que apesar do perfil médio de velocidade da simulação realizada nesse trabalho representar ambas as regiões, ela subestima os valores encontrados por Kim, Moin e Moser (1987). Isso se deve particularmente devido ao modelo de turbulência utilizado nas simulações. Enquanto Kim, Moin e Moser (1987), utilizaram DNS em suas simulações e o modelo de turbulência utilizado aqui foi LES.

A simulação de grandes turbilhões não simula as pequenas escalas do escoamento, ou seja, os efeitos viscosos do escoamento são apenas parametrizados na sub-grade do modelo de turbulência. Em simulações utilizando LES se uma grade “grosseira” for utilizada apenas a camada intermediária e a camada externa são reproduzidas (CABOT; MOIN, 2000). Todavia, Figura 14 mostra que, apesar de subestimar os valores encontrados utilizando DNS, com  $Re_\tau = 208$ , e que estão de acordo com os valores experimentais encontrados por Eckelmann (1974), o escoamento turbulento, aqui simulado ( $Re_\tau \approx 356$ ), apresenta a subcamada viscosa e a camada intermediária. Piomelli et al. (1989) e Nikitin et al. (2000), mostraram que o perfil de velocidades adimensional, bem como a representação da lei de parede, utilizando LES é extremamente sensível a resolução da grade. Logo, o resultado apresentado na Figura 14, está diretamente associado a resolução da malha utilizada nas simulações. Se uma malha mais fina fosse utilizada nas simulações, possivelmente o resultado se aproximaria dos resultados das simulações utilizando DNS.

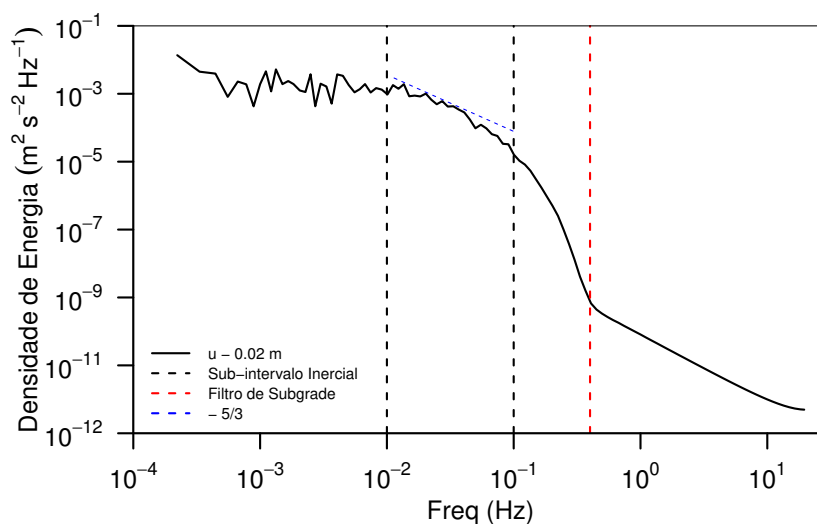
Figura 14 – Lei de parede para a velocidade média adimensional pela distância do centro do elemento de volume finito com relação a fronteira inferior.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Por outro lado, apesar da lei de parede mostrar discrepância entre os resultados de DNS e os aqui encontrados (Fig. 14), o modelo é capaz de simular o escoamento turbulência bem desenvolvida. A Figura 15 mostra o espectro de energia da série temporal utilizada como condição inicial, de 1800 s a 7200 s de simulação. É claramente observado na Figura 15 a presença de turbulência completamente desenvolvida, homogênea e isotrópica através da presença do subintervalo inercial (KOLMOGOROV, 1941), para frequências entre  $10^{-2}$  Hz e  $10^{-1}$  Hz. Após a linha pontilhada vermelha o espectro apresenta a região da parametrização do filtro de subgrade.

Figura 15 – Espectro de energia para a última hora do período inicial de simulação.



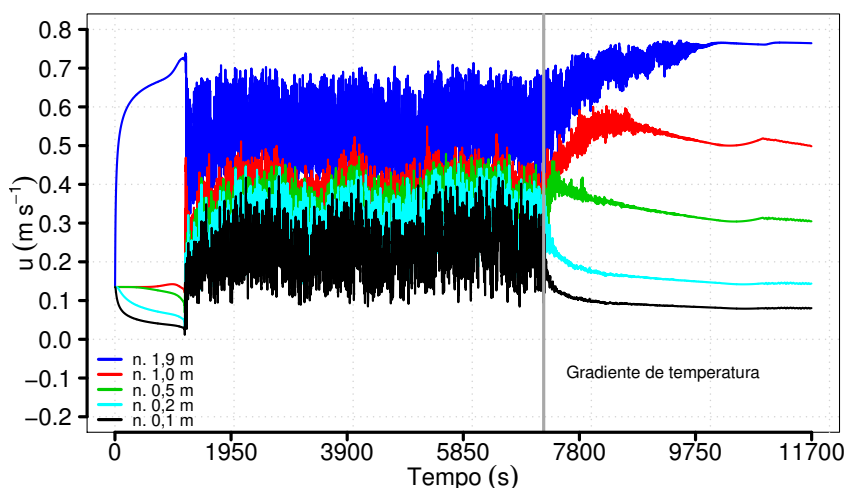
Fonte: Elaborado pelo autor.

Após a validação da simulação utilizada como condição inicial, de 0 a 7200 s, foram simulados 2 casos: 1º) a temperatura da placa inferior foi reduzida em 2 K (referido como  $C_{\Delta T=2K}$ ); 2º) a temperatura da placa inferior foi reduzida em 1 K (referido como  $C_{\Delta T=1K}$ ). O primeiro caso foi simulado por mais 4500 s e o segundo caso foi simulado por mais 18000 s.

#### 4.1 Séries temporais

A Figura 16 mostra as séries temporais, para os níveis de 0,1 m, 0,2 m, 0,5 m, 1,0 m (metade do domínio) e 1,9 m para a componente do escoamento alinhada na direção  $x$  ( $u$ ) para o caso  $C_{\Delta T}=2K$ . Assim como descrito anteriormente, após um período transiente de aproximadamente 1800 s, as flutuações na velocidade iniciam e o escoamento se torna turbulento. Após a inserção do gradiente de temperatura observa-se que as flutuações, características do escoamento turbulento, diminuem a intensidade até que a partir de 10000 s de simulação, aproximadamente, elas cessam e o escoamento se torna laminar. A laminarização do escoamento se deve somente aos efeitos de empuxo, causados pela inserção do gradiente de temperatura na placa inferior.

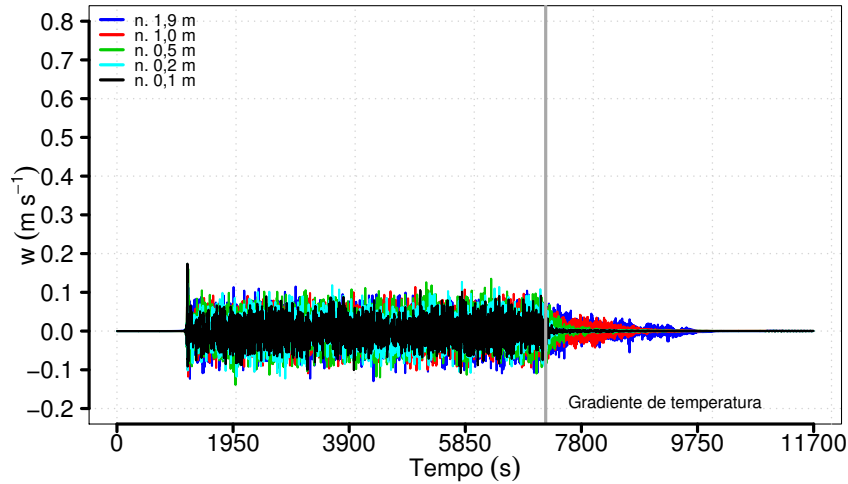
Figura 16 – Séries temporais da componente horizontal paralela ao escoamento  $u$  ( $C_{\Delta T}=2K$ ), para os níveis indicados na legenda.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Na Figura 17 fica mais claro o efeito da estratificação sobre as flutuações turbulentas do escoamento. Como o fluxo ocorre somente paralelamente ao movimento da placa superior, no eixo ortogonal  $z$  não existe fluxo de fluido, apenas perturbações características do escoamento turbulento (Fig. 17). A Figura 17 mostra que após inclusão do gradiente de temperatura, as flutuações cessam inicialmente nos níveis mais próximos da superfície e a medida que o tempo passa todos os níveis vão se tornando laminares, e a componente ortogonal da velocidade encontra um valor de equilíbrio  $w = 0$ .

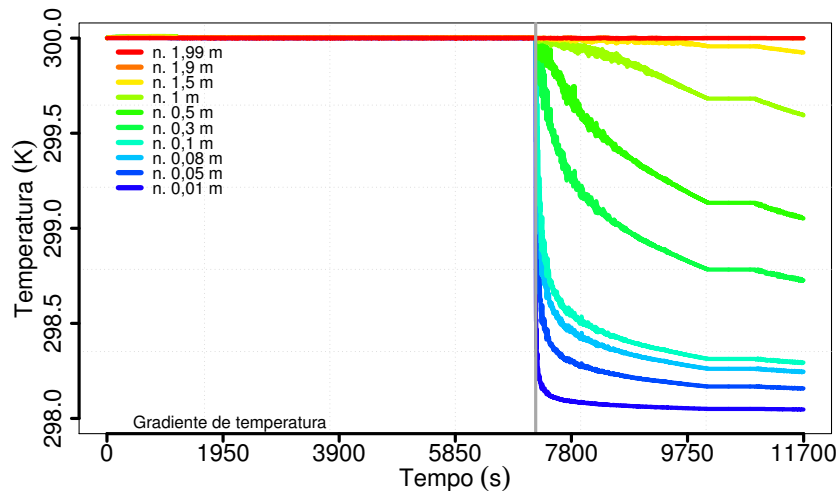
Figura 17 – Séries temporais da componente horizontal ortogonal ao escoamento  $w$  ( $C_{\Delta T=2K}$ ), para os níveis indicados na legenda.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Já nas séries temporais de temperatura mostradas na Figura 18, fica evidente que após a aplicação do gradiente térmico, o escoamento que antes era isotérmico, tornou-se termicamente estratificado ( $\partial T/\partial z > 0$ ). Após o período transiente a temperatura permaneceu constante, nos níveis mais próximos à placa inferior. Enquanto que nos níveis superiores a temperatura continuou a diminuir. Isso indica que com o passar do tempo o escoamento irá se tornar completamente laminar (MARTINEZ, 2006).

