ANÁLISE DAS PROPRIEDADES DOS CONJUNTOS NUMÉRICOS E OPERAÇÕES IDENTIFICADAS EM LIVROS DIDÁTICOS DO ENSINO FUNDAMENTAL

Stephanie da Silva Trindade

Profª. Dr.(a) Mª Arlita da Silveira Soares (Orientadora)

Prof. Dr. Vitalino Cesca Filho (Co-orientador)

Trabalho de Conclusão de Curso no formato de artigo apresentado como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Ciências Exatas - Matemática

Caçapava do Sul, junho de 2017.

ANÁLISE DAS PROPRIEDADES DOS CONJUNTOS NUMÉRICOS E OPERAÇÕES IDENTIFICADAS EM LIVROS DIDÁTICOS DO ENSINO FUNDAMENTAL

Autora: Stephanie da Silva Trindade
Orientadora: Maria Arlita da Silveira Soares
Co-orientador: Vitalino Cesca Filho

Resumo: Esta pesquisa tem como questão norteadora identificar de que forma os conjuntos numéricos são tratados nos livros didáticos, elaborados para os Anos Iniciais (4º e 5ºAno) e Anos Finais do Ensino Fundamental, no que tange aos aspectos históricos e estudos das propriedades. Para fundamentar a questão buscou-se fundamentação teórica nas ideias de Caraça; e Moreira, quanto aos aspectos históricos da ampliação dos conjuntos numéricos, e nas ideias de Ripoll, Rangel e Giraldo; Moreira; e Almeida, em relação às propriedades de cada conjunto. A escolha metodológica é de uma pesquisa qualitativa e os dados produzidos foram analisados segundo as etapas da Análise de Conteúdo. A fonte de produção de dados são os livros didáticos do 4º ao 9ºAno, aprovados pelo PNLD/2016 (Anos Iniciais) e PNLD/2017 (Anos Finais), elaborados pelo mesmo autor. A análise dos dados permitiu concluir que a abordagem dos conjuntos numéricos no Ensino Fundamental não atende às sugestões dos pesquisadores elencados para a fundamentação teórica deste trabalho, quanto: a sucessão como base para o conjunto dos naturais, a abordagem histórica da construção dos inteiros, a densidade dos racionais nos reais, os aspectos históricos que serviram de marco para a construção dos irracionais, a relação reais e reta numerada, entre outros aspectos relacionados.

Palavras-chave: Conjuntos Numéricos; Livro Didático; Ensino Fundamental.

Abstract: This research has as a guiding question to identify how the numerical sets are treated in the textbooks, elaborated for the Initial Years (4th and 5th Year) and Final Years of Elementary School, regarding the historical aspects and studies of the properties. In order to substantiate the question we sought theoretical basis in the ideas of Caraça; and Moreira, regarding the historical aspects of the expansion of the numerical sets, and in the ideas of Ripoll, Rangel and Giraldo; Moreira; and Almeida, in relation to the properties of each set. The methodological choice is a qualitative research and the data produced were analyzed according to the Content Analysis steps. The source of data production is the textbooks from the 4th to the 9th Year, approved by the PNLD / 2016 (Initial Years) and PNLD / 2017 (Final Years), elaborated by the same author. The analysis of the data allowed to conclude that the approach of numerical sets in Elementary School does not meet the suggestions of the researchers listed for the theoretical basis of this work, as: succession as the basis for the set of natural, the historical approach to the construction of integers, density of rational in the real, historical aspects that served as a landmark for the construction of the irrational, the real relationship and numbered straight, among other related aspects.

Keywords: Numerical Sets; Textbook; Elementary School.

1. INTRODUÇÃO

A efetiva presença dos números no dia a dia em distintas situações, por exemplo, em transações econômicas, na percepção do tempo por meio de relógios, na medida de café consumido, entre outras ocorrências, revelam a importância dos números nas atividades sociais. Mas, a influência dos números vai além de situações da rotina, pois estes possibilitaram às antigas civilizações construírem cidades e impérios.

Na Educação Básica, a presença dos números, desde os Anos Iniciais do Ensino Fundamental ao Ensino Médio, resulta em uma disposição aproximada ao desenvolvimento histórico dos conjuntos e sistemas numéricos (BRASIL, 1998; RESENDE, 2015). Um momento que exemplifica tal aproximação trata-se de quando se deixa de lado a perspectiva matemática dos conjuntos e trabalham-se frações antes dos números inteiros negativos. Visto que, na sequência matemática encontra-se $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$. (RIPOLL; RANGEL; GIRALDO, 2016)[1].

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) defendem que a abordagem numérica deve ser apresentada aos estudantes com base na ordem histórica, possibilitando o entendimento da necessidade de diferentes conjuntos numéricos, bem como suas propriedades e relações, desenvolvidas para solucionar problemas sociais e dentro da própria Matemática. Este documento sugere que sejam abordadas as propriedades dos conjuntos numéricos, por exemplo, propriedades das operações aritméticas, para a elaboração de estratégias de cálculos, resolução de problemas, bem como desenvolver a abstração. (BRASIL, 1998, 2002).

Na mesma linha de argumentação dos PCN, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) propõe que, ao final da Educação Básica, o estudante seja capaz de perceber a necessidade de ampliação dos conjuntos numéricos (dos Naturais ($\mathbb{N}$) aos Reais ($\mathbb{R}$)), bem como compreender as operações e propriedades destes. Sobre as propriedades relacionadas aos números, a BNCC destaca o estudo das propriedades operatórias, por exemplo, propriedades cancelativas da adição e multiplicação. (BRASIL, 2016).

Percebe-se que ambos os documentos oficiais citados (PCN e BNCC) defendem, mesmo que implicitamente, que a discussão na Educação Básica referente aos conjuntos numéricos seja siga a perspectiva histórica dos mesmos, mostrando a necessidade de ampliação dos conjuntos, bem como os problemas sociais históricos que repercutiram nesta ampliação.

Sabe-se que um dos principais materiais utilizados por professores em suas atividades profissionais é o livro didático. Dentre as funções dos livros didáticos destacam-se: servir de recurso de atualização, atender as necessidades de professores e estudantes para que cheguem a seus objetivos relacionados a competências, conhecimentos e atitudes (ROMANATTO, 2004). Para Romanatto (2004) a utilização de livros didáticos na sala de aula depende de diferentes fatores, por exemplo, reconhecimento da sua função pedagógica e da abordagem direcionada pelo docente. Além disso, a qualidade da atividade apoiada pelo livro didático torna-se dependente da qualidade do mesmo e do trabalho realizado pelo professor.

Ripoll (2013) afirma que alguns livros didáticos de Matemática para a Educação Básica apresentam conceitos equivocados em relação aos conjuntos numéricos, por exemplo, a definição de número irracional como um número com representação decimal não periódica. A autora destaca a "boa intenção" do Ministério da Educação (MEC), perante a distribuição

[1]Visto a fundamentação do trabalho baseada nos autores referidos, a partir deste momento será utilizado de "RIPOLL *et al* (2015, 2016)" para se referir aos mesmos.

de livros didáticos, entretanto, deixa claro que se faz necessária uma análise crítica para a utilização.

Almeida (2015) em sua pesquisa realizou uma análise crítica de livros didáticos de Matemática referente aos conjuntos numéricos. O pesquisador percebeu tópicos e discussões as quais os documentos oficiais defendem para a Educação Básica, porém, os livros didáticos analisados não enfatizam conceitos como: noção de sucessor, números primos, construção dos inteiros por meio da subtração, opostos/simétricos, construção dos racionais via divisão; abordagem da representação decimal a partir da representação fracionária; aproximações para os racionais, construção de irracionais via Teorema de Pitágoras, uso de diagramas inadequados para a inclusão dos conjuntos numéricos, entre outros.

O mesmo autor considera, ainda, inadequado o uso de diagramas de Venn para representar a inclusão entre os conjuntos numéricos, visto que a utilização deste tipo de representação possibilita a compreensão errônea por parte do aluno acerca da existência de números iguais de racionais e irracionais, entre outras conclusões. Almeida (2015), acredita que ao considerar a cardinalidade dos conjuntos numéricos, não exista diagrama de Venn possível para representa-los.

É importante registrar que, no Brasil, a distribuição de livros didáticos possui um programa específico denominado *Plano Nacional do Livro Didático* (PNLD). Este plano tem por objetivo subsidiar o trabalho dos professores ao encaminhar coleções de livros didáticos aos estudantes da Educação Básica. Estes materiais passam por um processo de avaliação, dividido em 12 etapas: adesão; editais; inscrição das editoras; avaliação; guia do livro; escolha; pedido; aquisição; produção; análise da qualidade física; distribuição e recebimento[2].

Desta forma, o PNLD abre espaço para escolas manifestarem seu interesse, bem como as empresas editoras. Após isto passa a ser feita a avaliação das obras inscritas, sendo o Instituto de Pesquisas Tecnológicas do Estado de São Paulo (IPT) responsável pela primeira avaliação do material. Em seguida, a Secretaria da Educação Básica (SEB/MEC) torna-se responsável pela escolha de profissionais avaliadores dos materiais, sendo estes em maioria, professores pertencentes a quadros de funcionários de Instituições Públicas de Ensino Superior e professores convidados por estas instituições, tanto do nível básico como superior. Estes profissionais elaboram as resenhas das coleções aprovadas conforme indicações e objetivos dispostos no edital. Estas resenhas são encaminhadas para as escolas inscritas no programa escolherem os livros desejados.

[2]Dados retirados do site oficial do Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP).

Tendo em vista distribuição de livros didáticos e suas avaliações, a análise deste material torna-se importante e necessária para a educação, em particular, para o ensino e aprendizagem de Matemática. Assim, este trabalho tem por objetivo analisar de que forma os livros didáticos abordam os conjuntos numéricos no decorrer da Educação Básica. Para atingir tal objetivo elaborou-se a seguinte questão de pesquisa: *de que forma os conjuntos numéricos são tratados nos livros didáticos elaborados para os Anos Iniciais (4º e 5ºAno) e Anos Finais do Ensino Fundamental, no que tange aos aspectos históricos e estudo das propriedades?*

A seguir são apresentados o aporte teórico produzido com o intuito de auxiliar na análise dos livros didáticos, o caminho metodológico desenvolvido, o tratamento dos dados e interpretações, bem como as considerações finais.

2. CONJUNTOS NUMÉRICOS: ASPECTOS ESSENCIAIS PARA O PROCESSO DE ENSINO E APRENDIZAGEM

Entende-se que um dos aspetos essenciais no processo de ensino e aprendizagem de Matemática é conhecer a evolução dos seus conceitos. Assim, no item 2.1 são expostos alguns aspectos históricos relacionados à expansão dos conjuntos numéricos. No item 2.2 são abordadas noções das propriedades de cada conjunto numérico, bem como o que se almeja para a Educação Básica.

2.1 Aspectos Históricos dos Conjuntos Numéricos

Os indícios iniciais da contagem e formação de grupos estão registrados em pequenas peças de argilas, peças diferentes representavam objetos diferentes, sendo armazenadas em recipientes ou locais distintos, a fim de não haver trocas de quantidades empregadas a determinada situação. Desta forma a contagem torna-se intrinsecamente relacionada à ordenação de objetos. (CARAÇA, 1951; MOREIRA, 2004; RIPOLL *et al.* 2015).

Ripoll *et al*. (2015) afirmam que estas pequenas peças de argila foram um dos primeiros sinais de numeração e contagem dos mesopotâmicos. Estes povos utilizaram a contagem concreta como sistema de controle, sem a presença de uma ideia abstrata de número, porque o ato de abstrair é um método sofisticado de contagem. Este método requer uma generalização da bijeção entre os objetos que a contagem relaciona. Moreira (2004) cita a abstração como um dos principais obstáculos do ensino básico visto sua complexidade em relação a contagem como defende, também, Ripoll anteriormente já mencionada.

Caraça (1941) reconhece que as necessidades da vida cotidiana exigem a contagem em níveis distintos. A contagem torna-se mais frequente e indispensável, quanto mais intensas as relações humanas se tornam. Assim, com o desenvolvimento das relações civis e o crescimento da população, problemas de contagem foram surgindo e, consequentemente, a expansão e o aperfeiçoamento das técnicas de contagem e formação de conjuntos. Em relação à contagem, os números naturais passaram a satisfazer necessidades diversas dos povos habitantes da Mesopotâmia. Desta forma, sua criação foi consequência dos problemas diários na resolução de contagens.

Decorrentes das peças de argilas, utilizadas no sistema de contagem mesopotâmico, surgiram, também, os primeiros algarismos como símbolos, cuja combinação representava quantidades de peças de argila. No momento em que combinavam símbolos para representar quantidades, construíam o conceito de numeral. Mais tarde, quando o ato de abstrair passou a ser necessário e indispensável, um mesmo número foi visto de diferentes formas de numerais. Assim, os conceitos de número[3], algarismo[4] e numeral[5] foram diferenciados. A distinção destes conceitos, em conjunto à noção de agrupamento, é um dos obstáculos identificados no Ensino Fundamental, mais especificamente nos Anos Iniciais. (CARAÇA, 1951; MOREIRA, 2004; RIPOLL *et al.* 2015).

Desta forma, um número natural é um atributo abstrato que todos os conjuntos de objetos que podem ser colocados em correspondência um a um entre si possuem, ou seja, que possuem a mesma quantidade de elementos. Portanto, "**número natural é uma abstração que emerge da necessidade da noção concreta de contagem**, por meio da correspondência um a um" (RIPOLL *et al.* 2015, p. XXX, grifo no original).

Além da contagem outra atividade era bastante utilizada pelas civilizações antigas, a saber: a atividade de medir. Nesta atividade, destacam-se os egípcios, pois devido às inundações periódicas do Rio Nilo precisavam refazer os traçados e as medições das propriedades rurais. Com estas atividades e outras ficou claro que o ato de medir estava relacionado à comparação de grandezas, o que inicialmente ficou resumido a "maior que" e "menor que". Porém, não era suficiente, uma vez que a pergunta "quantas vezes cabe determinada grandeza em outra", precisava ser feita. (CARAÇA, 1951).

Para responder a questão levantada, precisava-se de um número que expressasse essa relação e, com o intuito de favorecer as relações sociais, foi necessário, ainda, determinar um

[3] "Número (natural) é a expressão abstrata de quantidade" (RIPOLL, RANGEL, GIRALDO, 2015, p. 9).

