

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO PAMPA**

**EVANILDO FRANCO DE JESUS**

**SIMULAÇÃO NUMÉRICA DAS  
EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES PELO  
MÉTODO DE DIFERENÇAS FINITAS  
PARA UM ESCOAMENTO  
INCOMPRESSÍVEL**

**Bagé-RS  
2017**

**EVANILDO FRANCO DE JESUS**

**SIMULAÇÃO NUMÉRICA DAS  
EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES PELO  
MÉTODO DE DIFERENÇAS FINITAS  
PARA UM ESCOAMENTO  
INCOMPRESSÍVEL**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso de Licenciatura em Matemática como requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Orientadora: Francieli Aparecida Vaz

**Bagé-RS  
2017**

J58s

Jesus, Evanildo Franco de

Simulação numérica das equações de Navier-Stokes pelo método de diferenças finitas para um escoamento incompressível / Evanildo Franco de Jesus. – dezembro, 2017.

61 f.: il.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) – Universidade Federal do Pampa, Campus Bagé, Matemática, 2017.

“Orientação: Francieli Aparecida Vaz”.

1. Fluidos; Método de diferenças finitas; Equações de Navier-Stokes; Simulação numérica. I. Título.

**EVANILDO FRANCO DE JESUS**

**SIMULAÇÃO NUMÉRICA DAS  
EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES PELO  
MÉTODO DE DIFERENÇAS FINITAS  
PARA UM ESCOAMENTO  
INCOMPRESSÍVEL**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso de Licenciatura em Matemática como requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Trabalho de Conclusão de Curso defendido e aprovado em: 11 de dezembro de 2017.

Banca examinadora:

---

Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Francieli Aparecida Vaz  
Orientadora

---

Prof. Dr. Anderson Luis Jeske Bihain  
Universidade Federal do Pampa

---

Prof. Dr. Everson Jonatha Gomes da Silva  
Universidade Federal do Pampa

Dedico este trabalho em memória ao meu pai  
Noé Santana De Jesus.

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço a Deus por estar sempre ao meu lado, me acompanhando e guiando em todos os momentos da vida.

Agradeço à minha família, em especial aos meus pais por me darem força e apoio incondicional.

Agradeço à minha orientadora pela paciência e dedicação que teve comigo e também por ter me guiado pelo mundo da dinâmica dos fluidos, me proporcionando um conhecimento vasto e me fazendo descobrir um caminho fascinante que quero seguir.

Agradeço a todos os professores que tive a oportunidade de conviver e de conhecer durante o período da faculdade e que ajudaram a contribuir na minha formação acadêmica.

Agradeço aos amigos e colegas de faculdade pela força e pela amizade.

Enfim, obrigado a todos por tudo, com certeza fizeram a diferença na minha vida por pequenos gestos e palavras no momento certo.

Nenhuma mente que se abre para uma nova  
ideia voltará a ter o tamanho original.

Albert Einstein

## RESUMO

A simulação numérica é amplamente utilizada na área da dinâmica dos fluidos, pois através do emprego de métodos numéricos pode-se analisar o comportamento de diferentes tipos de escoamentos de fluidos. Neste trabalho realizou-se a simulação numérica de um escoamento incompressível utilizando as equações de Navier-Stokes aplicadas para o escoamento de um fluido no interior de uma cavidade quadrada e também para um ressalto hidráulico. Para resolver essas equações usou-se o método de diferenças finitas, sendo necessário uma discretização em relação ao tempo e ao espaço. Para ambos os casos, a cavidade quadrada e o ressalto hidráulico, foram utilizados malhas estruturadas com elementos quadrangulares na discretização do domínio espacial. Para tratar o acoplamento da velocidade e a pressão presentes nas equações de Navier-Stokes foram aplicados dois métodos: o método da projeção-passo fracionado e o método da penalidade, facilitando assim a resolução dessas equações. Através de um código escrito em linguagem C ++ foram realizadas simulações de escoamentos bidimensionais para o número de Reynolds 100, 400 e 1000 para o caso da cavidade quadrada e Reynolds 100 e 400 para o caso do ressalto hidráulico. Os resultados numéricos obtidos para o caso da cavidade quadrada com o método da projeção-passo fracionado foram satisfatórios quando comparados com os resultados da referência utilizada, diferente do método da penalidade que se mostrou menos eficaz. Para o caso do ressalto hidráulico decidiu-se utilizar o método da projeção, pois este se mostrou eficiente no caso anterior. Foram analisados os campos de velocidade, no qual pode notar-se algumas características que aparecem no escoamento como vórtices no canto inferior à medida que aumenta o número de Reynolds.