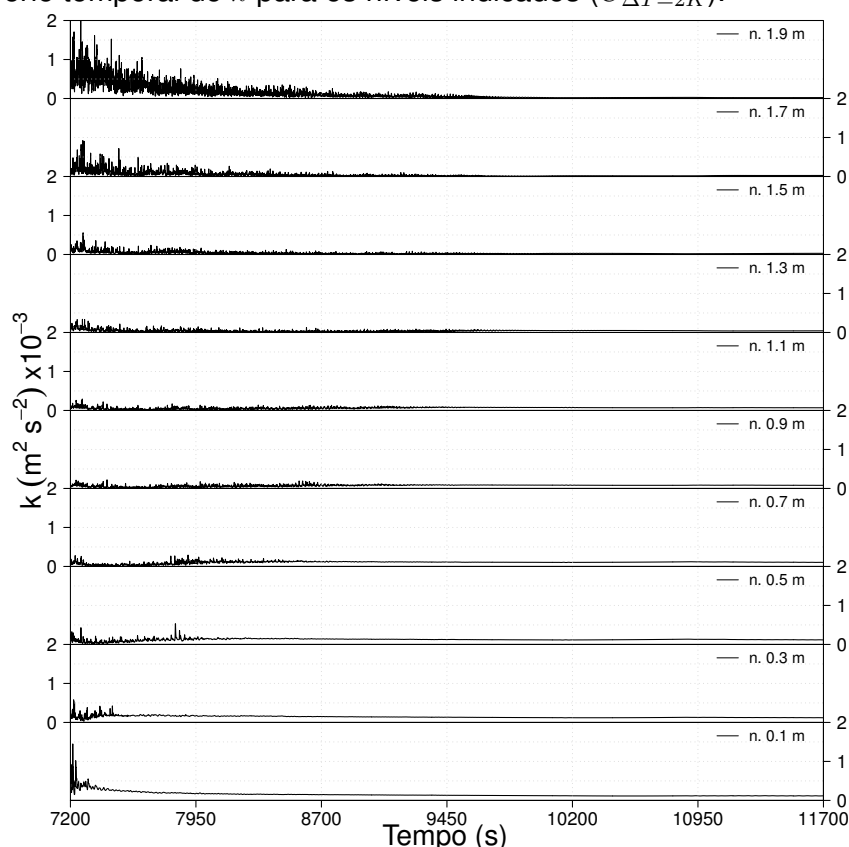
Figura 18 – Série temporal de temperatura  $T$  ( $C_{\Delta T=2K}$ ), para os níveis indicados na legenda.



Fonte: Elaborado pelo autor.

A laminarização do escoamento é vista claramente nas séries temporais de  $TKE$  (Fig.19). A Figura 19 mostra a série temporal de  $k$  para os níveis 0, 1 m, 0, 3 m, 0, 5 m, 0, 7 m, 0, 9 m, 1, 1 m, 1, 3 m, 1, 5 m, 1, 7 m e 1, 9 m para  $C_{\Delta T=2K}$ . Observa-se que após 9750 s de simulação o valores de  $k$  tornam-se nulos, mesmo para os níveis mais próximos a fronteira superior, indicando a total supressão da produção de turbulência pelo empuxo oriundo do gradiente de temperatura.

Figura 19 – Série temporal de  $k$  para os níveis indicados ( $C_{\Delta T=2K}$ ).

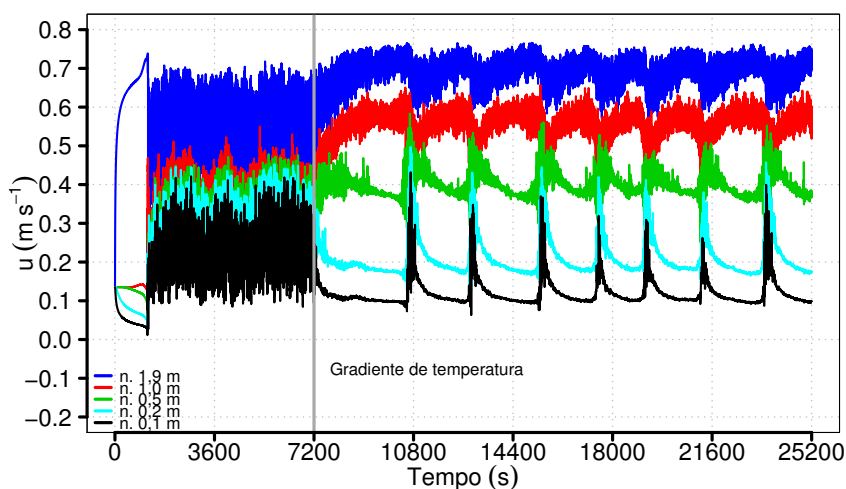


Fonte: Elaborado pelo autor.

No segundo caso simulado ( $C_{\Delta T=1K}$ ), Figura 20 e Figura 21, observa-se um comportamento intermitente, onde após a inserção do gradiente de temperatura houve uma drástica diminuição nas escalas de turbulência, ocorrendo pequenas “explosões” de turbulência (*burst*), em intervalos irregulares. Estes *burst* são observados tanto na componente que segue a direção do escoamento quanto na componente perpendicular a este. É importante destacar que a ocorrência desses *burst* intermitentes devido à transição causada pela estratificação estável, já foi evidenciado em diversos experimentos em túnel de vento (OHYA, 2001; SCHLICHTING; GERSTEN, 2003; OHYA; NAKAMURA; UCHIDA, 2008).

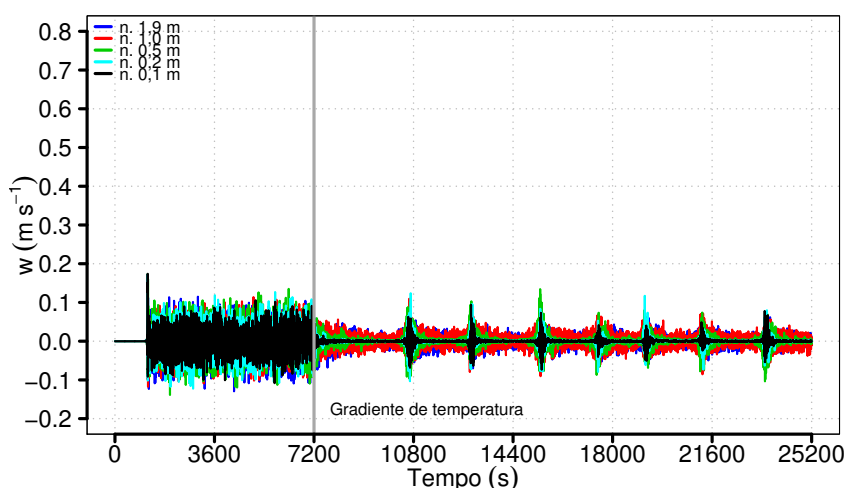
Em torno dos 10600 s de simulação ocorreu o primeiro evento em que as escalas de turbulência tiveram um aumento abrupto de amplitude (Figura 20 e Figura 21). Este evento turbulento estendeu-se até aproximadamente 11000 s de simulação, e após mais seis eventos semelhantes foram observados até o final do período simulado que foi de 25200 s. Essa perturbação foi observada em ambas as componentes horizontais de velocidade. É importante salientar que a ocorrência dos eventos intermitentes se dá de forma não periódica, com duração e intensidade imprevisíveis, tais como observa-se na natureza.

Figura 20 – Série temporal da componente horizontal paralela ao escoamento  $u$  ( $C_{\Delta T=1K}$ ).



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 21 – Série temporal da componente horizontal ortogonal ao escoamento  $w$  ( $C_{\Delta T=1K}$ ).

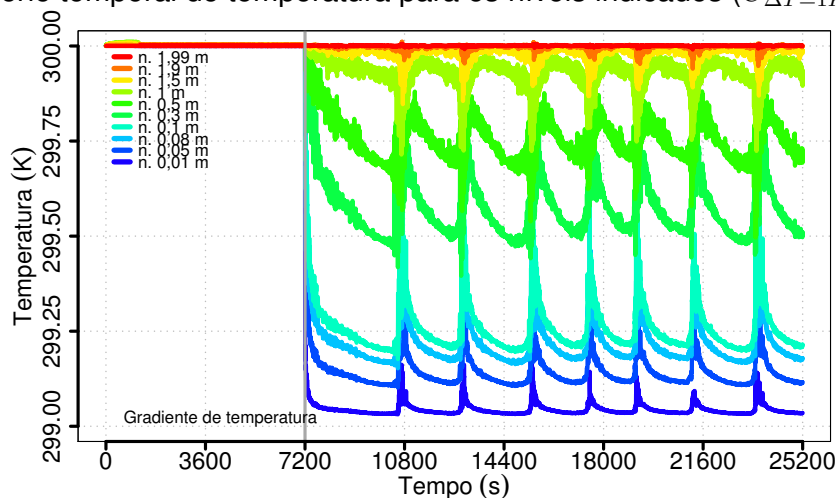


Fonte: Elaborado pelo autor.

Inicialmente o escoamento era isotérmico, e após os 7200  $s$  (momento em que foi inserido o gradiente de temperatura) ocorre rápida estratificação por densidade e o desacoplamento energético entre os níveis (ACEVEDO; FITZJARRALD, 2003), porém, quando acontece os *burst* de turbulência observa-se o acoplamento energético Figura 22. É possível observar ainda que assim como acontece na CLE, durante a ocorrência de um evento intermitente a turbulência transporte ar frio para os níveis mais elevados e ar quente para os níveis mais próximos a superfície inferior (SUN et al., 2004) (Fig. 22).