[4] Algarismo é a expressão utilizada para referir-se a cada um dos símbolos combinados para representar um número. (RIPOLL, RANGEL, GIRALDO, 2015).

[5] Numeral trata-se de cada uma das *n* combinações de algarismos. (RIPOLL, RANGEL, GIRALDO, 2015).

único termo de comparação para cada grandeza. Este número passou a ser a medida da grandeza em relação à unidade comparada. (CARAÇA, 1951).

Com isto, surge um novo problema: expressar medidas entre grandezas sem o cuidado com a unidade, para que caiba um número natural *n* na outra grandeza, como ocorre quando um número não é múltiplo do outro. Para suprir tal dificuldade surge um novo conjunto numérico, o conjunto dos números racionais (positivos), o qual possibilitou representar a medida entre duas grandezas, sendo estas representadas por números naturais. (CARAÇA, 1951).

Assim, a definição inicial de número racional é: qualquer número que possa ser representado na forma $\frac{m}{n}$, com m e *n* naturais, e *n* não nulo, já que os números negativos não haviam sido formalizados (CARAÇA, 1951). Destaca-se que como a definição de número racional passou a ser diretamente ligada ao conceito de medida e razão entre quaisquer números naturais, este corpo numérico teve grande influência em questões e demonstrações da geometria.

Constatou-se que os racionais (positivos) não respondiam todos os problemas de medida. Um dos casos que possibilitou a percepção destas lacunas e insuficiências dos números racionais (positivos) foram as questões relacionadas ao Teorema de Pitágoras. Isto porque se esperava que os resultados deste Teorema fossem sempre números racionais (positivos), na forma $\left(\frac{m}{n}\right)$, de modo que $mdc(m,n) = 1$. No entanto, constatou-se que nem sempre isto é possível. (CARAÇA, 1951).

Sendo assim, foram apresentadas quatro possibilidades para resolver o problema:

> 1) Abandonar a igualdade [$\overline{AB} = \frac{m}{n}\overline{OA}$, sendo $\overline{AB}$ a hipotenusa de um triângulo retângulo e $\overline{OA}$ um dos seus catetos] (*), isto é, abandonar a possibilidade de exprimir numericamente, s*empre*, a medida dum segmento.
> 2) Abandonar o teorema de Pitágoras.
> 3) Conservar a igualdade (*) e o teorema de Pitágoras, mas abandonar a exigência da sua compatibilidade lógica.
> 4) Conservar tudo, mas admitir que um mesmo número possa ser, simultaneamente par e ímpar. (CARAÇA, 1951, p. 51).

Deste modo, admitiu-se que a igualdade referente à hipotenusa e o Teorema de Pitágoras estavam corretos, ficando apenas com a incompatibilidade lógica, o que levou à criação de um novo corpo numérico. Este corpo deveria abranger números que satisfizessem a igualdade encontrada até então. Para tanto, foi estabelecida a noção de *comensurabilidade*, o que nada mais é que as medidas ou relações métricas serem representadas por números racionais (positivos). Assim, quando o corpo se apresenta insuficiente para isto, as medias passam a ser chamadas de *incomensuráveis*[6]. (CARAÇA, 1951).

A incomensurabilidade é demonstrada a partir do estudo da reta. Historicamente foram analisadas as propriedades da reta e sua infinidade de pontos em relação às propriedades dos números racionais (densidade[7] nos reais e infinidade). Constatou-se, então, que a reta possuiu uma propriedade que os números racionais não têm, ou seja, a *continuidade*[8]. (CARAÇA, 1951).

Para esclarecer a continuidade de uma reta, o matemático Dedekind (1831-1916) a define a partir de um corte em uma reta qualquer. Este corte divide a reta em duas classes, a da direita ao ponto e a da esquerda ao ponto. Ao fazer esta divisão o matemático conclui que qualquer que seja o corte feito na reta e a quantidade de cortes, sempre haverá um ponto pertencente a reta que a divide em duas classes. Assim, os números à esquerda do ponto de divisão das classes são menores do que aqueles à direita do ponto. (CARAÇA, 1951).

Para comprovar a não continuidade do conjunto dos racionais, Dedekind (1831-1916) parte das classes ao invés do ponto de corte. Verifica-se que se na classe da esquerda forem tomados os números racionais cujo quadrado é menor do que 2 e na classe da direita os números racionais cujo quadrado é maior do que dois, tem-se definidas as classes. No entanto, o ponto de corte destas é $\sqrt{2}$, número que gera problemas no corpo dos racionais. (CARAÇA, 1951).

Assim, percebeu-se que o conjunto dos números racionais (positivos) não era contínuo, o que trouxe a necessidade da criação de um novo conjunto, os Reais ($\mathbb{R}$). Um número real é o elemento de separação de duas classes de um corte qualquer na reta, podendo em alguns casos coincidir com um número racional. Caso não coincida, é chamado de número irracional, sendo o conjunto destes denotado por $\mathbb{I}$. Desta forma, para obter um número racional precisa-se apenas de dois números naturais, entretanto, para obter um real se faz necessário duas infinidades, o que requer compreender o conceito de infinito. (CARAÇA, 1951).

Outra perspectiva, distinta à ideia de Bento Caraça, é a de Ripoll *et al*. (2015) a qual trata do conceito de número real como rótulos dados às proporções entre grandezas da mesma

---

[6]Dois ou mais valores, passam a ser chamados de incomensuráveis, quando não possuem uma medida em comum (CARAÇA, 1951).
[7]A definição de *densidade* abordada neste trabalho segue a visão de Caraça (1951).
[8]O sentido aqui abordado a respeito da *continuidade* se refere ao Postulado de Dedekind, ou, Axioma do Supremo.

espécie. Desta forma, um número real, quando positivo, representa a abstração que surge da noção de medida.

Outra necessidade da vida social das primeiras civilizações, a qual repercutiu na formação de um novo conjunto numérico, refere-se à representação de formas de orientação. Números, conforme já mencionado, representavam, inicialmente, quantidades relacionadas à contagem ou medidas, relações estas que não satisfaziam questões de orientação. (RIPOLL *et al.*, 2016).

Com a necessidade de representar quantidades orientadas, ou seja, munidas de um referencial, foram produzidas novas significações do conceito de número, por exemplo, do zero. Quando restrito ao contexto dos números naturais, o zero se torna a ausência de quantidades, sendo o menor número natural. Em relação aos números inteiros, o número zero passa a ser o referencial ou a origem, possibilitando a existência de números inferiores a ele. Desta forma, além do surgimento de um novo conjunto numérico, foi necessária a ampliação dos racionais já existentes (positivos), abrangendo agora os racionais negativos. (CARAÇA, 1951; RIPOLL *et al.*, 2016).

Percebe-se que problemas sociais impuseram a necessidade da formação de diferentes conjuntos numéricos, nesta ordem: naturais, racionais positivos, irracionais, reais e inteiros (negativos). Do ponto de vista matemático, geralmente, estes conjuntos são abordados na seguinte ordem: naturais, inteiros, racionais, irracionais e reais, pois seguem a relação entre suas propriedades e definições. Compreende-se que uma abordagem histórica dos conjuntos numéricos na Educação Básica, destacando os conceitos que foram essenciais para a expansão destes conjuntos, por exemplo, comensurabilidade, continuidade e orientação, torna-se importante para que os estudantes possam perceber a evolução das sociedades, desde dias primitivos até os atuais, bem como os problemas matemáticos que proporcionaram o desenvolvimento da matemática como ciência.

2.2 Relações e Propriedades dos Conjuntos Numéricos

O desenvolvimento das diferentes civilizações ocorreu, simultaneamente, com a evolução dos conjuntos numéricos, logo, a sociedade se desenvolve com o domínio dos conceitos matemáticos e vice-versa. Como afirma Caraça:

> É só quando o nível da civilização se vai elevando e, em particular, quando o regime de propriedade se vai estabelecendo, que aparecem novos problemas – determinações de comprimentos, áreas, etc., os quais exigem a introdução de novos números. (CARAÇA, 1951, p. 6)

Assim, reafirma-se a presença de noções primitivas dos diversos conjuntos numéricos, principalmente, naturais ($\mathbb{N}$) e racionais ($\mathbb{Q}$), no desenvolvimento das civilizações, visto que os registros numéricos primordiais que se tem conhecimento hoje surgiram conjuntamente aos primeiros traços da própria escrita na região da Mesopotâmia, 4000 a.C. (CARAÇA, 1951; RIPOLL *et al.*, 2015), conforme já mencionado no item anterior.

Indo além das suas origens, os conjuntos numéricos possuem propriedades fundamentais que formam uma Matemática elementar, definida, por exemplo, por Félix Klein (1849-1925). Conforme Jean d'Alembert (1717-1783) (1751 apud RIPOLL *et al*., 2015), esta Matemática tem por elementos fundamentais as partes primitivas e originais das quais o todo é formado. Neste sentido, as propriedades fundamentais e os axiomas compõem a base da compreensão e formação dos conjuntos numéricos.

Segundo Klein (1849-1925) e Jean d'Alembert (1717-1783) (apud RIPOLL *et al*., 2015), o desenvolvimento dos conjuntos numéricos e suas aplicações não acontecem sem a compreensão e aquisição de conceitos e procedimentos. E, estes por sua vez, não ocorrem sem um domínio da Matemática Fundamental ou Elementar.

Quando se refere à matemática elementar de Félix Klein (1849-1925), trata-se de aspectos fundamentais da matemática trabalhados desde o início da vida escolar. Dentre os conceitos abordados neste período e considerados fundamentais ou elementares estão aspectos relacionados ao método axiomático e suas propriedades. (RIPOLL *et al*., 2015).

O método axiomático é a técnica de abordar "um conjunto de proposições que serão aceitas como verdadeiras sem demonstração e a partir das quais todas as outras são deduzidas" (RIPOLL *et al.* 2015, p. 48). Para os Naturais, tem-se os Axiomas de Peano.

> P1. todo número natural tem um sucessor, que ainda é um número natural;
> P2. números naturais diferentes têm sucessores diferentes;
> P3. existe um número natural, 0 (zero), que não é sucessor de nenhum outro;
> P4. se a um conjunto o zero pertence, este não é sucessor de nenhum outro número, e ainda qualquer elemento deste conjunto possuir um sucessor, então este é o próprio Conjunto dos Naturais. (RIPOLL *et al*., 2015, p. 52)

Dos Axiomas de Peano, pode-se destacar-se o conceito de sucessor que está diretamente ligado às questões centrais da estrutura e formação dos naturais, uma vez que, por meio deste conceito, se estrutura o processo de contagem. Ripoll *et al*. (2015) afirmam que o conceito de sucessor é tratado na escola, na maioria das vezes, como uma forma procedimental, apenas. Esta concepção deixa de lado a formalidade e compreensão da formação do conjunto dos naturais, que este conceito pode proporcionar, por exemplo, oportunizando a percepção da infinidade dos naturais.

Os Axiomas de Peano permitem definir as operações no conjunto dos naturais ($\mathbb{N}$), bem como sua ordem e seus teoremas aritméticos. As operações em um conjunto são ditas "bem definidas" quando a relação entre dois elementos do conjunto resultar em um elemento do próprio conjunto. Deste modo, as operações "bem definidas" nos números naturais são: adição e multiplicação. (RIPOLL *et al.*, 2015).

Quanto ao ensino de números naturais, Ripoll *et al.* (2015) defendem que a definição e as ideias ligadas à construção desses números estão apoiadas nas noções de *sucessor e relação de ordem*. Estas são consideradas *"pilares elementares*[9]*"* que possibilitam uma consistência teórica (interna) e lógica, suficientes para a compreensão do conjunto dos naturais, bem como o conceito de número natural, sem a utilização da formalização Matemática por trás destes. Nesta perspectiva, Almeida (2015) sugere questões as quais possibilitam a compreensão a respeito da infinidade relacionada a sucessão, além de tratá-la como um dos pilares dos naturais, bem como faz para a relação de ordem.

Ripoll *et al*. (2016) abordam a construção dos inteiros partindo da ideia de operações "bem definidas" nos naturais. Em outras palavras, ao subtrair dois números naturais não se pode garantir que se obtenha um número natural como resultado. Logo, para subtrair quaisquer números naturais é necessário um conjunto mais abrangente, os inteiros. Percebe-se que a noção de orientação, mencionada no item 2.1, não é foco de discussão aqui. Do ponto de vista matemático, os inteiros são construídos a partir de uma noção de equivalência entre pares de números naturais: subtrações equivalentes.

Além disto, os inteiros formam uma estrutura algébrica, obedecendo algumas propriedades. Estas propriedades relacionadas às operações são, para a adição em $\mathbb{Z}$: associatividade, comutatividade, existência de elemento neutro, existência de inverso; para a multiplicação em $\mathbb{Z}$: associatividade, distributividade desta operação em relação à adição, comutatividade, existência de elemento neutro, lei do cancelamento. (RIPOLL *et al.*, 2016).

Esta estrutura algébrica do conjunto dos números inteiros possui as operações de adição e multiplicação, as quais satisfazem as propriedades já mencionadas. Tais propriedades permitem que o conjunto possua além do teorema condizente à "regra de sinais", uma operação inversa para a adição, no caso, a subtração. Entretanto, não permitem o mesmo para a operação da multiplicação. Assim, o conjunto possui as operações de adição, multiplicação e subtração, bem definidas. (RIPOLL *et al.*, 2016).

[9]Ripoll, Rangel e Giraldo (2016, p. 64, grifo nosso) consideram como pilares elementares os aspectos fundamentais que devem ser abordados na Educação Básica relacionados a um conceito ou definição.

Do ponto de vista matemático, Ripoll *et al.* (2016) afirmam que conhecer os elementos que cada conjunto (naturais, inteiros, racionais, irracionais e reais) abrange e as propriedades do conjunto dos inteiros é suficiente para compreender as operações "bem definidas" nos demais conjuntos, bem como suas propriedades e, partindo destas, seus teoremas aritméticos, por exemplo, a "regra de sinais" dos inteiros. Do ponto do ensino, os pesquisadores supracitados consideram como *"pilares elementares"* os seguintes aspectos: a compreensão de número como quantidade munida de uma orientação; ressignificação do zero; possibilidade de subtrair quaisquer dois números naturais; ressignificação das operações; reconhecimento de diferentes somas ou subtrações para obter o mesmo resultado. Quanto à definição dos números inteiros, os autores acreditam que ao longo da Educação Básica ela esteja dividida em duas partes: definição de números negativos e ressignificação de números positivos. (RIPOLL *et al.*, 2016).

