

Débora Patricia Fensterseifer Bottura

**Uma Ferramenta Computacional para a Análise
de Linhas de Transmissão utilizando o Método
dos Elementos Finitos**

Alegrete, RS

5 de julho de 2018

Débora Patricia Fensterseifer Bottura

**Uma Ferramenta Computacional para a Análise de Linhas
de Transmissão utilizando o Método dos Elementos
Finitos**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Engenharia Elétrica, realizado na Universidade Federal do Pampa, como requisito parcial para obtenção do título de **Bacharel em Engenharia Elétrica**.

Universidade Federal do Pampa – Unipampa

Curso de Engenharia Elétrica

Orientador: Prof. Me. Edson Rodrigo Schlosser

Alegrete, RS

5 de julho de 2018

Ficha catalográfica elaborada automaticamente com os dados fornecidos
pelo(a) autor(a) através do Módulo de Biblioteca do
Sistema GURI (Gestão Unificada de Recursos Institucionais) .

B751f Bottura, Débora Patricia Fensterseifer
Uma Ferramenta Computacional para a Análise de Linhas de
Transmissão utilizando o Método dos Elementos Finitos / Débora
Patricia Fensterseifer Bottura.

82 p.

Trabalho de Conclusão de Curso(Graduação)-- Universidade
Federal do Pampa, ENGENHARIA ELÉTRICA, 2018.

"Orientação: Edson Rodrigo Schlosser".

1. Introdução. 2. Revisão Bibliográfica. 3. Técnica
Numérica. 4. Ferramenta Computacional. 5. Discussões . I.
Título.

Débora Patricia Fensterseifer Bottura

Uma Ferramenta Computacional para a Análise de Linhas de Transmissão utilizando o Método dos Elementos Finitos

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Engenharia Elétrica, realizado na Universidade Federal do Pampa (Unipampa, RS), como requisito parcial para obtenção do grau de **Bacharel em Engenharia Elétrica**.

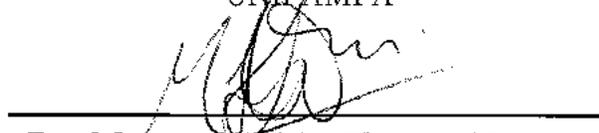
Trabalho aprovado. Alegrete, RS, 21 de junho de 2018:



Prof. Me. Edson Rodrigo Schlosser
UNIPAMPA
Orientador



Me. Lucas Compassi Severo
UNIPAMPA



Dr. Marcos Vinício Thomas Heckler
UNIPAMPA

Alegrete, RS
21 de junho de 2018

*Dedico este trabalho a minha família, pela
inspiração e suporte nas horas difíceis.*

Agradecimentos

Dedico este trabalho primeiramente a Deus, por ser essencial em minha vida, meu guia, socorro presente em todas as horas.

Agradeço também aos meus familiares, em especial ao meu pai Carlos Rogério Bottura, minha mãe Cláudia Fensterseifer Bottura e ao meu irmão Vitor Hugo Fensterseifer Bottura, pelas conversas, sugestões e puxões de orelha nestes últimos cinco anos.

Aos meus amigos, que me ajudaram muito na conclusão deste sonho e que estiveram sempre dispostos a me ajudar. Agradeço de coração, em especial ao Bruno Bet, Daniel Baú, Gabriel Cocco, Gabriele Barrilari, Lucas Pedroso e Yuri Desconsi, vocês com toda certeza foram os melhores presentes que o meu curso me proporcionou.

Agradeço aos amigos de Augusto Pestana/ Ijuí, que sempre souberam esperar o meu tempo, nunca me abandonaram e que habitualmente mandavam um salve amigo e um "vai dar tudo certo". Em especial agradeço ao grupo "Distribuindo Amor", principalmente as minhas amigas do coração, Angélica Heck Zientarski, Tiana Hintz e Jenifer Weiler.

Agradeço aos professores acima de tudo que se tornaram amigos aos quais adquiri com o decorrer da graduação, que não mediram esforços e que sempre estiveram dispostos a ajudar.

Em especial, agradeço ao professor Edson Rodrigo Schlosser, que me orientou de forma magnífica e excepcional na execução deste presente trabalho, e por fim agradeço a instituição de ensino UNIPAMPA que proporcionou minha caminhada até aqui. A todos meu muito obrigado.

*“O importante é não deixar de fazer perguntas.”
(Albert Einstein)*

Resumo

Este trabalho apresenta um estudo sobre as linhas de transmissão com geometria coaxial. Primeiramente, analisa-se o comportamento circuital de uma linha de transmissão e explora-se o equacionamento matemático que modela esse circuito. Este estudo das linhas de transmissão é visto pela análise minuciosa de um circuito em que se resolvem as equações diferenciais do modelo equivalente, estuda-se o comportamento para diferentes terminações, aplicam-se as condições de contorno na solução da equação de onda e consideram-se os parâmetros resistivo (R), condutivo (G), capacitivo (C) e indutivo (L) de linhas reais. Como objetivo geral, uma ferramenta numérica baseada na solução deste modelo equivalente a partir do Método dos Elementos Finitos (MEF) foi desenvolvida. Esta técnica consiste em discretizar o problema e impor condições de contorno adequadas. Por fim, um sistema de equações lineares deve ser resolvido para se determinar a tensão ao longo de uma linha de transmissão arbitrária. A análise dos resultados é realizada de forma gráfica a partir do software *Matlab* ®. Deste modo, este trabalho descreve o desenvolvimento de uma ferramenta computacional que contém a implementação matemática de linhas de transmissão. Adicionalmente, essa ferramenta numérica é utilizada para se determinar a atenuação em cabos coaxiais em função do seu comprimento físico, e validada com o uso do software *Txline* para diferentes frequências de operação.

Palavras-chave: Linha de Transmissão, Ferramenta Computacional, Método dos Elementos Finitos.

Abstract

The main topic of study of this work is the analysis of transmission lines with coaxial geometry with the finite element method. Initially, the transmission line is modeled as an equivalent circuit, which is discussed and the mathematical formulation is presented. This study includes a complete analysis of the differential equations for the equivalent circuit, its behavior for different terminations, the application of boundary conditions in the solution of the wave equation, and the derivation of the equivalent distributed parameters: series resistance (R), shunt conductance (G), shunt capacitance (C) and series inductance (L). The differential equation has been solved with the application of the finite element method (FEM), which consists on the discretization of the geometry and on the application of the appropriate boundary conditions. A system of linear equations must be solved to determine the voltage distribution along an arbitrary transmission line. The analysis of the results is done graphically with *Matlab* software and includes the plotting of the attenuation and the phase variation in coaxial cables for different physical lengths. Finally, the results have been validated with the predictions obtained with the *Txline* software for different operating frequencies.

Key-words: Transmission Lines, Computational Tool, Finite Element Method.

Lista de ilustrações

| | |
|--|----|
| Figura 1 – Linha de transmissão com dois condutores. | 31 |
| Figura 2 – Circuito equivalente de uma LT. | 32 |
| Figura 3 – Circuito com linha de transmissão. | 35 |
| Figura 4 – Geometria de um cabo coaxial. (a) Geometria radial. (b) Geometria longitudinal. | 38 |
| Figura 5 – Pontos nodais gerais e subdomínios de nós, tridimensional e bidimensional. | 42 |
| Figura 6 – Modelo de uma linha de transmissão em formato unidimensional. | 43 |
| Figura 7 – Definição de produto interno para o método de Galerkin. | 44 |
| Figura 8 – Análise da linha de transmissão discretizada pelo método dos elementos finitos. | 44 |
| Figura 9 – Utilização do MEF ao longo de x | 45 |
| Figura 10 – Elemento da linha 1 e coluna 1, A_{11} | 46 |
| Figura 11 – Elemento da linha 1 e coluna 2, A_{12} | 47 |
| Figura 12 – Elemento da linha 1 e coluna 3, A_{13} | 47 |
| Figura 13 – Elemento da linha 1 e coluna 4, A_{14} | 48 |
| Figura 14 – Elemento da linha 2 e coluna 1, A_{21} | 48 |
| Figura 15 – Elemento da linha 2 e coluna 2, A_{22} | 49 |
| Figura 16 – Elemento da linha 2 e coluna 3, A_{23} | 49 |
| Figura 17 – Elemento da linha 2 e coluna 4, A_{24} | 50 |
| Figura 18 – Elemento da linha 3 e coluna 1, A_{31} | 50 |
| Figura 19 – Elemento da linha 3 e coluna 2, A_{32} | 51 |
| Figura 20 – Elemento da linha 3 e coluna 3, A_{33} | 51 |
| Figura 21 – Elemento da linha 3 e coluna 4, A_{34} | 52 |
| Figura 22 – Elemento da linha 4 e coluna 1, A_{41} | 52 |
| Figura 23 – Elemento da linha 4 e coluna 2, A_{42} | 52 |
| Figura 24 – Elemento da linha 4 e coluna 3, A_{43} | 53 |
| Figura 25 – Elemento da linha 4 e coluna 4, A_{44} | 53 |
| Figura 26 – Onda incidente no cabo coaxial RG58. | 57 |
| Figura 27 – Onda refletida no cabo coaxial RG58. | 58 |
| Figura 28 – Modelo de um cabo coaxial real. | 58 |
| Figura 29 – Constante de atenuação para os três tipos de cabos coaxiais. | 60 |
| Figura 30 – Constante de fase para os três tipos de cabos coaxiais. | 60 |
| Figura 31 – Parâmetros do cabo coaxial RG213 para $U = 1$ metro, considerando 500 MHz. | 61 |
| Figura 32 – Parâmetros do cabo coaxial RGC58 para $U = 1$ metro, considerando 500 MHz. | 61 |

| | |
|---|----|
| Figura 33 – Parâmetros do cabo coaxial RG58 para $U = 1$ metro, considerando 500 MHz. | 62 |
| Figura 34 – Parâmetros do cabo coaxial RG213 para $U = 1$ metro, considerando 1 GHz. | 62 |
| Figura 35 – Parâmetros do cabo coaxial RGC58 para $U = 1$ metro, considerando 1 GHz. | 63 |
| Figura 36 – Parâmetros do cabo coaxial RG58 para $U = 1$ metro, considerando 1 GHz. | 63 |
| Figura 37 – Parâmetros do cabo coaxial RG58 para $U = 5$ metros, considerando 500 MHz. | 64 |
| Figura 38 – Parâmetros do cabo coaxial RG58 para $U = 10$ metros, considerando 500 MHz. | 64 |
| Figura 39 – Parâmetros do cabo coaxial RG58 para $U = 15$ metros, considerando 500 MHz. | 65 |
| Figura 40 – Parâmetros do cabo coaxial RG58 para $U = 30$ metros, considerando 500 MHz. | 65 |
| Figura 41 – Parâmetros do cabo coaxial RG58 para $U = 5$ metros, considerando 1 GHz. | 66 |
| Figura 42 – Parâmetros do cabo coaxial RG58 para $U = 10$ metros, considerando 1 GHz. | 66 |
| Figura 43 – Parâmetros do cabo coaxial RG58 para $U = 15$ metros, considerando 1 GHz. | 67 |
| Figura 44 – Parâmetros do cabo coaxial RG58 para $U = 30$ metros, considerando 1 GHz. | 67 |
| Figura 45 – Demonstração de uma linha de transmissão ponto à ponto. | 69 |
| Figura 46 – Linha de transmissão genérica para variáveis valores de U | 69 |
| Figura 47 – Método ABCD aplicado em uma LT. | 70 |
| Figura 48 – Equivalência do método ABCD aplicado em uma LT. | 71 |
| Figura 49 – Atenuação de um cabo coaxial RG58 ao longo da linha, para 1GHz de frequência. | 72 |
| Figura 50 – Atenuação de um cabo coaxial RG58 ao longo da linha, para 500MHz de frequência. | 72 |
| Figura 51 – Parâmetros do cabo RG58 para 500 MHz, considerando comprimento de 1 metro. (a) Característica do erro em relação ao comprimento. (b) Tempo em relação à discretização. | 73 |
| Figura 52 – Parâmetros do cabo RG58 para 500 MHz, considerando comprimento de 5 metros. (a) Característica do erro em relação ao comprimento. (b) Tempo em relação à discretização. | 73 |

| | |
|--|----|
| Figura 53 – Parâmetros do cabo RG58 para 500 MHz, considerando comprimento de 10 metros. (a) Característica do erro em relação ao comprimento. (b) Tempo em relação à discretização. | 74 |
| Figura 54 – Parâmetros do cabo RG58 para 500 MHz, considerando comprimento de 15 metros. (a) Característica do erro em relação ao comprimento. (b) Tempo em relação à discretização. | 74 |
| Figura 55 – Parâmetros do cabo RG58 para 1 GHz, considerando comprimento de 1 metro. (a) Característica do erro em relação ao comprimento. (b) Tempo em relação à discretização. | 75 |
| Figura 56 – Parâmetros do cabo RG58 para 1 GHz, considerando comprimento de 5 metros. (a) Característica do erro em relação ao comprimento. (b) Tempo em relação à discretização. | 75 |
| Figura 57 – Parâmetros do cabo RG58 para 1 GHz, considerando comprimento de 10 metros. (a) Característica do erro em relação ao comprimento. (b) Tempo em relação à discretização. | 76 |
| Figura 58 – Parâmetros do cabo RG58 para 1 GHz, considerando comprimento de 15 metros. (a) Característica do erro em relação ao comprimento. (b) Tempo em relação à discretização. | 76 |

Lista de tabelas

| | |
|--|----|
| Tabela 1 – Resultado utilizando cada caso para uma matriz 4x4. | 54 |
| Tabela 2 – Especificações dos cabos coaxial | 59 |
| Tabela 3 – Parâmetros dos cabos coaxial, considerando 500 MHz. | 59 |
| Tabela 4 – Parâmetros dos cabos coaxial, considerando 1 GHz. | 59 |

Lista de abreviaturas e siglas

| | |
|------|---|
| CA | Corrente Alternada |
| CC | Corrente Contínua |
| LT | Linha de Transmissão |
| TE | Transversal Elétrico |
| TM | Transversal Magnético |
| TEM | Transversal Eletromagnético |
| LKC | Lei de Kirchhoff das Correntes |
| LKT | Lei de Kirchhoff das Tensões |
| MEF | Método dos Elementos Finitos |
| FDFD | Diferenças Finitas no Domínio da Frequência |
| FDTD | Diferenças Finitas no Domínio do Tempo |

Lista de símbolos

| | |
|--------------|-------------------------------------|
| Y | Admitância |
| C | Capacitância |
| G | Condutância |
| I | Corrente |
| ∂ | Derivada |
| j | Imaginário |
| Z | Impedância |
| L | Indutância |
| R | Resistência |
| V | Tensão |
| σ | Condutividade Elétrica |
| W_e | Energia Elétrica |
| W_m | Energia Magnética |
| ω | Frequência Angular |
| R_s | Resistência Superficial |
| λ | Comprimento de Onda |
| α | Constante de Atenuação |
| β | Constante de Propagação |
| Δ_u | Intervalo de discretização |
| ϵ_o | Permissividade do Ar |
| μ_o | Permeabilidade do Ar |
| δs | Profundidade de Penetração |
| v_p | Velocidade de Fase |
| U | Comprimento da Linha de Transmissão |

| | |
|--------------|---|
| γ | Constante de Propagação Complexa |
| ϵ'' | Parte Imaginária da Permissividade, $I_m\{\epsilon\}$ |
| ϵ' | Parte Real da Permissividade, $R_e\{\epsilon\}$ |

Sumário

| | | |
|-----------|--|-----------|
| 1 | Introdução | 27 |
| 1.1 | Estrutura do Documento | 28 |
| 2 | Revisão Bibliográfica | 29 |
| 2.1 | Linhas de Transmissão | 29 |
| 2.1.1 | Fundamentação Teórica | 29 |
| 2.1.2 | Análise Circuitual | 29 |
| 2.1.2.1 | Reatância Indutiva | 30 |
| 2.1.2.2 | Reatância Capacitiva | 30 |
| 2.1.3 | Circuito Equivalente de Linhas de Transmissão | 31 |
| 2.1.3.1 | Solução Analítica | 31 |
| 2.1.3.1.1 | Linha sem Perdas | 33 |
| 2.1.3.1.2 | Linha com Perdas | 34 |
| 2.1.4 | Propagação em Diferentes Linhas de Transmissão | 35 |
| 2.1.4.1 | Linhas de Transmissão Terminadas em Curto-Circuito e Circuito Aberto | 35 |
| 2.1.4.2 | Condições de Contorno (Gerador) | 36 |
| 2.2 | Tipos de Linhas de Transmissão | 37 |
| 2.2.1 | Modelos de Linhas de Transmissão | 37 |
| 2.2.1.1 | Energia | 37 |
| 2.2.1.2 | Cabo Coaxial | 38 |
| 3 | Técnica Numérica | 41 |
| 3.1 | Método dos Elementos Finitos | 41 |
| 3.1.1 | Procedimento do Método | 41 |
| 3.1.2 | Elementos Finitos Unidimensional | 42 |
| 3.1.2.1 | Análise de cada Elemento da Matriz | 45 |
| 3.1.2.2 | Análise do Resultado da Matriz | 54 |
| 3.1.2.3 | Aplicação da Condição de Contorno na Matriz | 54 |
| 4 | Ferramenta Computacional | 57 |
| 4.1 | Incidência e Reflexão de Ondas | 57 |
| 4.2 | Resultados Analíticos e Numéricos | 58 |
| 4.2.1 | Dados dos Cabos Coaxiais | 58 |
| 4.2.2 | Constante de Propagação - Cabos Coaxiais | 59 |
| 4.2.3 | Análise de Tensão em Cabos Coaxiais | 60 |
| 4.2.4 | Análise da Tensão: Cabo Coaxial RG58 | 63 |
| 5 | Discussões | 69 |
| 5.0.1 | Modelo Equivalente da LT | 69 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 5.0.1.1 | Caso Especial para Linhas de Transmissão de Comprimento | |
| | $\lambda_g/4$ | 71 |
| 5.1 | Validação | 71 |
| 5.2 | Viabilidade Operacional | 72 |
| 6 | Considerações Finais | 77 |
| | Referências | 79 |

1 Introdução

Nas últimas décadas, tornou-se possível projetar e construir linhas de transmissão (LTs) mais modernas, de diversos tamanhos e para uma imensa gama de aplicações. O tamanho da LT define, em boa parte, seu uso para comprimentos menores em circuitos de alta frequência e em quilômetros como meio de transmitir elevada potência entre gerador e consumidores (indústrias e unidades residenciais).

As linhas de transmissão são condutores com condutividade finita que transportam a energia do transmissor ao receptor. Deste modo, para altas frequências podem ser utilizadas na transmissão de sinais de frequência e na interligação entre os sistemas e a(s) antena(s) (MENEZES, 2015), (FILHO, 2006). Além dessas, existem inúmeras aplicações do equacionamento matemático que descreve o circuito de uma linha de transmissão, sendo algumas delas: transmissão de radiofrequência, circuitos em micro-ondas, acesso local de telefonia, televisão a cabo, telefonia móvel, dentre outras diversas utilidades (MATICK, 2000), (ALMAGUER et al., 2003).

Este trabalho tem como objetivo realizar um estudo do modelo circuital de uma linha de transmissão, caracterizada por um circuito de comprimento arbitrário, subdividido em frações menores (infinitesimal) e descrito como forma de parâmetros distribuídos. A abordagem envolve parâmetros capacitivo (C) e indutivo (L), além de condutivo (G) e resistivo (R), de forma a considerar as perdas pertencentes a linhas reais (MONK, 2003).

Diante da finalidade citada, são analisados trabalhos elaborados até então que tratam de técnicas para obtenção de uma característica ponto a ponto, utilizando o software *Matlab*® (MATLAB, 2014) para a implementação do Método dos Elementos Finitos (ASSAN, 2003). Além deste, existem outras técnicas que também podem ser utilizadas para resolver o problema numericamente, tais como o Método das Diferenças Finitas no Domínio do Tempo (FDTD) e Método das Diferenças Finitas no Domínio da Frequência (FDFD) (GARCIA et al., 2003).

Neste trabalho, usou-se a técnica numérica avançada, como apoio teórico referente ao Método dos Elementos Finitos, que consiste em discretizar linhas de transmissão genérica. Vale salientar que estas LTs podem ser coaxiais, terminadas em curto circuito, circuito aberto ou com uma carga de impedância qualquer (KUROKAWA et al., 2007), (ALMEIDA, 1989).

Neste documento, a proposta é utilizar os parâmetros referente à bibliografia estudada (POZAR, 2005), com o intuito de avaliar a queda de tensão ao longo das linhas de transmissão, baseada na solução do problema com o método dos elementos finitos e validada através da comparação com a solução analítica.