**Palavras-chave:** Fluidos; Método de diferenças finitas; Equações de Navier-Stokes; Simulação numérica.

## ABSTRACT

The numeric simulation is used widely in the fluid dynamics area, because through the use of numeric methods the behavior of different types of fluid flows can be analyzed. In this work the numeric simulation of an incompressible flow was accomplished using Navier-Stokes equations applied for the fluid flow inside square cavity and also to a hydraulic jump. To solve these equations, we decided to apply the finite difference method, with a time-space discretization. In both cases, the square cavity and hydraulic jump, we used structured meshes with quadrangular elements in the discretization of the spatial domain. To couple the velocity and pressure in Navier-Stokes equations two methods were applied: the fractional-step projection method and the penalty method, facilitating the resolution of these equations. Through the code written in C++ language simulations of two-dimensional flow were accomplished for the Reynolds number 100, 400 and 1000 for the square cavity and Reynolds 100 and 400 for the hydraulic jump. The numeric results obtained with the fractional-step projection method were satisfactory when compared with the results of the reference, different from the Penalty method that was less effective. For the case of the hydraulic jump decided to use the Projection method, because it was efficient in the previous case. The velocity fields were analyzed, in which some characteristics can be seen, as vortices in the lower corner, when the Reynolds number increases.

**Keywords:** Fluids; Finite Difference Method; Navier-Stokes Equations; Numerical Simulation.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 3.1 Malha unidimensional. ....	33
Figura 3.2 Malha bidimensional. ....	37
Figura 4.1 Geometria e condições de contorno da cavidade quadrada. ....	44
Figura 4.2 Perfil das velocidades $u$ e $v$ para $Re = 100$ . ....	46
Figura 4.3 Perfil das velocidades $u$ e $v$ para $Re = 400$ . ....	47
Figura 4.4 Perfil das velocidades $u$ e $v$ para $Re = 1.000$ . ....	48
Figura 4.5 Campo das velocidades $u$ (a) e $v$ (b) para $Re = 1.000$ pelo método da projecção. ....	49
Figura 4.6 Perfil das velocidades $u$ para $Re = 100$ (a), 400 (b) e 1.000 (c) com diferentes malhas para o método da penalidade. ....	50
Figura 4.7 Geometria e condições de contorno do ressalto hidráulico. ....	52
Figura 4.8 Perfil das velocidades $u$ (a) e $v$ (b) para $Re = 100$ através do método da projecção. ....	54
Figura 4.9 Campo das velocidades $u$ (a) e $v$ (b) para $Re = 100$ pelo método da projecção. ....	55
Figura 4.10 Perfil das velocidades $u$ (a) e $v$ (b) para $Re = 400$ através do método da projecção. ....	56
Figura 4.11 Campo das velocidades $u$ (a) e $v$ (b) para $Re = 400$ pelo método da projecção. ....	57

## LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1	Representações de diferenças centradas de $O(\Delta x)^2$ .....	35
Tabela 3.2	Representações de diferenças regressivas de $O(\Delta x)^2$ .....	36
Tabela 3.3	Representações de diferenças progressivas de $O(\Delta x)^2$ .....	36

## **LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS**

DFC	Dinâmica dos Fluidos Computacional
EDF	Equações de Diferenças Finitas
EDP	Equações Diferenciais Parciais
ELT	Erro Local de Truncamento
ENS	Equação de Navier-Stokes
MDF	Método de Diferenças Finitas
MEF	Método dos Elementos Finitos
MVF	Método dos Volumes Finitos
SC	Superfície de Controle
VC	Volume de Controle