Compreende-se que, na Educação Básica, os estudantes precisam ter a oportunidade de ampliar a ideia de número, de naturais para reais. Em seguida, devem estender as propriedades das operações do conjunto anterior para o próximo, percebendo quais diferenças ocorrem entre as propriedades e qual o motivo destas diferenças. (MOREIRA, 2004; RIPOLL *et al.*, 2015).

Ressalta-se que os conceitos matemáticos relacionados aos conjuntos numéricos não são construídos em um curto espaço de tempo, e sim, ao longo de todo período, por meio de diversas situações, cada uma abordando uma série de conceitos, propriedades e representações. Em outros termos, no decorrer do percurso de apropriar-se de conceitos e propriedades, inicia-se a aprendizagem sobre novos conhecimentos e conceitos (RIPOLL *et al.*, 2015), para, então, ao final da Educação Básica obter domínio das propriedades básicas de cada conjunto numérico.

Segundo Ripoll *et al*. (2015), na Educação Básica não se deve exigir o mesmo rigor do que no Ensino Superior. Na Educação Básica, o professor tem o desafio de buscar argumentos cabíveis a cada ano de ensino que conduzam à mesma ideia. Por exemplo, Almeida (2015, p. 35) sugere questões para uma revisão dos conjuntos para o Ensino Médio, relacionadas aos Axiomas de Peano. O autor aponta questões como: "todo número natural tem um sucessor? Qual a consequência disso?"; "Podemos afirmar que todo número natural é sucessor de algum número natural?".

Diante desse contexto, acredita-se que o domínio de dada área conceitual, nesta pesquisa, os conjuntos numéricos e suas propriedades, se dá a partir de um longo período e de um processo de problematizações e situações, pois a cada etapa da Educação Básica, os conhecimentos e os conceitos devem se aprimorar, assim elevando o nível de compreensão e generalização do assunto.

3. CAMINHOS METODOLÓGICOS

Os resultados deste trabalho emergem de um movimento de pesquisa que teve inspiração na análise documental e seguiu alguns dispositivos analíticos propostos pela Análise de Conteúdo (BARDIN, 1977). A opção por essa técnica de análise revela a opção pela pesquisa qualitativa.

A Análise de Conteúdo é considerada por Bardin (1977) como um dos ramos da análise documental. Realiza-se um agrupamento de informações, resultando assim em aspectos quantitativos se assim desejar, e a aspectos qualitativos, formando um banco de dados. Para a formação deste banco de dados é importante que o pesquisador saia da "leitura simples do real" passando a analisar e investigar os documentos.

A Análise de Conteúdo é organizada em três etapas. A primeira etapa é denominada *pré-análise*. Este é o momento em que o pesquisador identifica os materiais que serão analisados e realiza uma leitura inicial do material, denominada "leitura flutuante". A escolha dos materiais a serem analisados, nesta pesquisa, foi realizada a partir de um mapeamento na base de dados do Instituo Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP) com o intuito de verificar quais foram os livros didáticos de Matemática dos Anos Iniciais e Finais do Ensino Fundamental, mais procurados por escolas participantes do PNLD/2016 para os Anos Iniciais do Ensino Fundamental e PNLD/2017 para os Anos Finais do Ensino Fundamental, optou-se com a definição do material manter o anonimato em relação as obras analisadas.

Em seguida, foi realizada a etapa intitulada *exploração do material*. Segundo Bardin (1977), nesta etapa busca-se administrar sistematicamente as decisões tomadas na etapa anterior. É o momento de realizar a fragmentação do documento conforme as categorias formuladas anteriormente. Nesta pesquisa optou-se pelas seguintes categorias de análise: *definição e representação dos conjuntos numéricos*, *sucessão*, *reta numerada*, *relação de ordem*, *densidade*, *continuidade* e *operações fechadas*; relacionadas às propriedades das operações (adição e multiplicação): *comutatividade*, *associatividade*, *existência de elemento neutro*, *existência de inverso* e *distributividade*. Ressalta-se que estas categorias foram elaboradas com base no referencial teórico construído para a realização desta pesquisa. Também, é importante destacar que outras categorias podem emergir ao analisar as fontes de produção de dados, no entanto, neste trabalho optamos por enfatizar os aspectos elencados por Caraça (1951), Ripoll *et al.* (2015, 2016), Moreira (2004) e Almeida (2015).

A última etapa da Análise de Conteúdo é denominada *tratamento dos resultados e interpretações*. Este é o momento de reorganizar o documento para torna-lo significativo para o leitor. Esta etapa é apresentada no item a seguir.

4. TRATAMENTO DOS RESULTADOS E INTERPRETAÇÕES

As categorias analisadas, a saber: *definição e representação dos conjuntos numéricos*, *sucessão*, *reta numerada*, *relação de ordem*, *densidade*, *continuidade* e *operações fechadas*; relacionadas às propriedades das operações (adição e multiplicação): *comutatividade*, *associatividade*, *existência de elemento neutro*, *existência de inverso* e *distributividade*, serão abordadas e interpretadas a seguir, em duas subdivisões: 4.1 *propriedades dos conjuntos numéricos* e 4.2 *propriedades das operações*. A cada categoria elencada será apresentada a discussão e os métodos que foram escolhidos para apresentá-la na coleção, bem como considerações e observações sobre a forma como foi trabalhada, fundamentada no referencial teórico deste trabalho.

4.1 Propriedades dos Conjuntos Numéricos

A seguir são apresentadas e discutidas as categorias relacionadas às propriedades dos conjuntos numéricos selecionadas para este estudo.

4.1.1 Definição e representação dos conjuntos numéricos

Ao analisar a coleção de livros didáticos em relação aos números naturais, buscou-se verificar como as ideias de *sucessão* e *ordem* são abordadas, visto que estas são apontadas por Ripoll *et al.* (2015) como "*pilares elementares*" para a formação dos naturais. Percebe-se que as duas noções sugeridas são trabalhadas ao longo da coleção de livros didáticos de *"forma protocolar*[10]*"*, sem problemas que repercutissem em discussões e elaboração de hipóteses sobre os conceitos. Deste modo, não havendo suportes suficientes para elaboração de uma definição de número natural por parte dos estudantes.

A coleção expõe a representação simbólica do conjunto dos naturais como, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$, em diversos momentos. Esta representação só pode ser considerada

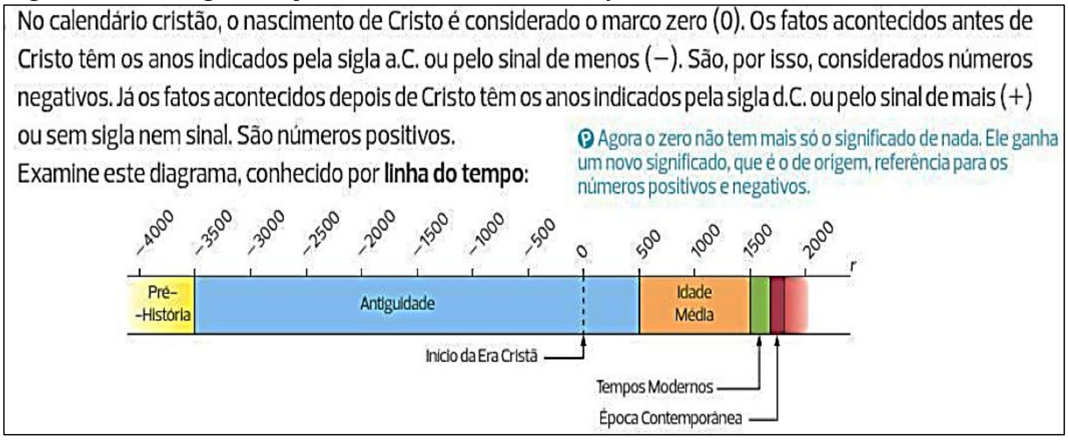
[10] Ripoll *et al.* (2015, p. 55, grifo nosso) definem como forma protocolar atividades do tipo 'Qual o sucessor de 37?'.

autoexplicativa do conjunto, se estiver acompanhada do significado das reticências, o que acontece ao longo da coleção. Porém, a notação mesmo com justificativa do uso das reticências não se torna suficiente para ser considerada uma definição do conjunto, já que esta não trata dos *"pilares elementares"* ou dos axiomas em nenhuma linguagem (matemática, simbólica, materna). (RIPOLL *et al.*, 2015).

Na coleção observa-se que a representação simbólica do conjunto dos números inteiros, $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$, é exposta, bem como para os naturais. Destaca-se que Ripoll *et al.* (2016) não consideram essa representação uma definição, pelo mesmo motivo mencionado para os naturais, ou uma descrição. Descrever um conjunto infinito, na compreensão desses pesquisadores, exige além do entendimento do conjunto anterior, a definição formal do conjunto trabalhado, o que proporcionaria o conhecimento não só dos k primeiros elementos, mas também a percepção do $(k+1)$-ésimo elemento do conjunto. Em outras palavras, para descrever o conjunto dos inteiros é preciso compreender os naturais e a definição dos inteiros, possibilitando, assim, determinar um inteiro qualquer. (RIPOLL *et al.* 2016).

Dentre os "*pilares elementares*" à formação dos números inteiros, apontados por Ripoll *et al.* (2016) e mencionados no item 2.2, a compreensão de número como quantidade munida de uma orientação foi o mais discutido na coleção de livros didáticos analisada. A Figura 1 exemplifica situações as quais abordam esta escolha.

Figura 1 – Abordagem de quantidade munida de orientação.

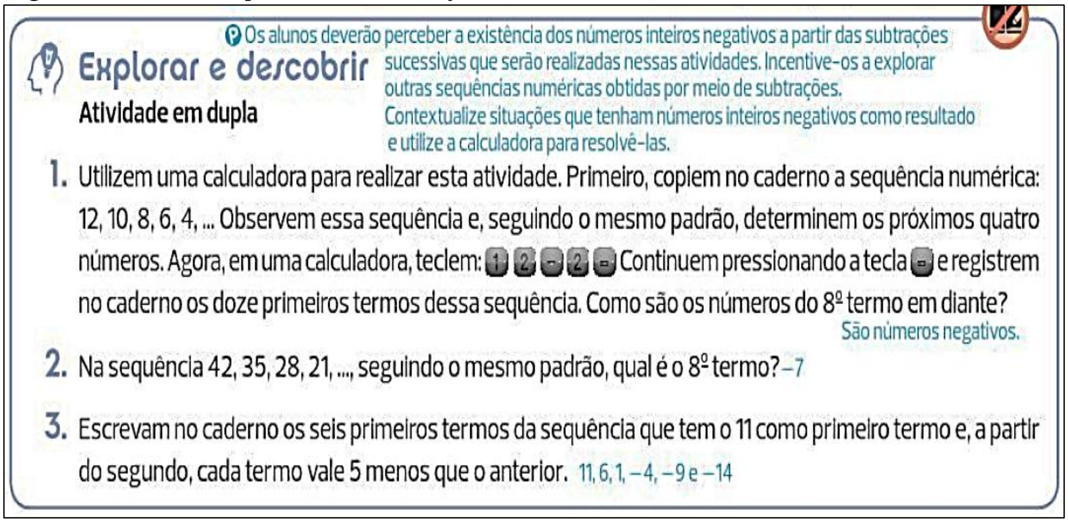


Fonte: LD do 7ºAno.

Entende-se que a discussão inicial do estudo dos números negativos não aborda questões investigativas para os estudantes, apenas exemplifica a utilização destes números no dia a dia.

A possibilidade de subtrair quaisquer dois números naturais foi outro aspecto abordado, entretanto foi apenas sugerido por meio de uma única atividade e por comentário aos professores (Figura 2). Os demais "*pilares elementares"* não foram discutidos. Pode-se afirmar que ideias essenciais para conseguir definir os números inteiros não são evidenciadas na coleção.

Figura 2 – Os inteiros por meio da subtração.



Explorar e descobrir

Atividade em dupla

Os alunos deverão perceber a existência dos números inteiros negativos a partir das subtrações sucessivas que serão realizadas nessas atividades. Incentive-os a explorar outras sequências numéricas obtidas por meio de subtrações. Contextualize situações que tenham números inteiros negativos como resultado e utilize a calculadora para resolvê-las.

1. Utilizem uma calculadora para realizar esta atividade. Primeiro, copiem no caderno a sequência numérica: 12, 10, 8, 6, 4, ... Observem essa sequência e, seguindo o mesmo padrão, determinem os próximos quatro números. Agora, em uma calculadora, teclem: 1 2 − 2 = Continuem pressionando a tecla = e registrem no caderno os doze primeiros termos dessa sequência. Como são os números do 8º termo em diante? São números negativos.

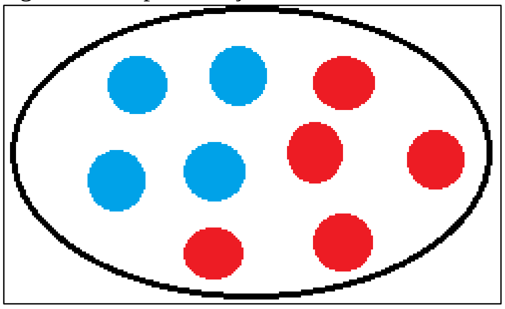
2. Na sequência 42, 35, 28, 21, ..., seguindo o mesmo padrão, qual é o 8º termo? −7

3. Escrevam no caderno os seis primeiros termos da sequência que tem o 11 como primeiro termo e, a partir do segundo, cada termo vale 5 menos que o anterior. 11, 6, 1, −4, −9 e −14

Fonte: LD do 7ºAno.

A Figura 2 mostra a proposta que a coleção dispõe sobre subtração e números inteiros, percebe-se que a mesma apoia-se no uso da calculadora e na elaboração de sequências. Outra possibilidade de abordar essas questões é proposta por Ripoll *et al.* (2016). Os autores sugerem a análise de coleções de fichas diferenciadas pela cor os sinais "−" e "+" (Figura 3).

Figura 3 – Representação de +4 e −5 em ficha.



Fonte: Ripoll *et al.* (2016, p 87).