1.1 Estrutura do Documento

O trabalho está dividido em seis capítulos. No primeiro, é apresentada a contextualização sobre todo conceito referente às linhas de transmissão e sua aplicabilidade, como forma de uma breve introdução, de maneira a motivar o leitor sobre o assunto estudado.

O segundo capítulo apresenta a fundamentação teórica contendo a revisão bibliográfica das linhas de transmissão, bem como as características genéricas do circuito equivalente, aplicados em cabos coaxiais. Adicionalmente, a fundamentação da teoria eletromagnética vista pela aplicabilidade das equações de Maxwell, equação da onda, energia e potência são apresentadas para se determinar os parâmetros da estrutura. Ainda no capítulo 2, descrevem-se as características da solução analítica composta pela cascata do circuito equivalente de uma linha de transmissão, ocupando os parâmetros resistivo, indutivo, condutivo e capacitivo, fazendo a análise das leis de Kirchhoff das tensões e das correntes, no domínio do tempo e da frequência. Outro tópico destacado é referente às diferentes características que as linhas possuem e suas aplicações perante essa solução, podendo apresentar diferentes terminações.

O terceiro capítulo apresenta alguns resultados obtidos através da aplicação do Método dos Elementos Finitos, utilizando todos os passos para solução de um problema unidimensional.

O capítulo 4 é composto pela validação do método teórico com o resultado analítico. É utilizado o software *Matlab*® com a finalidade de criar um programa que mostra a queda de tensão em uma linha de transmissão, para diferentes comprimentos, utilizando os parâmetros resistivo, condutivo, capacitivo e indutivo, com estruturas de cabos coaxiais. Destacam-se as especificações e parâmetros dos cabos estudados, o comportamento da constante de atenuação e constante de fase desses.

No quinto capítulo, é abordada uma breve discussão sobre os problemas e soluções desenvolvidos no decorrer deste trabalho.

Por fim, no capítulo seis, são apresentadas conclusões sobre este documento.

2 Revisão Bibliográfica

2.1 Linhas de Transmissão

A linha de transmissão é uma estrutura longitudinal, utilizada para o transporte de informação e energia. Ela é utilizada em aplicações de alta frequência para o transporte de informação em sistemas de telecomunicações, no transporte de dados, e, no caso de alta potência e baixa frequência, para o transporte de energia em sistemas de alta tensão.

Considerando estruturas típicas, coaxiais, dois fios e placas paralelas, constituída por uma configuração longitudinal de dois ou mais condutores imersos em um dielétrico homogêneo, as LTs podem suportar modos transversais eletromagnéticos (TEM). Perante isto, no decorrer deste capítulo, modela-se matematicamente o circuito referente a uma linha de transmissão, utilizando a propagação da onda TEM, através das tensões, correntes e impedâncias, introduzida no domínio do tempo e da frequência, aplicando as leis de Kirchhoff com base na Teoria Eletromagnética.

2.1.1 Fundamentação Teórica

As LTs foram analisadas pelo físico e astrônomo Stephen Gray, em 1729, que verificou os efeitos eletrostático em uma corda úmida. Perante isso, um escritor desconhecido propôs aprimorar essa ideia, implementando o uso de um sistema de dois fios paralelos, fazendo com que se iniciasse uma importante fase das telecomunicações. Em seguida, Lord Kelvin deu início aos trabalhos relacionados a linhas de transmissão e Oliver Heavyside derivou a equação base para a análise genérica da propagação de ondas eletromagnéticas neste tipo de estrutura.

2.1.2 Análise Circuitual

Para a dedução fasorial, leva-se em consideração a lei de Ohm ([HALLIDAY; RESNICK; KRANE, 2000](#)), onde Z é a impedância, contendo uma parte real e outra imaginária, $v(t)$ é a tensão e $i(t)$ é a corrente no domínio do tempo ([ALEXANDER; SADIKU, 2000](#)).

$$Z = R + jX \quad \Omega \quad (2.1)$$

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \phi_i) \quad A \quad (2.2)$$

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \phi_v) \quad V \quad (2.3)$$

sendo R a resistência e X a reatância.

A tensão e a corrente são descritas na forma fasorial como sendo

$$V = V_m \angle \phi_v \quad (2.4)$$

e

$$I = I_m \angle \phi_i \quad (2.5)$$

em que V_m , I_m são as amplitudes e ϕ_v e ϕ_i são as fases da tensão e da corrente, respectivamente.

2.1.2.1 Reatância Indutiva

Para um indutor, tem-se que a tensão é representada pela equação (2.6)

$$v_L(t) = L \frac{\partial i}{\partial t} = -\omega L I_m \text{sen}(\omega t + \phi), \quad (2.6)$$

sendo L a indutância e ω a frequência angular.

Utilizando a propriedade trigonométrica

$$-\text{sen}(\omega t + \phi) = \cos(\omega t + \phi + 90^\circ) \quad (2.7)$$

obtem-se

$$v_L(t) = \omega L I_m \cos(\omega t + \phi + 90^\circ) \quad (2.8)$$

e, na forma fasorial,

$$V_L = \omega L I_m \angle \phi + 90^\circ = j\omega L I_L. \quad (2.9)$$

Deste modo,

$$\frac{V_L}{I_L} = Z_L = j\omega L \quad (2.10)$$

onde V_L é a tensão, I_L é a corrente e Z_L a impedância do indutor.

2.1.2.2 Reatância Capacitiva

Para um capacitor, tem-se que a corrente é representada por

$$i_c(t) = C \frac{\partial v}{\partial t} = -\omega C V_m \text{sen}(\omega t + \phi), \quad (2.11)$$

sendo C a capacitância, onde

$$i_c(t) = \omega C V_m \cos(\omega t + \phi + 90^\circ). \quad (2.12)$$

Na forma fasorial,

$$I_c = \omega C V_c \angle \phi + 90^\circ \quad (2.13)$$

ou

$$I_c = j\omega CV_c. \quad (2.14)$$

Deste modo,

$$\frac{V_c}{I_c} = Z_c = \frac{1}{j\omega C}, \quad (2.15)$$

onde V_c é a tensão, I_c é a corrente e Z_c a impedância, no capacitor.

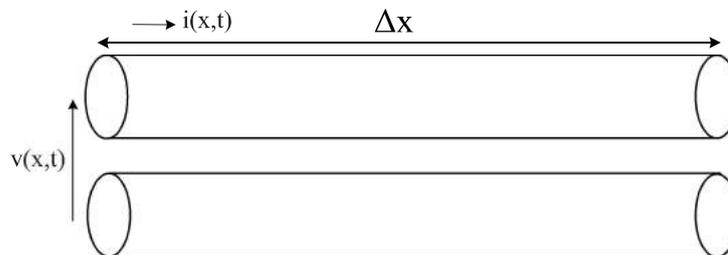
2.1.3 Circuito Equivalente de Linhas de Transmissão

As linhas de transmissão utilizadas têm características homogêneas e são longitudinalmente distribuídas. A ideia é ocupar o modelo circuitual descrito por uma linha de transmissão com a finalidade de analisar a modelagem matemática, chegando-se a um resultado diferencial para o circuito equivalente. Desta forma, calcula-se a solução analítica do circuito que caracteriza uma LT.

2.1.3.1 Solução Analítica

A linha de transmissão pode ser dividida em comprimentos infinitesimais Δx , conforme ilustrado na Figura 1. O circuito equivalente desta linha é mostrado na Figura 2 e analisado nas equações deduzidas nas seções seguintes. (PAUL, 2008).

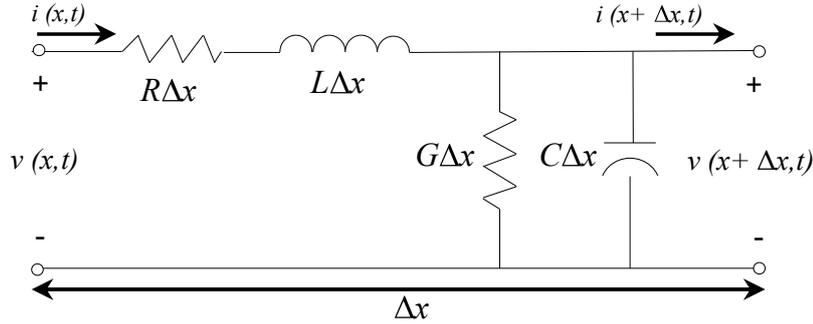
Figura 1 – Linha de transmissão com dois condutores.



Fonte: Autoral.

Observa-se o circuito constituído por um número infinito de seções de uma forma mais adequada. Considera-se a seção como sendo um elemento infinitesimal da linha, com comprimento Δx . A tensão v e a corrente i correspondem a valores instantâneos, respectivamente, demonstrados na Figura 2.

Figura 2 – Circuito equivalente de uma LT.



Fonte: (POZAR, 2005), adaptada pelo autor.

Aplicando as leis de Kirchhoff das tensões (LKT) e das correntes (LKC) para o circuito da Figura 2, obtém-se para LKT

$$-v(x, t) + R\Delta x i(x, t) + L\Delta x \frac{\partial i(x, t)}{\partial t} + v(x + \Delta x, t) = 0 \quad (2.16)$$

e para a LKC

$$i(x, t) - G\Delta x v(x + \Delta x, t)\Delta x - C\Delta x \frac{\partial v(x + \Delta x, t)}{\partial t} - i(x + \Delta x, t) = 0. \quad (2.17)$$

Simplificando a equação (2.16) e aplicando o limite em que Δx tende a 0, assim resulta que

$$\frac{\partial v(x, t)}{\partial x} = - \left(Ri(x, t) + L \frac{\partial i(x, t)}{\partial t} \right). \quad (2.18)$$

Simplificando a equação (2.17) e considerando que o limite de Δx tende a 0, então

$$\frac{\partial i(x, t)}{\partial x} = - \left(Gv(x, t) + C \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} \right). \quad (2.19)$$

Para fins de simplificação opta-se por utilizar as equações deduzidas pela aplicação das leis de Kirchhoff no domínio da frequência. Assim, descreve-se a equação (2.18) como sendo,

$$\frac{\partial V}{\partial x} = - (R + j\omega L) I = -ZI, \quad (2.20)$$

de modo que $R + j\omega L$ representam uma impedância Z .

Analogamente ao passo anterior de simplificação, descreve-se a equação (2.19) como sendo,

$$\frac{\partial I}{\partial x} = - (G + j\omega C) V = -YV, \quad (2.21)$$

de modo que $G + j\omega C$ representam uma admitância Y ,

Diferenciando ambos os lados da equação (2.20) e substituindo na equação (2.21), tem-se

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - ZY\xi = 0, \quad (2.22)$$

com $\xi = V(x)$ ou $I(x)$.

Fazendo $\gamma^2 = ZY = (R + j\omega L)(G + j\omega C)$, tem-se

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - \gamma^2 \xi = 0. \quad (2.23)$$

As equações

$$V(x) = V_o^+ e^{-\gamma x} + V_o^- e^{\gamma x} \quad (2.24)$$

e

$$I(x) = \frac{V_o^+ e^{-\gamma x} - V_o^- e^{\gamma x}}{Z_o} \quad (2.25)$$

são lineares homogêneas do caso dois, sendo que as raízes da função são distintas, de modo que V_o^+ e V_o^- são as amplitudes das tensões incidente e refletida.

2.1.3.1.1 Linha sem Perdas

Considerando uma linha sem perdas ($R = 0$ e $G = 0$), tem-se que a constante de propagação é igual a constante de fase, assim

$$\gamma = j\beta = \sqrt{(j\omega L)(j\omega C)} = j\omega\sqrt{LC}. \quad (2.26)$$

Com a ausência das perdas, pode-se deduzir o valor de β e Z_o (SCHELKUNOFF, 1934), descritas por

$$\beta = \omega\sqrt{LC} \quad (2.27)$$

e

$$Z_o = \sqrt{\frac{L}{C}}, \quad (2.28)$$

em que Z_o é a impedância característica da linha de transmissão (POZAR, 2005).

As soluções gerais para a tensão e a corrente podem ser escritas da seguinte forma

$$V(x) = V_o^+ e^{-j\beta x} + V_o^- e^{j\beta x} \quad (2.29)$$

e

$$I(x) = \frac{V_o^+ e^{-j\beta x} - V_o^- e^{j\beta x}}{Z_o}. \quad (2.30)$$

O comprimento de onda e a velocidade de fase são obtidos por

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{LC}} \quad (2.31)$$

e

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad (2.32)$$

respectivamente.

2.1.3.1.2 Linha com Perdas

Linhas de transmissão com perdas ($R \neq 0$ e/ou $G \neq 0$) são caracterizadas por possuírem constante de propagação complexa na forma

$$\gamma = \alpha + j\beta \quad (2.33)$$

ou seja

$$\alpha = R_e\{\gamma\} \quad e \quad \beta = I_m\{\gamma\}. \quad (2.34)$$

em que α é a parte real de γ e corresponde a constante de atenuação, enquanto que β é a parte imaginária de γ e corresponde a constante de fase.

Neste caso a impedância característica é descrita por

$$Z_o = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}}. \quad (2.35)$$

Levando em consideração que

$$e^{\gamma x} = e^{(\alpha + j\beta)x} = e^{\alpha x} e^{j\beta x}, \quad (2.36)$$

então

$$V(x) = V_o^+ \{e^{-\alpha x} e^{-j\beta x}\} + V_o^- \{e^{\alpha x} e^{j\beta x}\} \quad (2.37)$$

$$I(x) = \frac{V_o^+}{Z_o} \{e^{-\alpha x} e^{-j\beta x}\} + \frac{V_o^-}{Z_o} \{e^{\alpha x} e^{j\beta x}\}. \quad (2.38)$$

O comprimento de onda e a velocidade de fase são obtidos por

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{I_m\{\gamma\}} \quad (2.39)$$

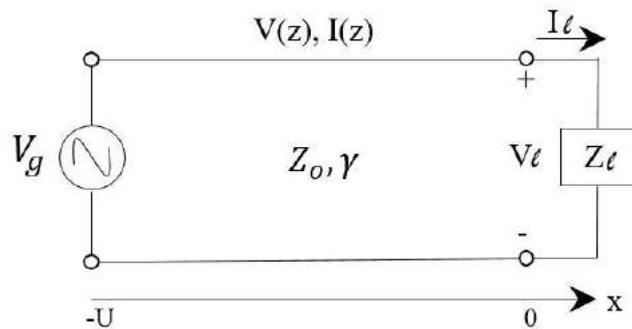
e

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{\omega}{I_m\{\gamma\}}. \quad (2.40)$$

2.1.4 Propagação em Diferentes Linhas de Transmissão

A Figura 3 segue os padrões de uma linha de transmissão conectada a uma impedância de carga denominada Z_l . Neste caso, a tensão pode ser descrita como a soma das ondas incidentes e refletidas, de modo que V_g representa a tensão de entrada (gerador), Z_o e γ são os parâmetros da LT.

Figura 3 – Circuito com linha de transmissão.



Fonte: Autoral.

Se $V_o^+ e^{-\gamma x}$ é a representação da onda incidente e $V_o^- e^{+\gamma x}$ a onda refletida, descreve-se então as equações (2.24) e (2.25) como elementos de tensão e corrente, contendo uma constante de propagação dita por uma parte real e outra imaginária. Deste modo, a equação descrita pela carga (Z_l) é representada pela divisão da tensão e corrente em seu ponto $x = 0$ de aplicação, assim

$$Z_l = \frac{V(0)}{I(0)} = \frac{V_o^+ + V_o^-}{V_o^+ - V_o^-} Z_o \quad (2.41)$$

de modo que $e^0 = 1$.

Na seção seguinte, analisam-se casos de linhas de transmissão com ou sem perdas para aplicar a condição de contorno e estabelecer relações entre V_o^+ e V_o^- . As linhas são terminadas em curto circuito, em circuito aberto ou com uma carga qualquer. Para cada situação aplicam-se duas condições de contorno, uma em cada terminal da LT, caracterizando, assim, uma solução para diferentes terminações.

2.1.4.1 Linhas de Transmissão Terminadas em Curto-Circuito e Circuito Aberto

Isolando V_o^- da equação (2.41) e aplicando a condição de contorno, obtém-se

$$V_o^- = V_o^+ \frac{(Z_l - Z_o)}{(Z_l + Z_o)}. \quad (2.42)$$

Assim define-se o coeficiente de reflexão descrito como sendo

$$\Gamma = \frac{V_o^-}{V_o^+} = \frac{Z_l - Z_o}{Z_l + Z_o}. \quad (2.43)$$

Desta forma, descreve-se a tensão e a corrente em termos do coeficiente de reflexão como

$$V(x) = V_o^+ \{e^{-\gamma x} + \Gamma e^{\gamma x}\} \quad (2.44)$$

e

$$I(x) = \frac{V_o^+}{Z_o} \{e^{-\gamma x} - \Gamma e^{\gamma x}\}. \quad (2.45)$$

Para um curto-circuito ($Z_l = 0$) tem-se $\Gamma = -1$, e para um circuito aberto ($Z_l \rightarrow \infty$), $\Gamma = 1$.

2.1.4.2 Condições de Contorno (Gerador)

Para uma carga Z_l aplicada no final do trecho percorrido, em que $Z_l \neq Z_o$, sendo $Z_l = R_l + jX_l$, determina-se a impedância de entrada para qualquer comprimento da linha de transmissão empregando-se

$$Z_{ent} = \left[\frac{(Z_l + Z_o)e^{-\gamma x} + (Z_l - Z_o)e^{\gamma x}}{(Z_l + Z_o)e^{-\gamma x} - (Z_l - Z_o)e^{\gamma x}} \right] Z_o. \quad (2.46)$$

Simplificando e aplicando a relação $e^{\pm\gamma x} = \cosh(\gamma x) \pm \sinh(\gamma x)$ na equação (2.46), sendo

$$\tanh(\gamma x) = \frac{\sinh(\gamma x)}{\cosh(\gamma x)} \quad (2.47)$$

tem-se

$$Z_{ent} = \frac{V(-U)}{I(-U)} = Z_o \left[\frac{Z_l + Z_o \tanh(\gamma x)}{Z_o + Z_l \tanh(\gamma x)} \right]. \quad (2.48)$$

Considerando que a LT tenha comprimento $-U$ no eixo x e V_g é a tensão de entrada, então ao aplicar as condições de contorno, obtém-se

$$V(x)|_{x=-U} = V_g = (V_o^+ e^{-\gamma U} + V_o^- e^{\gamma U}). \quad (2.49)$$

Considerando a LT em aberto ($\Gamma = 1$), tem-se que

$$V_o^+ = V_o^- \quad (2.50)$$

assim a soma das ondas incidentes e refletidas são representadas como sendo

$$V(x) = V_g \frac{(e^{-\gamma x} + e^{\gamma x})}{(e^{\gamma U} + e^{-\gamma U})} = V^i(x) + V^r(x) \quad (2.51)$$

$$I(x) = \frac{V_g}{Z_o} \frac{(e^{-\gamma x} + e^{\gamma x})}{(e^{\gamma U} + e^{-\gamma U})}. \quad (2.52)$$

2.2 Tipos de Linhas de Transmissão

A linha de transmissão é representada por uma estrutura física de dois condutores paralelos com proporção e configuração longitudinais invariantes. Como relatado anteriormente, a estrutura da linha de transmissão estudada é de geometria coaxial, com um raio interno a e um externo b .

Existem três modos de propagação para a obtenção dos parâmetros das LTs: TEM, TM e TE. Para o modo de propagação TEM, os vetores de campo elétrico e magnético tem apenas componentes no plano perpendicular à direção da propagação. No modo TE, existem apenas componentes transversais do campo elétrico, e, no modo TM, há componentes transversais somente do campo magnético.

2.2.1 Modelos de Linhas de Transmissão

Para caracterizar a diferença entre linha de transmissão e a teoria circuital leva-se em consideração o tamanho elétrico. A dimensão física de uma rede é muito menor do que o comprimento de onda elétrico, enquanto as LTs são frações consideráveis de comprimento de onda, ou muitos comprimentos de onda, caracterizando, assim, a LT como um parâmetro distribuído de rede. Portanto, deve-se considerar a variação da magnitude e fase das tensões e das correntes ao longo do trecho.

Com tudo isso, a representação de uma linha de transmissão pode ser feita através de um esquemático como uma linha de dois fios ou coaxial. O comprimento da linha infinitesimal corresponde a Δx , considerando que R , L , G e C são modelados por metro.

R - Resistência em série dos condutores [Ω/m];

L - Indutância em série dos condutores [H/m];

G - Condutância em paralelo [S/m];

C - Capacitância em paralelo [F/m].

Desta forma, pode-se dizer que a indutância em série modela a existência de condutores, a capacitância em paralelo existe devido à proximidade entre os condutores, a resistência pela condutividade finita e a condutância pelas perdas dielétricas no material isolante.