Estas perturbações no regime de escoamento, assim como na séries de  $u$  e  $w$ , também podem ser vistas nas séries temporais de temperatura (Fig. 22), onde observa-se maior fluxo de calor da fronteira superior para a inferior nos eventos turbulentos. Isto deve-se aos processos de difusão de calor e momento desencadeados durante os eventos de maior turbulência.

Figura 22 – Série temporal de temperatura para os níveis indicados ( $C_{\Delta T=1K}$ ).

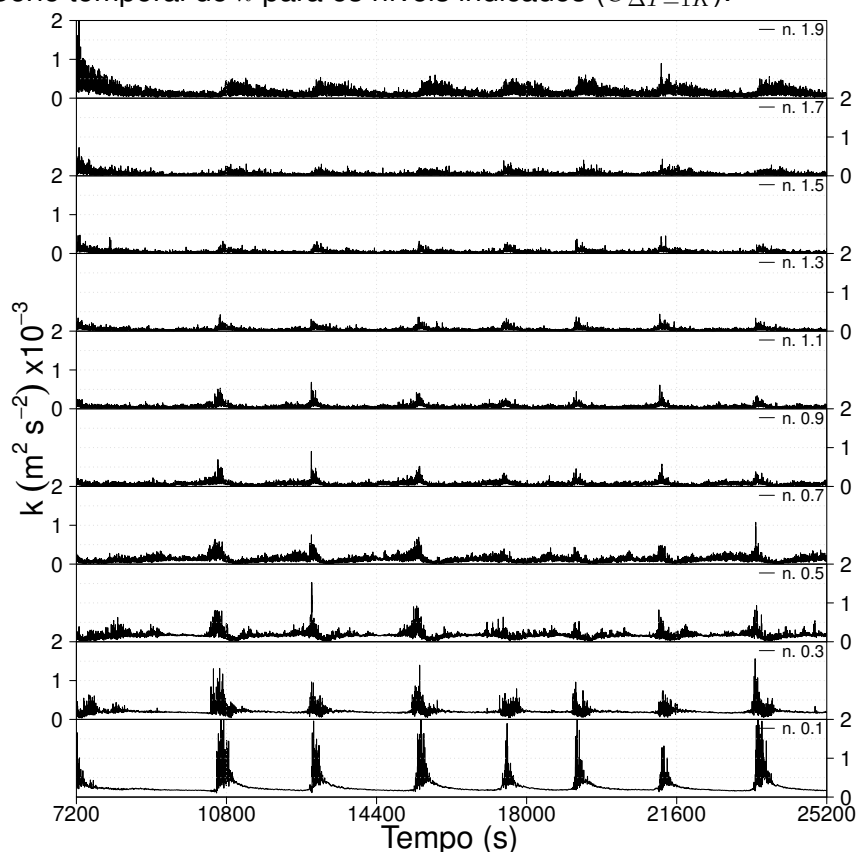


Fonte: Elaborado pelo autor.

Mahrt e Vickers (2006) mostraram a redução das escalas do escoamento turbulento devido à estratificação, e também mostraram que ainda assim a turbulência mantém suas propriedades. As séries temporais mostradas na Figura 23 mostram um resultado similar ao observado por Mahrt e Vickers (2006) num experimento atmosférico. Tal resultado será discutido em mais detalhes na seção 4.3.

A Figura 23 mostra que para os níveis próximos a fronteira superior, apesar de haver uma diminuição na amplitude das escalas de turbulência, as mesmas não foram totalmente suprimida como aconteceu no  $C_{\Delta T=2K}$  (Figura 19). Além disso, como já evidenciado nas Figuras 20, 21 e 22, em torno dos 10600 s ocorreu o primeiro de seis *burst* de turbulência, onde as escalas de  $k$  tiveram um aumento abrupto em um fator de sete vezes para o nível 0,1 m por exemplo. É interessante notar que os resultados apresentados na Figura 22 são mais similares aos resultados obtidos por Ohya, Nakamura e Uchida (2008), através de experimentos em túnel de vento, do que os resultados obtidos por Zhou e Chow (2011) utilizando LES. Entretanto, as simulações de Zhou e Chow (2011) são para a camada limite atmosférica, enquanto que as simulações, aqui apresentadas são para um escoamento de Couette plano. Por outro lado, He e Basu (2015), simulando um escoamento em canal aberto estavelmente estratificado, utilizando DNS, conforme já mencionado no Capítulo 2.2.1.1, encontrou resultados semelhantes, como por exemplo a completa laminarização do escoamento devido à estratificação.

Figura 23 – Série temporal de  $k$  para os níveis indicados ( $C_{\Delta T=1K}$ ).



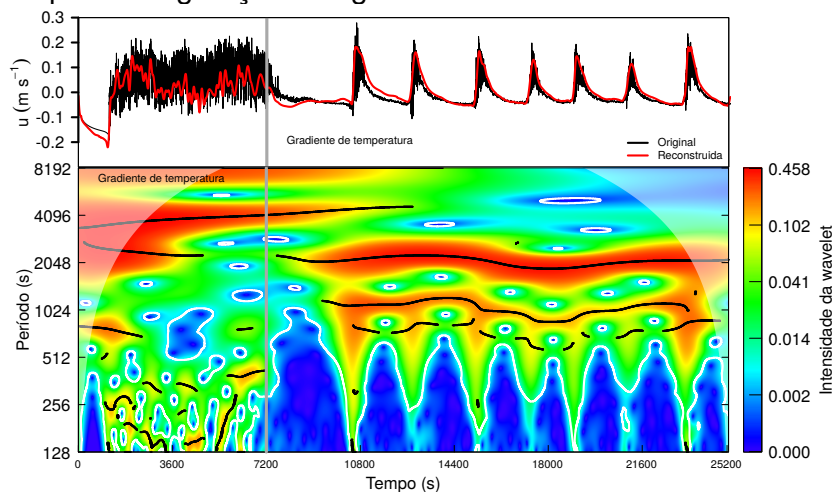
Fonte: Elaborado pelo autor.

Ainda para o  $C_{\Delta T=1K}$  realizou-se a análise da estrutura das frequências para a série temporal da componente  $u$  do campo de velocidade para o nível  $0,2\text{ m}$  usando a transformada de *wavelet* de Morlet et al. (1982a, 1982b), conforme Figura 24, utilizando como referência Roesch e Schmidbauer (2018). A figura é dividida em duas seções, onde na seção superior é mostrada a série temporal original onde os dados foram agrupados em blocos para obter-se uma observação por segundo, linha preta, e a série temporal reconstruída pela transformada através de mil simulações, linha vermelha. Já na seção inferior é possível ver a estrutura das frequências, onde as regiões em vermelho representam os períodos de maior energia e as regiões em azul são os períodos de menor energia. A região de transparência branca nas extremidades verticais formam o cone de influência, ou seja, a área interna ao cone representa a região onde a confiabilidade da transformada é de no mínimo 95 %.

Nota-se que na seção superior da Figura 24 que a linha vermelha tem um ótimo ajuste aos dados, isso é uma clara indicação de que o número de mil simulações escolhido para a reconstrução da serie temporal pela transformada de *wavelet* foi adequado, garantindo que o espectro da transformada *wavelet* irá de fato representar corretamente o sinal de velocidade analisado.



Figura 24 – Transformada de *wavelet* de Morlet para a série temporal de  $u$  no nível  $0,2\text{ m}$  ( $C_{\Delta T=1K}$ ). A linha preta na seção superior mostra a série temporal e a linha vermelha a série reconstruída pela transformada de *wavelet*. Na seção inferior, a região interna às áreas laterais com transparência branca representa o cone de influência onde a confiabilidade é de 95 %. As regiões vermelhas representam as frequências mais relevantes enquanto as azuis as menos relevantes. Foram realizadas 1000 simulações para a reconstrução da série temporal e posterior geração da figura.



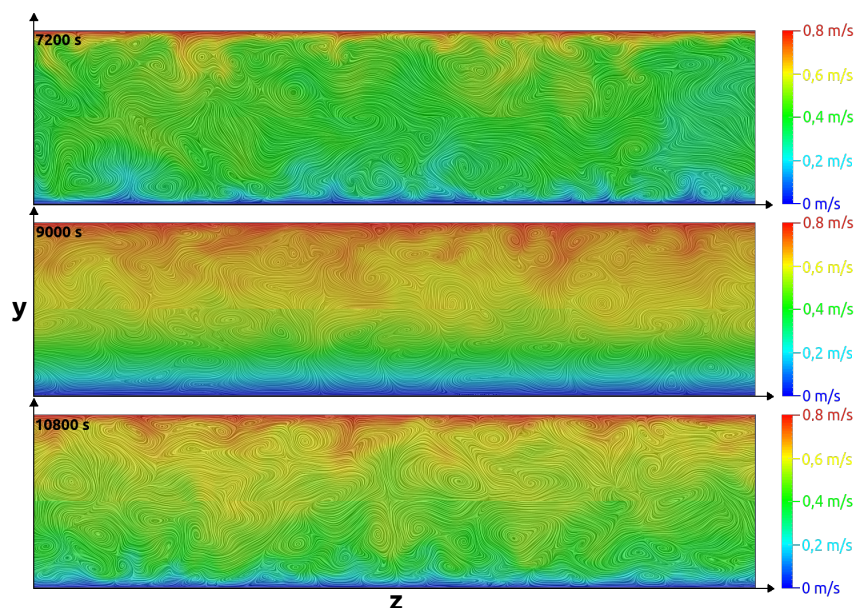
Fonte: Elaborado pelo autor.

Já na seção inferior da Figura 24, após  $7200\text{ s}$  de simulação, é possível identificar uma região em que o período tem um valor aproximadamente constante de  $2048\text{ s}$ , porém, sempre que ocorre um *burst* de turbulência, surge uma nova região de maior amplitude onde o período varia aproximadamente entre  $512\text{ s}$  e  $1024\text{ s}$  para o primeiro, segundo, terceiro e sétimo *burst*, enquanto para o quarto, quinto e sexto *burst* o período foi praticamente constante e com valor aproximado de  $900\text{ s}$  para a região dominante.