## LISTA DE SÍMBOLOS

$A$	Área ( $m^2$ )
$c$	Constante da penalidade
$F_n$	Força normal ( $N$ )
$F_t$	Força tangencial ( $N$ )
$\vec{F}$	Vetor força
$g$	Aceleração da gravidade ( $m/s^2$ )
$G$	Peso ( $N$ )
$L$	Comprimento de referência ( $m$ )
$m$	Massa ( $Kg$ )
$\dot{m}$	Taxa de escoamento de massa ( $Kg/s$ )
$\vec{n}$	Vetor normal
$P$	Pressão ( $N/m^2$ )
Re	Número de Reynolds
$t$	Tempo ( $s$ )
$u$	Componente de velocidade cartesiana na direção $x$ ( $m/s$ )
$v$	Componente de velocidade cartesiana na direção $y$ ( $m/s$ )
$V$	Volume ( $m^3$ )
$\nu$	Volume específico ( $m^3/Kg$ )
$V$	Velocidade ( $m/s$ )
$V_0$	Velocidade de referência ( $m/s$ )
$\vec{V}$	Vetor velocidade
$w$	Componente de velocidade cartesiana na direção $z$ ( $m/s$ )
$\vec{x}$	Vetor posição

## Símbolos Gregos

$\gamma$	Peso específico ( $N/m^3$ )
$\kappa$	Módulo de compressibilidade ( $KPa$ )
$\mu$	Viscosidade dinâmica ( $Kg/m \cdot s$ )
$\nu$	Viscosidade cinemática ( $m^2/s$ )
$\rho$	Densidade ( $Kg/m^3$ )
$\sigma$	Tensão normal ( $N/m^2$ )
$\sigma_{ij}$	Tensor de tensão ( $N/m^2$ )
$\tau$	Tensão de cisalhamento ( $N/m^2$ )
$\tau_{ij}$	Tensor de tensão viscosa ( $N/m^2$ )

## SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO</b> .....	<b>15</b>
<b>1.1 Objetivos</b> .....	<b>17</b>
1.1.1 Objetivo Geral.....	17
1.1.2 Objetivos Específicos .....	17
<b>1.2 Justificativa</b> .....	<b>17</b>
<b>1.3 Organização do Trabalho</b> .....	<b>18</b>
<b>2 REFERENCIAL TÉORICO</b> .....	<b>19</b>
<b>2.1 Definições e Variáveis de Interesse</b> .....	<b>20</b>
2.1.1 Fluidos .....	20
2.1.2 Propriedades dos Fluidos .....	21
2.1.3 Tipos de Escoamentos.....	23
<b>2.2 Equação da Conservação da Massa</b> .....	<b>25</b>
<b>2.3 Equação da Quantidade de Movimento</b> .....	<b>27</b>
2.3.1 Equação de Navier-Stokes .....	28
<b>2.4 Adimensionalização das Equações</b> .....	<b>30</b>
<b>3 MODELAGEM COMPUTACIONAL</b> .....	<b>32</b>
<b>3.1 Método de Diferenças Finitas</b> .....	<b>32</b>
<b>3.2 Expansões em Série de Taylor</b> .....	<b>33</b>
<b>3.3 Método de Euler</b> .....	<b>38</b>
<b>3.4 Método da Projeção-passo fracionado</b> .....	<b>40</b>
<b>3.5 Método da Penalidade</b> .....	<b>41</b>
<b>4 ESTUDO DE CASOS</b> .....	<b>43</b>
<b>4.1 Caverna Quadrada</b> .....	<b>43</b>
<b>4.2 Resultados numéricos da caverna quadrada</b> .....	<b>44</b>
<b>4.3 Ressalto Hidráulico</b> .....	<b>51</b>
<b>4.4 Resultados numéricos do ressalto hidráulico</b> .....	<b>52</b>
<b>5 CONSIDERAÇÕES FINAIS</b> .....	<b>58</b>
<b>REFERÊNCIAS</b> .....	<b>60</b>