2.2.1.1 Energia

Outra especificação para obtenção dos parâmetros de uma LT é considerar a energia armazenada. Desta forma, têm-se as equações demonstradas a seguir, de modo que W_e é a

energia armazenada pelo campo elétrico e W_m pelo campo magnético (POZAR, 2005).

$$W_e = \frac{1}{4} R_e \int_v \bar{E} \bar{D}^* dv = \frac{\epsilon}{4} \int_v \bar{E} \bar{E}^* dv \quad (2.53)$$

$$W_m = \frac{1}{4} R_e \int_v \bar{H} \bar{E}^* dv = \frac{\mu}{4} \int_v \bar{H} \bar{H}^* dv \quad (2.54)$$

2.2.1.2 Cabo Coaxial

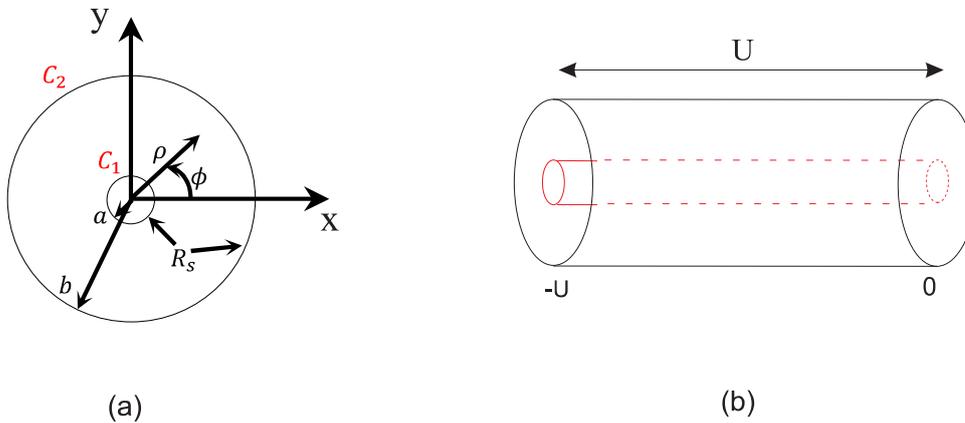
A modelagem dos parâmetros de um cabo coaxial é feita com base na Figura 4, uma vez que a solução é realizada em coordenadas cilíndricas.

A fim de obter os parâmetros para um cabo coaxial, leva-se em consideração o modo TEM. Aplicando a condição de contorno nas equações de Maxwell, chega-se às (POZAR, 2005).

$$\bar{E} = \frac{V_o \hat{\rho}}{\rho \ln(b/a)} e^{-\gamma z} \quad (2.55)$$

$$\bar{H} = \frac{I_o \hat{\phi}}{2\pi \rho} e^{-\gamma z} \quad (2.56)$$

Figura 4 – Geometria de um cabo coaxial. (a) Geometria radial. (b) Geometria longitudinal.



Fonte: Autoral.

Considerando a teoria de um campo elétrico, em que os condutores são projetados para armazenar energia em seus campos magnéticos, de modo que $v_L = L \frac{\partial i_L}{\partial t}$, sendo que, ao passar uma corrente através de um indutor, a tensão nele é diretamente proporcional à taxa de variação da corrente, observa-se então a equação (2.57), (ALEXANDER; SADIKU, 2000).

$$W_m = \frac{L |I_o|^2}{4} \quad (2.57)$$

Substituindo a equação 2.54 em 2.57, tem-se a equação 2.58.

$$L = \frac{\mu}{|I_o|^2} \int_s \bar{H} \bar{H}^* ds \quad (2.58)$$

Considerando o modo TEM, tem-se

$$L = \frac{\mu}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_a^b \frac{\rho}{\rho^2} d\rho d\phi \quad (2.59)$$

sendo

$$L = \frac{\mu}{2\pi} \ln(b/a) \quad [H/m]. \quad (2.60)$$

Considerando que o capacitor é um elemento passivo projetado para armazenar energia em seu campo elétrico, tem-se que $i_c = C \frac{\partial v_c}{\partial t}$, desta forma a energia armazenada é representada por

$$W_e = \frac{C|V_o|^2}{4}. \quad (2.61)$$

Substituindo a equação (2.53) em (2.61), considerando os parâmetros de propagação TEM, obtém-se a equação (2.62). Resolvendo a integral de superfície, obtém-se a equação (2.64).

$$C = \frac{\epsilon'}{|V_o|^2} \int_s \bar{E} \bar{E}^* ds \quad (2.62)$$

$$C = \frac{\epsilon'}{\{\ln(b/a)\}^2} \int_0^{2\pi} \int_a^b \frac{\rho}{\rho^2} d\rho d\phi \quad (2.63)$$

$$C = \frac{2\pi\epsilon'}{\ln(b/a)} \quad [F/m] \quad (2.64)$$

Considerando a equação (2.65) e aplicando a teoria de circuitos em que $P_c = \frac{R|I_o|^2}{2}$, obtêm-se as equações (2.66) e (2.67),

$$P_c = \frac{R_s}{2} \int_{C_1+C_2} \bar{H} \bar{H}^* dl \quad (2.65)$$

$$R = \frac{R_s}{|I_o|^2} \int_{C_1+C_2} \bar{H} \bar{H}^* dl \quad (2.66)$$

$$R = \frac{R_s}{(2\pi)} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \quad [\Omega/m] \quad (2.67)$$

de modo que R_s seja demonstrado na equação (2.68), em que σ é a condutividade do condutor e δ_s a profundidade característica da penetração, deduzida na equação (2.69).

$$R_s = \frac{1}{\sigma \delta_s} \quad (2.68)$$

$$\delta_s = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu \sigma}} \quad (2.69)$$

A equação (2.70) é a representação da potência média dissipada por unidade de comprimento em um dielétrico com perdas, sendo que $P_d = \frac{G|V_o|^2}{2}$, desta forma, isolando e substituindo alcança-se as equações descritas abaixo.

$$P_d = \frac{\omega \epsilon''}{2} \int_s \bar{E} \bar{E}^* ds \quad (2.70)$$

sendo

$$G = \frac{\omega \epsilon''}{|V_o|^2} \int_s \bar{E} \bar{E}^* ds \quad (2.71)$$

$$G = \frac{\omega \epsilon''}{|V_o|^2} \int_s \left(\frac{V_o \hat{\rho}}{\rho \ln(b/a)} e^{-\gamma z} \right) \left(\frac{V_o \hat{\rho}}{\rho \ln(b/a)} e^{\gamma z} \right) ds \quad (2.72)$$

$$G = \frac{2\pi \omega \epsilon''}{\ln(b/a)} \quad [S/m] . \quad (2.73)$$

3 Técnica Numérica

3.1 Método dos Elementos Finitos

O método dos Elementos Finitos (MEF) é apresentado como sendo uma técnica numérica para determinar soluções aproximadas de equações diferenciais. Surgiu em meados do século XX devido ao avanço da tecnologia e do desenvolvimento dos primeiros computadores.

Antes do surgimento deste método, a análise da condição de contorno eram efetuadas devido a resolução direta dos sistemas, utilizando o fenômeno das derivadas, aplicando as técnicas das séries de Fourier. Em virtude do avanço da tecnologia, tornou-se mais difícil continuar utilizando os métodos antigos, devido a complexibilidade das equações utilizadas. Deste modo, o engenheiro e matemático Boris Grigorievich Galerkin aprimorou as técnicas antigas e criou o denominado método de Galerkin, usualmente conhecido como método dos elementos finitos ([LIZARZA, 2000](#)).

Por consequência, esse método consiste em uma forma de discretizar as estruturas físicas, utilizando uma sequência de passos definida, obtendo com uma maior facilidade os resultados das equações diferenciais. As expressões são obtidas em forma de integrais, geradas pela discretização da função e utilizando os princípios variacionais ([ALVES, 2007](#)).

3.1.1 Procedimento do Método

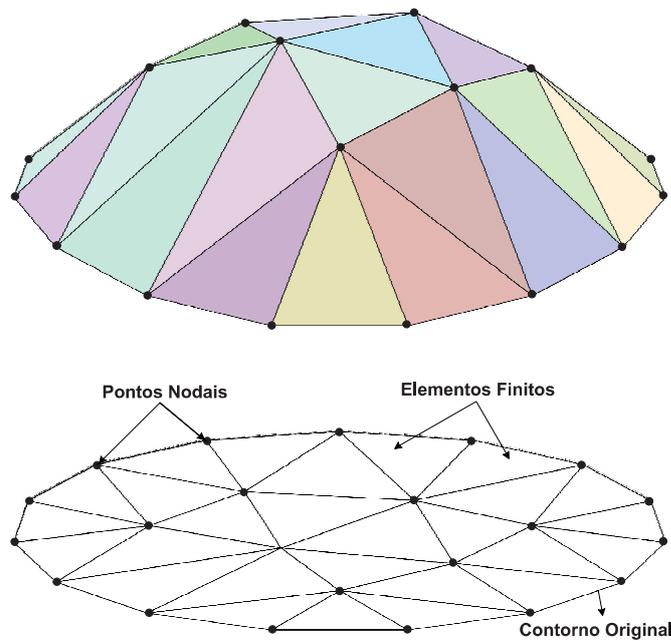
De uma forma geral, o MEF envolve dividir em componentes menores o problema, por meio do processo de discretizar. Ele faz a situação real de um espaço discreto, onde o limite infinitesimal tende ao contínuo. A visualização computacional segue de modo a fazer a implementação dos cálculos via este método, permitindo uma análise visual do comportamento através dos cálculos numéricos ([RIBEIRO, 2004](#)), ([LOTTI et al., 2006](#)).

O conceito básico do método consiste em subdividir, primeiramente, o domínio do problema em subdomínios, parcelas de dimensões finitas, de forma que o conjunto total dessas dimensões seja igual ao original. Seguidamente, adota-se um comportamento aproximado para cada subdomínio de forma isolada, local, com o destino às incógnitas do problema. Via de regra, esse comportamento é considerado meramente simples. O perfil principal deste procedimento consiste então em utilizar a aproximação local no subdomínio (parcela do domínio original).

Para a obtenção de respostas melhores, aumenta-se o número de subdomínios, conservando o mesmo comportamento local. Esses subdomínios são caracterizados por

serem elementos finitos e definidos por ter em sua forma geométrica dada em função da aproximação adotada e pelos tipos de problemas a serem resolvidos. Qualquer elemento determinado gera pontos nodais, ou nós, que fazem conexão com os elementos vizinhos (FERNANDES; SILVA; DIACENCO, 2015).

Figura 5 – Pontos nodais gerais e subdomínios de nós, tridimensional e bidimensional.



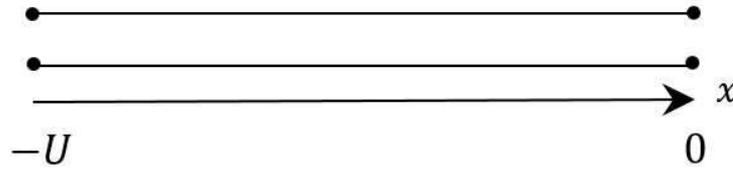
Fonte:(SOUZA, 2003), adaptada pelo autor.

Para os nós comuns a diferentes elementos, o valor da variável do problema permanece o mesmo, indiferente do elemento que está sendo considerado. Com base neste conceito, faz-se a analogia da malha dos elementos finitos. A escolha da malha fica a critério do programador, pode ser linear, triangular, quadrática, dentre outros tipos, e as matrizes características correspondentes a cada elemento podem ser agrupadas de forma a se tornarem um sistema global de equações (SZABO; BABUŠKA, 1991).

3.1.2 Elementos Finitos Unidimensional

A base da definição matemática e o desenvolvimento do método de Galerkin vão ser aplicados considerando uma linha de transmissão de comprimento que varia de $-U < x < 0$. A Figura 6 demonstra essa linha de transmissão em seu formato.

Figura 6 – Modelo de uma linha de transmissão em formato unidimensional.



Fonte: Autoral.

Seja um problema unidimensional, tem-se a equação diferencial

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} - \gamma^2 V = 0, \quad (3.1)$$

em que a condição de contorno é aplicada. Leva-se em consideração o problema de Dirichlet em sua forma homogênea, assumem-se valores de intervalo $[-U, 0]$, pertencente ao conjunto dos números reais, limitado e contínuo. O operador linear é representado por $\mathfrak{S}V = g$, de modo que é $g = 0$, assim

$$\mathfrak{S} = \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \gamma^2 \right\}. \quad (3.2)$$

Analogamente, pode-se escrever que

$$V(x) = \sum_{n=1}^N \varphi_n \omega_m(x) \quad (3.3)$$

considerando que seja uma expressão para $V(x)$ e que utilize os parâmetros vistos acima, variante ao longo do intervalo $[1, n]$, com um erro admissível ϵ , descrito pela equação (3.4).

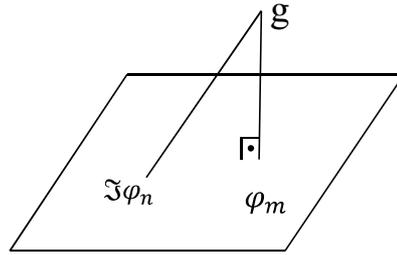
$$\epsilon = \mathfrak{S}V - g = \mathfrak{S} \left\{ \sum_{n=1}^N \varphi_n \omega_m(x) \right\} - g, \quad (3.4)$$

Considerando a teoria de Galerkin em que $\omega_m = \varphi_m$, pode-se descrever a equação (3.4) na forma

$$\epsilon = \sum_{n=1}^N \mathfrak{S} \varphi_n \varphi_m(x) - g \quad (3.5)$$

pois o método assume que as funções sejam iguais. A condição deste envolve que $\overline{\mathbf{A}}\mathbf{v} = \mathbf{g}$ se $A_{m,n} = \langle L \varphi_n, \omega_m \rangle$ exerce a definição de produto interno, dito pela Figura 7, levando a um sistema de equações lineares.

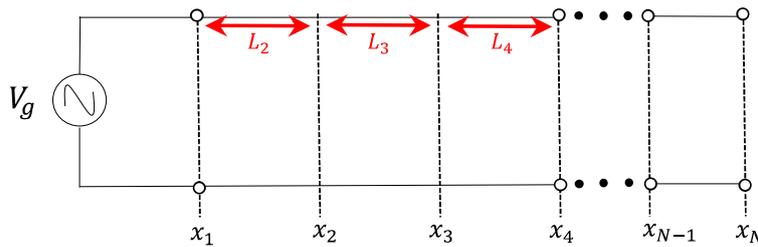
Figura 7 – Definição de produto interno para o método de Galerkin.



Fonte: Autoral.

Admitindo que este método possa ser discretizado em n partes, pode-se supor um número mínimo de 4 nós a fim de mostrar todos os casos possíveis aplicáveis. A Figura 8 mostra uma linha de transmissão discretizada, considerando o intervalo de $[1, N]$ nós que variam de $[-U, 0]$ ao longo do eixo x , de modo que L_2 é a distância entre x_1 e x_2 , L_3 entre x_2 e x_3 e L_4 entre x_3 e x_4 , assim sucessivamente.

Figura 8 – Análise da linha de transmissão discretizada pelo método dos elementos finitos.



Fonte: Autoral.

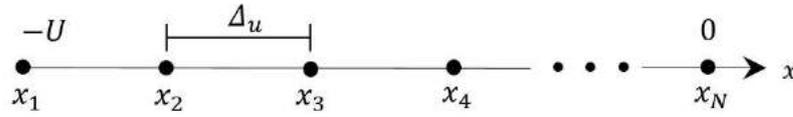
Como dito anteriormente, o método dos elementos finitos trabalha com a discretização de um plano ou superfície independentemente da quantidade de dimensões nela contida. A fim de mostrar como acontece essa discretização, opta-se por discretizar o problema em 4 nós correspondentes, analisando uma forma genérica para essa discretização.

$$A_{m,n} = \int_{-U}^0 \left\{ \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial x^2} - \gamma^2 \varphi_n \right\} \varphi_m dx \quad (3.6)$$

A equação (3.6) é representada através do somatório de integrais, de modo que a variação aconteça por $j = 2, 3 \dots N$, onde N é o número de nós utilizados, de acordo com

$$A_{m,n} = \sum_{j=2}^N \left\{ \int_{x_{j-1}}^{x_j} \frac{\partial^2 \varphi_n}{\partial x^2} \varphi_m dx - \gamma^2 \int_{x_{j-1}}^{x_j} \varphi_n \varphi_m dx \right\}. \quad (3.7)$$

Tem-se, então, as equações (3.8) e (3.9), mostrando as condições genéricas para φ_n e φ_m , uma vez que $-U$ corresponde ao maior comprimento da linha ao longo de x e Δ_u a uma parcela da linha, demonstrado na Figura 9.

Figura 9 – Utilização do MEF ao longo de x .

Fonte: Autoral.

$$\varphi_n = \begin{cases} 1 - \left| \frac{x - x_n}{\Delta_u} \right|, & |x - x_n| \leq \Delta_u \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (3.8)$$

$$\varphi_m = \begin{cases} 1 - \left| \frac{x - x_m}{\Delta_u} \right|, & |x - x_m| \leq \Delta_u \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (3.9)$$

As equações (3.8) e (3.9) podem ser representadas de uma forma mais genérica pela equação (3.10), uma vez que $v = n$ ou m .

$$\varphi_v(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{v-1}}{\Delta_u}, & x_{v-1} \leq x \leq x_v \\ \frac{x_{v+1} - x}{\Delta_u}, & x_v \leq x \leq x_{v+1} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (3.10)$$

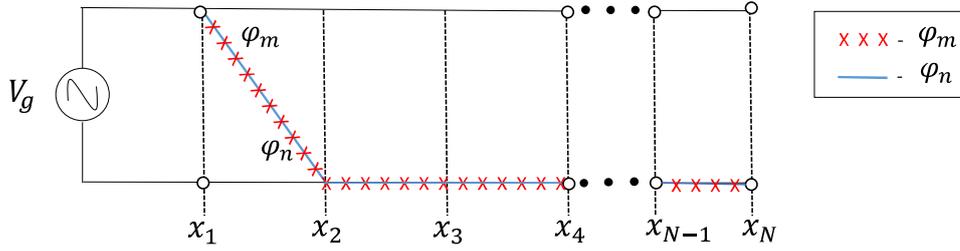
A matriz $\overline{\overline{A}}$ representa a discretização de cada ponto até a quantidade máxima de nós utilizados. Para a menor forma genérica, utiliza-se $N = 4$, que resulta em uma matriz de quatro linhas por quatro colunas.

$$\overline{\overline{A}} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

em que $M = N$ para a formulação de Galerkin, onde N é o número de linhas e M é o de colunas.

3.1.2.1 Análise de cada Elemento da Matriz

Para o primeiro elemento da matriz, tem-se que $m = 1$ e $n = 1$, assim, $\varphi_n = \varphi_m$, correspondente ao parâmetro A_{11} . A Figura 10 demonstra o comportamento deste caso.

Figura 10 – Elemento da linha 1 e coluna 1, A_{11} .

Fonte: Autoral.

Pode-se verificar a existência do integrando apenas no intervalo pertencente entre $[x_1, x_2]$. As equações que descrevem esse processo serão equacionadas abaixo, utilizando a equação (3.7), uma vez que esta é a forma básica genérica para todos os elementos.

$$A_{11} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} \varphi_1 dx - \gamma^2 \int_{x_1}^{x_2} \varphi_1 \varphi_1 dx. \quad (3.12)$$

Dando sequência aos passos do método, analisam-se as equações (3.8) e (3.9). Se a função for decrescente, referente ao caso em questão, pode-se descrever que a função modular cresce, uma vez que seu sinal fica positivo. Assim,

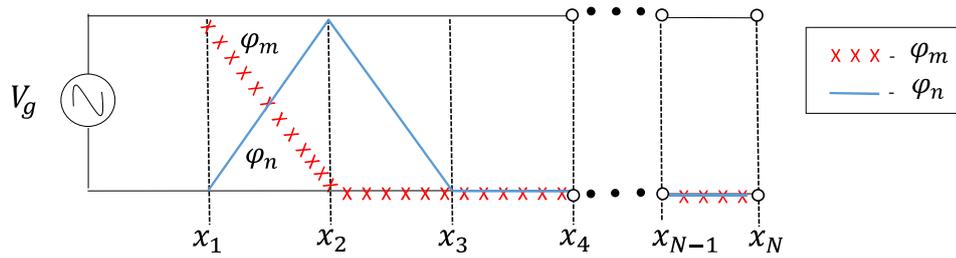
$$A_{11} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[1 - \left| \frac{x - x_1}{\Delta_u} \right| \right] \left[1 - \left| \frac{x - x_1}{\Delta_u} \right| \right] dx - \gamma^2 \int_{x_1}^{x_2} \left[1 - \left| \frac{x - x_1}{\Delta_u} \right| \right]^2 dx. \quad (3.13)$$

Com a substituição das equações citadas acima referente ao caso 1, chega-se à equação (3.14). A equação (3.13) foi resolvida pelo método da substituição, com $x_1 = -U$ e $x_2 = -U + \Delta_u$.

$$A_{11} = -\frac{1}{\Delta_u} + \frac{\gamma^2}{3\Delta_u} \left\{ (\Delta_u + x_1 - x_2)^3 - \Delta_u^3 \right\} = -\left[\frac{1}{\Delta_u} + \frac{\gamma^2 \Delta_u}{3} \right] \quad (3.14)$$

Considerando-se $n = 2$ e $m = 1$ (caso 2), em que $\varphi_n \neq \varphi_m$, sendo o elemento A_{12} , descreve-se os parâmetros pertencente a equação (3.15). A análise do processo ocorre com base na Figura (11).

$$A_{12} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} \varphi_1 dx - \gamma^2 \int_{x_1}^{x_2} \varphi_2 \varphi_1 dx = \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \left[1 - \left| \frac{x - x_2}{\Delta_u} \right| \right] \left[1 - \left| \frac{x - x_1}{\Delta_u} \right| \right] - \gamma^2 \left[1 - \left| \frac{x - x_2}{\Delta_u} \right| \right] \left[1 - \left| \frac{x - x_1}{\Delta_u} \right| \right] \right\} dx \quad (3.15)$$

Figura 11 – Elemento da linha 1 e coluna 2, A_{12} .