Para se ter uma ideia mais clara de como o escoamento desenvolve-se foram elaboradas três imagens do campo de velocidade usando a técnica de visualização de campo vetorial de convolução de integral de linha. Essa técnica convolve o ruído com um campo vetorial produzindo padrões de linhas que seguem tangente ao campo vetorial em três momentos distintos da simulação (CABRAL; LEEDOM, 1993) (LARAMEE; JOBARD; HAUSER, 2003). A Figura 25 é um *snapshot* do plano  $x = 4\pi/2$ , onde a imagem superior corresponde aos  $7200\text{ s}$  de simulação, sendo que ainda não existe diferença de temperatura entre as fronteiras superior e inferior, a imagem central corresponde aos  $9000\text{ s}$  de simulação onde o escoamento encontra-se mais estável, e por último a figura inferior, quando o tempo de simulação foi de  $10800\text{ s}$  e ocorreu o primeiro *burst* de turbulência.

Nota-se através da Figura 25 que aos  $7200\text{ s}$  a velocidade é muito mais homogênea no centro do domínio quanto comparada aos  $9000\text{ s}$ , onde os maiores gradientes de velocidade encontram-se nas fronteiras, também observa-se que aos  $9000\text{ s}$  existe uma distribuição uniforme na velocidade entre os níveis, isto ocorre devido a estratificação por densidade onde a vorticidade é consideravelmente menor que aos  $7200\text{ s}$  principalmente em  $y < 1\text{ m}$ , ademais, aos  $10800\text{ s}$  o escoamento torna-se novamente mais homogêneo no centro do canal devido aos grandes processos de difusão de momento desencadeados pelo *burst* de turbulência, causando um grande aumento no número de vórtices principalmente na metade inferior do domínio quando comparado aos  $9000\text{ s}$ .

Figura 25 – Snapshot do escoamento em três diferentes momentos em um plano  $yz$  com  $B_x/2$ .



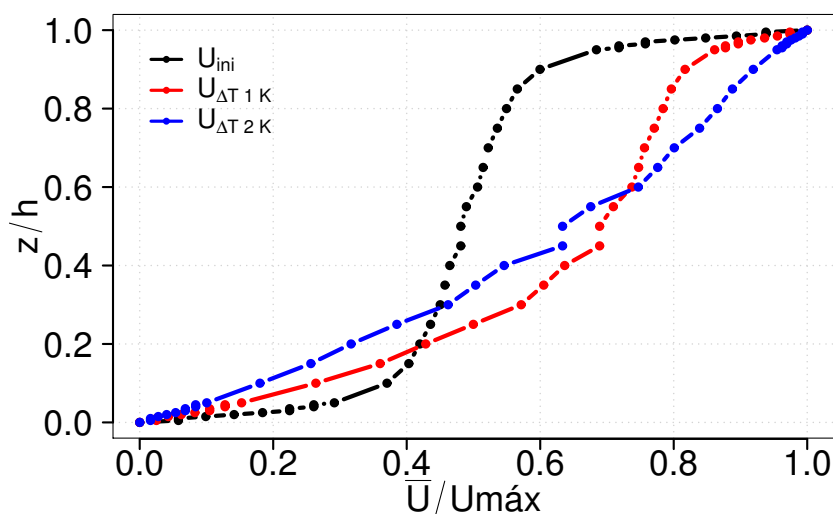
Fonte: Elaborado pelo autor.

## 4.2 Análise dos perfis verticais médios

A validação dos resultados obtidos é feita qualitativamente através da análise dos perfis das variáveis que controlam o escoamento. Os perfis médios de velocidade, temperatura,  $TKE$  e fluxo turbulento de calor ( $\overline{v'T'}$ ) foram obtidos através da média dos valores do campo para a última hora de simulação.

O perfil de velocidade, Figura 26, mostra que para o período inicial de simulação a curva tem padrão espelhado entre a  $z/h < 0,5$  e  $z/h > 0,5$  conforme o esperado para um escoamento de Couette plano (LEE; KIM, 1991; DEUSEBIO; CAULFIELD; TAYLOR, 2015). No  $C_{\Delta T=2K}$  a curva para o perfil tem formato muito próximo de  $z/h = \bar{U}/U_{max}$ , indicando escoamento laminar em todos os níveis (SMITH; MOEHLIS; HOLMES, 2005). Já no  $C_{\Delta T=1K}$  para  $z/h < 0,5$  a curvatura do perfil é mais acentuada quando comparado a  $C_{\Delta T=2K}$ , o que mostra a existência de turbulência ainda que de fraca intensidade. Por outro lado, para  $z/h > 0,5$  a curvatura é característica de escoamento turbulento. Conforme visto na seção 4.1, no segundo caso, em nenhum momento escoamento torna-se laminar nessa porção do domínio, apesar das variáveis turbulentas como  $TKE$  sofrerem mudanças de intensidade durante os *burst* esta não torna-se nula.

Figura 26 – Perfis normalizados de velocidade para a última hora.

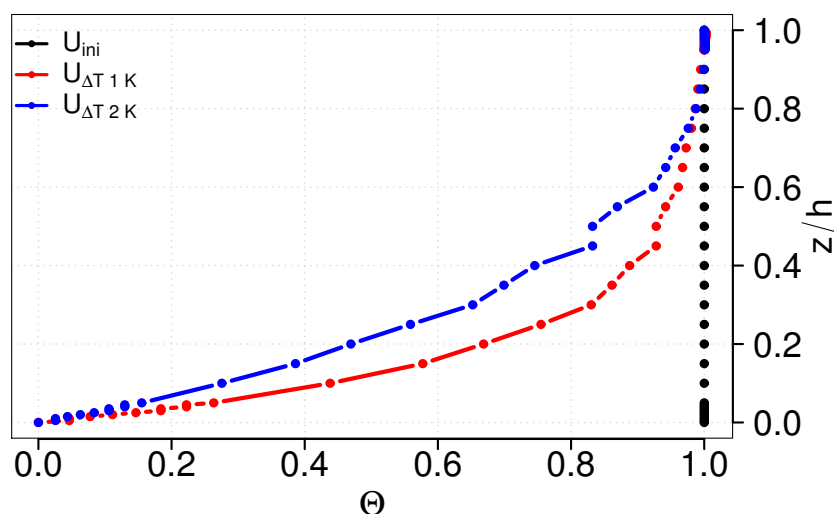


Fonte: Elaborado pelo autor.

De forma semelhante ao campo de velocidade criou-se o perfil normalizado para o campo temperatura (Figura 27) para a última hora de simulação. Observa-se que inicialmente o escoamento é isotérmico para a simulação inicial, para  $C_{\Delta T=1K}$  o perfil é característico de um escoamento turbulento na parte superior do domínio enquanto na parte inferior a curvatura é menos acentuada, enquanto no  $C_{\Delta T=2K}$  o perfil é semelhante ao do  $C_{\Delta T=1K}$  onde a diferença de temperatura média foi 3,6 % menor (KAWAMURA; ABE; MATSUO, 1999).

Afim de quantificar-se a turbulência fez-se o uso da decomposição de Reynolds no campo de velocidade para obter as componentes do tensor de Reynolds, convencionalmente chamado de  $R_{ij}$  em notação tensorial. Assim os fluxos turbulentos  $\overline{u'_i u'_j}$  foram obtidos aplicando-se a covariância entre as variáveis de interesse, no caso os fluxos turbulentos verticais por unidade de massa  $\tau_{ij}/\rho = \overline{u'v'}$  e  $\tau_{kj}/\rho = \overline{w'v'}$  para intervalos de 1 s, uma vez que a frequência de gravação foi de 36 Hz para os casos com gradiente de temperatura e de 100 Hz para o período inicial. A unidade desses fluxos é o quadrado da velocidade (POPE, 2000).

Figura 27 – Perfis normalizados de temperatura para a última hora.

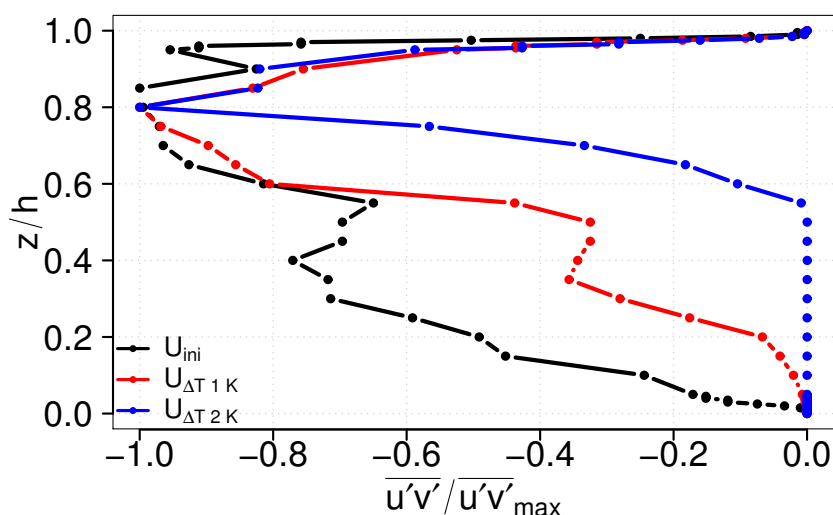


Fonte: Elaborado pelo autor.

Conforme descrito anteriormente, obteve-se  $\overline{u'v'}$ , que é a tensão de cisalhamento ao longo

do plano  $y$  na direção de  $y$  (Fig. 28). Esses fluxos foram normalizados pelos valores máximos em cada caso. O valor máximo da parte inicial é de  $3,18 \times 10^{-5} \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$ , valor cerca de 90 % maior que o  $C_{\Delta T=1K}$  ( $1,70 \times 10^{-5} \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$ ), que por sua vez foi aproximadamente 40 vezes maior que  $C_{\Delta T=2K}$  ( $7,80 \times 10^{-7} \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$ ). Note que o sentido do fluxo é da fronteira superior para a inferior já que a turbulência é maior na primeira devido a esta ter velocidade enquanto a fronteira inferior é estática. Ademais, os fluxos são maiores em  $z/h > 0,5$ , estando o pico localizado em  $z/h = 0,85$  para a simulação inicial e  $z/h = 0,8$  para  $C_{\Delta T=1K}$  e  $C_{\Delta T=2K}$ , enquanto no  $C_{\Delta T=2K}$  não existe qualquer fluxo turbulento em  $z/h \leq 0,5$  e para  $z/h \geq 0,5$  os fluxos tem ordem de grandeza cerca de 100 vezes menor quando comparados ao período inicial e o  $C_{\Delta T=1K}$ . A componente ortogonal do fluxo de momento não é mostrada devido a haver apenas flutuações na direção ortogonal a correlação entre as componentes ortogonal e vertical é nula.