## 1 INTRODUÇÃO

A terra é constituída em sua maior parte por água, presente nos oceanos, mares, rios, lagos e geleiras. Também é formada pelo solo e pela atmosfera, que por sua vez é composta pelos gases como, oxigênio, gás carbônico, nitrogênio, entre outros. Os gases e a água, assim como outros líquidos são os fluidos que estão presentes em todas as partes da natureza e são essenciais para a existência humana, sem estes não seria possível existir vida na terra.

O homem sempre observou a natureza e os seus fenômenos, como o movimento das águas nos oceanos, cachoeiras, o voo dos pássaros, as tempestades, as marés e os movimentos das massas de ar, e de forma intuitiva tentavam entender como esses aconteciam.

Esses fenômenos, assim como outros, despertaram no homem a necessidade e o interesse em procurar formas de estudar o comportamento, a formação e o processo deles. Ao longo dos tempos vários estudiosos se concentraram em estudar e elaborar equações para representar o movimento dos fluidos. À medida que foram avançando com seus estudos também foram desenvolvendo inúmeras equações para modelar o fluxo de fluidos presentes na natureza.

Atualmente existem várias equações para analisar o comportamento de escoamentos de fluidos em um meio. Uma das mais comuns e utilizadas em trabalhos que necessitam descrever comportamento de escoamentos de fluidos são as equações de Navier-Stokes. Elas foram desenvolvidas por Louis Marie Henri Navier (1785-1836) engenheiro francês e pelo matemático inglês George Gabriel Stokes (1819-1903).

As equações de Navier-Stokes (ENS) são equações diferenciais parciais (EDP) não lineares que possibilitam determinar campos de velocidade e pressão em um escoamento de fluido (ÇENGEL; CIMBALA, 2007). Essas equações são complexas, mas utilizadas até hoje em áreas que exigem soluções de problemas que envolvam fluxos de fluidos.

Desde sua descoberta, as equações de Navier-Stokes provocaram uma verdadeira transformação em diversos setores da engenharia mecânica, automobilística, naval, entre outros, possibilitando grandes avanços para os projetos dessas áreas. Essas equações servem para modelar o clima, correntes oceânicas, fluxo ao redor de aerofólios de automóveis e de aviões, propagação de fumaça em incêndio e em chaminés industriais, como também para outros fenômenos (SOUZA, 2013, p.1).

Alguns termos que compõem essas equações transformam-nas em não lineares, o

que acaba dificultando sua resolução analítica, mas abrindo caminho para uma resolução numérica. Assim, um dos primeiros procedimentos realizado por alguns pesquisadores é fazer algumas simplificações, como por exemplo, considerar o fluido incompressível, para tornar viável a obtenção de uma solução para determinado problema.

Após realizar as simplificações necessárias, o próximo passo é determinar qual o melhor método numérico a ser utilizado. O método numérico consiste em substituir as derivadas existentes nas equações diferenciais por expressões algébricas, facilitando a resolução das equações de Navier-Stokes numericamente. Porém é necessário anteriormente discretizar o domínio em pontos, assim, podem-se manipular essas equações computacionalmente, relacionando valores nos pontos discretos do domínio.

Diversos métodos numéricos são utilizados para a resolução dessas EDP's, entre eles volumes finitos, elementos finitos, diferenças finitas, entre outros (FIGUEIREDO, 2010, p.51). Todos esses métodos tem suas vantagens e desvantagens, e os resultados que esses apresentam dependem em muito do tipo do caso escolhido para aplicá-los.

O método dos volumes finitos (MVF) consiste em dividir o domínio em volumes de controle e as equações de conservação são aplicadas a cada um deles, onde as integrais de volume e superfície são aproximadas por fórmulas de quadratura. Em seu trabalho Silva Junior (2012) utiliza o método dos volumes finitos para obter soluções numéricas aproximadas para equações de conservação lineares e não lineares e as equações de convecção e difusão em uma dimensão espacial.