Ripoll *et al.* (2016) acreditam que por meio deste material é possível representar quantidades positivas (círculos azuis) e quantidades negativas (círculos vermelhos), destacando o estudo do conjunto dos inteiros por meio da "subtração".

A falta de discussões mais profundas ou elaboradas a respeito da subtração nos inteiros sugere na visão de Machado, Bianchini e Maranhão (2015) que o conjunto é tratado apenas como subconjunto dos números reais ou apenas uma extensão em relação aos números naturais. As autoras analisam, ainda, que esta forma de tratamento dos inteiros pode conduzir a simplificações as quais desprezam aspectos fundamentais deste conjunto, por exemplo, suas operações definidas, simetria e números opostos.

Quanto aos racionais, contrariando o que Caraça (1951) sugere, a coleção não aborda o problema da medida como marco inicial para trabalhar este conjunto. Verifica-se situações que envolvem os racionais no dia a dia, sem abordar medidas ou argumentos históricos. O mesmo acontece com os números irracionais e reais. Ressalta-se que Caraça (1951) defende que a discussão e estudo desses conjuntos devem estar diretamente ligados a ideias de comensurabilidade e incomensurabilidade, ambas abordadas por meio da construção geométrica.

Almeida (2015) acredita que uma das primeiras dificuldades encontradas por estudantes ao compreender e tratar de números racionais é ao iniciar o contato com frações. O autor justifica esta dificuldade ao fato de ser necessário estabelecer uma unidade e subunidade.

Quanto à representação dos números racionais, os volumes do 4º ao 6ºAno trabalham com frações e números decimais sem citar o conjunto aos quais estes números pertencem. No volume do 7ºAno, há uma discussão sobre números racionais e, a partir de então, passa-se a enfatizar os tipos de representação destes números, por exemplo: *"Qualquer número que pode ser escrito como quociente de dois números inteiros, em que o divisor é diferente de zero, é chamado de* ***número racional****."*. Trechos como o exemplificado acima estão presentes ao longo dos LD do 7º ao 9ºAno, muitas vezes utilizados como "definição".

A representação simbólica do conjunto dos racionais,

$$\mathbb{Q} = \left\{ x \mid x = \frac{p}{q}, com\ p \in \mathbb{Z}\ e\ q \in \mathbb{Z}^* \right\} \qquad (1),$$

é apresentada diferentes volumes da coleção. Como justificativa para representação "genérica" dos números racionais, o autor menciona que no conjunto dos racionais não é possível enumerar:

> Chame a atenção dos alunos para o fato de que **é impossível enumerar os elementos do conjunto dos números racionais**, como fazemos para o conjunto dos números naturais e para o conjunto dos números inteiros. Daí a necessidade de representa-lo simbolicamente." (grifo nosso, LD do 7ºAno).

No *Manual do Professor*, verifica-se outra explicação para a questão supracitada:

> Nesses conjuntos *(referindo-se a ℕ e ℤ)* é possível escrever números consecutivos, o que não ocorre no conjunto ℚ, pois, entre quaisquer dois números racionais, sempre existe outro número racional." (LD do 7ºAno).

Percebe-se que o termo "enumerar" não está relacionado ao conceito de enumerabilidade. Em outras palavras, o termo enumerar refere-se a impossibilidade de escrever números consecutivos no conjunto dos racionais. Embora tenha recebido atenção no decorrer do *Manual do Professor*, acredita-se que este termo, expresso no exemplar dos estudantes, proporciona distorções em relação à enumerabilidade do conjunto dos racionais. Mesmo que a coleção não traga discussões explícitas sobre a enumerabilidade em nenhum conjunto numérico, citar em comentários o termo "enumerar" relacionado aos números racionais acarreta a necessidade de abordar a discussão da enumerabilidade, esclarecendo sua definição e consequências ao longo do conjunto.

Uma abordagem sobre a enumerabilidade do conjunto dos racionais é proposta por Caraça (1951) e Ávila (2001), os quais compreendem que ao aprofundar a construção deste conjunto, deve-se considerar que existem dois tipos de infinidade: a numerável (dos números naturais) e a contínua (dos pontos de uma reta). Desta forma, para perceber que o conjunto dos números racionais é enumerável deve-se verificar a existência de equivalência entre o próprio conjunto dos racionais e o conjunto dos naturais, ou seja, mostrar a existência de uma correspondência biunívoca entre eles. Para isso, agrupam-se todos os números racionais de modo que a soma dos dois termos de cada fração (numerador e denominador) sejam as mesmas em cada grupo:

$$1^{\underline{o}}\ grupo\ (soma = 2)\colon \left\{\frac{1}{1}\right\} \qquad (2)$$

$$2^{\underline{o}}\ grupo\ (soma = 3)\colon \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{1}\right\} \qquad (3)$$

$$3^{\underline{o}}\ grupo\ (soma = 4)\colon \left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{2}, \frac{3}{1}\right\} \qquad (4)$$

$$\vdots$$

Deve-se então colocar cada elemento destes grupos em correspondência a um número natural:

$$\left\{\frac{1}{1}\right\},\ \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{1}\right\},\ \left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{2}, \frac{3}{1}\right\} \cdots \qquad (5)$$

Análogo à correspondência acima, se tomar um número racional irredutível qualquer $\frac{m}{n}$, este número será elemento do grupo $m + n$ e, por fim, dentro deste grupo ocupa um lugar determinado, o qual é correspondido a um único número natural. Assim, Caraça (1951) compreende que o conjunto dos números racionais possui o mesmo tipo de infinito que os naturais, o numerável. Ou seja, estabelece a equivalência entre números naturais e números racionais, concluindo a enumerabilidade do conjunto dos números racionais.

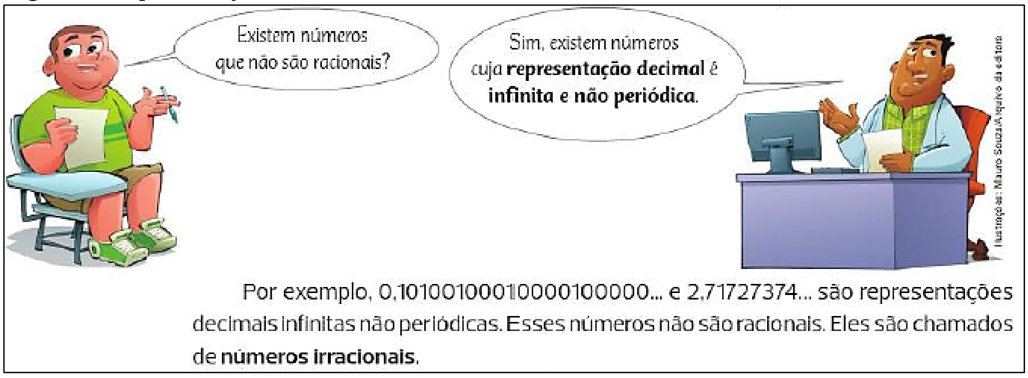
Constata-se que o termo utilizado pelo autor *("enumerar")* não se refere à enumerabilidade. Porém, não distingue e não discute questões de enumerabilidade no conjunto dos racionais, nem mesmo esclarece que ao mencionar o termo escolhido busca a ideia de sucessão (quando fala em consecutivos) nos conjuntos numéricos.

Ao comparar as possibilidades de escrita de números consecutivos no conjunto dos naturais com a impossibilidade de fazer o mesmo no conjunto dos números racionais, o autor entra implicitamente na discussão do Princípio da Indução Finita, um dos axiomas fundamentais da construção do conjunto dos números naturais. Segundo Ripoll *et al.* (2015) este princípio possibilita o processo de obtenção de sucessores dos números naturais progressivamente a partir do 0, esgotando o conjunto dos naturais, ou seja, cobrindo completamente o conjunto, atingindo todos seus elementos.

Ressalta-se que isso não acontece para o conjunto dos números racionais, visto que ao realizarmos um processo similar a esse, acrescentando progressivamente uma quantidade (qualquer que seja) para um certo $k \in \mathbb{Q}^+$, mesmo que todos os elementos obtidos sejam pertencentes aos racionais, o processo não esgotará o conjunto como acontece nos naturais, ou seja, o processo não alcançará todos os elementos. Assim, compreende-se que a coleção utiliza do termo "enumerar" buscando uma discussão sobre a ideia de números consecutivos e sucessão a qual foi exemplificada acima. (CARAÇA, 1951; ÁVILA, 2001).

Em relação aos irracionais, há uma discussão inicial sobre este conjunto com base no diálogo exposto na Figura 4.

Figura 4- Representação dos números irracionais



Fonte: LD do 8ºAno.

Ripoll *et al.* (2016) criticam caracterizações dos números irracionais como a exposta pela Figura 4. Para os pesquisadores essas caracterizações influenciam que os estudantes já possua a compreensão da existência de números além dos já conhecidos (os racionais). Tornando-se incoerente se o objetivo a ser alcançado seja a ampliação dos conjuntos numéricos.

Na coleção, os irracionais são diferenciados dos racionais por meio da representação. Observa-se esta afirmação no seguinte comentário:

> *É importante saber que* ***existem números que não são racionais.*** *Eles serão estudados futuramente. As raízes quadradas não exatas de números naturais não são números racionais* $(\sqrt{10} - 3{,}16227\ldots;\ \sqrt{15} - 6{,}708203\ldots;)$, *pois a parte decimal é infinita mas não forma dízima.* (LD do 7ºAno).

Diante desses resultados, pode-se afirmar que nem todos *"pilares elementares"* para formação dos conjuntos numéricos, conforme sugerem Ripoll *et al.* (2015, 2016), foram abordados na coleção. Apenas foi dada ênfase para a representação simbólica dos conjuntos. Entende-se que as representações simbólicas, também, são importantes no estudo de conjuntos numéricos. Segundo Danyluk (2002 apud MAIA; MARANHÃO, 2015), a Matemática apresenta uma linguagem de abstração completa e como qualquer outro sistema linguístico, necessita de signos. Para a autora, ler em Matemática é buscar conhecer e compreender o que se quer expressar matematicamente, entender o significado matemático na ideia transmitida. Com isso o estudante precisa tomar uma postura ativa, crítica e transformadora dos conhecimentos, adaptando-os para sua realidade.

Na mesma linha de pensamento de Danyluk, Carvalho (2010) acredita que a má compreensão por parte dos professores de que uma demonstração ou definição matemática dependem excessivamente do uso da simbologia matemática, faz com que evitem estes tipos de discussões.

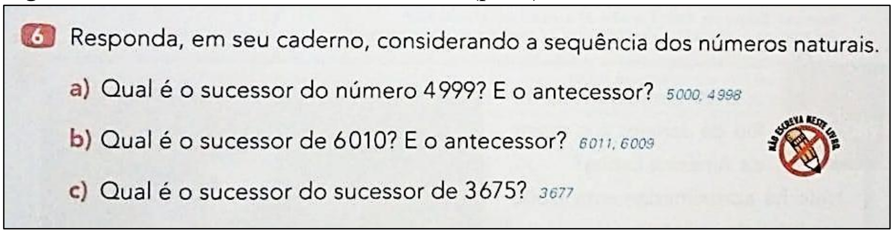
4.1.2 Sucessão

Ripoll *et al.* (2015) afirmam que a construção dos números naturais por meio dos Axiomas de Peano não deve ser trabalhada diretamente com os estudantes. Entretanto, defendem que esses Axiomas propiciam um papel central em relação à noção de *sucessão*, já mencionada como um dos *"pilares elementares"* na construção dos naturais. Os autores sugerem que sejam discutidas algumas ideias ao longo da construção dos naturais, a saber:

> i) $\mathbb{N}$ é construído por meio do processo de *se tomar o sucessor;*
> ii) existe um único elemento que não é sucessor de nenhum outro;
> iii) o processo de tomar o sucessor pode ser continuado indefinidamente (evidenciando a infinitude de $\mathbb{N}$). (RIPOLL *et al.* 2015, p.55).

Assim, a noção de sucessor não deve ser tratada de “*forma protocolar”* na escola, mas como noção estruturante para o conjunto dos naturais. Contrariando as sugestões e ideias dos autores supracitados, verifica-se que nos volumes que discutem a sucessão, 4°, 5º e 6ºAnos, o autor trabalha o conceito de “*forma protocolar”*, como mostram as Figuras 5, 6, 7.

Figura 5 – Atividade de sucessão do 4ºAno (p. 33)



6 Responda, em seu caderno, considerando a sequência dos números naturais.

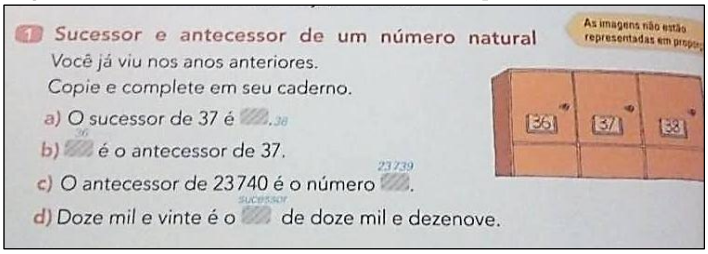
a) Qual é o sucessor do número 4999? E o antecessor? 5000, 4998

b) Qual é o sucessor de 6010? E o antecessor? 6011, 6009

c) Qual é o sucessor do sucessor de 3675? 3677

Fonte: LD do 4ºAno.

Figura 6 – Atividade de sucessão no 5ºAno (p. 14)



1 Sucessor e antecessor de um número natural

Você já viu nos anos anteriores.

Copie e complete em seu caderno.

a) O sucessor de 37 é ▒. 38

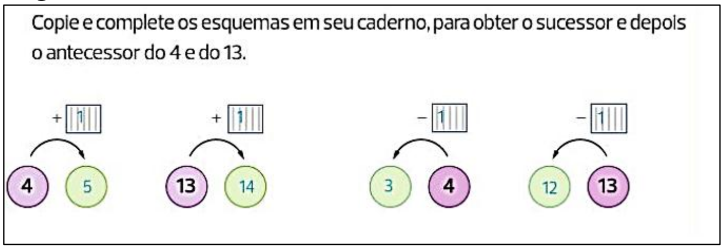
b) ▒ é o antecessor de 37. 36

c) O antecessor de 23740 é o número ▒. 23739

d) Doze mil e vinte é o ▒ de doze mil e dezenove. sucessor

Fonte: LD do 5ºAno.