Figura 28 – Perfis normalizados de  $\overline{u'v'}$  para a última hora.

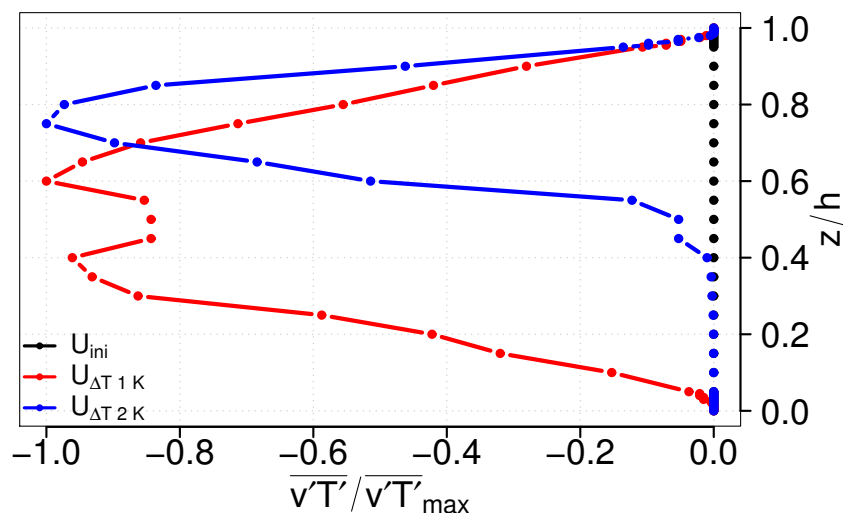


Fonte: Elaborado pelo autor.

A Figura 29 mostra o perfil do fluxo de calor sensível cinemático ( $\overline{v'T'}$ ), para a última hora de simulação, onde os valores são normalizados pelos máximos ocorridos em cada caso. O valor máximo do  $\overline{v'T'}$  foi de aproximadamente  $-7,19 \times 10^{-6} \text{ mK s}^{-1}$  e ocorreu no nível  $z/h = 0,6$  para  $C_{\Delta T=1K}$  e  $-1,45 \times 10^{-7} \text{ mK s}^{-1}$  no nível  $z/h = 0,5$ , para  $C_{\Delta T=2K}$ , para o período inicial não existe diferença de temperatura entre as fronteiras logo o fluxo é nulo. Ademais o fluxo é 50 vezes menor no  $C_{\Delta T=2K}$  quando comparado ao  $C_{\Delta T=1K}$  e estes cessam em  $z/h \leq 0,5$  para  $C_{\Delta T=2K}$  indicando que o escoamento passou a ser laminar nessa seção do domínio, enquanto que para  $C_{\Delta T=1K}$  temos uma pequena redução no fluxo no centro do domínio que em seguida volta aumentar atingindo o valor máximo para a metade inferior em  $z/h = 0,4$ , após esse pico o fluxo diminui de forma linear até tornar-se nulo junto a fronteira inferior.

É importante destacar que o fluxo de calor turbulento não é totalmente nulo para o primeiro caso devido ao escoamento não estar laminarizado nos níveis superiores, e a média ser tomada para a última hora de simulação. Como mencionado anteriormente, seria necessário um tempo maior de simulação para que o escoamento se tornasse laminar e completamente desenvolvido hidrodinamicamente.

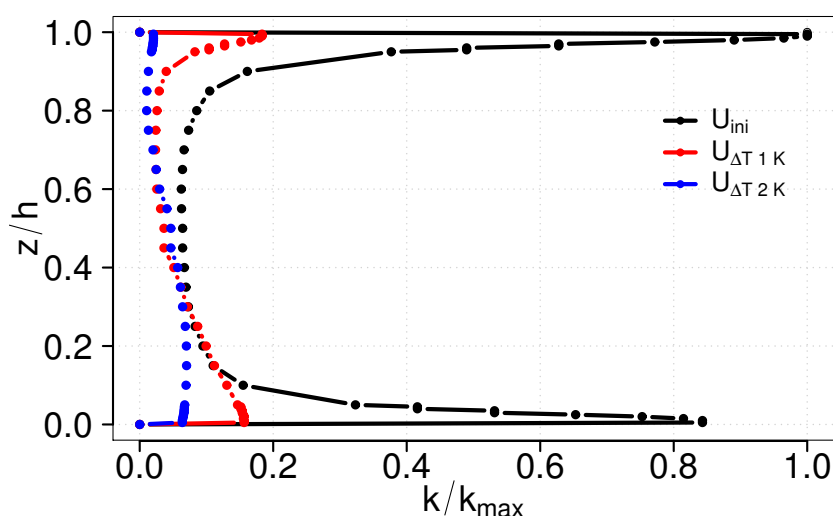
Figura 29 – Perfis normalizados de  $\overline{v'T'}$  para a última hora.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Da mesma forma que os demais perfis, os perfis de  $TKE$  mostram claramente a influência da inclusão dos gradientes de temperatura (Fig. 30). Todavia, enquanto que nos perfis mostrados nas Figuras 26 a 29, as grandezas analisadas eram normalizadas por seus respectivos valores máximos, para a análise da energia cinética turbulenta, a normalização será feita tomando o valor máximo da condição inicial. É possível observar claramente a formação de duas camadas limites espelhadas devido a presença das duas placas, e que a intensidade da turbulência é maior próximo às placas. Entretanto, a inclusão do gradiente de temperatura reduz de forma drástica a turbulência em todo o domínio. Novamente, é importante destacar que a turbulência presente em todas as análises da seção 4.2, para o caso  $C_{\Delta T=2K}$  só existe devido ao tempo de simulação não ser suficiente para o escoamento se tornar laminar e completamente desenvolvido hidrodinamicamente, assim como encontrado por He e Basu (2015).

Figura 30 – Perfis normalizados de  $k$  para a última hora.



Fonte: Elaborado pelo autor.

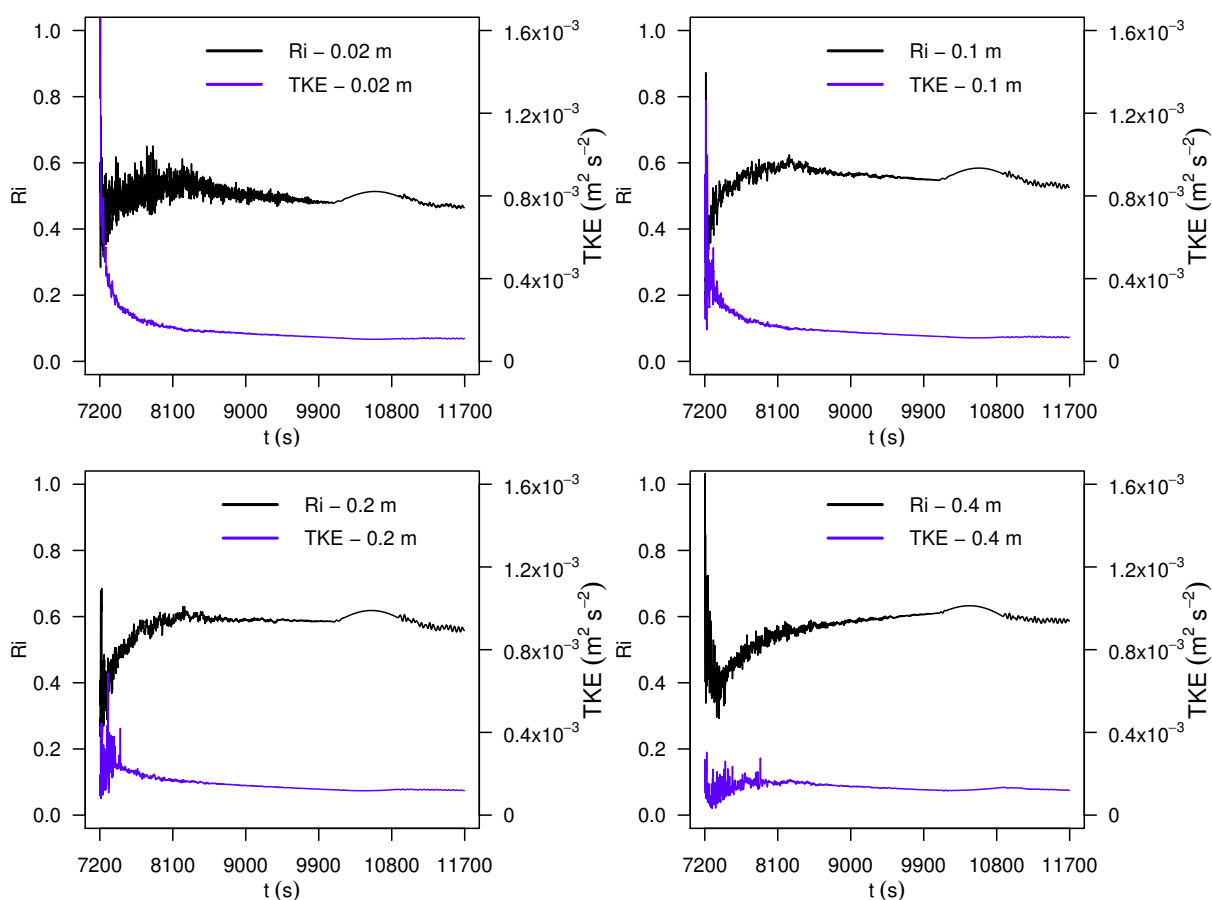
### 4.3 Efeitos da estratificação estável sobre a turbulência do escoamento

Os resultados apresentados até aqui mostram que após a inclusão do gradiente de temperatura no escoamento, no primeiro caso ( $C_{\Delta T=2K}$ ), o escoamento é laminarizado pelos efeitos de empuxo.