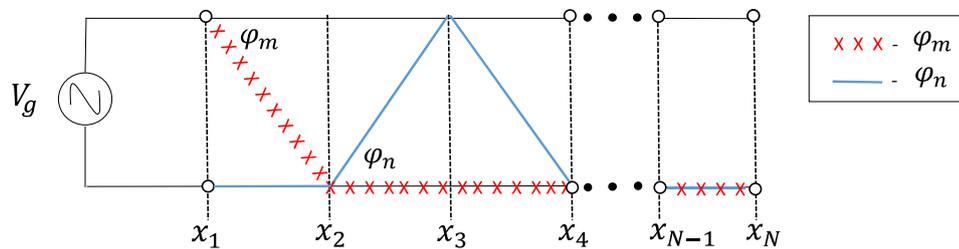
Fonte: Autoral.

A equação (3.15) é aplicável aos parâmetros das equações que pertencem a φ_n e φ_m , uma vez que simplificada e equacionada por partes retorna a equação (3.16), considerando os mesmos parâmetros para x_1 e x_2 e o intervalo onde as retas se cruzam, mostrado na Figura 11.

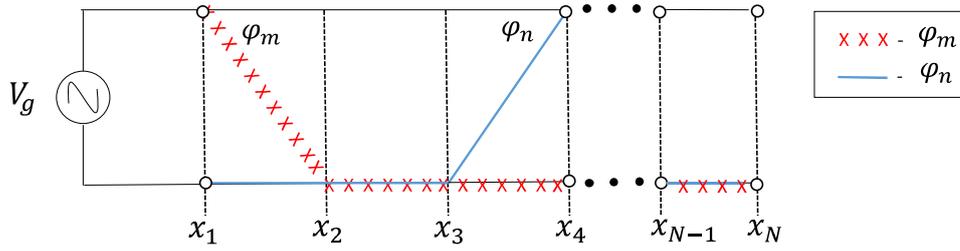
$$A_{12} = \left[\frac{1}{\Delta_u} - \frac{\gamma^2 \Delta_u}{6} \right] \quad (3.16)$$

Ao continuar analisando os próximos termos da linha 1, uma vez que $\varphi_n \neq \varphi_m$ e que suas retas não interceptam, o resultado será zero, comprovando o método de Galerkin, que determina que na ocorrência da não interceptação das retas, os elementos serão zero. As Figuras (12) e 13 mostram esse comportamento e a equação 3.17 deixa genérica essa ação:

$$A_{13} = A_{14} = 0 \quad (3.17)$$

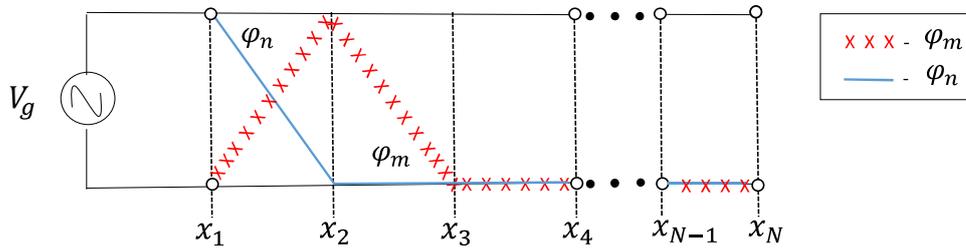
Figura 12 – Elemento da linha 1 e coluna 3, A_{13} .

Fonte: Autoral.

Figura 13 – Elemento da linha 1 e coluna 4, A_{14} .

Fonte: Autoral.

A análise da linha dois é análoga ao processo da linha um, de modo que o elemento $A_{21} = A_{12}$. Para comprovar este processo destaca-se a Figura 14 e as equações (3.18) e (3.19) que comprovam esse comportamento. Leva-se em consideração que neste caso as retas que se interceptam pertencem ao intervalo $[x_1, x_2]$ e que os parâmetros são os mesmos citados acima.

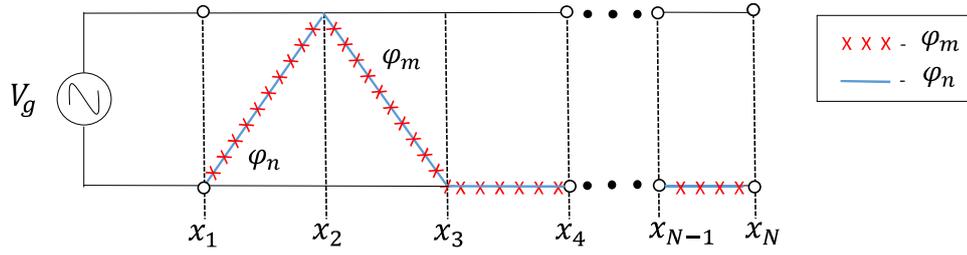
Figura 14 – Elemento da linha 2 e coluna 1, A_{21} .

Fonte: Autoral.

$$A_{21} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} \varphi_2 dx - \gamma^2 \int_{x_1}^{x_2} \varphi_1 \varphi_2 dx = \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \left[1 - \left| \frac{x-x_1}{\Delta_u} \right| \right] \left[1 - \left| \frac{x-x_2}{\Delta_u} \right| \right] - \gamma^2 \left[1 - \left| \frac{x-x_1}{\Delta_u} \right| \right] \left[1 - \left| \frac{x-x_2}{\Delta_u} \right| \right] \right\} dx \quad (3.18)$$

$$A_{21} = \left[\frac{1}{\Delta_u} - \frac{\gamma^2 \Delta_u}{6} \right] \quad (3.19)$$

Para o elemento A_{22} acontece o mesmo processo referente ao elemento A_{11} , onde $\varphi_n = \varphi_m$. O comportamento deste é mostrado na Figura 15 e suas equações são deduzidas abaixo, considerando um intervalo que varia entre $[x_1, x_3]$, fazendo com que aconteça a separação das integrais aos seus respectivos intervalos, em que $x_1 = -U$, $x_2 = -U + \Delta_u$ e $x_3 = -U + 2\Delta_u$.

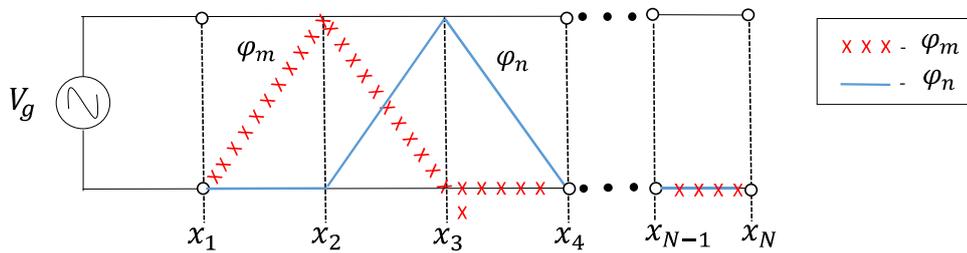
Figura 15 – Elemento da linha 2 e coluna 2, A_{22} .

Fonte: Autoral.

$$A_{22} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} \varphi_2 dx - \gamma^2 \int_{x_1}^{x_2} \varphi_2 \varphi_2 dx + \int_{x_2}^{x_3} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} \varphi_2 dx - \gamma^2 \int_{x_2}^{x_3} \varphi_2 \varphi_2 dx \quad (3.20)$$

$$A_{22} = -\frac{2}{\Delta_u} + \frac{\gamma^2}{3\Delta_u} \left\{ (\Delta_u + x_2 - x_3)^3 - (\Delta_u + x_2 - x_1)^3 \right\} = -\left[\frac{2}{\Delta_u} + \frac{2\gamma^2 \Delta_u}{3} \right] \quad (3.21)$$

O caso A_{23} é análogo ao caso A_{21} . Deste modo pode-se dizer que a sua equação geral é igual a equação vista anteriormente. Este comportamento pode ser comprovado pela Figura 16 e pela dedução da equação (3.22) que resulta na equação (3.16) (para uma malha uniforme), considerando que o intervalo varie entre $[x_2, x_3]$ e que os parâmetros sejam $x_2 = -U + \Delta_u$ e $x_3 = -U + 2\Delta_u$.

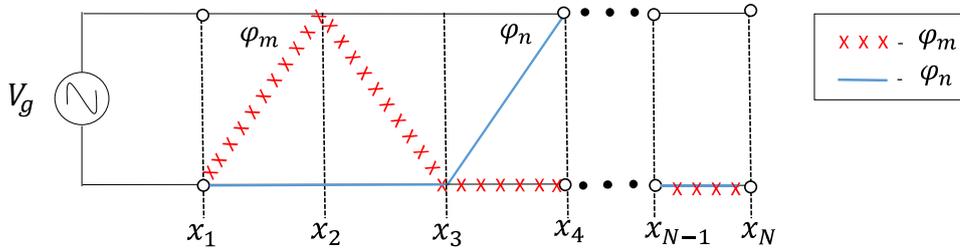
Figura 16 – Elemento da linha 2 e coluna 3, A_{23} .

Fonte: Autoral.

$$A_{23} = \int_{x_2}^{x_3} \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x^2} \varphi_2 dx - \gamma^2 \int_{x_2}^{x_3} \varphi_3 \varphi_2 dx = \int_{x_2}^{x_3} \left\{ \left[1 - \left| \frac{x - x_3}{\Delta_u} \right| \right] \left[1 - \left| \frac{x - x_2}{\Delta_u} \right| \right] - \gamma^2 \left[1 - \left| \frac{x - x_3}{\Delta_u} \right| \right] \left[1 - \left| \frac{x - x_2}{\Delta_u} \right| \right] \right\} dx \quad (3.22)$$

Aos demais elementos da linha que não foram especificados segue a equação (3.17), onde a análise pode ser feita através da Figura 17, comprovando que não acontece a interceptação das retas pertencentes a φ_n e φ_m .

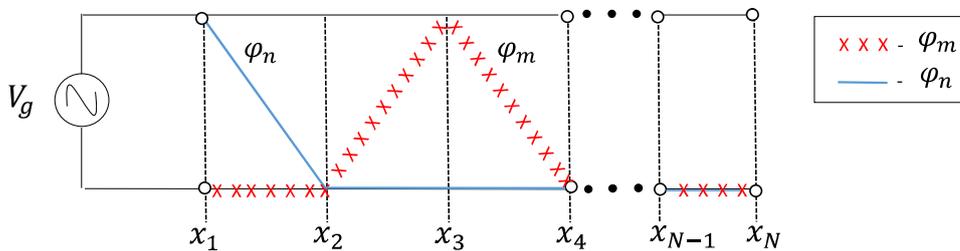
Figura 17 – Elemento da linha 2 e coluna 4, A_{24} .



Fonte: Autoral.

Considerando agora o caso 3, tem-se as mesmas condições citadas acima. Para o elemento A_{31} segue o processo de que as retas φ_n e φ_m não se interceptam, de modo que seu resultado seja análogo a equação (3.17), comprovado através da Figura 18.

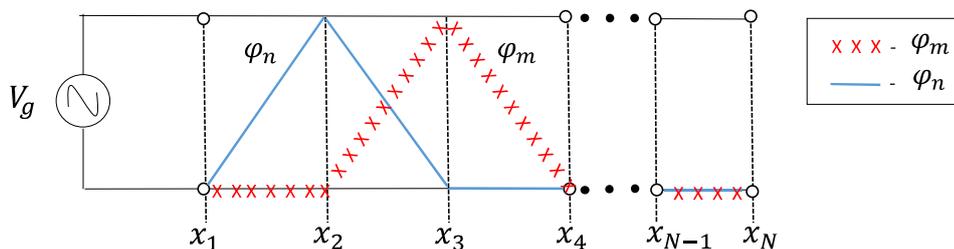
Figura 18 – Elemento da linha 3 e coluna 1, A_{31} .



Fonte: Autoral.

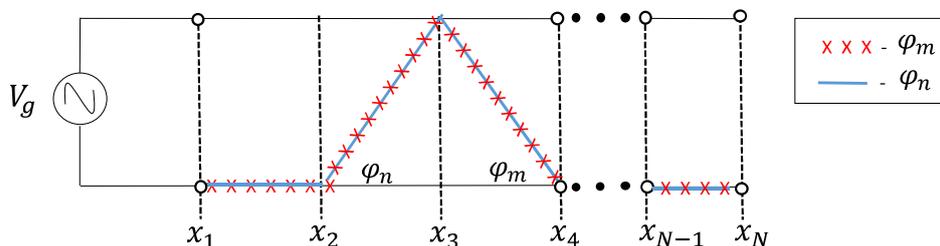
Para o elemento A_{32} segue o mesmo processo de resolução do que o A_{23} . A equação (3.23) demonstra sua forma genérica, onde o resultado é dito pela equação (3.19), mencionado acima. Pode-se perceber esse processo analisando a Figura 19, onde o intervalo é dito entre $[x_2, x_3]$.

$$A_{32} = \int_{x_2}^{x_3} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} \varphi_3 dx - \gamma^2 \int_{x_2}^{x_3} \varphi_2 \varphi_3 dx = \int_{x_2}^{x_3} \left\{ \left[1 - \left| \frac{x - x_2}{\Delta_u} \right| \right] \left[1 - \left| \frac{x - x_3}{\Delta_u} \right| \right] - \gamma^2 \left[1 - \left| \frac{x - x_2}{\Delta_u} \right| \right] \left[1 - \left| \frac{x - x_3}{\Delta_u} \right| \right] \right\} dx \quad (3.23)$$

Figura 19 – Elemento da linha 3 e coluna 2, A_{32} .

Fonte: Autoral.

Ainda sobre o caso 3, descreve-se o elemento A_{33} , uma vez que seu resultado é análogo ao obtido através da integral de A_{22} . Segue a Figura 20 que mostra esse processo e a equação (3.24), que resulta na equação (3.21), considerando que $x_2 = -U + \Delta_u$, $x_3 = -U + 2\Delta_u$ e $x_4 = -U + 3\Delta_u$, de modo que o intervalo seja de $[x_2, x_4]$ e que aconteça a separação das integrais.

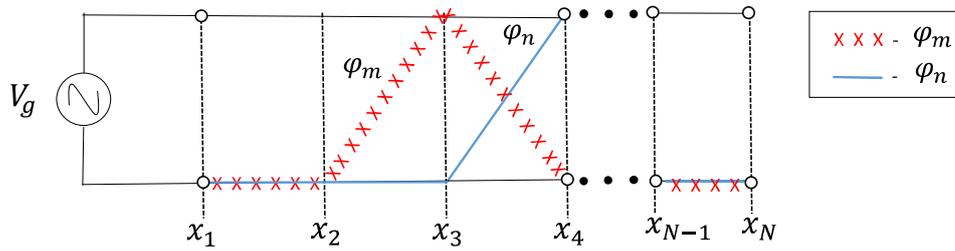
Figura 20 – Elemento da linha 3 e coluna 3, A_{33} .

Fonte: Autoral.

$$A_{33} = \int_{x_2}^{x_3} \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x^2} \varphi_3 dx - \gamma^2 \int_{x_2}^{x_3} \varphi_3 \varphi_3 dx + \int_{x_3}^{x_4} \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x^2} \varphi_3 dx - \gamma^2 \int_{x_3}^{x_4} \varphi_3 \varphi_3 dx \quad (3.24)$$

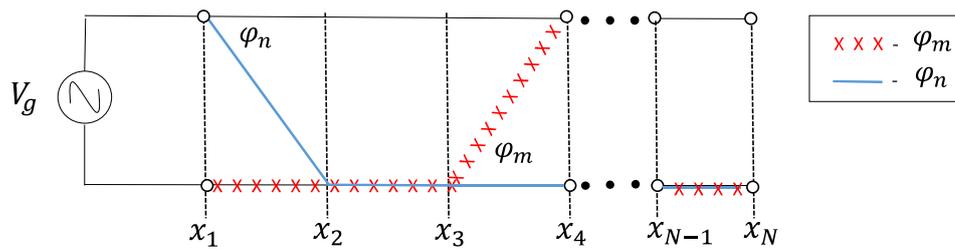
No elemento A_{34} é visto a analogia entre os elementos A_{12} e A_{23} , por exemplo. Deste modo a equação (3.25) mostra como acontece esse comportamento e sua resposta é representada pela equação (3.16). A Figura 21 demonstra como funciona esse elemento, considerando o intervalo pertencente a $[x_3, x_4]$.

$$A_{34} = \int_{x_3}^{x_4} \frac{\partial^2 \varphi_4}{\partial x^2} \varphi_3 dx - \gamma^2 \int_{x_3}^{x_4} \varphi_4 \varphi_3 dx = \int_{x_3}^{x_4} \left\{ \left[1 - \left| \frac{x - x_4}{\Delta_u} \right| \right] \left[1 - \left| \frac{x - x_3}{\Delta_u} \right| \right] - \gamma^2 \left[1 - \left| \frac{x - x_4}{\Delta_u} \right| \right] \left[1 - \left| \frac{x - x_3}{\Delta_u} \right| \right] \right\} dx \quad (3.25)$$

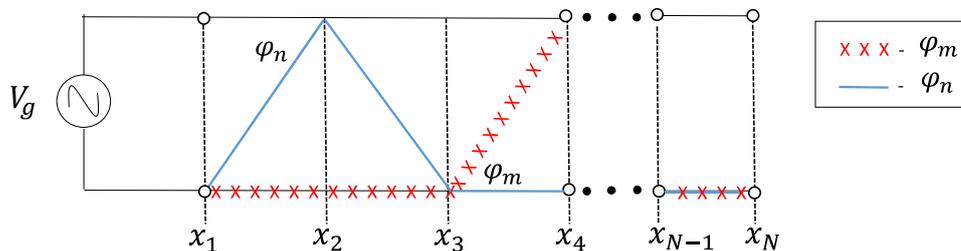
Figura 21 – Elemento da linha 3 e coluna 4, A_{34} .

Fonte: Autoral.

Referente ao caso 4, os elementos A_{41} e A_{42} seguem o mesmo caso do elemento A_{13} . As Figuras 22 e 23 mostram o comportamento análogo, em que as retas não se interceptam.

Figura 22 – Elemento da linha 4 e coluna 1, A_{41} .

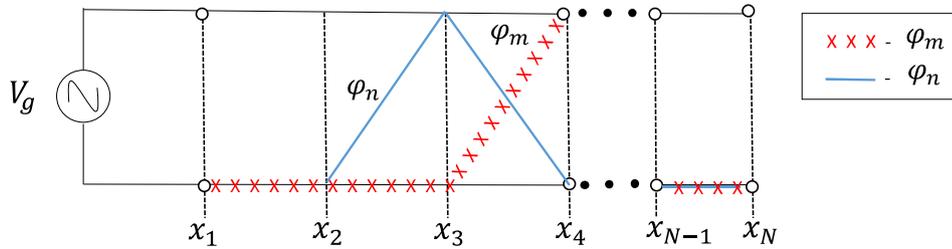
Fonte: Autoral.

Figura 23 – Elemento da linha 4 e coluna 2, A_{42} .

Fonte: Autoral.

Já para o elemento A_{43} o processo é semelhante ao elemento A_{34} , uma vez que a resposta acontece através da equação (3.16) e a equação base é descrita como 3.26. Os limites de integração podem ser comprovados na Figura 24, que variam entre $[x_3, x_4]$.

Figura 24 – Elemento da linha 4 e coluna 3, A_{43} .