Outro método comum e bastante utilizado é o método dos elementos finitos (MEF). A ideia central do MEF é discretizar o domínio, representando-o, ainda que de forma aproximada, por uma reunião de um número finito de elementos (GIACCHINI, 2012, p.2). A partir desse processo é possível obter uma solução aproximada através de uma função definida no subdomínio que resulta pela ação de discretizar o domínio.

O método de diferenças finitas (MDF) é utilizado neste trabalho. Esse é um dos métodos mais antigos para a solução de uma EDP no qual as aproximações das derivadas são obtidas através das expansões em série de Taylor ou aproximação polinomial. Naozuka (2016) emprega o método de diferenças finitas para discretizar as equações de Navier-Stokes e de transporte com a finalidade de resolver numericamente um problema referente à dispersão de poluentes na atmosfera.

Neste trabalho é simulado o escoamento de um fluido incompressível, laminar e bidimensional em uma cavidade quadrada e em um ressalto hidráulico. A simulação desses problemas se tornam um grande desafio, porque demandam conhecimentos de diver-

sas áreas como programação, modelagem matemática, métodos numéricos, propriedades físicas, análise do escoamento, sendo necessário um estudo aprofundado desses temas.

## **1.1 Objetivos**

### **1.1.1 Objetivo Geral**

O principal objetivo deste trabalho é resolver numericamente as equações de Navier-Stokes para o caso de um escoamento incompressível e laminar em uma cavidade quadrada e em um ressalto hidráulico.

### **1.1.2 Objetivos Específicos**

- Revisar conceitos fundamentais da mecânica dos fluidos;
- Estudar o método de diferenças finitas;
- Simular um escoamento incompressível e laminar numa cavidade quadrada;
- Simular um escoamento incompressível e laminar em um ressalto hidráulico;
- Comparar as soluções numéricas deste trabalho com outra referência disponível na literatura.

## **1.2 Justificativa**

A mecânica dos fluidos está relacionada com diversos fenômenos que ocorrem na natureza e está presente em muitas áreas como na engenharia, na medicina, indústrias, etc. Por esses motivos os pesquisadores estão cada vez mais interessados em conhecer detalhadamente essa área, o que fez despertar nosso interesse, e para tal resolveu-se estudar um dos clássicos problemas do escoamento de um fluido incompressível em uma cavidade quadrada e também em um ressalto hidráulico.

### 1.3 Organização do Trabalho

Este trabalho encontra-se organizado da seguinte forma: O capítulo 2 apresenta o referencial teórico, com definições sobre fluidos e suas principais propriedades como densidade, viscosidade, tipos de escoamentos, assim como algumas variáveis de interesse. Também consta no mesmo capítulo as equações governantes, como a equação da continuidade e de Navier-Stokes juntamente com sua adimensionalização.

Os métodos numéricos necessários para resolver as equações de Navier-Stokes, como o método de diferenças finitas e o método de Euler são apresentados no capítulo 3, onde são realizadas as discretizações das equações governantes em relação ao espaço e o tempo. Neste capítulo estão incluídos o método da projeção-passo fracionado e o método da penalidade, ambos usados para tratar o acoplamento da velocidade e pressão presentes nas equações de Navier-Stokes.

O capítulo 4 trata do estudo de casos no qual descrevem-se as formulações e a geometria dos casos utilizados para simular as ENS para um escoamento incompressível, como o da cavidade quadrada e do ressalto hidráulico, assim como as condições de contorno. Os resultados numéricos para a cavidade quadrada e também do ressalto hidráulico para a velocidade são apresentados nesse mesmo capítulo, no qual são discutidos, analisados e comparados com os resultados da referência utilizada.

No capítulo 5 apresentam-se às considerações finais deste trabalho.

## 2 REFERENCIAL TEÓRICO

A ciência que estuda o comportamento dos fluidos em repouso ou em movimento é a mecânica dos fluidos. É uma das ciências mais importantes e que mais contribuiu para o benefício da humanidade, pois, seus conceitos e propriedades são fundamentais para diversas áreas.