Quando o gradiente de  $2 K$  ( $C_{\Delta T=2K}$ ) é aplicado ao escoamento é possível observar que a energia cinética turbulenta cai a valores muito baixos próximo à superfície  $k < 4 \times 10^{-4} \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$  (a  $0,02 \text{ m}$  acima da placa inferior, painel superior esquerdo). O número de Richardson se mantém em torno de  $0,5$  para todo o período simulado, apesar de haver pequenas flutuações em  $TKE$  (Fig. 31). A Figura 31 mostra também a necessidade de simular um período de tempo maior para a verificação da laminarização do escoamento.

Ademais, o resultado apresentado na Figura 31 sugere que mais simulações devem ser realizadas, utilizando gradientes de temperatura mais intensos. A utilização de um gradiente de temperatura mais intenso, tenderá a laminarizar o escoamento mais rapidamente, não necessitando assim de uma simulação muito longa para alcançar o escoamento laminar plenamente desenvolvido hidrodinamicamente e termicamente.

Figura 31 – Série temporal  $Ri$  e  $k$  para os níveis indicados ( $C_{\Delta T=2K}$ ).



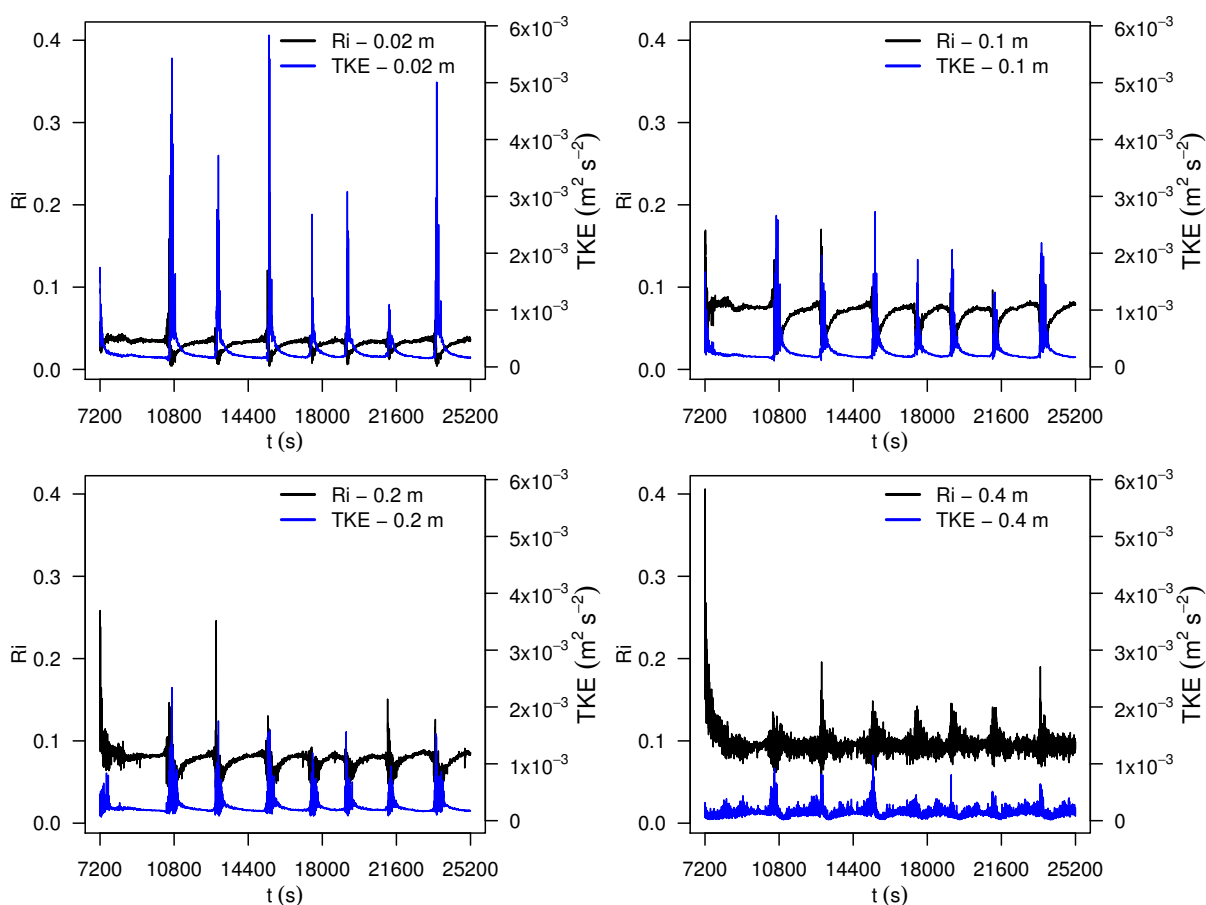
Fonte: Elaborado pelo autor.

Assim como para o  $C_{\Delta T=2K}$  também criou-se as séries temporais de  $TKE$  e  $Ri$  para o  $C_{\Delta T=1K}$ , conforme Figura 32. Como no  $C_{\Delta T=2K}$  o valor de  $Ri$  parte de um valor próximo a zero, conforme explicado anteriormente, e após cerca de  $1800 \text{ s}$  de um período transiente  $Ri$  passa a exibir menos flutuações onde para o nível  $0,02 \text{ m}$   $Ri$  tem um valor aproximadamente constante

de 0,04 enquanto para os outros níveis esse valor é de aproximadamente 0,8. Perto dos 10600 s, quando ocorre o primeiro *burst* de turbulência,  $Ri$  cai de forma abrupta e atinge os menores valores da série, enquanto  $TKE$  aumenta repentinamente atingindo os valores mais altos da série. Este comportamento é esperado pois quanto maior a turbulência menor deve ser o valor de  $Ri$  pois as forças cisalhantes superam as forças de empuxo.

Entretanto, é importante destacar que o número de Richardson em todos os níveis se manteve abaixo de  $Ri_c$ . Esse resultado mostra, que a estratificação, no caso  $C_{\Delta T}=1K$ , apenas reduziu a intensidade da turbulência e a amplitude das flutuações turbulentas, porém, não foi capaz de laminarizar o escoamento (Fig. 32).

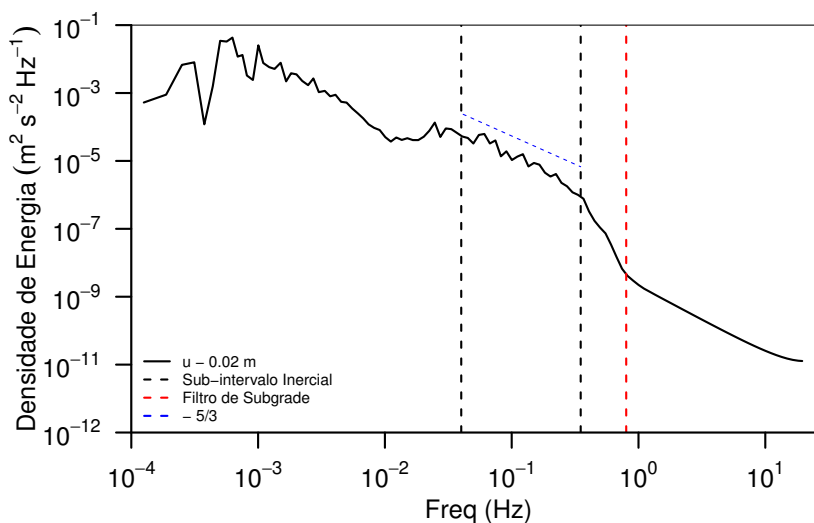
Figura 32 – Série temporal  $Ri$  e  $k$  para os níveis indicados ( $C_{\Delta T}=1K$ ).



Fonte: Elaborado pelo autor.

A confirmação da não laminarização do escoamento é evidenciada quando o espectro de energia da componente paralela ao escoamento é analisado (Fig. 33). A Figura 33 exibe as mesmas características presentes na Figura 15, para o caso com turbulência bem desenvolvida, as quais são a clara presença do subintervalo inercial, e da parametrização de sub-grade. É importante destacar que o subintervalo inercial está compreendido entre uma faixa menor de frequências, e está mais “deslocado para a direita” (entre  $4 \times 10^{-2}$  Hz e 0,3 Hz), próximo da frequência de corte da parametrização de sub-grade (em torno de 0,8 Hz). Isso se deve ao tamanho dos turbilhões que estão sendo simulados serem menores que no caso com turbulência plenamente desenvolvida, mostrado na Figura 15.

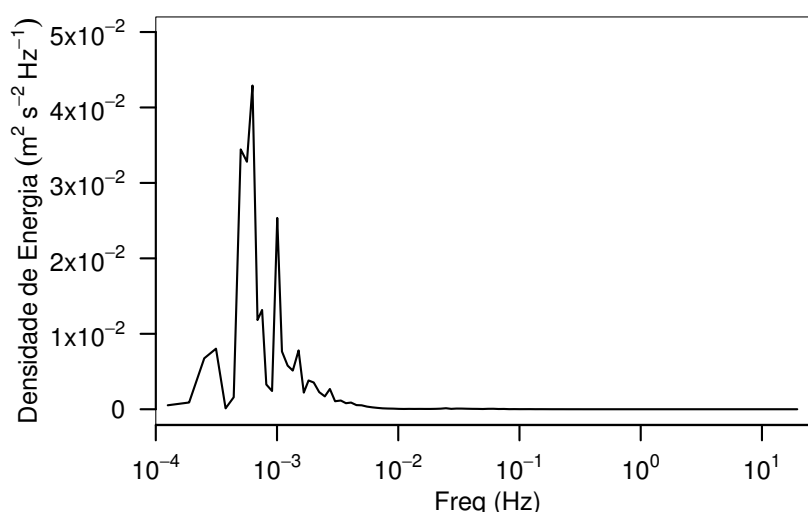
Figura 33 – Espectro de energia intermitente ( $C_{\Delta T=1K}$ ) para a componente  $u$  no nível  $0,02 m$ .



Fonte: Elaborado pelo autor.

Outro resultado importante a ser destacado é a presença de máximos locais na baixa frequência (Fig. 34). Um sistema dinâmico o qual, o espectro de energia de suas variáveis apresenta máximos locais na baixa, pode estar associado à um fenômeno caótico (STROGATZ, 2014). É importante destacar que a Figura 34 mostra que existe uma frequência dominante. Porém, esse resultado é um forte indício que a intermitência na transição laminar turbulenta é uma rota para o caos, assim como propôs Kadanoff (1993). Todavia, assim como dito anteriormente, um número maior de casos deve ser simulado, considerando mais gradientes de temperatura para que essa hipótese seja validada.