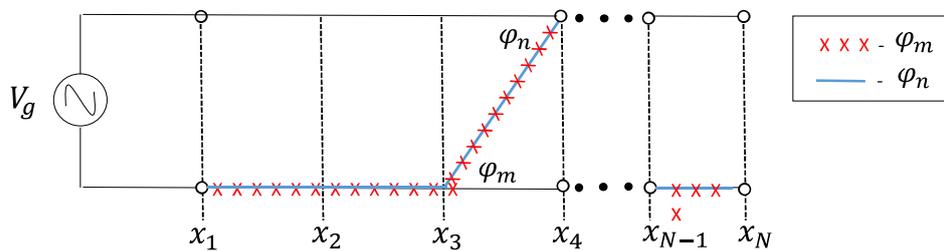


Fonte: Autoral.

$$A_{43} = \int_{x_3}^{x_4} \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x^2} \varphi_4 dx - \gamma^2 \int_{x_3}^{x_4} \varphi_3 \varphi_4 dx = \int_{x_3}^{x_4} \left\{ \left[1 - \left| \frac{x - x_3}{\Delta_u} \right| \right] \left[1 - \left| \frac{x - x_4}{\Delta_u} \right| \right] - \gamma^2 \left[1 - \left| \frac{x - x_3}{\Delta_u} \right| \right] \left[1 - \left| \frac{x - x_4}{\Delta_u} \right| \right] \right\} dx \quad (3.26)$$

Por fim, é feita análise ao elemento A_{44} e comprovado que seu comportamento é semelhante ao primeiro termo da matriz, A_{11} , onde o resultado é o mesmo da equação (3.14). A Figura 25 e a equação (3.27) comprova essa análise, considerando um intervalo pertencente à $[x_3, x_4]$.

Figura 25 – Elemento da linha 4 e coluna 4, A_{44} .



Fonte: Autoral.

$$A_{44} = \int_{x_3}^{x_4} \frac{\partial^2 \varphi_4}{\partial x^2} \varphi_4 dx - \gamma^2 \int_{x_3}^{x_4} \varphi_4 \varphi_4 dx = \int_{x_3}^{x_4} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[1 - \left| \frac{x - x_4}{\Delta_u} \right| \right] \left[1 - \left| \frac{x - x_4}{\Delta_u} \right| \right] dx - \gamma^2 \int_{x_3}^{x_4} \left[1 - \left| \frac{x - x_4}{\Delta_u} \right| \right]^2 dx \quad (3.27)$$

3.1.2.2 Análise do Resultado da Matriz

A fim de compreender melhor o método de Galerkin, pode-se descrever quatro casos básicos descritos abaixo, de modo que m é o elemento pertencente a linha e n o elemento pertencente a coluna, sendo $h = 1$ ou N .

Caso 1: $m = n = h$;

$$A_{m,n} = - \left[\frac{1}{\Delta_u} + \frac{\gamma^2 \Delta_u}{3} \right] \quad (3.28)$$

Caso 2: $m = n \neq h$;

$$A_{m,n} = - \left[\frac{2}{\Delta_u} + \frac{2\gamma^2 \Delta_u}{3} \right] \quad (3.29)$$

Caso 3: $|m - n| = 1$

$$A_{m,n} = \left[\frac{1}{\Delta_u} - \frac{\gamma^2 \Delta_u}{6} \right] \quad (3.30)$$

Caso 4: $|m - n| > 1$

$$A_{m,n} = 0 \quad (3.31)$$

Em meio aos casos citados acima, percebe-se que o método dos elementos finitos possui uma generalidade para qualquer tipo de discretização. Abaixo segue uma tabela que representa a matriz considerando $N = 4$, caso mínimo para demonstrar o comportamento do método, já que os que possuem os mesmos casos têm resultado iguais, caracterizando assim uma generalidade e comprovando a aplicação de cada caso visto acima.

Tabela 1 – Resultado utilizando cada caso para uma matriz 4x4.

| | Coluna 1 | Coluna 2 | Coluna 3 | Coluna 4 |
|---------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| Linha 1 | $Caso1 A_{11}$ | $Caso3 A_{12}$ | $Caso4 A_{13}$ | $Caso4 A_{14}$ |
| Linha 2 | $Caso3 A_{21}$ | $Caso2 A_{22}$ | $Caso3 A_{23}$ | $Caso4 A_{24}$ |
| Linha 3 | $Caso4 A_{31}$ | $Caso3 A_{32}$ | $Caso2 A_{33}$ | $Caso3 A_{34}$ |
| Linha 4 | $Caso4 A_{41}$ | $Caso4 A_{42}$ | $Caso3 A_{43}$ | $Caso1 A_{44}$ |

Fonte: Autoral.

3.1.2.3 Aplicação da Condição de Contorno na Matriz

Analisando o sistema de equações vistas anteriormente e aplicando a condição de contorno, de modo que a matriz seja de dimensões conhecidas, adquire-se o sistema de

equações referente a equação (3.32), considerando que $n = 1, \dots, N$.

$$\sum_{n=1}^N A_{m,n} \varphi_n = 0 \quad (3.32)$$

Para melhor observar essa aplicação de contorno, varia-se o valor de m até a quantidade de nós desejado. Para este caso, considera-se $N = 4$ nós, aplicabilidade da condição de contorno apenas no início da LT e uma terminação em aberto.

Para $m = 1$:

$$A_{11}\varphi_1 + A_{12}\varphi_2 + A_{13}\varphi_3 + A_{14}\varphi_4 = 0 \quad (3.33)$$

Analisando essa equação, aplicando que $\varphi_1 = V_g$ (condição de contorno) e considerando a equação (3.31), referente ao caso 4, vista pelo teorema de Galerkin, define-se a equação (3.34), caracterizada pela aplicação de contorno no início da linha de transmissão.

$$A_{11}V_g + A_{12}\varphi_2 = 0 \quad (3.34)$$

Para $m = 2$:

$$A_{21}\varphi_1 + A_{22}\varphi_2 + A_{23}\varphi_3 + A_{24}\varphi_4 = 0 \quad (3.35)$$

Análogo ao processo para $m = 1$, tem-se a utilização da equação (3.31), definindo que o último elemento da equação (3.35) é igual a zero. Segue abaixo a expressão matemática simplificada após tal analogia utilizando a condição de contorno em que $\varphi_1 = V_g$.

$$A_{21}V_g + A_{22}\varphi_2 + A_{23}\varphi_3 = 0 \quad (3.36)$$

Para $m = 3$:

$$A_{31}\varphi_1 + A_{32}\varphi_2 + A_{33}\varphi_3 + A_{34}\varphi_4 = 0 \quad (3.37)$$

Seguindo a mesma linha de raciocínio, considerando a equação (3.31), obtém-se a equação (3.38), caso relacionado da linha 3.

$$A_{32}\varphi_2 + A_{33}\varphi_3 + A_{34}\varphi_4 = 0 \quad (3.38)$$

Para $m = 4$:

$$A_{41}\varphi_1 + A_{42}\varphi_2 + A_{43}\varphi_3 + A_{44}\varphi_4 = 0 \quad (3.39)$$

Reescrevendo a expressão da linha 4 aplicada na equação (3.31), tem-se a equação (3.40).

$$A_{43}\varphi_3 + A_{44}\varphi_4 = 0 \quad (3.40)$$

A partir disso, define-se um sistema resultante, considerando a não aplicação da condição de contorno no final da linha de transmissão e supondo que $\varphi_1 = V_g$, assim

$$\bar{A}_x \boldsymbol{\varphi} = \mathbf{F} \quad (3.41)$$

sendo \bar{A}_x uma matriz de dimensões 3×3 , $\boldsymbol{\varphi}$ e \mathbf{F} vetores de dimensões 3×1 , descritos como

$$\bar{A}_x = \begin{bmatrix} A_{22} & A_{23} & 0 \\ A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ 0 & A_{43} & A_{44} \end{bmatrix}, \quad (3.42)$$

$$\boldsymbol{\varphi} = \begin{bmatrix} \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

e

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} -A_{21}V_g \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (3.44)$$

A utilização da condição de contorno aplicada é caracterizada pela diminuição da ordem da matriz, se o contorno for aplicado em apenas um nó da linha, como o caso em questão, a matriz diminui uma dimensão, demonstrando na equação 3.45, onde a matriz original (sem contorno) era de ordem 4×4 .

$$\begin{bmatrix} A_{22} & A_{23} & 0 \\ A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ 0 & A_{43} & A_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A_{21}V_g \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

A fim de isolar o vetor $\boldsymbol{\varphi}$, utiliza-se a divisão de matrizes, obtendo

$$\begin{bmatrix} \varphi_2 \\ \varphi_3 \\ \varphi_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{22} & A_{23} & 0 \\ A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ 0 & A_{43} & A_{44} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -A_{21}V_g \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

permitindo determinar os potenciais nos pontos x_2 , x_3 e x_4 da linha.

4 Ferramenta Computacional

4.1 Incidência e Reflexão de Ondas

Como visto nas sessões anteriores, a tensão e a corrente são resultados obtidos da sobreposição de duas ondas (incidente e refletida) em sentidos opostos.

De forma que (4.1) tem-se que a componente incidente é representada por

$$V^i(x) = \frac{V_g e^{-\gamma x}}{(e^{\gamma U} + e^{-\gamma U})} \quad (4.1)$$

enquanto que

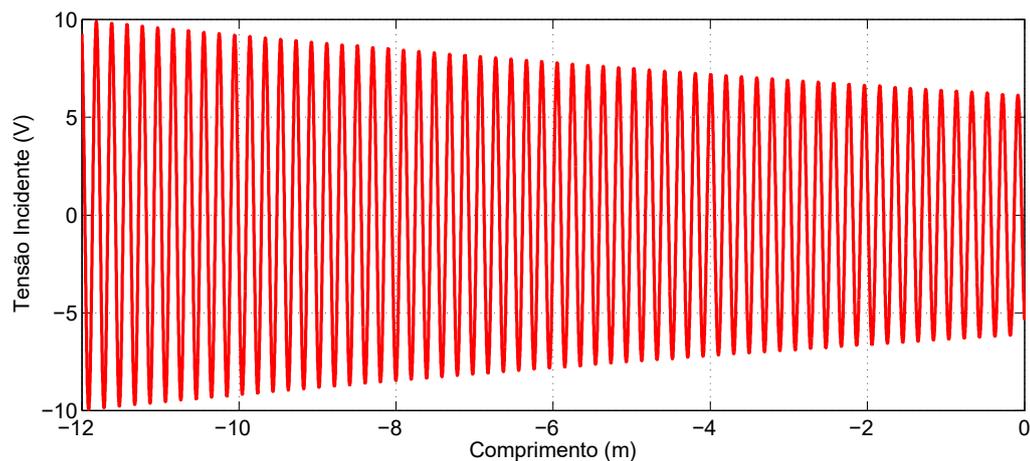
$$V^r(x) = \frac{V_g e^{\gamma x}}{(e^{\gamma U} + e^{-\gamma U})} \quad (4.2)$$

é a refletida.

As equações (4.1) e (4.2) representam duas ondas progressivas que se deslocam ao longo da linha, uma vez que a condição de contorno inicial é $V_g = 10V$.

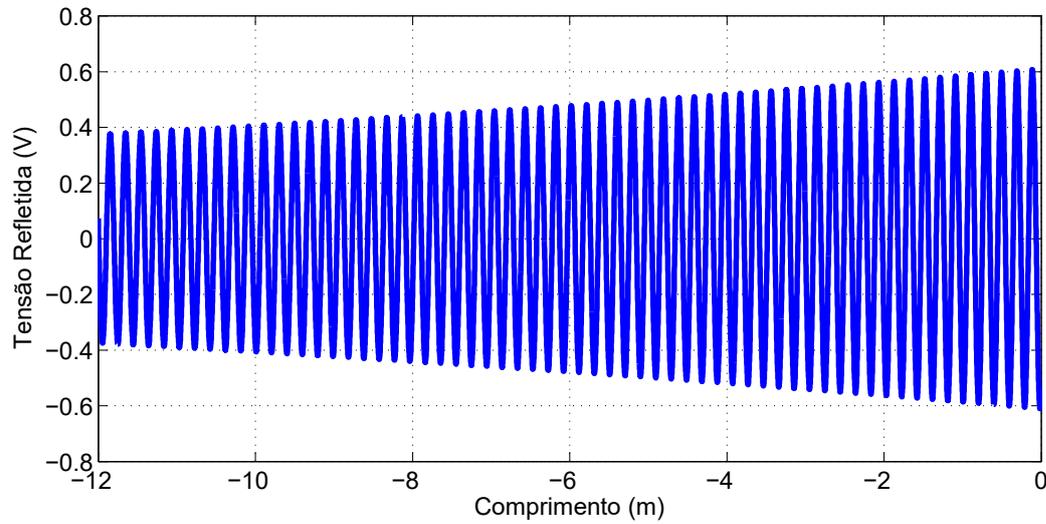
Nas Figuras 26 e 27 são ilustrados os comportamentos da onda incidente e refletida em um cabo coaxial RG58, com frequência de 1 GHz, comprimento de 12 metros e terminação em aberto.

Figura 26 – Onda incidente no cabo coaxial RG58.



Fonte: Autoral.

Figura 27 – Onda refletida no cabo coaxial RG58.



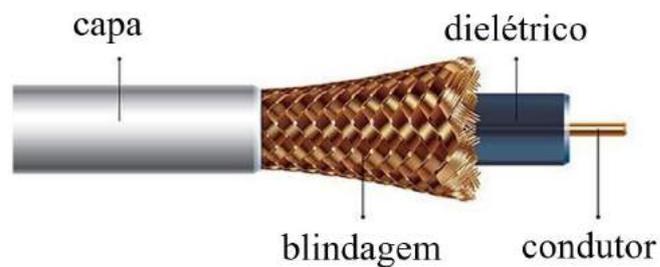
Fonte: Autoral.

4.2 Resultados Analíticos e Numéricos

4.2.1 Dados dos Cabos Coaxiais

Considerando cabos coaxiais, com características físicas apresentadas na tabela 2 e Figura 28, seguem as tabelas referente aos resultados obtidos no software *Matlab*®, dos cabos RG213, RGC58 e RG58, respectivamente, para frequências de 500 MHz (Tabela 3) e 1 GHz (Tabela 4), sendo $U = 1$ metro.

Figura 28 – Modelo de um cabo coaxial real.



Fonte: Adaptada da Internet.

Tabela 2 – Especificações dos cabos coaxial

| | Dimensões [mm] | | Condutor [S/m] | | Dielétrico | | |
|--------------|----------------|------|----------------|---------------------|-------------|-----------------|-------------------|
| | a | b | Material | σ | Material | ε_r | $\text{tg}\delta$ |
| Cabo Coaxial | | | | | | | |
| RG58 | 0,96 | 3,50 | Cobre | $5,813 \times 10^7$ | Polietileno | 2,35 | 0,0004 |
| RG213 | 2,24 | 8,14 | Cobre | $5,813 \times 10^7$ | Polietileno | 2,35 | 0,0004 |
| RGC58 | 1,05 | 5,20 | Cobre | $5,813 \times 10^7$ | Polietileno | 2,35 | 0,0004 |

Fonte: Autoral.

Tabela 3 – Parâmetros dos cabos coaxial, considerando 500 MHz.

| Cabo Coaxial | Parâmetros | | | |
|--------------|------------------|-------------------------|--------------------------|-------------------------|
| | R [Ω/m] | L [H/m] | C [F/m] | G [S/m] |
| RG58 | 2,4722 | $2,5976 \times 10^{-7}$ | $1,0066 \times 10^{-10}$ | $1,2649 \times 10^{-4}$ |
| RG213 | 1,0559 | $2,5807 \times 10^{-7}$ | $1,0132 \times 10^{-10}$ | $1,2732 \times 10^{-4}$ |
| RGC58 | 2,1233 | $3,1997 \times 10^{-7}$ | $8,1715 \times 10^{-11}$ | $1,0269 \times 10^{-4}$ |

Fonte: Autoral.

Tabela 4 – Parâmetros dos cabos coaxial, considerando 1 GHz.

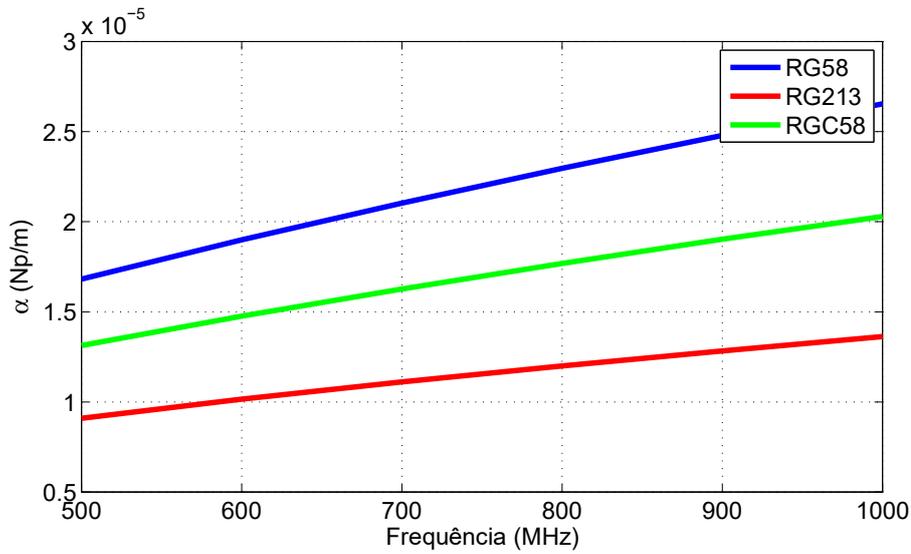
| Cabo Coaxial | Parâmetros | | | |
|--------------|------------------|-------------------------|--------------------------|-------------------------|
| | R [Ω/m] | L [H/m] | C [F/m] | G [S/m] |
| RG58 | 3,4963 | $2,5976 \times 10^{-7}$ | $1,0066 \times 10^{-10}$ | $2,5298 \times 10^{-4}$ |
| RG213 | 1,4933 | $2,5807 \times 10^{-7}$ | $1,0132 \times 10^{-10}$ | $2,5464 \times 10^{-4}$ |
| RGC58 | 3,0027 | $3,1997 \times 10^{-7}$ | $8,1715 \times 10^{-11}$ | $2,0537 \times 10^{-4}$ |

Fonte: Autoral.

4.2.2 Constante de Propagação - Cabos Coaxiais

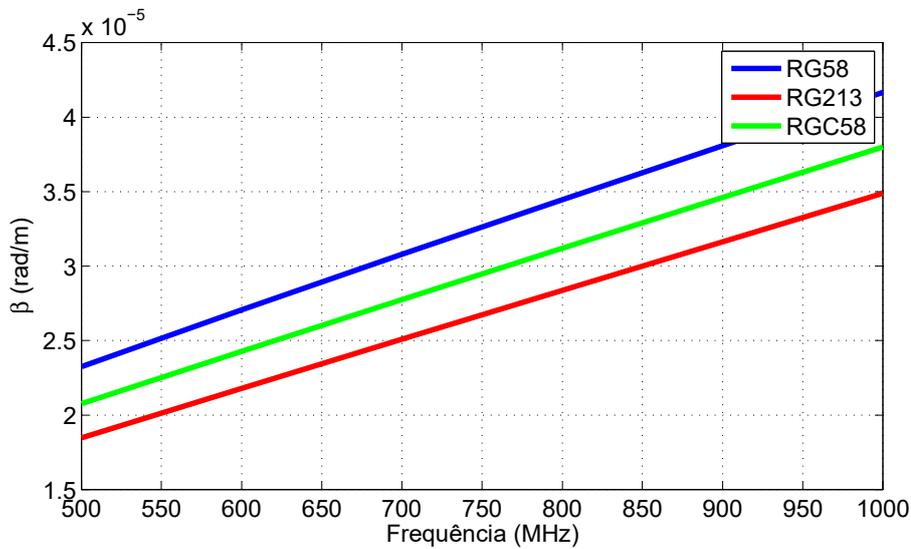
A constante de atenuação é a parte real da constante de propagação. Já a parte imaginária é a constante de fase. As Figuras (29) e (30) mostram o comportamento para os três tipos de cabos coaxiais estudados no documento extraídos do software *Matlab*®.

Figura 29 – Constante de atenuação para os três tipos de cabos coaxiais.



Fonte: Autoral.

Figura 30 – Constante de fase para os três tipos de cabos coaxiais..



Fonte: Autoral.