Algumas civilizações antigas já estudavam e exploravam essa ciência para melhor utilizar seus recursos hídricos e assim evitar o desperdício de água, garantindo sua sobrevivência. Desde então as civilizações seguintes começaram a se interessar por essa área, pois com o desenvolvimento e crescimento da população eles necessitariam criar mais canais e sistemas hídricos.

Com o passar dos tempos foram surgindo vários estudiosos que contribuíram muito com suas teorias para a mecânica dos fluidos, um desses foi Arquimedes (285-212 a.c) matemático grego que formulou os princípios da hidrostática e flutuação. Graças a esses conhecimentos adquiridos sobre fluidos houve um grande avanço tecnológico propiciando o desenvolvimento de várias áreas, como a engenharia civil, mecânica, naval, etc.

Hoje podemos usufruir de todos esses conhecimentos e utilizá-los para nos proporcionar melhores condições de vida. Inúmeras áreas aplicam esses conhecimentos para criar, desenvolver e aperfeiçoar seus projetos. Na biomecânica são utilizados para fabricar aparelhos como máquinas de respirar, órgãos artificiais como corações, fígados e também estudar a circulação dos fluidos como sangue e o oxigênio nos seres vivos. Nas indústrias automobilísticas são usados para melhorar o desempenho dos carros como a aerodinâmica. Çengel e Cimbala (2007) afirmam que pode se observar numerosas aplicações da mecânica de fluidos nos componentes associados ao transporte de combustível, do tanque de cilindros, da direção hidráulica, do sistema de lubrificação até o sistema de freio hidráulico.

Na engenharia civil são utilizados nos projetos de edifícios, pontes, viadutos, para garantir estruturas mais resistentes à força dos ventos e outros agentes naturais. No esporte são usados nos projetos de bicicletas, capacetes, bolas, uniformes, tudo para ajudar os atletas a obterem um rendimento maior e conseguirem resultados melhores nas competições.

Enfim, esses são apenas alguns exemplos de como estão sendo aplicados os conhecimentos da mecânica dos fluidos nos dias atuais. Pode-se perceber que vivemos em

um mundo imerso aos fluidos, eles estão presentes em todas as partes, em forma líquida e gasosa e são essenciais para a vida humana. Por isso, é necessário ter uma ampla compreensão dos conceitos da mecânica dos fluidos, ela é a base fundamental para encontrar meios de solucionar problemas que possam surgir sobre fluidos em diversas áreas.

## 2.1 Definições e Variáveis de Interesse

A partir desta seção algumas definições e variáveis de interesse necessárias para o desenvolvimento deste trabalho serão apresentadas. A compreensão das definições a seguir é fundamental, pois, são à base da mecânica de fluidos.

### 2.1.1 Fluidos

Fluidos são todas as substâncias que se encontram no estado líquido ou gasoso, sendo que os líquidos não têm uma forma própria e assumem o formato do recipiente, apresentando uma superfície livre, isso acontece porque suas moléculas apresentam forças de coesão muito intensas fazendo com que o volume permaneça constante. Já os gases não formam superfície livre e ocupam todo o recipiente, pois, suas moléculas são bastante espaçadas e suas forças de coesão são muito pequenas fazendo com que essas fiquem espaçadas apresentando um movimento aleatório.

Uma das principais características do fluido é que quando submetidos a tensões tangenciais ou de cisalhamento, esses se deformam continuamente. Para Bistafa (2010) é importante destacar que para um meio material ser considerado um fluido, esse não pode resistir a pequenas tensões tangenciais. Existem meios materiais, como o mel, que quando exposto a temperaturas elevadas se comportam como fluido e quando submetidos a temperaturas baixas resistem a tensões de cisalhamento se comportando como um sólido.

Tensão é a razão entre a força pela área no qual atua. Existem duas tensões importantes, a Tensão normal e a Tensão tangencial.