Figura 34 – Espectro de energia para a componente  $u$  do escoamento no nível de  $0,02 m$  acima do limite inferior do domínio.



Fonte: Elaborado pelo autor.

ReVelle (1993) sugeriu que a intermitência que ocorre na camada estável, devido a estratificação estável é um fenômeno caótico, porém, o modelo proposto por ele era capaz apenas de reproduzir eventos periódicos de turbulência. Costa et al. (2011) propuseram um modelo semelhante ao de ReVelle (1993), também baseado no modelo RANS clássico de Blackadar (1979), o qual era



capaz de reproduzir de forma aperiódica os eventos intermitentes que ocorrem na CLE. Além disso, eles propuseram que a intermitência é um modo natural do escoamento noturno muito estável. É importante ressaltar os recentes avanços em DNS (ANSORGE; MELLADO, 2014; DONDA et al., 2015; HE; BASU, 2015; DONDA et al., 2016, entre muitos outros), e as limitações do uso de LES para simulações de escoamentos com forte estratificação estável. Todavia, o presente trabalho apresenta resultados coerentes com as recentes simulações em DNS, sendo uma alternativa mais barata computacionalmente para o estudo da transição laminar-turbulenta causada pela estratificação estável.

## 5 CONCLUSÃO

Segundo os resultados obtidos pelo experimento numérico, e de acordo com o esperado, quando o regime de escoamento é turbulento todos os níveis estão energeticamente acoplados pela turbulência, fazendo com que campos de velocidade e temperatura sejam mais homogêneos no centro do domínio. Isso ocorre devido a camada limite turbulenta ser mais espessa que a laminar, fazendo com que os efeitos causados pelas fronteiras sejam sentidos com uma intensidade muito maior na direção vertical. Já no regime laminar tal acoplamento não é encontrado e na existência de um gradiente de temperatura o escoamento pode tornar-se termicamente estratificado.

Tais experimentos tem fundamental importância para construir-se um conhecimento básico mais sólido em temas onde ainda existem lacunas a serem preenchidas. Dentre estes temas temos sistemas estratificados por densidade frequentemente encontrados na natureza, como por exemplo o ar na CLE sob a influência do campo gravitacional. Nessas condições as variáveis turbulentas são difíceis de serem estimadas, uma vez que este tipo de escoamento mostra-se, muitas vezes, bastante intermitente, tornando difícil a previsão do tempo.

Um dos objetivos deste trabalho foi a reprodução do fenômeno da intermitência que ocorre na CLE em um modelo de geometria simples, excluindo a complexidade existente no fenômeno real como a relevo, fluxos de calor complexos proveniente dos diferentes tipos de cobertura do solo entre outros. Este objetivo foi dado com alcançado, já que para  $C_{\Delta T=1K}$  foram observados em sete ocasiões durante o período de cinco horas de simulação (excluindo as duas horas iniciais), em que o escoamento parte de um estado com fraca turbulência para um estado em que as escalas de turbulência chegam, em alguns momentos, a superar as escalas que ocorrem antes de inserção do gradiente de temperatura.

Vale ressaltar aqui, um ponto negativo que pode afetar sensivelmente os resultados obtidos, que é a falta de resolução da grade, essa deficiência fica evidente na Figura 14, onde o primeiro nó está em aproximadamente  $y^+ = 2.08$  e para caracterização completa da subcamada viscosa (essa camada se estende até  $y^+ = 10$ ) o valor de  $y^+$  na camada adjacente as fronteira deveria estar em um valor entre  $0,1 \geq y^+ \leq 1$ . Essa falta de resolução próximo as fronteira fez com que as variáveis turbulentas seja subestimadas (GERMANO; SAGAUT, 2013). Contudo crê-se que tal deficiência não impacte sobre o comportamento físico observado uma vez que a Figura 15 nos mostra claramente a cascata de energia proposta por Kolmogorov (1941).

Encontrou-se também, para uma velocidade da fronteira superior de  $0,8 \text{ ms}^{-1}$ , aproximadamente  $5 \times 10^4$  para  $Re$ , e gradiente de temperatura de  $1 \text{ K}$  entre as fronteiras, para um domínio de  $2 \text{ m}$  de altura, condições em que a intermitência do escoamento é evidente, servindo de parâmetros básicos para futuros trabalhos.

Além disso, também foram encontradas evidências da existência de um fenômeno caótico para  $C_{\Delta T=1K}$ , devido a presença de máximos locais na banda de baixa frequência. Esta é uma hipótese que já foi levanta por outros autores que sugerem que a ocorrência de intermitência na CLE pode ser um modo natural do sistema dinâmico atmosférico (COSTA et al., 2011). Ademais, pode ser um sistema caótico de baixa dimensão, uma vez que o sistema de equações que regem o escoamento de fluidos não são lineares (LORENZ, 1991; REVELLE, 1993; COSTA et al., 2011). No entanto, neste trabalho essa ideia será tratada apenas como uma hipótese para trabalhos futuros.

Finalmente, é importante destacar, que apesar das limitações implicadas pelo uso de simulações de grandes turbilhões no experimento numérico idealizado neste trabalho, os resultados aqui encontrados são coerentes com simulações numéricas diretas de experimentos similares (ANSORGE; MELLADO, 2014; HE; BASU, 2015). O que cabe ressaltar é a técnica ideal para tal tipo de experimento é o DNS, porém este com custo computacional extremamente elevado. Além disso, a validação dos resultados apresentados aqui permite que os mesmos sejam utilizados, apenas com correções no experimento. Por fim, os resultados apontam a possibilidade de ampliação das análises para outras áreas, como por exemplo: a análise dinâmica do sistema e também a exploração mais detalhada da transição laminar turbulenta. Ambas com implicações diretas na modelagem do comportamento do escoamento da CLE muito estável, e na criação de novas parametrizações. Todavia, esses são possíveis temas para serem explorados em trabalhos futuros.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ACEVEDO, O. C.; COSTA, F. D.; DEGRAZIA, G. A. The coupling state of an idealized stable boundary layer. **Boundary-layer meteorology**, Springer, v. 145, n. 1, p. 211–228, 2012.
- ACEVEDO, O. C.; FITZJARRALD, D. R. In the core of the night-effects of intermittent mixing on a horizontally heterogeneous surface. **Boundary-layer meteorology**, v. 106, n. 1, p. 1–33, 2003.
- ANSORGE, C.; MELLADO, J. P. Global intermittency and collapsing turbulence in the stratified planetary boundary layer. **Boundary-layer meteorology**, v. 153, n. 1, p. 89–116, 2014.
- ARYA, P. S. **Introduction to micrometeorology**. [S.l.]: Academic press, 2001. v. 79.
- BANTA, R. M. Stable-boundary-layer regimes from the perspective of the low-level jet. **Acta Geophysica**, Springer, v. 56, n. 1, p. 58–87, 2008.
- BERSELLI, L.; ILIESCU, T.; LAYTON, W. **Mathematics of Large Eddy Simulation of Turbulent Flows**. Springer, 2006. (Scientific Computation). ISBN 9783540263166. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=5HKj6TLnSD0C>>.
- BLACKADAR, A. High resolution models of the planetary boundary layer. **Advances in Environmental Sciences and Engineering**, v. 1, n. 1, p. 50–85, 1979.
- BOING, S. J. et al. 7.2 intermittent turbulence in stratified flow over a canopy. 2010.
- CABOT, W.; MOIN, P. Approximate wall boundary conditions in the large-eddy simulation of high reynolds number flow. **Flow, Turbulence and Combustion**, v. 63, n. 1-4, p. 269–291, 2000.
- CABRAL, B.; LEEDOM, L. C. Imaging vector fields using line integral convolution. In: **Proceedings of the 20th Annual Conference on Computer Graphics and Interactive Techniques**. New York, NY, USA: ACM, 1993. (SIGGRAPH '93), p. 263–270. ISBN 0-89791-601-8. Disponível em: <<http://doi.acm.org/10.1145/166117.166151>>.
- CATALDI, M. **Simulação de Camadas Limite Estratificadas em Túnel de Vento**. 2002. 170 p. Dissertação (Mestre em Ciências em Engenharia Mecânica) — Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2002.
- ÇENGEL, Y. **Transferência de calor e massa: Uma abordagem pratica**. São Paulo. [S.l.]: McGraw Hill, 2009.
- CHAI, X.; MAHESH, K. Dynamic  $\epsilon$ -equation model for large-eddy simulation of compressible flows. **Journal of Fluid Mechanics**, Cambridge University Press, v. 699, p. 385–413, 2012.
- COSTA, F. D. **Caminhos para a Complexidade na Camada Limite Atmosférica Noturna**. 2011. 130 p. Tese (Doutorado em Física) — Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2011.
- COSTA, F. D. et al. A simplified model for intermittent turbulence in the nocturnal boundary layer. **Journal of the Atmospheric Sciences**, v. 68, n. 8, p. 1714–1729, 2011.

COURANT, R.; FRIEDRICHS, K.; LEWY, H. On the partial difference equations of mathematical physics. **IBM Journal of Research and Development**, v. 11, n. 2, p. 215–234, March 1967. ISSN 0018-8646.

CUXART, J.; JIMÉNEZ, M. Mixing processes in a nocturnal low-level jet: An LES study. **Journal of the atmospheric sciences**, v. 64, n. 5, p. 1666–1679, 2007.

DEARDORFF, J. W. A numerical study of three-dimensional turbulent channel flow at large Reynolds numbers. **Journal of Fluid Mechanics**, Cambridge University Press, v. 41, n. 2, p. 453–480, 1970.

DENARO, F. M. What does finite volume-based implicit filtering really resolve in large-eddy simulations? **Journal of Computational Physics**, v. 230, n. 10, p. 3849 – 3883, 2011. ISSN 0021-9991. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021999111000933>>.

DEUSEBIO, E.; CAULFIELD, C.; TAYLOR, J. The intermittency boundary in stratified plane Couette flow. **Journal of Fluid Mechanics**, Cambridge University Press, v. 781, p. 298–329, 2015.