4.2.3 Análise de Tensão em Cabos Coaxiais

Utilizando o software *Matlab*® as deduções envolvidas nas seções anteriores para a propagação de uma linha de transmissão terminada em circuito aberto, em comparação com o método dos elementos finitos, obtêm-se as Figuras 31, 32 e 33, considerando 500 MHz e Figuras 34, 35 e 36, considerando 1 GHz, para os cabos coaxiais RG213, RGC58 e RG58, respectivamente, considerando um comprimento de $U = 1$ metro e $\Delta_u \simeq 0,00125$ metro. Assim, calcula-se o número de nós e, conseqüentemente, a dimensão N das matrizes, dada

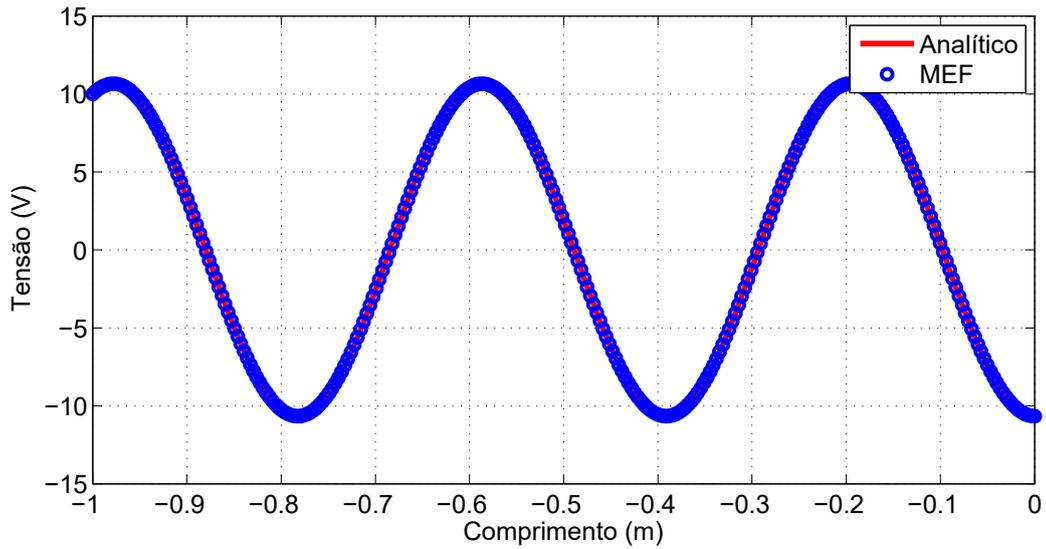
por

$$N = 1 + \Psi \quad (4.3)$$

com

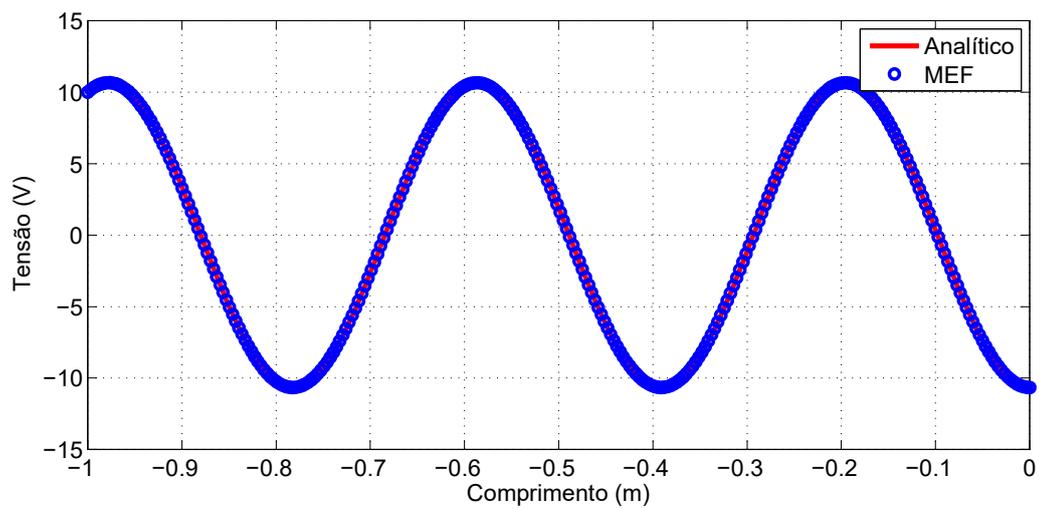
$$\Psi = \frac{U}{\Delta_u}. \quad (4.4)$$

Figura 31 – Parâmetros do cabo coaxial RG213 para $U = 1$ metro, considerando 500 MHz.

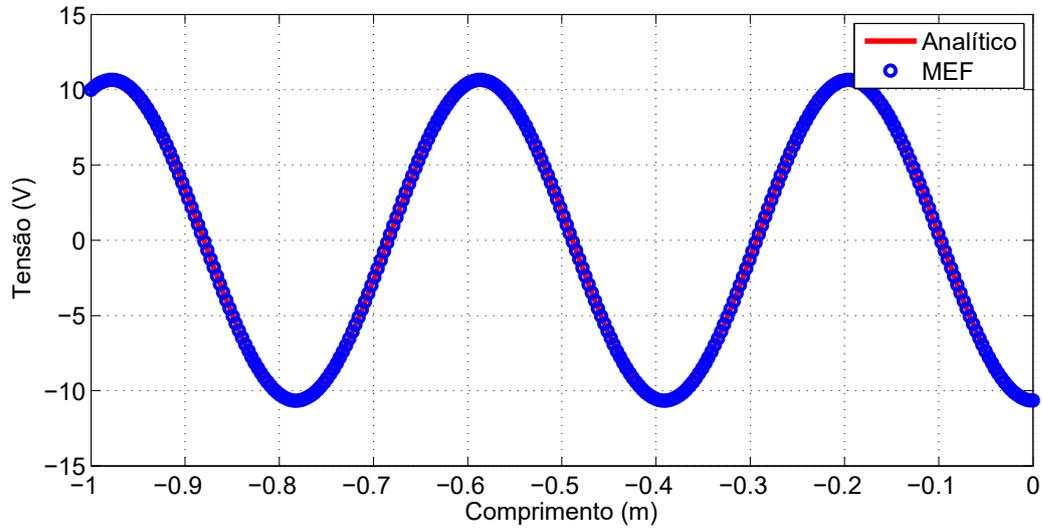


Fonte: Autoral.

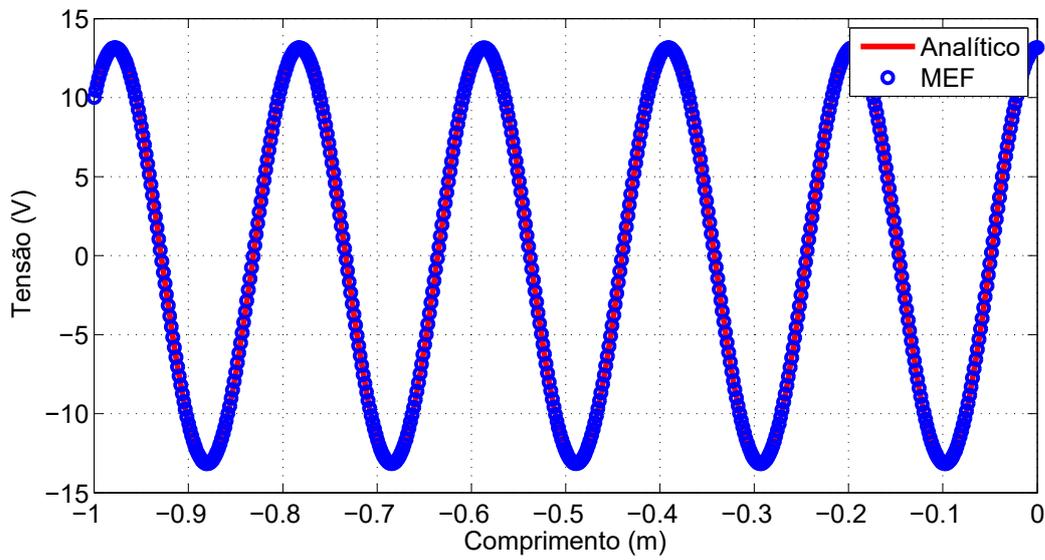
Figura 32 – Parâmetros do cabo coaxial RGC58 para $U = 1$ metro, considerando 500 MHz.



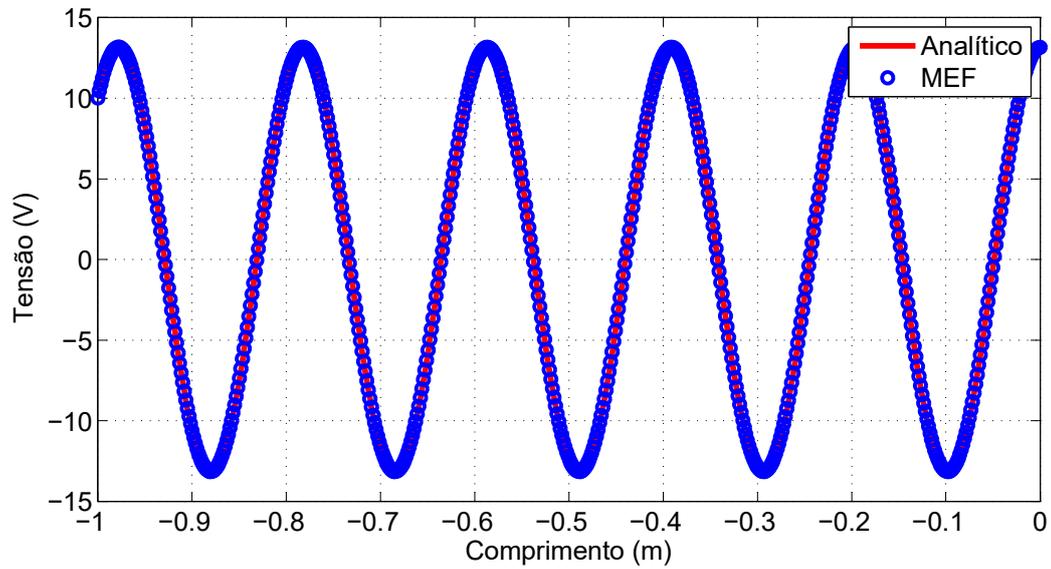
Fonte: Autoral.

Figura 33 – Parâmetros do cabo coaxial RG58 para $U = 1$ metro, considerando 500 MHz.

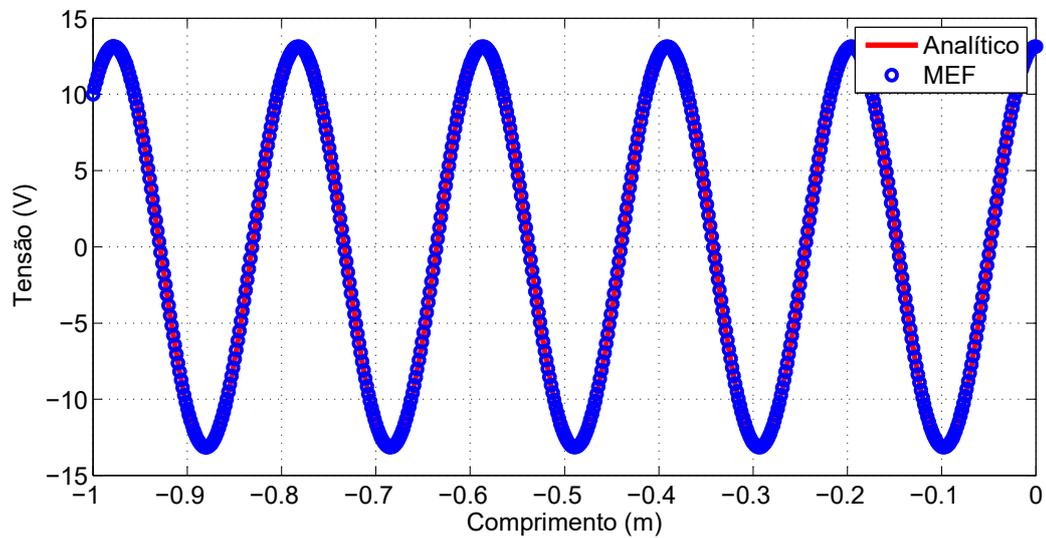
Fonte: Autoral.

Figura 34 – Parâmetros do cabo coaxial RG213 para $U = 1$ metro, considerando 1 GHz.

Fonte: Autoral.

Figura 35 – Parâmetros do cabo coaxial RGC58 para $U = 1$ metro, considerando 1 GHz.

Fonte: Autoral.

Figura 36 – Parâmetros do cabo coaxial RG58 para $U = 1$ metro, considerando 1 GHz.

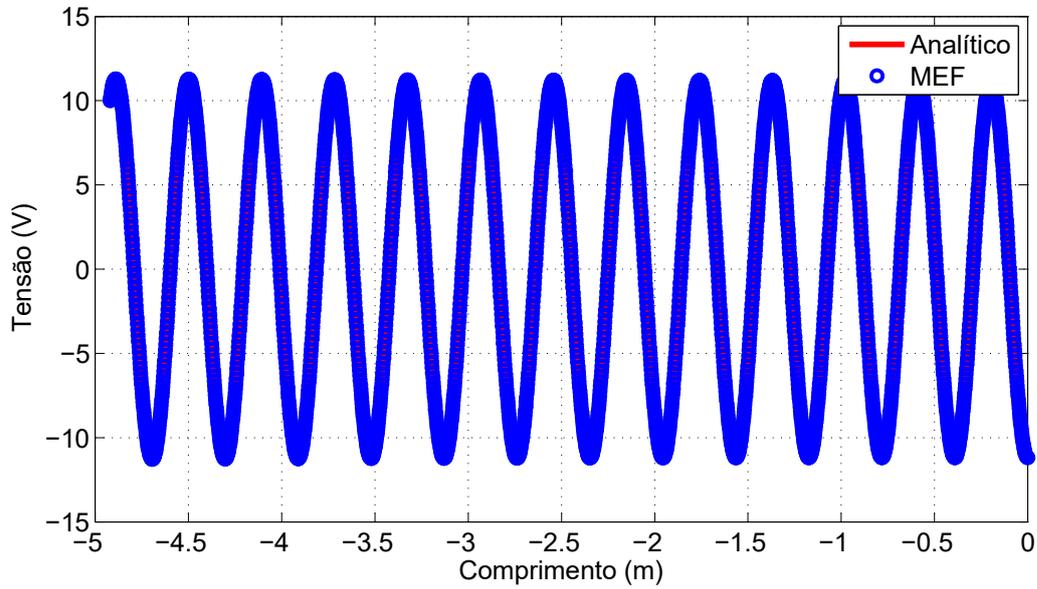
Fonte: Autoral.

4.2.4 Análise da Tensão: Cabo Coaxial RG58

O parâmetro U representa o comprimento do cabo coaxial utilizado, este que pode ser variado de acordo com cada tipo de aplicação. Para o caso em questão foram testados alguns tipos de variações, a fim de mostrar o comportamento da tensão, considerando 5, 10, 15 e 30 metros do cabo RG58, para 500 MHz e 1 GHz.

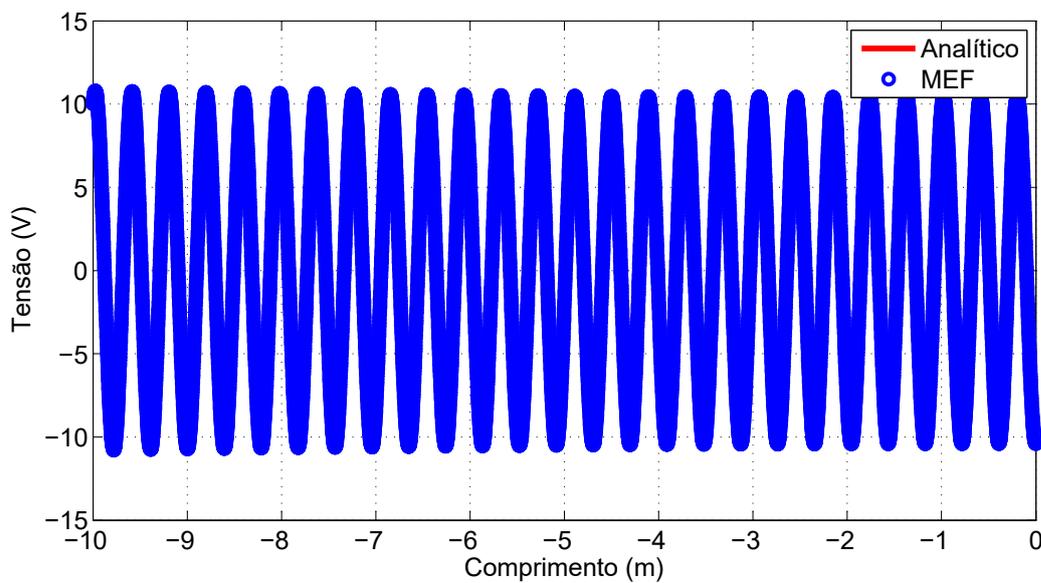
Em comparação com o modelo genérico testado acima, em que $U = 1$ metro, em observação ao gráfico, pode-se perceber que acontece a atenuação ao longo da LT.

Figura 37 – Parâmetros do cabo coaxial RG58 para $U = 5$ metros, considerando 500 MHz.

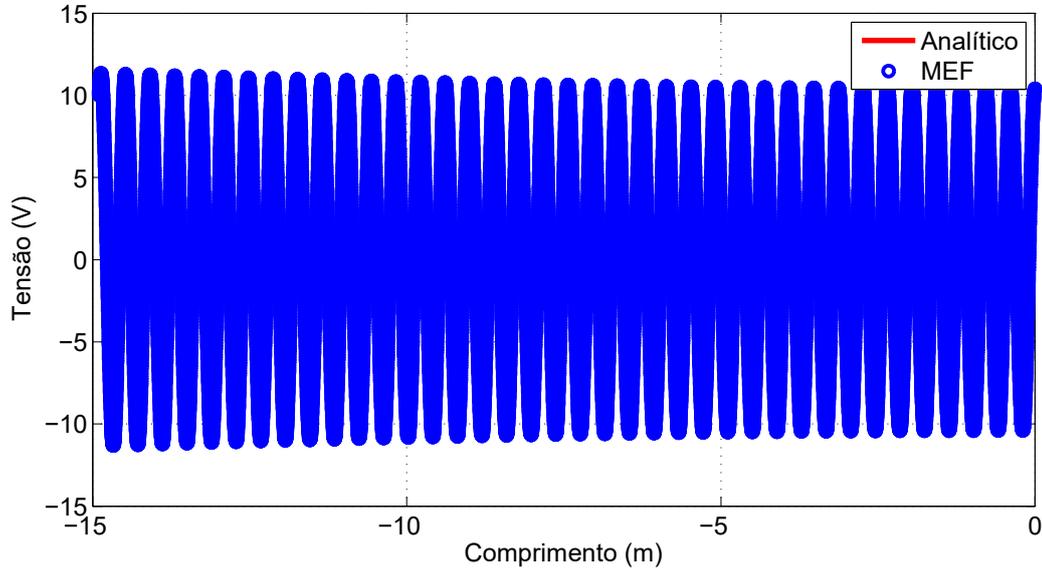


Fonte: Autoral.

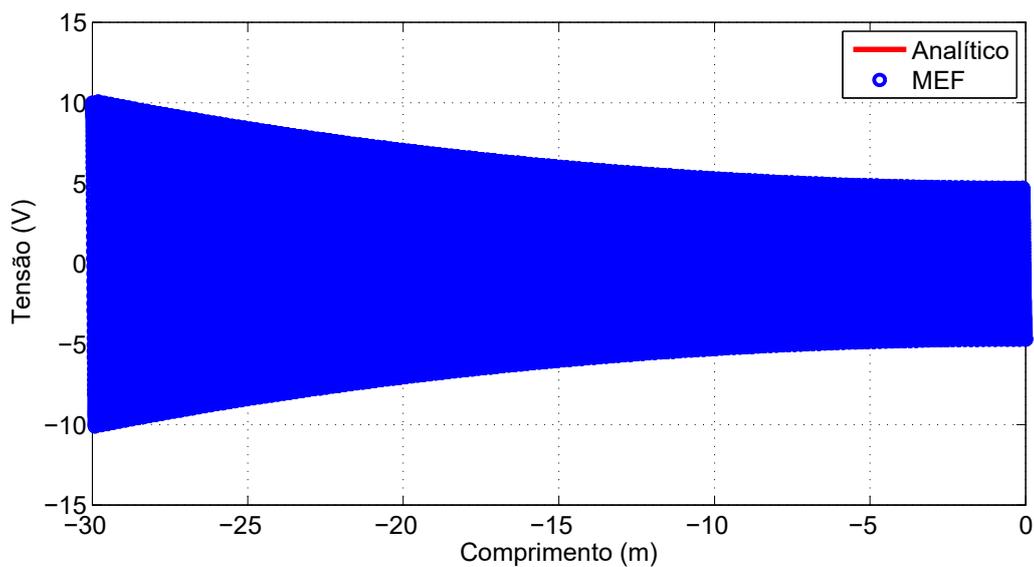
Figura 38 – Parâmetros do cabo coaxial RG58 para $U = 10$ metros, considerando 500 MHz.