Figura 7 – Atividade de sucessão.



Fonte: LD do 6ºAno.

Percebe-se que o assunto *sucessor* nos Anos Iniciais não é discutido como um dos *“pilares*” estruturantes dos naturais, fazendo com que ideias como a primeira noção de infinito, em que os estudantes percebem a inexistência de um número maior que os demais, acabam sendo deixadas de lado ou pouco exploradas.

No decorrer do 6ºAno e 8ºAno, o autor sugere aos professores apenas comentários sobre as ideias (*ii*) e (*iii*), citadas anteriormente. Entende-se que deveriam constar ao longo da coleção/capítulos ou no *Manual do Professor* atividades que potencializassem discussões acerca da sucessão e as possíveis conclusões relacionadas aos números naturais. Almeida (2015) propõe questões abertas que acarretam na conclusão de que nem todo número natural é sucessor de outro natural, ou que pode-se tomar sucessores infinitamente tornando o conjunto infinito, além da comparação entre dois infinitos, como os pares e os naturais.

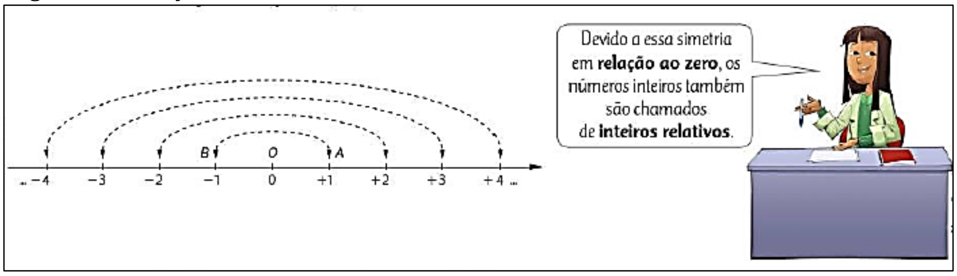
Ressalta-se que, como consequência da limitada discussão sobre sucessão, a noção de infinito acaba sendo pouco explorada na coleção, ficando restrita à justificativa do uso das reticências.

4.1.3 Reta Numerada

No estudo dos números naturais a reta numerada não é abordada na coleção analisada. Nos livros do 4º ao 6ºAno são apresentados segmentos de reta numerados e semirretas. Apenas no 6ºAno é definido o termo *reta numerada* como uma reta com sentido e unidade definidos, utilizada como base para a discussão de ordem no conjunto dos naturais.

Ao tratar dos números inteiros a coleção recorre à *reta numerada*, destacando as noções de referencial e opostos, bem como a relação de simetria, como mostra a Figura 8.

Figura 8 – Relação de simetria



Fonte: LD do 7ºAno.

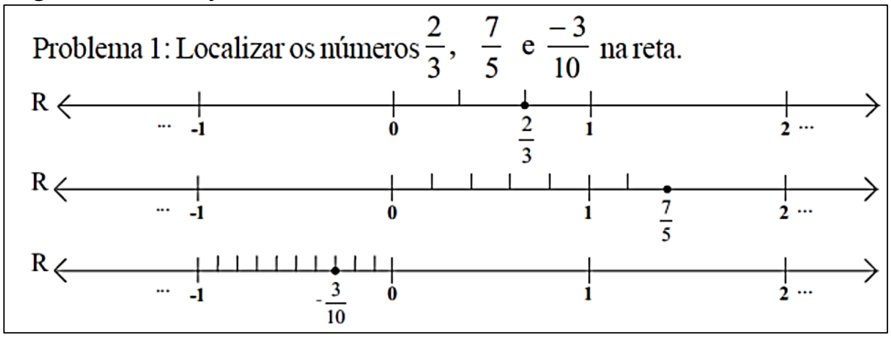
Ripoll *et al.* (2016) afirmam que a *reta numerada* tem papel fundamental na compreensão dos inteiros, proporcionando visualizações que facilitam discussões sobre opostos, simetria e referencial, como abordado na coleção.

Tanto Ripoll *et al.* (2016) como Silva, Reis e Silva (2016) acreditam que os estudantes chegam ao 7ºAno (quando inicia-se a discussão sobre inteiros) já familiarizados com semirretas ou segmentos de retas numerados com números naturais. No entanto, no estudo dos números inteiros, Silva *et al.* (2016) apontam que há dificuldades relacionadas à *reta numerada*, por exemplo, a compreensão da ordem dos valores e o entendimento do zero não apenas como a ausência de algo, mas como relação de dois valores opostos ou referencial. Nesse sentido, entende-se que a noção do zero como relação de dois valores opostos ou como referencial foi pouco explorada na coleção.

A coleção não aborda questões e estratégias com objetivo de construir a percepção sobre a correspondência dos racionais na reta, apenas, apresenta conclusões prontas sem espaços para discussões e elaboração de hipóteses. Segundo Moreira (2004), ao não haver uma consolidação das ideias relacionadas à reta e aos números racionais, dificultará a passagem deste conjunto aos reais.

Onuchic e Allevato (2008) sugerem que os números racionais sejam trabalhados segundo suas *"personalidades"* sendo uma delas considerá-los Pontos Racionais, a qual repercute que todo número racional ocupa um ponto na reta numerada. Com essa noção, as autoras buscam a discussão acerca da distinção entre, por exemplo, $\frac{2}{3}$ e 0,6 ou 0,666.

Figura 9: Localização de números racioanis na reta



Fonte: Onuchic e Allevato (2008, p.87)

Entende-se que a discussão acerca da correspondência dos racionais a pontos da reta na coleção é restrita, pois enfatiza comentários como os apresentados na Figura 10.

Figura 10 – Racionais e reta numerada

Fonte: LD do 8ºAno.

Moreira (2004) considera que a compreensão da reta é importante para a percepção de questões relacionadas aos inteiros, bem como é indispensável na passagem de racionais aos reais. O autor entende que a percepção de que todo número racional corresponde a um ponto da reta (mas não a preenche), deve envolver um conjunto de atividades e estratégias pertencentes a um planejamento cuidadoso, não apenas comentários como pode-se observar na Figura 10.

Quanto à representação de números irracionais e reais na reta, a coleção trata de forma similar aos números racionais, enfatizando a existência de pontos na reta não correspondentes aos racionais, isto é, os números irracionais, e a correspondência um a um entre reais e pontos da reta. Para ambas as situações, a coleção apresenta os comentários reproduzidos na Figura 11.

Figura 11 – Reais e reta numerada

Fonte: LD do 8ºAno.

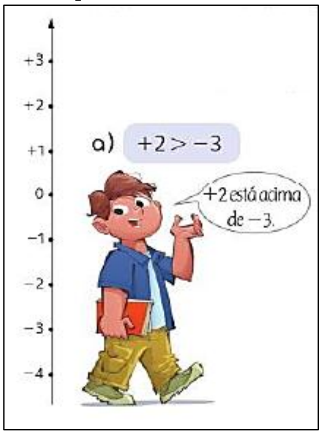
Percebe-se que mesmo ao trabalhar os números reais, a coleção não aborda questões e estratégias para construção de noções relacionadas à correspondência entre os pontos da reta e os reais, como sugere Moreira (2004). Nem a noção de Cortes de Dedekind é abordada.

4.1.4 Relação de Ordem

Como já mencionado, Ripoll *et al.* (2015) consideram como *"pilares elementares"* dos naturais a sucessão e a relação de ordem. Segundo os autores, a relação de ordem é um dos aspectos fundamentais dos naturais, tendo importâncias distintas na Educação Básica em outros conjuntos. Neste sentido, Moreira (2004, p.115) constatou que muitos estudantes transportam a noção de ordem dos naturais para os racionais e compreendem erroneamente que "quanto mais dígitos o número tem, maior ele é". Este fato pode estar ligado à abordagem da relação de *ordem* nos conjuntos, sendo limitada a ampliação dessa noção em conjuntos diferentes dos naturais. Tendo isto em vista, ao analisar a coleção percebe-se que a relação de ordem quanto aos naturais é tratada de *"forma protocolar"*, com questões referentes à utilização correta dos símbolos $<$ ou $>$.

Para a compreensão da relação de ordem no conjunto dos números inteiros, torna-se essencial a explorar a reta (RIPOLL *et al.* 2016). Esperasse que os estudantes ao discutir a ordem dos inteiros já conheçam e compreendam a noção referente aos naturais e utilizem desta compreensão para os inteiros já que continua prevalecendo no conjunto. Com o forte amparo da reta numerada ao longo desta discussão, torna-se comum que os estudantes formulem ideias envolvendo "direita/esquerda" e "acima/abaixo", um exemplo abordado reproduzido na Figura 12.

Figura 12 – Relação de ordem para os inteiros



Fonte: LD do 7ºAno.

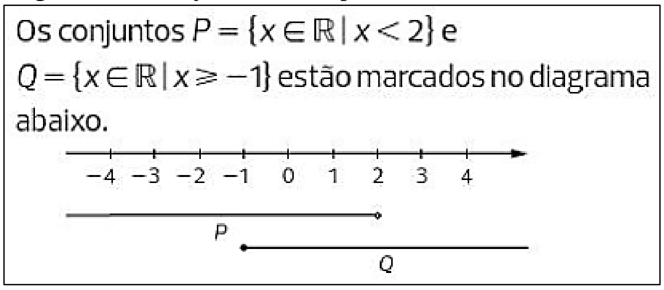
Destaca-se que Ripoll *et al*. (2016) compreendem que distinções como "acima/abaixo", exemplificadas acima, são inadequadas devendo ser substituídas pela distinção em sentidos: positivo (crescente) e negativo (decrescente).

Almeida (2015) entende que nos racionais a relação de ordem deve ir além de "maior que" e "menor que", discutindo também a ideia de "estar entre", apoiada em aproximações e visualizações da reta numerada. Contudo, percebe-se ao longo da coleção que a discussão desta relação não vai além de "maior que" e "menor que", porém sem o auxílio da reta numerada, apenas com base em conclusões como *"[...] número negativo é menor que número positivo."*. O debate sobre "estar entre" ocorre apenas ao citar a *densidade* do conjunto, porém continua sendo pouco explorada esta ideia.

Quanto ao conjunto dos irracionais, a relação de ordem se restringe a distinções entre "maior que" e "menor que", com intuito de realizar aproximações para raízes não exatas. Almeida (2015) em sua dissertação aborda atividades e discussões que vão além das distinções identificadas nos volumes da coleção. Por exemplo, *"Sabendo apenas que 1,4* $< \sqrt{2} < 1{,}5$ *e* $1{,}7 < \sqrt{3} < 1{,}8$ *é possível determinar uma aproximação para* $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ *com uma casa decimal de precisão?"*. Constata-se que a abordagem da relação de ordem nos irracionais é limitada e exposta de *"forma protocolar"*. Entende-se que poderia ir além, propondo mais problematizações envolvendo a reta e operações entre outros conjuntos, como o exemplo citado acima.

Para os números reais, a coleção aborda a mesma ideia trabalhada nos irracionais, isto é, evidenciando a ordem referente apenas à “maior que” e “menor que”. Porém, agora, relaciona a ordem às desigualdades no conjunto, utilizando diferentes representações (Figura 13).

Figura 13 – Relação de ordem para os reais



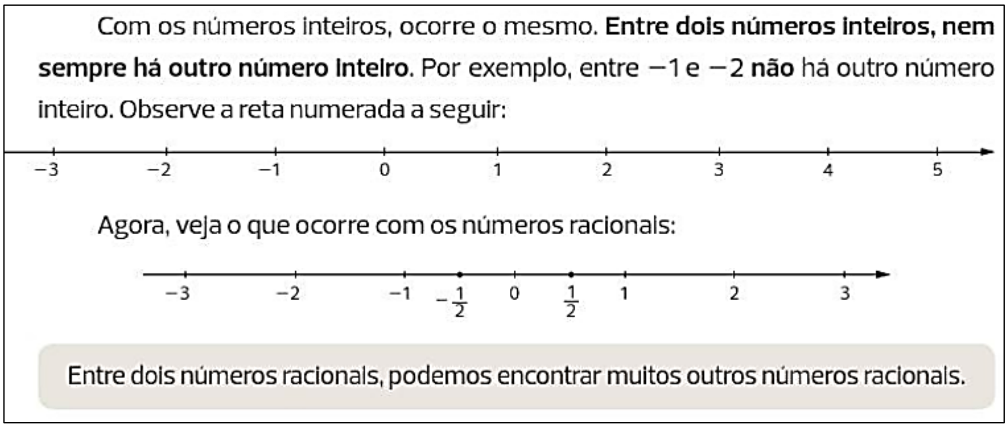
Fonte: LD do 8ºAno.

A representação por meio da reta e diagramas como mostra a Figura13 obedece a relação de ordem vigente nos racionais, o que segundo Ávila (2001) deve prevalecer para compreensão da relação aos reais. Caraça (1951) vai além do que Almeida (2015) e Ávila (2001) sugerem sobre relação de ordem nos reais, afirmando que a ordenação do conjunto pode ser compreendida com simplicidade entre dois pontos da reta, porém esta discussão não é abordada ao longo da coleção analisada (não havendo por que exemplificá-la neste momento).

4.1.5 Densidade

Verifica-se que a partir do volume do 8ºAno a *densidade* é definida e discutida na coleção. Há uma comparação entre os conjuntos com intuito de levar o estudante a perceber que o conjunto dos naturais e dos inteiros não são densos como os racionais (Figura 14).

Figura 14 – Densidade dos racionais nos reais


Com os números inteiros, ocorre o mesmo. **Entre dois números inteiros, nem sempre há outro número inteiro**. Por exemplo, entre −1 e −2 **não** há outro número inteiro. Observe a reta numerada a seguir:

Agora, veja o que ocorre com os números racionais:

Entre dois números racionais, podemos encontrar muitos outros números racionais.

Fonte: LD do 8ºAno.

Em seguida, são abordadas três maneiras distintas para determinar números racionais entre outros dois conhecidos sendo por meio de: média aritmética, frações equivalentes e representação decimal.