DONDA, J. et al. Collapse of turbulence in stably stratified channel flow: a transient phenomenon. **Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society**, v. 141, n. 691, p. 2137–2147, 2015.

\_\_\_\_\_. The maximum sustainable heat flux in stably stratified channel flows. **Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society**, v. 142, n. 695, p. 781–792, 2016.

DYKE, M. V. et al. Second-order compressible boundary layer theory with application to blunt bodies in hypersonic flow. **Hypersonic Flow Research**, Academic Press New York, v. 7, p. 37–76, 1962.

ECKELMANN, H. The structure of the viscous sublayer and the adjacent wall region in a turbulent channel flow. **Journal of Fluid Mechanics**, v. 65, n. 3, p. 439–459, 1974.

FOX, R.; MCDONALD, A.; PRITCHARD, P. **Fluid Mechanics. 8th. 1.** [S.l.]: New York: Wiley, 2011.

GERMANO, M.; SAGAUT, P. **Large Eddy Simulation for Incompressible Flows: An Introduction.** Springer Berlin Heidelberg, 2013. (Scientific Computation). ISBN 9783662046951. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=0YfnCAAAQBAJ>>.

HE, P.; BASU, S. Direct numerical simulation of intermittent turbulence under stably stratified conditions. **Nonlinear Processes in Geophysics**, v. 22, n. 4, p. 447–471, 2015.

HOLMAN, J. **Heat Transfer of International Edition.** [S.l.]: McGraw-Hill, New York, 2009.

HOLZMANN, T. **Mathematics, Numerics, Derivations and OpenFOAM(R).** [s.n.], 2016. Disponível em: <<https://www.holzmann-cfd.de>>.

INCROPERA, P.; DEWITT, D. **Fundamentos de Transferência de Calor e de Massa. 6ta.** [S.l.: s.n.], 2008.

KADANOFF, L. P. Roads to chaos. In: **From Order To Chaos: Essays: Critical, Chaotic and Otherwise.** [S.l.]: World Scientific, 1993. p. 391–398.

KAWAMURA, H.; ABE, H.; MATSUO, Y. DNS of turbulent heat transfer in channel flow with respect to Reynolds and Prandtl number effects. **International Journal of Heat and Fluid Flow**, v. 20, n. 3, p. 196 – 207, 1999. ISSN 0142-727X. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0142727X99000144>>.

- KESTIN, J. A course in thermodynamics, blaisdell publ. **Comp., Waltham, Mass**, p. 337, 1966.
- KIM, J.; MOIN, P.; MOSER, R. Turbulence statistics in fully developed channel flow at low reynolds number. **Journal of Fluid Mechanics**, Cambridge University Press, v. 177, p. 133–166, 1987.
- KOLMOGOROV, A. N. The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large reynolds numbers. In: **Dokl. Akad. Nauk SSSR**. [S.l.: s.n.], 1941. v. 30, n. 4, p. 299–303.
- KUNDU, P.; COHEN, I.; DOWLING, D. **Fluid Mechanics**. Elsevier Science, 2015. ISBN 9780124071513. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=EehDBAAAQBAJ>>.
- LAGHA, M. et al. A numerical study of compressible turbulent boundary layers. **Physics of Fluids**, v. 23, n. 1, p. 015106, 2011. Disponível em: <<https://doi.org/10.1063/1.3541841>>.
- LARAMEE, R. S.; JOBARD, B.; HAUSER, H. Image space based visualization of unsteady flow on surfaces. In: **IEEE Visualization, 2003. VIS 2003**. [S.l.: s.n.], 2003. p. 131–138.
- LEE, M. J.; KIM, J. The structure of turbulence in a simulated plane couette flow. 1991.
- LORENZ, E. N. Dimension of weather and climate attractors. **Nature**, v. 353, n. 6341, p. 241, 1991.
- MAHRT, L. Stratified atmospheric boundary layers. **Boundary-Layer Meteorology**, Springer, v. 90, n. 3, p. 375–396, 1999.
- MAHRT, L. et al. Nocturnal boundary-layer regimes. **Boundary-layer meteorology**, Springer, v. 88, n. 2, p. 255–278, 1998.
- MAHRT, L.; VICKERS, D. Extremely weak mixing in stable conditions. **Boundary-layer meteorology**, Springer, v. 119, n. 1, p. 19–39, 2006.
- MARTÍN, M. P.; PIOMELLI, U.; CANDLER, G. Subgrid-scale models for compressible large-eddy simulations. **Theoretical and Computational Fluid Dynamics**, v. 13, n. 5, p. 361–376, Feb 2000. ISSN 1432-2250. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/PL00020896>>.
- MARTINEZ, D. M. V. Transição à turbulência na camada de mistura estavelmente estratificada utilizando simulação numérica direta e simulação de grandes escalas. 2006.
- MORLET, J. et al. Wave propagation and sampling theory; part i, complex signal and scattering in multilayered media. **Geophysics**, v. 47, n. 2, p. 203, 1982. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1190/1.1441328>>.
- \_\_\_\_\_. Wave propagation and sampling theory; part ii, sampling theory and complex waves. **Geophysics**, v. 47, n. 2, p. 222, 1982. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1190/1.1441329>>.
- NIKITIN, N. et al. An approach to wall modeling in large-eddy simulations. **Physics of fluids**, v. 12, n. 7, p. 1629–1632, 2000.
- OHYA, Y. Wind-tunnel study of atmospheric stable boundary layers over a rough surface. **Boundary-Layer Meteorology**, v. 98, n. 1, p. 57–82, 2001.
- OHYA, Y.; NAKAMURA, R.; UCHIDA, T. Intermittent bursting of turbulence in a stable boundary layer with low-level jet. **Boundary-layer meteorology**, v. 126, n. 3, p. 349–363, 2008.

- OHYA, Y.; NEFF, D. E.; MERONEY, R. N. Turbulence structure in a stratified boundary layer under stable conditions. **Boundary-Layer Meteorology**, v. 83, n. 1, p. 139–162, Apr 1997. ISSN 1573-1472. Disponível em: <<https://doi.org/10.1023/A:1000205523873>>.
- PIOMELLI, U. et al. New approximate boundary conditions for large eddy simulations of wall-bounded flows. **Physics of Fluids A: Fluid Dynamics**, v. 1, n. 6, p. 1061–1068, 1989.
- POPE, S. B. Frontmatter. In: \_\_\_\_\_. **Turbulent Flows**. [S.l.]: Cambridge University Press, 2000. p. i–vi.
- REVELLE, D. O. Chaos and “bursting” in the planetary boundary layer. **Journal of Applied Meteorology**, v. 32, n. 7, p. 1169–1180, 1993.
- ROESCH, A.; SCHMIDBAUER, H. **WaveletComp: Computational Wavelet Analysis**. [S.l.], 2018. R package version 1.1. Disponível em: <<https://CRAN.R-project.org/package=WaveletComp>>.
- SCHLICHTING, H.; GERSTEN, K. **Boundary-layer theory**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2003.
- SCHOBEIRI, M. T. **Fluid mechanics for engineers: a graduate textbook**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2010.
- SMITH, T. R.; MOEHLIS, J.; HOLMES, P. Low-dimensional models for turbulent plane couette flow in a minimal flow unit. **Journal of Fluid Mechanics**, Cambridge University Press, v. 538, p. 71–110, 2005.
- STROGATZ, S. H. **Nonlinear dynamics and chaos: with applications to physics, biology, chemistry, and engineering**. [S.l.]: Hachette UK, 2014.
- STULL, R. B. **An introduction to boundary layer meteorology**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 1988. v. 1.
- SUN, J. et al. Intermittent turbulence associated with a density current passage in the stable boundary layer. **Boundary-Layer Meteorology**, Springer, v. 105, n. 2, p. 199–219, 2002.
- \_\_\_\_\_. Atmospheric disturbances that generate intermittent turbulence in nocturnal boundary layers. **Boundary-layer meteorology**, Springer, v. 110, n. 2, p. 255–279, 2004.
- \_\_\_\_\_. Turbulence regimes and turbulence intermittency in the stable boundary layer during cases-99. **Journal of the Atmospheric Sciences**, v. 69, n. 1, p. 338–351, 2012. Disponível em: <<https://doi.org/10.1175/JAS-D-11-082.1>>.
- TU, J.; YEOH, G. H.; LIU, C. **Computational fluid dynamics: a practical approach**. [S.l.]: Butterworth-Heinemann, 2012.
- VILLIERS, E. de. **The Potential of Large Eddy Simulation for the Modeling of Wall Bounded Flows**. 2006. 351 p. Tese (Phd theses), 2006.
- WENDT, T. **Aplicação de Modelo Computacional Hidrodinâmico a Jusante de uma Estrutura Hidráulica**. 2009. 107 p. Dissertação (Mestre em Engenharia de Recursos Hídricos e Ambiental) — Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2009.
- WHITE, F. M. **Mecânica dos Fluidos**. [S.l.]: AMGH Editora, 2010.

WIEL, B. Van de; MOENE, A.; JONKER, H. The cessation of continuous turbulence as precursor of the very stable nocturnal boundary layer. **Journal of the Atmospheric Sciences**, v. 69, n. 11, p. 3097–3115, 2012.

WIEL, B. Van de et al. The minimum wind speed for sustainable turbulence in the nocturnal boundary layer. **Journal of the Atmospheric Sciences**, v. 69, n. 11, p. 3116–3127, 2012.

WILCOX, D. C. **Turbulence Modeling for CFD (Third Edition) (Hardcover)**. [S.l.: s.n.], 2006. 522 p.

YOSHIZAWA, A. Statistical theory for compressible turbulent shear flows, with the application to subgrid modeling. **The Physics of Fluids**, v. 29, n. 7, p. 2152–2164, 1986. Disponível em: <<http://aip.scitation.org/doi/abs/10.1063/1.865552>>.

YOUNG, D. F. et al. **A brief introduction to fluid mechanics**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2010.

ZHOU, B.; CHOW, F. K. Large-eddy simulation of the stable boundary layer with explicit filtering and reconstruction turbulence modeling. **Journal of the Atmospheric Sciences**, v. 68, n. 9, p. 2142–2155, 2011.