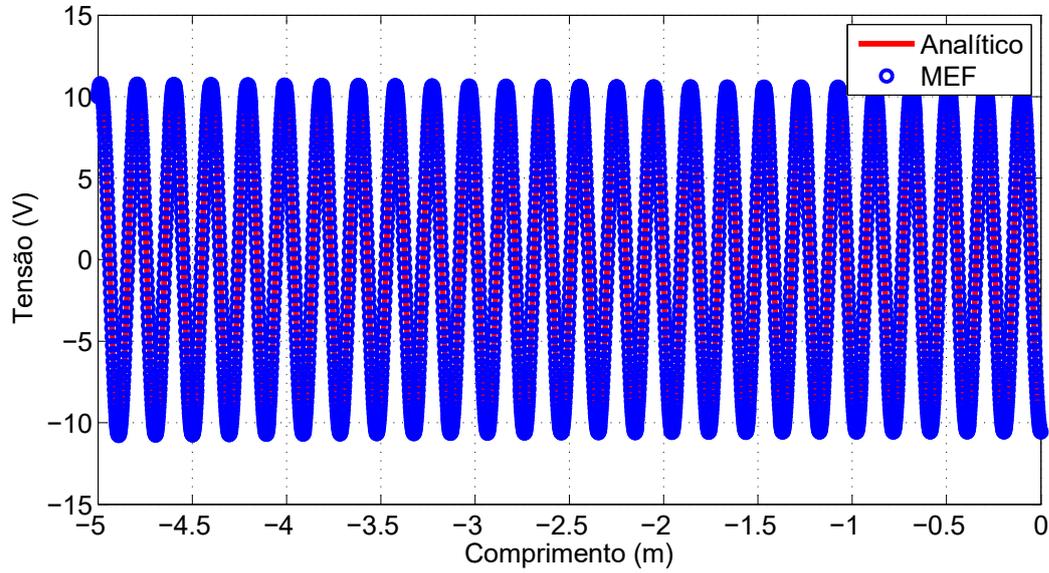
Fonte: Autoral.

Figura 39 – Parâmetros do cabo coaxial RG58 para $U = 15$ metros, considerando 500 MHz.

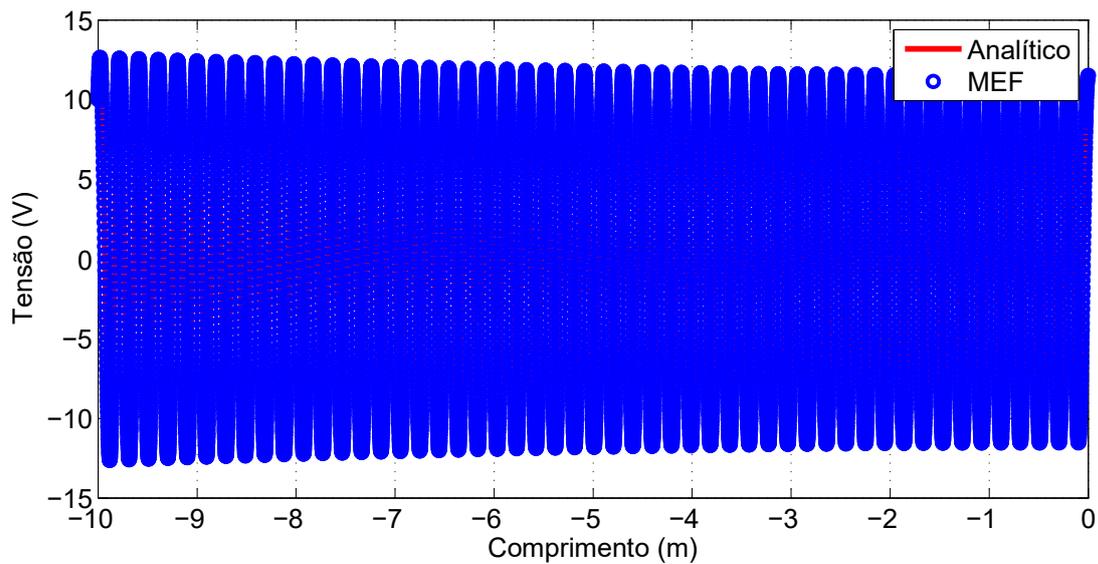
Fonte: Autoral.

Figura 40 – Parâmetros do cabo coaxial RG58 para $U = 30$ metros, considerando 500 MHz.

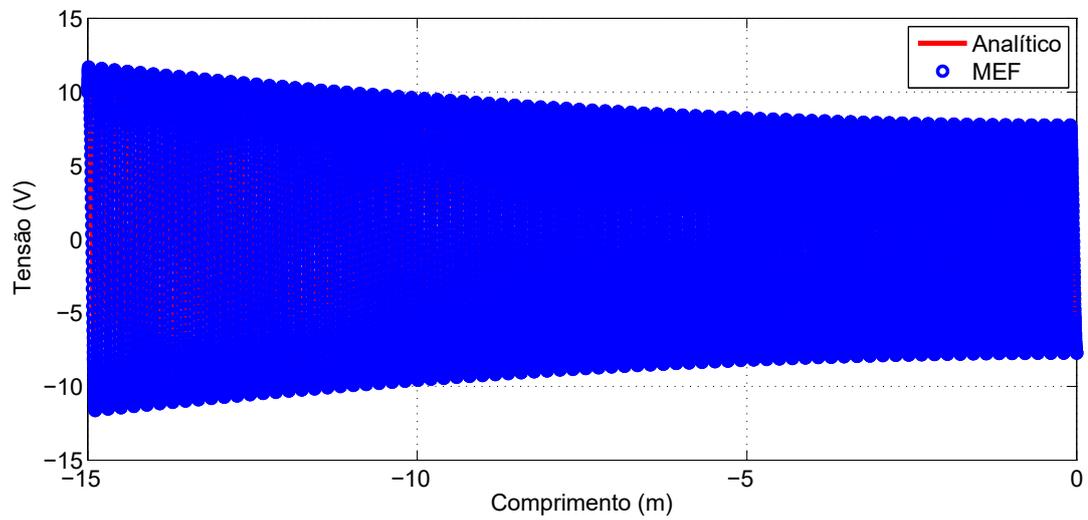
Fonte: Autoral.

Figura 41 – Parâmetros do cabo coaxial RG58 para $U = 5$ metros, considerando 1 GHz.

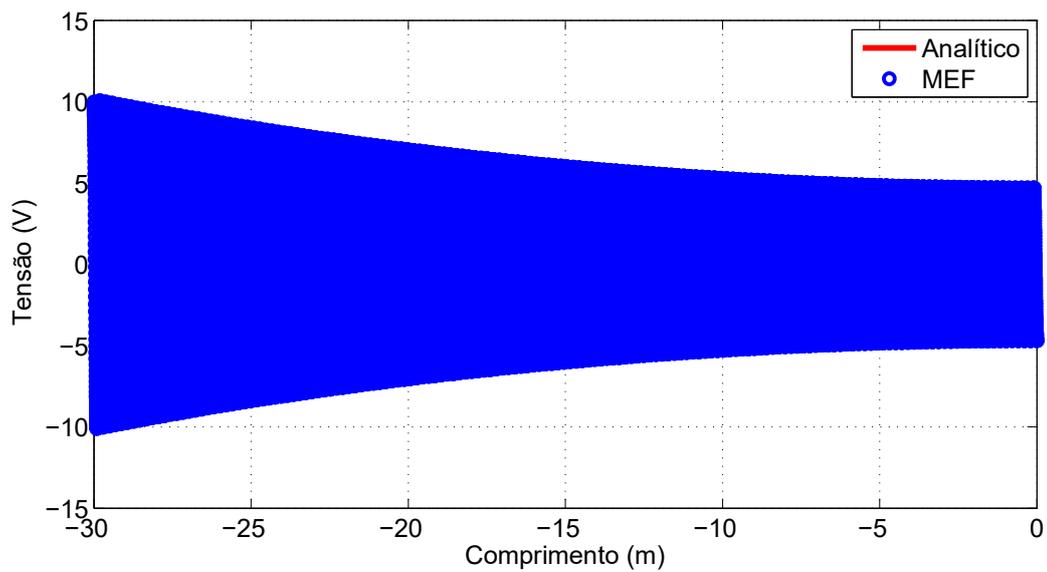
Fonte: Autoral.

Figura 42 – Parâmetros do cabo coaxial RG58 para $U = 10$ metros, considerando 1 GHz.

Fonte: Autoral.

Figura 43 – Parâmetros do cabo coaxial RG58 para $U = 15$ metros, considerando 1 GHz.

Fonte: Autoral.

Figura 44 – Parâmetros do cabo coaxial RG58 para $U = 30$ metros, considerando 1 GHz.

Fonte: Autoral.

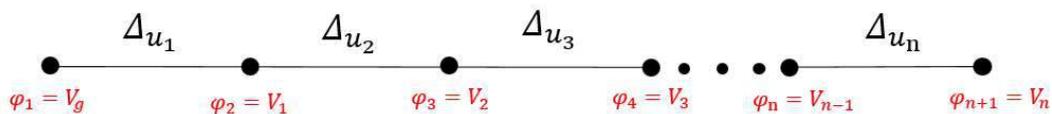
5 Discussões

Neste capítulo será apresentada uma breve discussão sobre os problemas e soluções desenvolvidas ao decorrer deste trabalho de conclusão de curso, com a finalidade de esclarecer alguns conceitos ao leitor.

5.0.1 Modelo Equivalente da LT

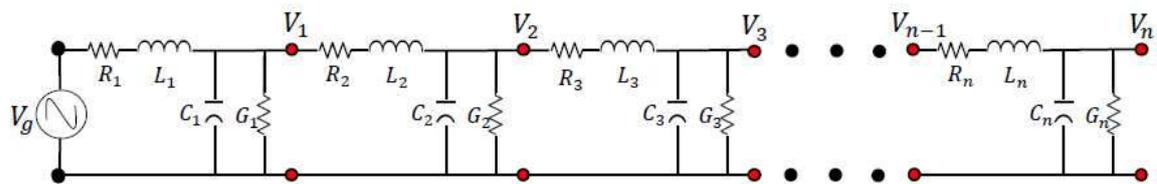
Considerando o modelo de linha equivalente mostrada na Figura 2, percebe-se que a variação dos parâmetros influencia significativamente o aumento do comprimento da LT, uma vez que cada ponto discretizado possui um circuito e que a equivalência é formada por uma cascata de valores que se atualizam, apresentados pelas Figuras 45 e 46.

Figura 45 – Demonstração de uma linha de transmissão ponto à ponto.



Fonte: Autoral.

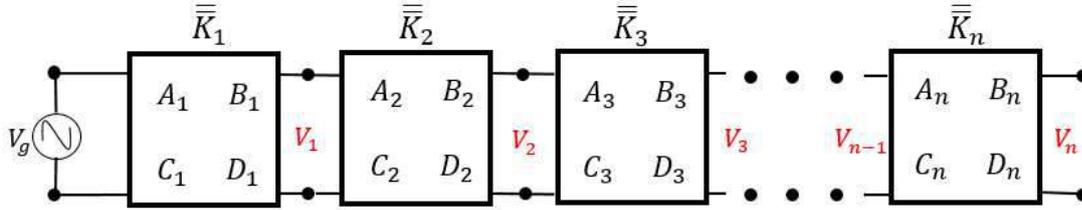
Figura 46 – Linha de transmissão genérica para variáveis valores de U.



Fonte: Autoral.

Para calcular os parâmetros ponto a ponto de uma linha de transmissão genérica, referente a Figura 46, faz necessário o uso do método das matrizes de transmissão ABCD (ALEXANDER; SADIKU, 2000), com a finalidade de facilitar a análise dos circuitos conectados em cascatas, mostrado na Figura 47.

Figura 47 – Método ABCD aplicado em uma LT.



Fonte: Autoral.

O modelo para calcular o método é caracterizado pela equação 5.1,

$$\begin{bmatrix} V_g \\ I_g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix}. \quad (5.1)$$

Considerando um circuito composto por n blocos, então fazendo

$$\mathbf{H}_o = \begin{bmatrix} V_g \\ I_g \end{bmatrix}, \quad (5.2)$$

$$\mathbf{H}_j = \begin{bmatrix} V_j \\ I_j \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

e

$$\bar{\bar{K}}_j = \begin{bmatrix} A_j & B_j \\ C_j & D_j \end{bmatrix} \quad j = 1, 2, 3, \dots, n \quad (5.4)$$

tem-se

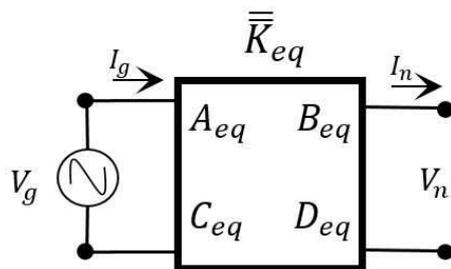
$$\mathbf{H}_o = \bar{\bar{K}}_{eq} \mathbf{H}_n \quad (5.5)$$

sendo

$$\bar{\bar{K}}_{eq} = \bigcup_{j=1}^n \bar{\bar{K}}_j. \quad (5.6)$$

Perante isto, pode-se demonstrar as equações deduzidas acima na Figura 48, caracterizando uma equivalência do método das matrizes de transmissão ABCD para uma linha de transmissão genérica.

Figura 48 – Equivalência do método ABCD aplicado em uma LT.



Fonte: Autoral.

Em um ponto específico na n -ésima porta (equivalente), um plano terminal é definido juntamente com as tensões e correntes equivalentes para o incidente (V_i^+, I_i^+) e refletido (V_i^-, I_i^-). Assim,

$$V_i = V_i^+ + V_i^- \quad (5.7)$$

e

$$I_i = I_i^+ - I_i^-. \quad (5.8)$$

5.0.1.1 Caso Especial para Linhas de Transmissão de Comprimento $\lambda_g/4$

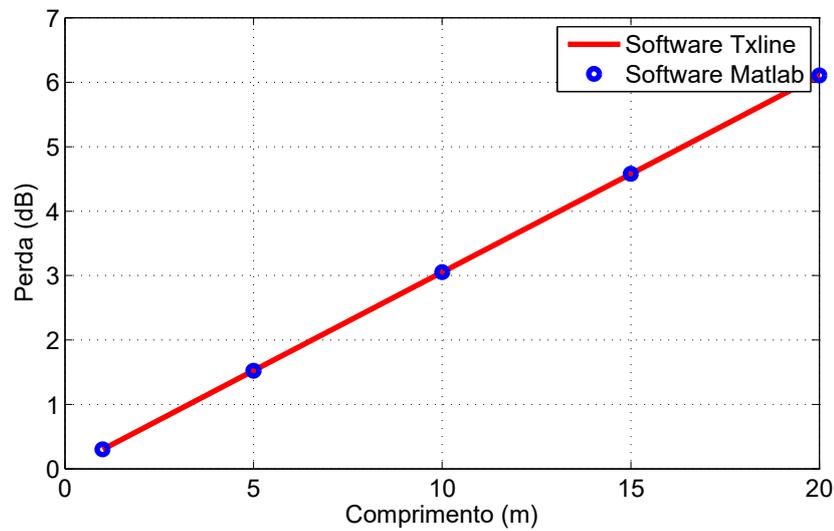
A impedância de entrada em uma linha de transmissão é determinada a partir da equação (5.9) e envolve uma cotangente com argumento que depende do comprimento da linha U e a constante de propagação. Deste modo, a cotangente vai para um múltiplo de $\pi/2$ quando o comprimento da linha for um múltiplo ímpar inteiro $n\lambda_g/4$, fazendo com que a cotangente seja zero, resultando em um curto-circuito. Desta forma, impossibilita a aplicação da condição de contorno na entrada da LT (POZAR, 2005), pois $\varphi_1 = 0V$.

$$Z_{ent} = -jZ_o \cot(\beta U) \quad (5.9)$$

5.1 Validação

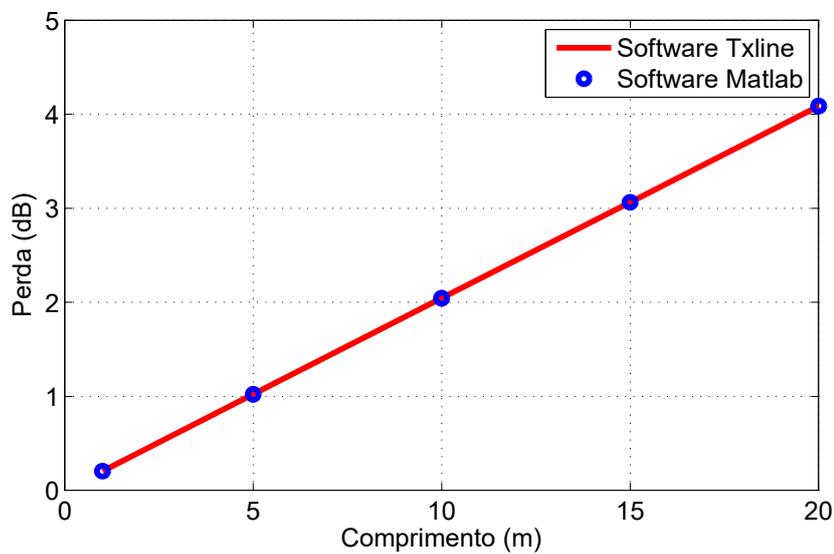
A fim de verificar o comportamento da atenuação de um cabo coaxial RG58 ao longo da LT, utiliza-se o software *Txline* (SCHROEDER, 1985) e compara seu resultado com os parâmetros gerados pelo software *Matlab* ®, comprovando que a atenuação aumenta com o aumento do comprimento da LT.

Figura 49 – Atenuação de um cabo coaxial RG58 ao longo da linha, para 1GHz de frequência.



Fonte: Autoral.

Figura 50 – Atenuação de um cabo coaxial RG58 ao longo da linha, para 500MHz de frequência.



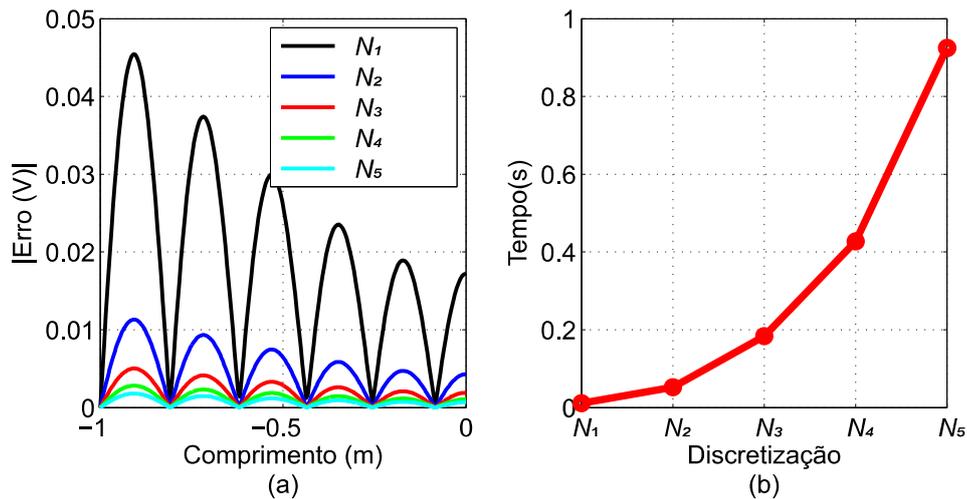
Fonte: Autoral.

5.2 Viabilidade Operacional

A fim de realizar uma análise sobre a quantidade de tempo que o código genérico executa o programa em relação ao erro resultante, trabalha-se com as Figuras 51, 52, 53 e 54 para uma frequência de 500 MHz e Figuras 55, 56, 57 e 58 para uma frequência de 1 GHz. Os comprimentos analisados foram 1, 5, 10 e 15 metros, com $\Delta_{u_1} \simeq 0,0050$ m, $\Delta_{u_2} \simeq 0,0025$ m, $\Delta_{u_3} \simeq 0,00166$ m, $\Delta_{u_4} \simeq 0,00125$ m e $\Delta_{u_5} \simeq 0,0010$ m,

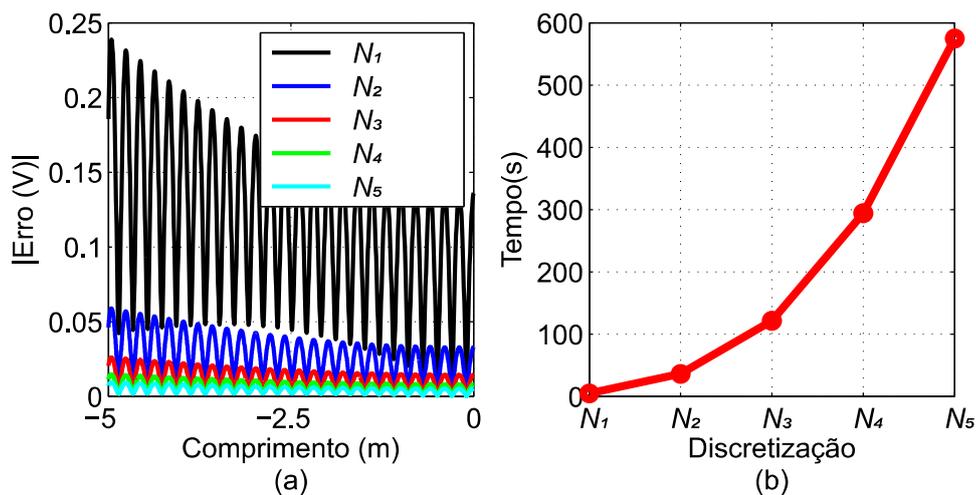
respectivamente. Desta forma, aplicando-se os diferentes valores de intervalo e comprimentos nas equações (4.3) e (4.4), podem-se definir os seguintes números de nós: N_1 , N_2 , N_3 , N_4 e N_5 . Essa análise foi realizada para um cabo coaxial modelo RG58.