Caraça (1951) define um conjunto *denso* como qualquer conjunto em que entre dois de seus elementos quaisquer existam uma infinidade de elementos do mesmo conjunto, ideia encontrada no livro didático, como já mencionado. Acredita-se que a ideia de infinito deveria ser discutida ao tratar de *densidade,* visto que a compreensão da *densidade* dos racionais nos reais depende da noção da infinidade. Além disso, entende-se que ao compreender a infinidade (dos naturais, por ser o primeiro conjunto discutido) o estudante já tem noções suficientes para construir a ideia de *densidade* dos racionais nos reais (CARAÇA, 1951).

A densidade acerca dos irracionais nos reais não é tratada na coleção, uma vez que a ênfase se restringe apenas aos "Números Irracionais Notáveis", por exemplo, π (*pi*) e oϕ (*phi*).

4.1.6 Continuidade

A continuidade não foi citada na coleção. Aspectos relacionados a esta propriedade dos reais e à reta numerada são abordados no comentário da Figura 11 (apresentada na categoria *reta numerada*).

Visto a falta de discussão sobre este assunto na coleção, cabe ressaltar que Caraça (1951) considera a *continuidade* como uma das questões mais abrangentes e discutidas na Matemática como ciência. Acredita ainda que problemas que permearam décadas na ciência sobre aspectos da reta numérica permaneceram por este longo período graças a não distinção entre *densidade* e *continuidade.* O autor afirma que normalmente tem-se a ideia de algo contínuo como *"gradações insensíveis*[11]*"*, porém defende que a reta possui mais do que simples *"gradações insensíveis"*, que se apenas o fosse isso, ela seria apenas *densa* e não contínua.

Richard Dedekind (1831-1916) aborda a continuidade por meio de cortes na reta[12], conforme Almeida (2015), uma abordagem similar pode ser trabalhada no final do Ensino Fundamental, já que envolve conceitos construídos ao longo desta etapa.

4.2 PROPRIEDADES DAS OPERAÇÕES

Ao longo da Educação Básica o ensino das quatro operações elementares inicia-se nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. No decorrer desta etapa de escolaridade (Anos Iniciais e Finais), os estudantes desenvolvem habilidades que possibilitam a análise das operações com uma nova perspectiva, percebendo relações presentes nas operações. (RIPOLL *et al.*, 2015).

Ripoll *et al.* (2015) apontam alguns objetivos a serem alcançados no ensino das operações durante o Ensino Fundamental, a saber:

> 1. a compreensão conceitual das operações, de suas propriedades e de seus diferentes contextos e interpretações;
> 2. a compreensão das justificativas para a legitimidade dos algoritmos das operações, com base nas propriedades de cada uma das operações e na estrutura do sistema de numeração decimal [...];
> 3. a destreza na realização dos algoritmos, o que inclui a eventual escolha de algoritmos diferentes dos tradicionais, de acordo com a conveniência de cada situação numérica. (RIPOLL *et al.* 2015, p.82)

Estes objetivos foram utilizados para analisar as seguintes categorias: *comutatividade* e *associatividade.* Além disso, em cada categoria foi observada a propriedade a respeito da adição e da multiplicação.

4.2.1 Comutatividade

A respeito da propriedade de *comutatividade*, a coleção inicia a discussão no 5ºAno e se estende ao 6ºAno com tópicos exclusivos sobre *Propriedades da adição e aplicações*[13]. Esta propriedade é apresentada em exemplos e no seguinte comentário, direcionado ao professor (Figura 15).

[11]Caraça cita um exemplo e um contraexemplo desta noção de "gradações insensíveis" no dia a dia, respectivamente, como o movimento de um carro na estrada e o movimento de um canguru na mesma estrada. (CARAÇA, 1951, p. 57).
[12] Tal abordagem pode ser visualizada em Caraça (1951, p. 59).
[13]Subdivisão presente no LD do 5ºAno no tópico *Adição de números naturais*, a qual aborda as propriedades de *comutatividade* e *associatividade.*

Figura 15 – Comentário sobre *comutatividade*

> É importante ressaltar que não se deve, a partir de alguns poucos exemplos, tirar conclusões gerais. Por isso, peça aos alunos que testem muitos casos até se convencerem de que vale sempre, percebendo a existência da propriedade.

Fonte: LD do 6ºAno.

Porém, Ripoll *et al.* (2015) afirmam que a abordagem não deve se limitar a comprovação por meio de exemplos. Os autores compreendem que é importante justificar a validade das propriedades das operações. No caso da comutatividade é suficiente, no Ensino Fundamental, verificar a validade à partir de *exemplos suficientemente genéricos*[14].

Percebe-se que a coleção almeja exemplificar situações em que a propriedade facilita o cálculo e a resolução do problema, como mostra a Figura 16.

Figura 16– Aplicação da comutatividade da adição

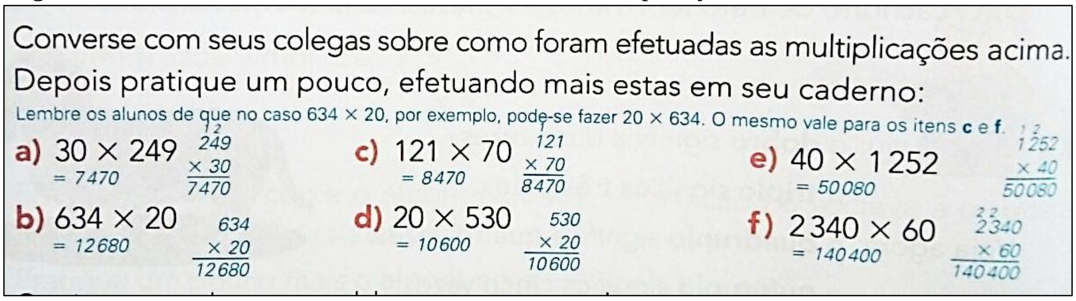
Fonte: LD do 6ºAno.

A discussão sobre comutatividade da adição é encerrada com a aplicação da propriedade no exemplo mostrado na Figura 16. Moreira (2004) sinaliza que normalmente o estudante "aceita" a propriedade da comutatividade e, na falta de uma compreensão mais elaborada envolvendo os significados das operações, transfere indevidamente a propriedade para a subtração e divisão. Acredita-se que discussões sucintas como a apresentada na coleção favorecem o erro, citado por Moreira (2004).

Em relação à multiplicação, diferente do que ocorre para a adição (que não utiliza da propriedade antes de citá-la na subdivisão sobre propriedades da adição), a propriedade é utilizada no 4ºAno. Porém, é utilizada apenas como método para "facilitar" o desenvolvimento do algoritmo usual da multiplicação, evitando fatores multiplicativos com muitos algarismos, como pode-se observar na Figura 17.

[14]Exemplos que contribuem para o desenvolvimento do pensamento matemático genérico, não restrinjam uma quantidade finita de casos e revelem a estrutura matemática da situação. (RIPOLL *et al*. 2015, p. 89).

Figura 17 – Atividade utilizando a comutatividade da multiplicação



Converse com seus colegas sobre como foram efetuadas as multiplicações acima.
Depois pratique um pouco, efetuando mais estas em seu caderno:
Lembre os alunos de que no caso 634 × 20, por exemplo, pode-se fazer 20 × 634. O mesmo vale para os itens **c** e **f**.

a) 30 × 249 = 7470
b) 634 × 20 = 12680
c) 121 × 70 = 8470
d) 20 × 530 = 10600
e) 40 × 1252 = 50080
f) 2340 × 60 = 140400

Fonte: LD do 4ºAno.

Percebe-se que a comutatividade da multiplicação é utilizada pela coleção implicitamente desde o 4ºAno, contudo, no 5ºAno ocorre o mesmo que a comutatividade da adição (a coleção propõe exemplos e destes conclui a propriedade). Compreende-se que o fato da propriedade ser trabalhada desde o início da coleção e não apenas no momento em que é apresentada, possibilita uma melhor compreensão por parte dos estudantes. Fato que segundo Ripoll *et al.* (2015) proporciona maior desenvolvimento do pensamento matemático dedutivo em relação a esta propriedade.

Ao analisar a propriedade da comutatividade para ambas as operações, percebe-se que em nenhuma delas busca-se alcançar os 3 objetivos elencados por Ripoll *et al*. (2015) em sua totalidade.

Quanto ao objetivo (1), entende-se que a coleção buscou alcançar a compreensão das propriedades em diferentes contextos, principalmente, em relação à multiplicação, a qual foi mais discutida. Em relação ao objetivo (2), compreende-se que não houve discussões suficientes para compreensão da legitimidade dos algoritmos apresentados e utilizados ao longo dos livros didáticos. No que tange ao objetivo (3), verifica-se que há situações que buscam desenvolvê-lo. Como exemplo da discussão para o alcance do objetivo (3) está na Figura 16. Além disso, a coleção dispõe de subdivisões que discutem apenas cálculos rápidos, mentais ou diferenciados, apresentando diferentes algoritmos possíveis.

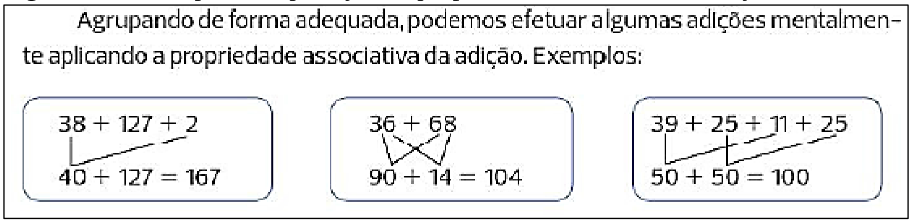
4.2.2 Associatividade

A coleção inicia a discussão sobre *associatividade* no 5ºAno e a aprofunda até o 6ºAno. Inicialmente, utiliza da propriedade da adição para percebê-la na multiplicação (o mesmo acontece na *comutatividade* ao 5ºAno).

Como a associatividade e a comutatividade são discutidas na mesma subdivisão do capítulo tanto para 5º como para o 6ºAno, ambas são abordadas com as mesmas estratégias: atividade proposta pelo *Explorar e Descobrir,* definição e aplicação da propriedade.

Percebe-se que em relação à propriedade da adição, a coleção utiliza da soma posicional dos números (Figura 18).

Figura 18 – Exemplos de aplicação da propriedade associativa da adição



Fonte: LD do 6ºAno.

Porém, a definição utilizada pela coleção é: *"Em uma adição de três ou mais parcelas, é indiferente quais delas vamos adicionar primeiro."* (LD do 6ºAno, p.39). Percebe-se que a definição apresentada da propriedade se refere a somas de três ou mais parcelas, ao passo que, em seguida, exemplifica a mesma com a soma de apenas duas parcelas (36+68), além de exemplos com três e quatro parcelas, o que pode prejudicar a compreensão da propriedade por parte dos estudantes, já que a coleção demonstra incoerência entre definição e aplicação da propriedade. Apresentar sugestões de discussão ao professor por meio de comentários proporcionaria uma melhor apropriação por parte do professor para aprofundar a noção por trás do exemplo.

Quanto à multiplicação, a discussão é restrita a um exemplo e deste se conclui de que o mesmo vale em qualquer situação e, em seguida, se define a propriedade. Ripoll *et al.* (2015) afirmam que situações pouco exploradas como esta, não contribuem na compreensão conceitual da operação de multiplicação, o que por sua vez pode levar à errônea ideia de que a propriedade prevalece em todas as outras operações, como aponta Moreira (2004) para a *comutatividade*.

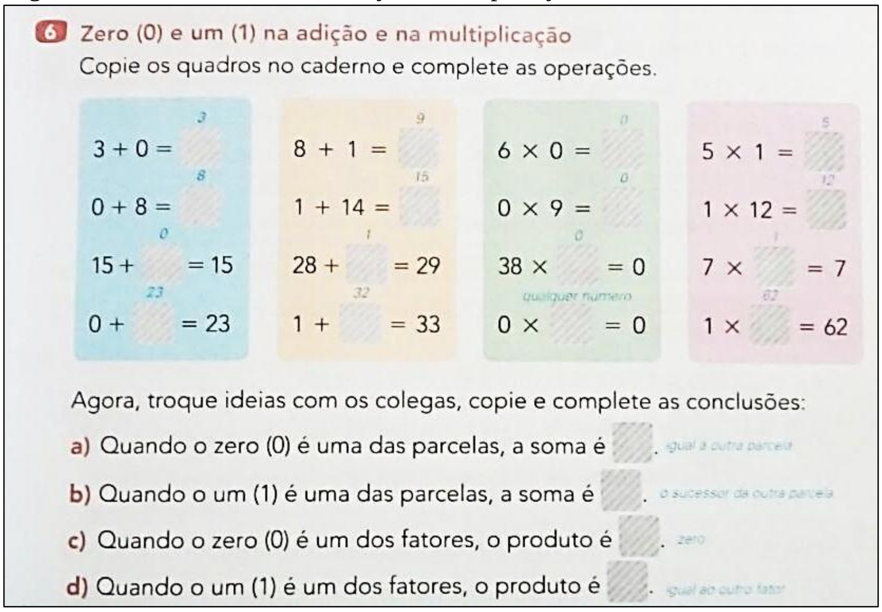
Quanto aos três objetivos propostos por Ripoll *et al.* (2015) relacionados à propriedade associativa, verifica-se que na coleção há interesse em exemplificar contextos do cotidiano em que a propriedade é utilizada (objetivo 1), porém não diversifica-se essa discussão. Pode-se perceber que durante a discussão dessa propriedade, o objetivo (2) recebeu maior atenção ao utilizar de exemplos que envolvessem a estrutura do sistema de numeração usual. O objetivo (3), alcançar a destreza na realização de algoritmos, é explorado nos cálculos rápidos.

Cabe destacar que a compreensão de propriedades, como a *associatividade*, deve preceder e fundamentar os algoritmos de cálculos. Caso contrário, os mesmos se limitam a “regras prontas” sem significados. Além disso, reconhecer as relações intrínsecas entre conceitos, propriedades e algoritmos é essencial para o desenvolvimento do conhecimento matemático da operação. (RIPOLL *et al.*, 2015).

4.2.3 Existência de elemento neutro

A *existência de elemento neutro*, tanto da adição como da multiplicação, é discutida, simultaneamente, no 5ºAno. Para tanto, é proposta a análise dos números 0 e 1 em ambas as operações (Figura 19). Como consequência desta análise inicia-se a discussão sobre tal propriedade que engloba os números citados (0 e 1) em cada uma das operações.