- **Tensão normal** ( $\sigma$ ) também conhecida como **pressão** é definida como componente normal que atua sobre a superfície por unidade de área.

$$\sigma = \frac{F_n}{A} \quad (2.1)$$

- **Tensão tangencial ou de cisalhamento** ( $\tau$ ) é a componente tangencial da força que atua na superfície por unidade de área.

$$\tau = \frac{F_t}{A} \quad (2.2)$$

### 2.1.2 Propriedades dos Fluidos

#### Meio Contínuo

Toda matéria é constituída de átomos, dependendo do estado em que a matéria se encontra os átomos apresentam espaços menores ou maiores entre si. Por isso, muitas vezes é mais prático considerarmos o fluido como uma matéria homogênea e contínua, porque assim é possível analisar suas propriedades.

Çengel e Cimbala (2007) citam que a idealização do meio contínuo permite tratar as propriedades como funções de pontos e considerar que essas propriedades variam no espaço sem saltos de descontinuidade. Assim, as propriedades dos fluidos como densidade, volume, pressão entre outras passam a ser contínuas em relação à posição e o tempo.

#### Densidade ou Massa específica ( $\rho$ )

A densidade é definida pela razão entre a massa e o volume do fluido e depende da temperatura e da pressão.

$$\rho = \frac{m}{V} \quad (2.3)$$

Nos líquidos a variação da densidade com a pressão é muito pequena, por isso, pode-se considerá-la incompressível. A densidade dos líquidos é mais suscetível com a temperatura.

Os gases já apresentam um comportamento diferente dos líquidos em relação a pressão e a temperatura. No gás quando ocorre um aumento da pressão seu volume diminui, ou seja, sua densidade aumenta. Já quando ocorre um aumento da temperatura sua densidade diminui porque o volume aumenta.

#### Volume específico ( $v$ )

O volume específico é definido como o volume pela unidade de massa, este é o inverso da densidade.

$$v = \frac{V}{m} = \frac{1}{\rho} \quad (2.4)$$

**Peso específico ( $\gamma$ )**

O peso específico é o peso do fluido por unidade de volume.

$$\gamma = \frac{G}{V} \quad (2.5)$$

Mas como  $G = m \cdot g$ , a equação anterior fica assim:

$$\gamma = \rho \cdot g \quad (2.6)$$

**Viscosidade**

A viscosidade nos fluidos é causada por uma coesão entre as moléculas no caso dos líquidos e nos gases pelos impactos constantes que ocorrem entre elas. Çengel e Cimbala (2007, p.9) destacam que "não existe fluido com viscosidade nula e, assim todo o escoamento dos fluidos envolve efeitos viscosos de algum grau".

A viscosidade é a capacidade de resistência do fluido à força tangencial, ou seja, é a propriedade que determina maior ou menor dificuldade do fluido escoar.

**Viscosidade Dinâmica ( $\mu$ )**

A viscosidade dinâmica também conhecida como viscosidade absoluta é determinada pela razão entre a Tensão de cisalhamento pela Taxa de cisalhamento ( $dV/dy$ ).

$$\tau = \mu \frac{dV}{dy} \quad (2.7)$$

A viscosidade dinâmica possui um valor diferente para cada fluido e varia para um mesmo fluido, principalmente em relação à temperatura. Nos líquidos a viscosidade diminui com o aumento da temperatura, enquanto nos gases a viscosidade aumenta com o aumento da temperatura.

Fluidos em que a tensão de cisalhamento é proporcional a taxa de cisalhamento ou gradiente de velocidade são denominados **fluidos newtonianos**. São exemplos de fluidos newtonianos o ar, a água, a gasolina, óleos, etc. Fluidos para o qual a tensão de cisalhamento não é proporcional a taxa de cisalhamento são denominados **fluidos não newtonianos**. São exemplos desse tipo de fluido o gel, mel e tintas.

### Viscosidade Cinemática ( $\nu$ )

A viscosidade cinemática é definida pelo quociente entre a viscosidade dinâmica e a densidade específica do fluido.