Figura 51 – Parâmetros do cabo RG58 para 500 MHz, considerando comprimento de 1 metro. (a) Característica do erro em relação ao comprimento. (b) Tempo em relação à discretização.



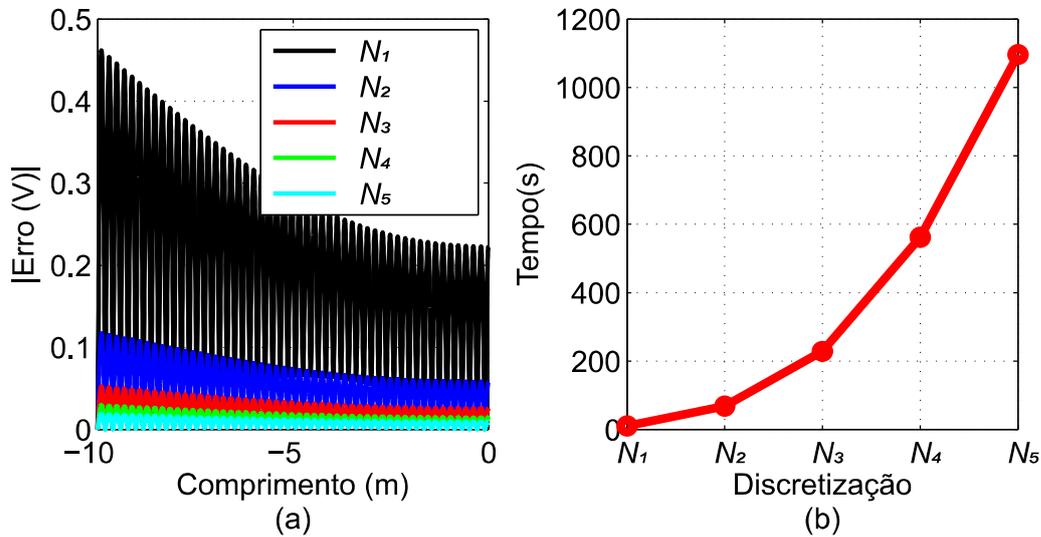
Fonte: Autoral.

Figura 52 – Parâmetros do cabo RG58 para 500 MHz, considerando comprimento de 5 metros. (a) Característica do erro em relação ao comprimento. (b) Tempo em relação à discretização.



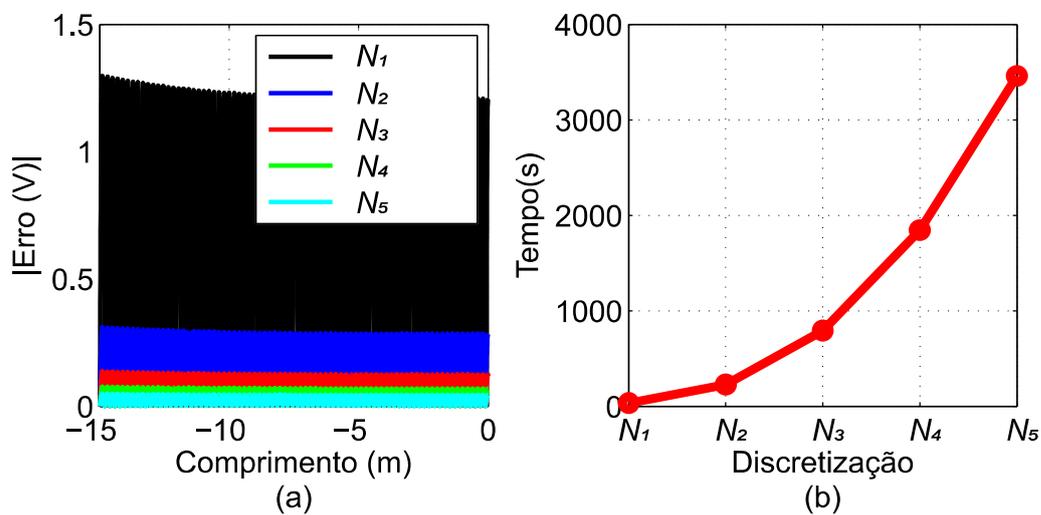
Fonte: Autoral.

Figura 53 – Parâmetros do cabo RG58 para 500 MHz, considerando comprimento de 10 metros. (a) Característica do erro em relação ao comprimento. (b) Tempo em relação à discretização.



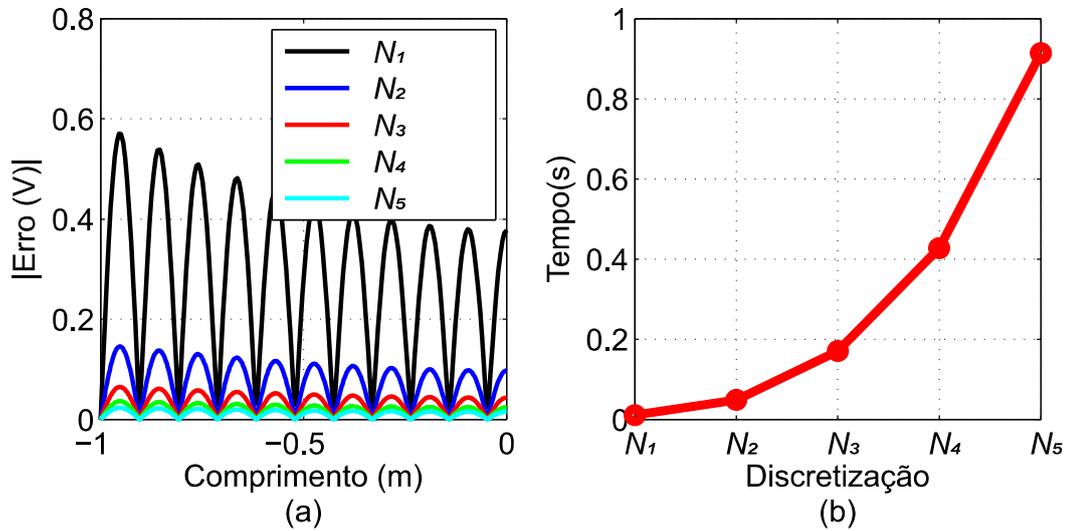
Fonte: Autoral.

Figura 54 – Parâmetros do cabo RG58 para 500 MHz, considerando comprimento de 15 metros. (a) Característica do erro em relação ao comprimento. (b) Tempo em relação à discretização.



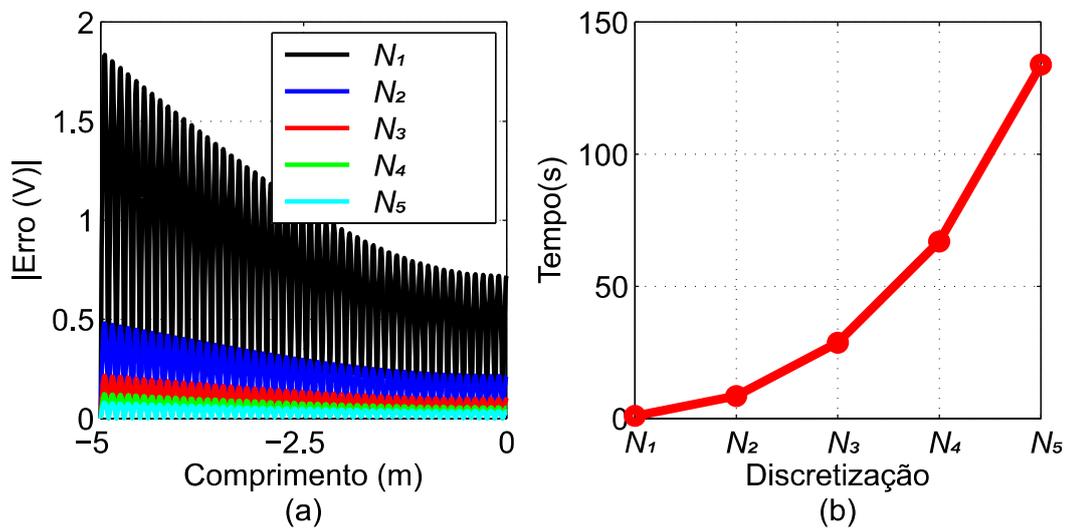
Fonte: Autoral.

Figura 55 – Parâmetros do cabo RG58 para 1 GHz, considerando comprimento de 1 metro.
 (a) Característica do erro em relação ao comprimento. (b) Tempo em relação à discretização.



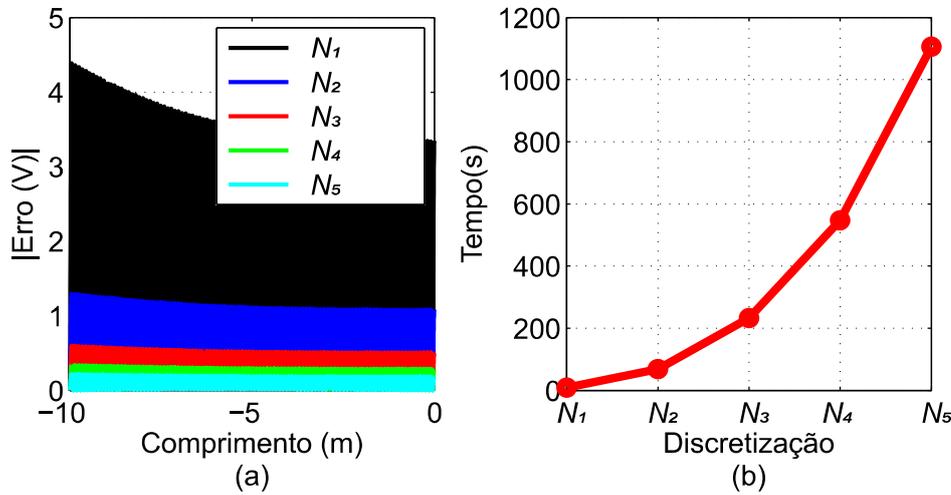
Fonte: Autoral.

Figura 56 – Parâmetros do cabo RG58 para 1 GHz, considerando comprimento de 5 metros.
 (a) Característica do erro em relação ao comprimento. (b) Tempo em relação à discretização.



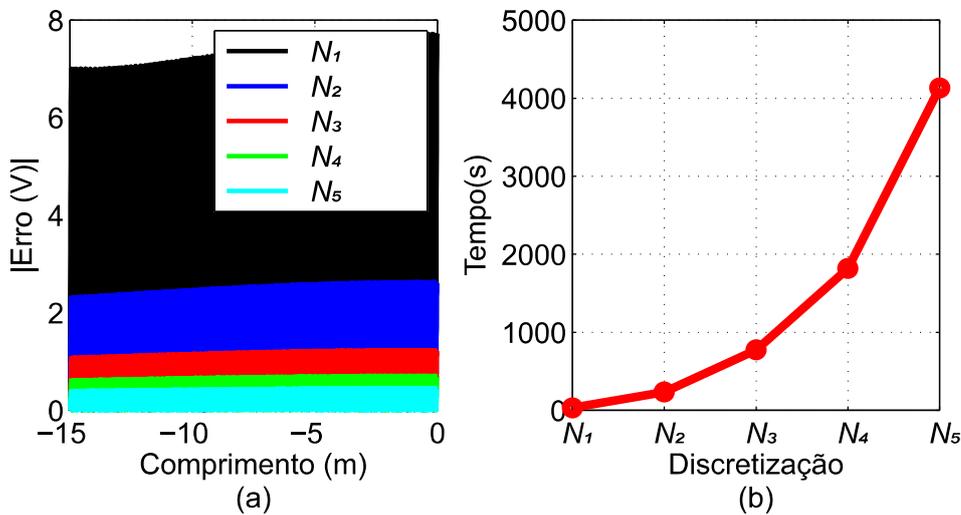
Fonte: Autoral.

Figura 57 – Parâmetros do cabo RG58 para 1 GHz, considerando comprimento de 10 metros. (a) Característica do erro em relação ao comprimento. (b) Tempo em relação à discretização.



Fonte: Autoral.

Figura 58 – Parâmetros do cabo RG58 para 1 GHz, considerando comprimento de 15 metros. (a) Característica do erro em relação ao comprimento. (b) Tempo em relação à discretização.



Fonte: Autoral.

Perante a execução desses gráficos, avalia-se a viabilidade de cada um, referindo-se ao potencial utilizado, uma vez que nem sempre o mais rápido pode ser o mais viável e nem o menor erro a melhor aplicação. Desta forma, traz-se diferentes comparações para que o usuário consiga escolher a solução mais adequada em seu caso de utilização, pois o objetivo do trabalho é definir e conceituar a viabilidade, tanto técnica, estratégica ou econômica.

6 Considerações Finais

Este trabalho abordou a execução de um estudo de linhas de transmissão, embarcadas ao fundamento de uma onda TEM com aplicabilidade em cabos coaxiais e bifilar. Para isso, realizaram-se estudos de outros projetos desenvolvidos até então, com a finalidade de obter ideias e parâmetros de modelagem similares.

Com estas informações em mãos, tendo como base o trabalho desenvolvido por (POZAR, 2005), iniciaram-se os estudos do equacionamento do circuito que descreve uma linha de transmissão, visando aprimorar o conhecimento para aplicabilidade dos parâmetros em cabos coaxiais e bifilar. Este estudo teve um resultado excelente, já que foi possível verificar a queda de tensão em um ponto qualquer da linha de transmissão, de posse em que o segmento da simplificação matemática que modela o comportamento independe do tipo de terminação da LT, com ou sem perdas.

Após a revisão bibliográfica e as modelagens matemáticas de uma linha de transmissão, aconteceu o estudo sobre técnicas numéricas possíveis para a simplificação das equações diferenciais geradas na análise do equacionamento genérico da LT. Sendo assim, a técnica em destaque foi o Método dos Elementos Finitos, que trabalha discretizando em frações menores a solução desta equação, uma vez que facilita os cálculos.

A análise das linhas de transmissão teve como principal ferramenta de uso o software *Matlab*®, para elaboração de códigos que tornam genéricos os cálculos dos parâmetros R, L, G e C, com finalidade de obter a queda de tensão, discretizando ponto a ponto. Desta maneira foi capaz de descobrir a queda de tensão ao longo de qualquer comprimento da LT.

Neste documento foi, apresentada uma breve discussão sobre os problemas e soluções ocorridos ao longo do estudo. Desta forma, foi realizada uma viabilidade que avalia o tempo computacional em relação à discretização e o erro que a proposta pode tolerar para comprimentos variados. Além disso, foi feita a validação, que verificou a atenuação do cabo coaxial ao longo da LT, utilizando o *Software Txlite* e comprovando o aumento da atenuação ao longo do comprimento da LT.

Perante o processo deste trabalho, pode-se perceber que os resultados do método utilizado foi compatível com o analítico e atendeu as expectativas esperadas, comprovando que o modelo do circuito deduzido é válido para o aumento do comprimento na LT, considerando frequências elevadas. Deste modo, pode-se comprovar os resultados analíticos com os teóricos.

Conclui-se, com a certeza de que o estudo foi proveitoso, pois novos conhecimentos

foram constituídos e espera-se poder contribuir para futuras discussões sobre esse tema tão especial, que é uma ferramenta computacional para análise de linhas de transmissão utilizando o método dos elementos finitos. Pode-se dizer que o olhar aos textos publicados nunca mais será o mesmo que outrora.

Referências

- ALEXANDER, C. K.; SADIKU, M. no. Electric circuits. *Transformation*, v. 135, p. 4–5, 2000. Citado 3 vezes nas páginas 29, 38 e 69.
- ALMAGUER, H. A. D. et al. Contribuição ao método da modelagem por linhas de transmissão (tln) e sua aplicação aos estudos em bioeletromagnetismo. Florianópolis, SC, 2003. Citado na página 27.
- ALMEIDA, A. F. M. de. Ondas refletidas em linhas transmissoras de alta frequência. *Revista Tecnologia*, v. 10, n. 1, 1989. Citado na página 27.
- ALVES, L. M. Métodos dos elementos finitos. *Curitiba: Universidade Federal do*, 2007. Citado na página 41.
- ASSAN, A. E. *Método dos elementos finitos: primeiros passos*. [S.l.]: Ed. da UNICAMP, 2003. Citado na página 27.
- FERNANDES, L. M.; SILVA, P. O. da; DIACENCO, A. A. Métodos dos elementos finitos aplicado à barras e treliças. *Revista Científica da FEPI*, v. 8, n. 2, 2015. Citado na página 42.
- FILHO, P. Novais de S. Redução das dimensões de linhas de transmissão, acopladores e filtros utilizando microstrip comblines em microondas. Universidade Federal de Pernambuco, 2006. Citado na página 27.
- GARCIA, S. G. et al. Finite difference time domain methods. *Time Domain Techniques in Computational Electromagnetics*, Southampton, UK: WIT, Billerica, MA: Computational Mechanics, 2003. Citado na página 27.
- HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; KRANE, K. S. *Física. Vol. 3*. [S.l.]: Grupo Gen-LTC, 2000. Citado na página 29.
- KUROKAWA, S. et al. Representação de linhas de transmissão por meio de variáveis de estado levando em consideração o efeito da frequência sobre os parâmetros longitudinais. *Sba: Controle & Automação Sociedade Brasileira de Automatica*, SciELO Brasil, v. 18, n. 3, p. 337–346, 2007. Citado na página 27.
- LIZARZA, J. T. C. *Método de los elementos finitos para análisis estructural*. [S.l.]: Escuela Superior de Ingenieros Industriales, Universidad de Navarra, 2000. Citado na página 41.
- LOTTI, R. S. et al. Aplicabilidade científica do método dos elementos finitos. *R Dental Press Ortodon Ortop Facial*, SciELO Brasil, v. 11, n. 2, p. 35–43, 2006. Citado na página 41.
- MATICK, R. E. *Transmission Lines and Communication Networks: An Introduction to Transmission Lines, High-frequency and High-speed Pulse Characteristics and Applications*. [S.l.]: Wiley-IEEE Press [Imprint], 2000. Citado na página 27.
- MATLAB, I. Matlab: R2014a. *Mathworks Inc, Natick*, 2014. Citado na página 27.

- MENEZES, V. Linhas de transmissão de energia elétrica—aspectos técnicos, orçamentários e construtivos. *Monografia, UFRJ*, 2015. Citado na página 27.
- MONK, P. *Finite element methods for Maxwell's equations*. [S.l.]: Oxford University Press, 2003. Citado na página 27.
- PAUL, C. R. *Analysis of multiconductor transmission lines*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2008. Citado na página 31.
- POZAR, D. M. Microwave Engineering 3e. *Transmission Lines and Waveguides*, p. 1–65, 2005. Citado 6 vezes nas páginas 27, 32, 33, 38, 71 e 77.
- RIBEIRO, F. Introdução ao método dos elementos finitos—notas de aula do prof. *Fernando LB Ribeiro*. *COPPE–UFRJ–Programa de Engenharia Civil*. Rio de Janeiro, 2004. Citado na página 41.
- SCHELKUNOFF, S. A. The electromagnetic theory of coaxial transmission lines and cylindrical shields. *Bell Labs Technical Journal*, Wiley Online Library, v. 13, n. 4, p. 532–579, 1934. Citado na página 33.
- SCHROEDER, J. H. *TXLINE-2: a finite length model to simulate the dispersion of pollutants from roadways*. Tese (Doutorado) — Texas A&M University, 1985. Citado na página 71.
- SOUZA, R. M. de. O método dos elementos finitos aplicado ao problema de condução de calor. *Apostila, Universidade Federal do Pará, Belém*, 2003. Citado na página 42.
- SZABO, B. A.; BABUÁŠKA, I. *Finite element analysis*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 1991. Citado na página 42.