Figura 19 – Estudo do 0 e 1 na adição e multiplicação



6 Zero (0) e um (1) na adição e na multiplicação
Copie os quadros no caderno e complete as operações.

3 + 0 = 3	8 + 1 = 9	6 × 0 = 0	5 × 1 = 5
0 + 8 = 8	1 + 14 = 15	0 × 9 = 0	1 × 12 = 12
15 + 0 = 15	28 + 1 = 29	38 × 0 = 0	7 × 1 = 7
0 + 23 = 23	1 + 32 = 33	0 × qualquer número = 0	1 × 62 = 62

Agora, troque ideias com os colegas, copie e complete as conclusões:

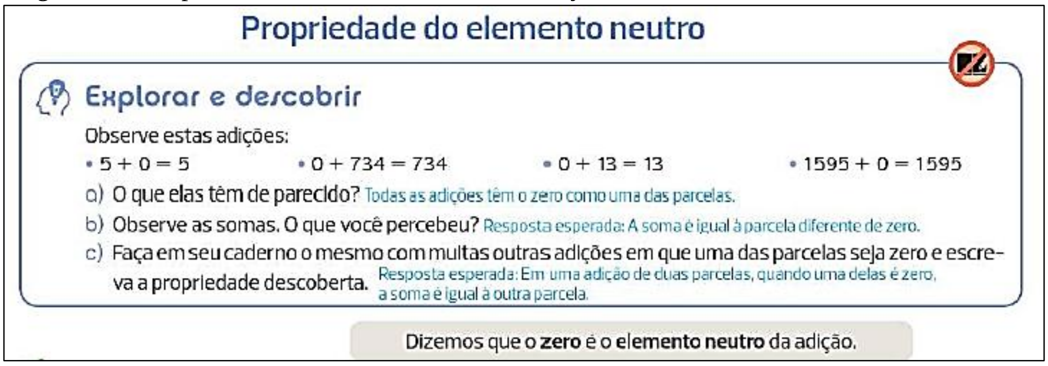
a) Quando o zero (0) é uma das parcelas, a soma é igual à outra parcela.
b) Quando o um (1) é uma das parcelas, a soma é o sucessor da outra parcela.
c) Quando o zero (0) é um dos fatores, o produto é zero.
d) Quando o um (1) é um dos fatores, o produto é igual ao outro fator.

Fonte: LD do 5ºAno.

No decorrer da atividade exemplificada na Figura 19, o autor sugere ao professor comentar que a conclusão do item ***a*** e do item ***d***, respectivamente, permitem dizer que o 0 é o elemento neutro da adição e o 1 o elemento neutro da multiplicação. E a discussão acerca desta propriedade se finaliza com este comentário.

Como já realizado em outras propriedades (*comutatividade e associatividade*), o primeiro contato que objetiva a conclusão da propriedade do *elemento neutro* apenas a cita como conclusão ou consequência da percepção de exemplos ou atividades. A definição da propriedade é proposta no 6ºAno, em uma discussão restrita, pois na Figura 20 pode-se constatar uma simplificação da propriedade. São propostos exemplos particulares, os quais não contribuem para a generalização da propriedade. Ripoll *et al.* (2015) sugerem que sejam abordados *exemplos suficientemente genéricos* em detrimento dos particulares.

Figura 20 – Propriedade do Elemento Neutro da adição



Propriedade do elemento neutro

Explorar e descobrir

Observe estas adições:

- $5 + 0 = 5$
- $0 + 734 = 734$
- $0 + 13 = 13$
- $1595 + 0 = 1595$

a) O que elas têm de parecido? Todas as adições têm o zero como uma das parcelas.

b) Observe as somas. O que você percebeu? Resposta esperada: A soma é igual à parcela diferente de zero.

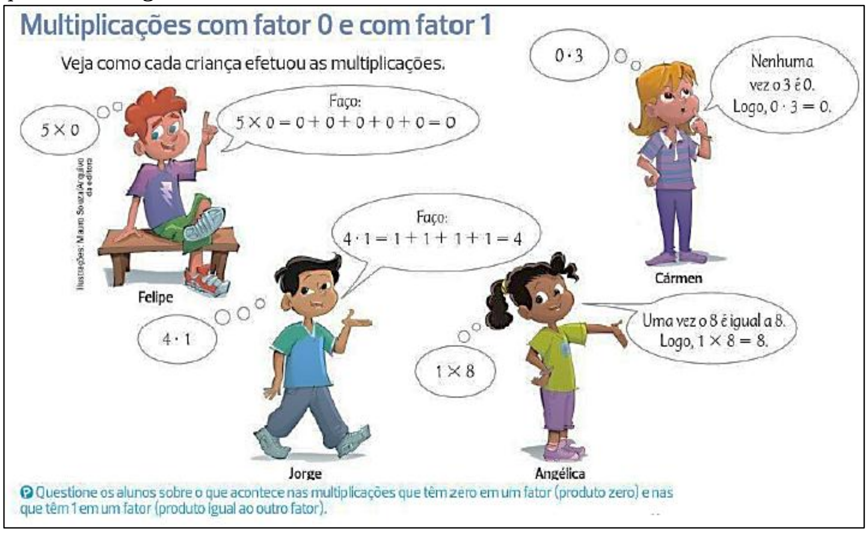
c) Faça em seu caderno o mesmo com muitas outras adições em que uma das parcelas seja zero e escreva a propriedade descoberta. Resposta esperada: Em uma adição de duas parcelas, quando uma delas é zero, a soma é igual à outra parcela.

Dizemos que o **zero** é o **elemento neutro** da adição.

Fonte: LD do 6ºAno.

Para o elemento neutro da multiplicação há uma maior discussão, pois além da estrutura que apresenta para a adição (Figura 21) é utilizada da ideia de "somar quantidades iguais" para explorar a propriedade.

Figura 21 – Elemento neutro da multiplicação relacionado a ideia de somar quantidades iguais



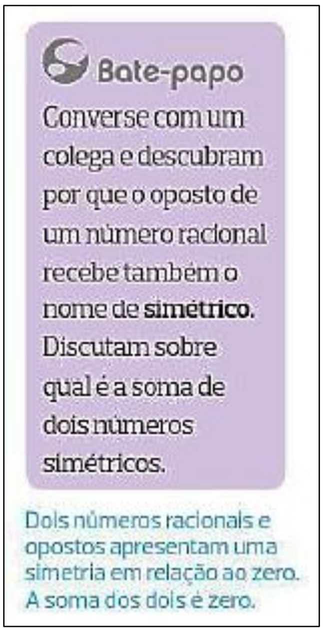
Fonte: LD do 6ºAno.

Na coleção, constata-se que as propriedades referentes à multiplicação são dispostas ao longo da ideia de *disposição retangular* para a multiplicação, com exceção do elemento neutro que é iniciada a discussão ainda na ideia de adição de parcelas repetidas. Ripoll *et al.* (2015) apontam a disposição retangular como uma das ideias em que contribuem para uma compreensão mais clara das propriedades da multiplicação.

4.2.4 Existência de inverso

O inverso aditivo não é citado ao longo da coleção. No 7ºAno, quando são tratados os conceitos de opostos e simétricos de números racionais é apresentado um comentário direcionado aos estudantes e ao professor (Figura 22).

Figura 22 – Comentário sobre o Inverso Aditivo



Fonte: LD do 7ºAno.

A discussão acerca do inverso aditivo restrita a um breve comentário aos estudantes possibilita a compreensão limitada desta propriedade da adição, o que por sua vez influência na compreensão da operação em si (RIPOL *et al.*, 2015; MOREIRA, 2004). Este resultado pode ser consequência da discussão, também, limitada sobre elemento neutro da adição, uma vez que ambas estão interligadas.

Na multiplicação, também, não é citada a existência do inverso multiplicativo. Na discussão sobre os racionais verifica-se a seguinte afirmação: *"inverso de um número racional"*. Contudo, ao citar a existência deste inverso, a coleção já menciona a consequência da multiplicação entre estes, como mostra a Figura 23.

Figura 23 – Inverso de um número racional.

Observe que $\left(-\frac{2}{3}\right) \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = +\frac{6}{6} = +1.$

O inverso de $+3$ é $+\frac{1}{3}$. Note que $(+3) \cdot \left(+\frac{1}{3}\right) = +\frac{3}{3} = +1.$

Explorar e descobrir

Experimente multiplicar outros números racionais pelos respectivos inversos e veja o que ocorre. Resposta pessoal.

Podemos escrever:

O produto de um número racional e o seu inverso é $+1$.

Fonte: LD do 7ºAno.

Constata-se que a coleção utiliza da ideia de inverso multiplicativo como "*inverso de um número racional*" e trabalha a ideia baseada nesta nomenclatura. Acredita-se que a inexistência de questões e discussões disparadoras/investigativas sobre esta propriedade restringe a compreensão de ambas as operações por meio de justificativas, já que não há espaço para os estudantes formularem justificativas ou hipóteses sobre o assunto. (ALMEIDA, 2015).

A discussão sobre os inversos aditivo e multiplicativo restritas aos racionais, apenas, demonstra a falha presente na coleção ao estender as operações dos naturais aos reais. Pois percebe-se que há uma "divisão" das propriedades, uma vez que em sua maioria são discutidas para os naturais, com exceção desta que é direcionada aos racionais.

Em relação aos inteiros e naturais, Ripoll *et al.* (2016) destacam a importância de o estudante perceber que, enquanto algumas propriedades das operações são preservadas, como a comutatividade, outras passam a ser válidas, como o inverso aditivo (simétrico/oposto) e que outras, ainda, deixam de valer, como que a soma de dois números é sempre maior ou igual a cada um dos números somados. Moreira (2004) justifica este fato no seguinte trecho:

> À medida que se ampliam os conjuntos numéricos e se estendem as operações para os novos campos, os significados dessas operações vão tomando um sentido mais amplo e mais geral e, talvez se possa dizer, mais algébrico. Algumas noções associadas a esses significados permanecem, enquanto outras [...] vão sendo progressivamente superadas. Outras, ainda, são simplesmente abandonadas [...]. (MOREIRA, 2004, p. 101).

O autor sinaliza, ainda, que o papel do professor em momentos como este (em que operações, propriedades e conceitos vão sendo "trocados" ou abandonados no decorrer dos novos corpos numéricos) é auxiliar o estudante na compreensão na razão pela qual as operações com novos números devem ser realizadas de um determinado modo e o porquê de algumas propriedades permanecem válidas. Moreira (2004) segue a discussão sobre os significados das operações e suas propriedades para os racionais e naturais:

> De maneira análoga, os significados das operações com racionais se constroem, na matemática escolar, a partir da discussão e análise de uma diversidade de situações concretas nas quais se torna necessário reconhecer, comparar com o caso dos naturais e re-estabelecer certas relações entre os números, abandonar outras, inferindo-se, a partir desse processo, a validade das propriedades. (MOREIRA, 2004, p. 102).

Com a discussão proposta por este autor, percebe-se que há uma restrição das propriedades aos naturais ou apenas aos racionais. Entende-se que esta restrição pode possibilitar uma confusão de relações entre estes conjuntos, além de conceitos errôneos acerca das operações e propriedades nestes.

4.2.5 Distributividade

A propriedade *distributiva* da multiplicação em relação à adição é abordada desde o 4ºAno, por meio da decomposição de fatores da multiplicação, porém só é definida no 6ºAno, juntamente com a *comutatividade, associatividade e existência de elemento neutro*.

Como já mencionado, o fato de ser trabalhada a propriedade mesmo que implicitamente, em anos anteriores ao que ela é definida possibilita ao estudante maior compreensão da matemática dedutiva que envolve a propriedade e a relação entre multiplicação e adição presente neste caso. (RIPOLL *et al.*, 2015).

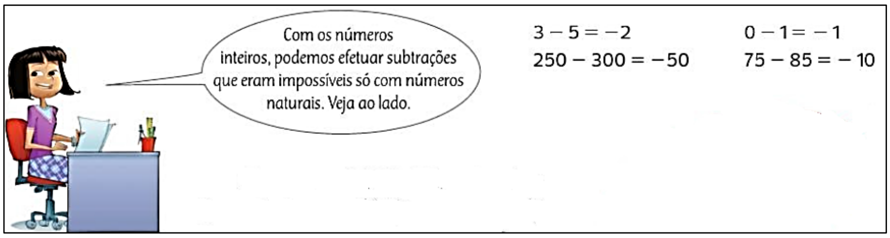
4.2.6 Operações Fechadas

Desde o 4ºAno as operações estão divididas em: adição, subtração, multiplicação e divisão. Porém, mesmo quando o estudo destas se restringe a um determinado conjunto, como os naturais, a subtração e divisão não são citadas como operações em que nem sempre são possíveis de serem efetuadas.

As primeiras noções a respeito das operações fechadas ou "bem definidas" nos conjuntos são iniciadas ao longo do 7ºAno e aprofundadas no 8ºAno.

As operações fechadas nos naturais são citadas quando estudado o conjunto dos inteiros e encerram no 8ºAno, com o comentário aos estudantes reproduzido na Figura 22.

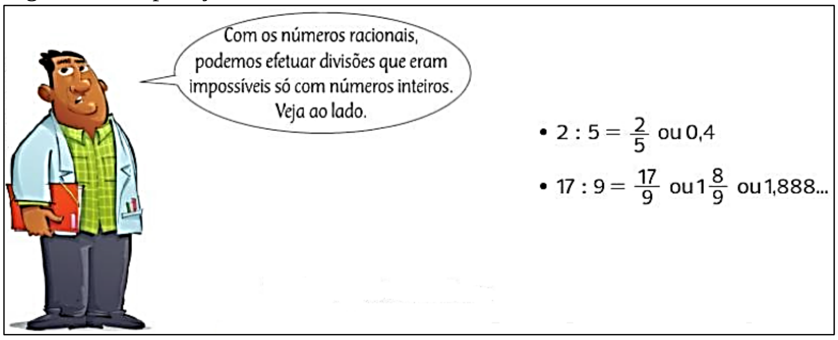
Figura 24 – Operações fechadas nos naturais e inteiros



Fonte: LD do 8ºAno (p. 18).

Percebe-se que as operações fechadas não são discutidas por meio de atividades exploratórias ou *"exemplos suficientemente genéricos"*, tanto para os naturais como para os inteiros. Para os racionais, a discussão se destina ao 8ºAno, sendo similar à abordagem utilizada nas operações para naturais e inteiros (Figura 25).

Figura 25 – Operações fechadas nos inteiros e racionais



Fonte: LD do 8ºAno.

Almeida (2015), ao analisar livros didáticos do Ensino Médio observa que algumas obras utilizam a propriedade do fechamento da adição e multiplicação como motivação para iniciar o estudo dos inteiros. O pesquisador defende que na Educação Básica esta propriedade referente à subtração em $\mathbb{Z}$ e a divisão em $\mathbb{Q}$, seja um "ganho" destes conjuntos, não uma motivação para "conquista-los". Em sua proposta pedagógica, utiliza da "existência de um referencial" para a construção dos inteiros e da expressão de algumas medidas impossíveis aos naturais, para a construção dos racionais, por acreditar que estas abordagens sejam problematizações mais significativas para o estudante. Em outras palavras, o autor utiliza de argumentos históricos da Matemática para a construção destes conjuntos.

Com base na ideia de Almeida (2015) e no fato de a coleção analisada não enfatizar os aspectos históricos dos conjuntos, acredita-se que a mesma não utiliza de discussões suficientes para a compreensão das operações fechadas nos conjuntos. Isto por sua vez, acarreta na não compreensão das operações em determinados conjuntos, bem como da definição dos mesmos.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O objetivo da pesquisa foi perceber e analisar como as propriedades dos conjuntos numéricos, seus aspectos históricos e as propriedades das operações estão sendo abordadas na Educação Básica por meio da coleção mais utilizada por escolas participantes do PNLD (2016). Vale lembrar que é utilizada a palavra coleção para designar os livros didáticos do 4º ao 9ºAno, das coleções *Ápis* e *Teláris*, elaboradas pelo mesmo autor.

A análise permitiu perceber que, dentre as categorias elencadas em relação às propriedades dos conjuntos numéricos e seus aspectos históricos, conforme as ideias de Ripoll *et al.* (2015, 2016) e Caraça (1951), a maioria não foi contemplada nos livros didáticos (4º ao 9ºAno). O Quadro 1 mostra o resumo das conclusões dos aspectos analisados. Optou-se por utilizar o símbolo (X) para identificar os conjuntos numéricos que receberam discussão dos aspectos analisados e o símbolo (-) para os conjuntos em que não foi realizada a discussão na coleção de livros didáticos; Além disso, não foi realizada nenhuma marcação para aqueles conjuntos numéricos que não possuíam a propriedade (aspecto) analisada.

Quadro 1 – Resumo das categorias referentes as propriedades dos conjuntos numéricos e aspectos históricos analisados

ASPECTO ANALISADO	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{I}$	$\mathbb{R}$
Definição matemática	-	-	-	-	-
Abordagem do problema histórico envolvido na construção do conjunto	**X**	**X**	-	-	-
Utilização da Reta Numerada		**X**	**X**		**X**
Conceito de Sucessão como um dos *“pilares fundamentais”* do conjunto	-				
Discussão da relação de Ordem além da *“forma protocolar”*	-	-	-	-	**X**
Discussão acerca da representação simbólica dos conjuntos numéricos		**X**	**X**	**X**	
Densidade nos conjuntos numéricos	**X**	**X**	**X**	-	-
Continuidade nos conjuntos numéricos	-	-	-	-	

Fonte: Elaboração da autora.

A partir do Quadro 1 pode-se constatar que, a definição dos conjuntos numéricos, conforme sugerido por Ripoll *et al*. (2015, 2016) para a Educação Básica, não é contemplada na obra. Esperava-se que pelo menos no 8ºAno ou no 9ºAno as questões relacionadas à definição dos conjuntos numéricos fosse discutida, pois nestas etapas os alunos já construíram alguns conceitos relacionados aos números.

No que diz respeito à abordagem histórica dos conjuntos, verificou-se que a sequência em que eles são apresentados nos volumes da coleção é: naturais; racionais positivos (com destaque para frações e decimais, podendo ser interpretados como números distintos e não como representações diferentes dos racionais; a ideia de medida de segmentos discutida por Caraça (1951) não é evidenciada); inteiros; racionais (com ênfase para os racionais negativos e as operações com estes números); irracionais (há mais destaque para a representação do que para o motivo que fez com este conjunto fosse criado); e reais (discutido como união dos racionais com os irracionais; não há referência aos Cortes de Dedekind).

Quanto à reta numerada, identificou-se que nos naturais a localização de seus elementos na reta não é abordada, visto que a coleção trabalha apenas com segmentos de retas. A localização de números inteiros na reta destaca a noção de número opostos e a orientação. Já a localização de números racionais na reta fica comprometida na coleção, pois não é discutida a ideia de que cada número racional é um ponto bem definido na reta[15]. Em relação aos irracionais, a localização destes números na reta não é tratada pela coleção. Porém, não se deve deixar de lembrar que a representação dos números racionais na reta numerada é fundamental para evidenciar a necessidade do conjunto dos irracionais. Entretanto, como já mencionado, este não foi um dos objetivos almejados pela coleção. Em relação aos reais na reta, estes são tratados apenas como uma "retomada" dos racionais à reta, não discutindo a presença dos números irracionais, ou a noção de continuidade.

A noção de sucessão não é tratada além da *"forma protocolar"*, fato que repercute diretamente na compreensão de infinito por parte dos estudantes. O mesmo acontece para a relação de ordem, conforme Ávila (2001), Caraça (1951) e Almeida (2015) que sugerem uma discussão além de "maior que" e "menor que", abrangendo a ideia de "estar entre" com o apoio da reta numerada. Uma exceção aconteceu no conjunto dos números reais, em que essa relação foi tratada seguindo a ideia dos autores citados.

Quanto à densidade dos racionais nos reais, a coleção aborda essa noção apenas em um momento, destacando que esta propriedade não é válida para os naturais e inteiros, mas é válida para os racionais, exemplificando, ainda, três maneiras para a percepção desta propriedade: média aritmética, frações equivalentes e representação decimal. A densidade no conjunto dos números irracionais nos reais não é tratada. Pode-se afirmar que, o estudo dessa propriedade na coleção não é suficiente para a Educação Básica.

[15] Esta questão é discutida por Onuchic e Allevato (2008).

A respeito da continuidade não foram identificadas discussões acerca desta propriedade, porém, Caraça (1951) afirma a importância desta propriedade para o estudo da evolução dos racionais aos reais. O autor argumenta que a não compreensão desta ideia inviabiliza a compreensão do conjunto dos números irracionais e do conjunto dos números reais.

Em relação às propriedades das operações, os Quadros 2 e 3 mostram o resumo da análise destes aspectos.

Quadro 2 – Resumo da análise das propriedades da adição.

ADIÇÃO	**4º**	**5º**	**6º**	**7º**	**8º**	**9º**
Comutatividade		**X**	**X**			
Associatividade		**X**	**X**			
Elemento neutro		**X**	**X**			
Inverso					**X**	
Distributividade	**X**	**X**	**X**			

Fonte: Elaboração da autora.

Quadro 3 – Resumo da análise das propriedades da multiplicação.

MULTIPLICAÇÃO	**4º**	**5º**	**6º**	**7º**	**8º**	**9º**
Comutatividade	**X**	**X**	**X**			
Associatividade		**X**	**X**			
Elemento neutro		**X**	**X**			
Inverso				**X**	**X**	
Distributividade	**X**	**X**	**X**			

Fonte: Elaboração da autora.

Referente às propriedades das operações dos conjuntos numéricos, percebe-se que a discussão (mesmo não de cunho investigativo aos estudantes e utilizando apenas de *"exemplos insuficientemente genéricos"*) é abordada ao longo dos 5º e 6ºAnos, sendo apenas a comutatividade e distributividade trabalhadas antes de serem definidas e mencionadas no 4ºAno. A existência dos inversos aditivo e multiplicativo é trabalhada ao longo do 7º e 8ºAno.

Entende-se que no 9ºAno, como fase final do Ensino Fundamental, cabe uma revisitação dos conjuntos numéricos e suas propriedades, mas não é proposta. O esperado para a discussão no 9ºAno era que esta possibilitasse maiores investigações quanto às propriedades dos conjuntos, uma vez que os estudantes já têm os primeiros contatos com estas ideias, conforme Ripoll (2015, 2016) sugere.

Almeida (2015) enfatiza a importância de trabalhar os conjuntos após a discussão no Ensino Fundamental, com objetivos e abordagens distintos, a fim de aprimorar a compreensão dos estudantes. Exemplos de objetivos que o autor acredita que possam ser alcançados neste período estão: perceber a distinção entre o zero quanto aos números naturais e quanto aos números inteiros, bem como a noção de sucessão em ambos os conjuntos; identificar por meio da reta numerada a relação de ordem e as generalizações possíveis de serem concluídas; evidenciar o problema da medida para ampliação do conjunto dos números naturais ao conjunto dos números racionais positivos; compreender a escolha da unidade como uma escolha arbitrária quanto aos números racionais; notar a inadequação de diagramas para a representação dos conjuntos numéricos, principalmente à confusão possibilitada por esta representação no que diz respeito ao conjunto dos números racionais e ao conjunto dos números irracionais.

Salienta-se que, embora alguns dos aspectos e propriedades analisados(as) tenham sido tratados(as) em algum momento, em sua maioria[16] não atendem as sugestões e idealizações dos autores utilizados como aporte teórico desta pesquisa. Com isso, pode-se pôr em debate os métodos avaliativos pelos quais passam as coleções selecionadas pelo PNLD, bem como o objetivo do livro didático na Educação Básica como principal material de apoio ao professor. Entre uma das abordagens que a coleção faz, que é criticada pelos autores que serviram de aporte teórico deste trabalho, principalmente Almeida (2015)[17], está a utilização de diagramas de Venn para relacionar os conjuntos numéricos abordados no Ensino Fundamental.**Erro! Indicador não definido.**

Visto as considerações finais sobre cada propriedade e aspectos analisado consegue-se agora responder a questão proposta por esta pesquisa: *De que forma os conjuntos numéricos são tratados nos livros didáticos elaborados para os Anos Iniciais (4º e 5ºAno) e Anos Finais do Ensino Fundamental, no que tange aos aspectos históricos e estudo das propriedades?* Os conjuntos numéricos são abordados no Ensino Fundamental por meio, principalmente, de situações práticas não enfatizando a abordagem histórica, e sim buscando a percepção da utilização de cada conjunto no dia a dia. Percebe-se também, que como objetivo principal está a formação de estudantes capazes de desenvolver cálculos rápidos e sistemáticos, porém,

[16] Exceto a relação de ordem para os reais; a densidade tratada acerca dos naturais, inteiros e racionais; e a reta numerada ao longo de todos os conjuntos.
[17] Almeida (2015, p.64) aborda uma maior discussão e visualização acerca dos diagramas.

dispensando a compreensão do que os envolve (propriedades). O mesmo acontece quanto às operações nos conjuntos.

6. Referências

ALMEIDA, T. **Uma Revisitação aos Conjuntos Numéricos no Ensino Médio.** Virtual Books. 2015. Disponível em: https://www.lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/133662/000985750.pdf?sequence=1. Acesso em 10 de março de 2017.

ÁVILA, G. **Análise Matemática: para Licenciatura.** Editora: Edgard Blücher, São Paulo. 2001**.**

BARDIN, L. **Análise de Conteúdo**. Editora Persona: Lisboa, 1977.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular.** Ministério da Educação. Brasília, 2016.

_______. **Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP).** Disponível em http://www.inep.gov.br/.

_______. **MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO**. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/. Acesso em 09 de outubro de 2016.

_______. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio.** Brasília: MEC, 2002.

_______. Secretária de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: matemática. Ensino de primeira a quarta série.** Brasília: MEC/SEF, 1998.

CARAÇA, B. **Conceitos Fundamentais da Matemática.** Lisboa, 1951

CARVALHO, S. **Pensamento genérico e expressões algébricas no ensino fundamental.** Virtual Books. 2010. Disponível em: http://www.lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/29352/000776369.pdf?sequence=1 Acesso em 23 de jun de 2017.

MACHADO, S; BIANCHINI, B; MARANHÃO, M. C. **Teoria Elementar dos Números: da Educação Básica à Formação dos Professores que Ensinam Matemática.** Editora: iglu. 2015.

MAIA, M; MARANHÃO, M. C. A Alfabetização Matemática no 1º, 2º e 3º anos do Ensino Fundamental: que conteúdos numéricos?. In: MACHADO, S; BIANCHINI, B; MARANHÃO, M. C. **Teoria Elementar dos Números: da Educação Básica à Formação dos Professores que Ensinam Matemática.** Editora: iglu. p.85-112, 2015.

MOREIRA, P. **O Conhecimento Matemático do Professor: Formação na Licenciatura e Prática Docente na Escola Básica.** Virtual Books. 2004. Disponível em:

http://www.bibliotecadigital.ufmg.br/dspace/bitstream/handle/1843/EABA-6ABMUH/2000000078.pdf?sequence=1 Acesso em 23 de jun de 2017.

ONUCHIC, L; ALLEVATO, N. As Diferentes "Personalidades" do Número Racional Trabalhadas através da Resolução de Problemas. In: **Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro. vol. 21, núm. 31, 2008, p. 79-102.

RESENDE, M. A Teoria Elementar dos Números na Licenciatura em Matemática, Pedagogia e na Educação Básica. In Machado, S. et al. **Teoria Elementar dos Números: da Educação Básica à Formação dos Professores que Ensinam Matemática**. São Paulo: Iglu, 2015.

RIPOLL, C. **Mal ditas Frases Encontradas em Livros Didáticos de Matemática para a Escola Básica.** 2013. Disponível em http://www.mat,ufrgs.br/~cydara/perolas.htm.

__________. RANGEL, L; GIRALDO, V. **Livro do Professor de Matemática na educação Básica: Números Naturais.** Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2015.

____________________________________. **Livro do Professor de Matemática na educação Básica: Números Inteiros.** Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2016.

ROMANATTO, M. C. **O livro didático:** alcances e limites. Anais do VII EPEM, São Paulo, USP, 2004. Disponível em <http://www.sbempaulista.org.br/*epem*/anais/mesas_redondas/mr19-Mauro.doc> Acessado em 28 de outubro de 2016.

SILVA, O; REIS, M; SILVA, N. **Obstáculos Epistemológicos no Ensino da Matemática: O Zero na Reta Numérica.** Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM), São Paulo, 2016.