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (2.8)$$

### Compressibilidade dos Fluidos

Quando ocorrem variações de pressão ou temperatura acontece uma mudança no volume do fluido. Um fluido contrai quando sofre um aumento de pressão e se expande quando a pressão diminui. Uma das propriedades que determina a compressibilidade do fluido é o **módulo de compressibilidade** ou **módulo de elasticidade** indicado pelo  $\kappa$ , e é definida pela expressão seguinte:

$$\kappa = -v \frac{\partial P}{\partial v} = \rho \frac{\partial P}{\partial \rho} \quad (2.9)$$

Çengel e Cimbala (2007) citam que para um valor grande de  $\kappa$  é necessário ocorrer uma grande mudança de pressão para causar uma pequena variação no volume e, portanto, o fluido com  $\kappa$  muito grande é essencialmente incompressível, como o caso dos líquidos, por isso que esses são considerados incompressíveis.

### 2.1.3 Tipos de Escoamentos

Podem-se classificar os escoamentos dos fluidos de acordo com as suas características em relação ao tempo, direção, velocidade e densidade.

- **Escoamento interno** - são denominados de escoamento interno quando os fluidos escoam no interior de um meio material. Por exemplo, um fluido escoando num interior de um cano, tubo ou tubulações. Empresas petrolíferas costumam usar sistemas de tubulações para transportar gás natural, óleo e gasolina até seus reservatórios.
- **Escoamento externo** - são considerados os escoamentos de fluidos que escoam sem ser limitado por um meio material. Assy (2004) cita como exemplo as ações

dos ventos sobre prédios, pilares, postes, cabos aéreos, etc.

- **Escoamento incompressível** - nesse tipo de escoamento o volume não varia quando ocorre uma mudança na pressão, permanecendo a densidade constante. Os líquidos apresentam densidade constante, portanto são considerados incompressíveis.
- **Escoamento compressível** - nesse escoamento o volume varia quando ocorre uma mudança na pressão, alterando a densidade. Os gases são geralmente classificados como compressíveis porque qualquer variação na pressão, por pequena que seja, pode provocar uma mudança considerável na densidade.
- **Escoamento laminar** - é caracterizado por apresentar um movimento ordenado, níveis altos de viscosidade e velocidade baixa e constante. Nesse tipo de escoamento as camadas do fluido se deslocam paralelamente umas sobre as outras suavemente. Um exemplo prático e fácil de entender para esse tipo de escoamento é descrito por Fox (2010): se uma pessoa abrir uma torneira para uma vazão muito pequena a água escoará para fora suavemente apresentando um escoamento laminar.
- **Escoamento turbulento** - esse escoamento tem características totalmente diferentes do escoamento laminar. Apresentam movimentos desordenados, caóticos, baixos níveis de viscosidade e variações de velocidades fazendo com que suas partículas se misturem rapidamente enquanto irão escoando no fluido. Munson, Young e Okiishi (2004, p. 415) afirmam que "sem turbulência seria virtualmente impossível termos a vida como conhecemos". Em algumas situações o escoamento turbulento é necessário. Por exemplo, Fox (2010) comenta que a turbulência é muito importante no escoamento do sangue, através dos vasos sanguíneos, porque graças ao movimento aleatório é possível ocorrer o contato de todas as células de sangue com as paredes dos vasos para haver trocas de oxigênio e outros nutrientes.
- **Escoamento permanente ou estacionário** - nesse escoamento as propriedades do fluido como densidade, volume, pressão, velocidade, entre outras se mantêm inalteráveis em cada região do fluido com o passar do tempo. As propriedades do fluido podem variar de região para região, mas não podem ocorrer variações

com o tempo em cada região. Brunetti (2008) apresenta um exemplo prático do escoamento da água na tubulação de um tanque. Nesse tanque a quantidade de água que entra é igual à quantidade de água que sai e o nível dele é mantido constante porque está sendo abastecido continuamente por uma torneira. Nessas condições as propriedades do fluido como densidade, velocidade, pressão serão as mesmas em cada ponto em qualquer instante de tempo.

- **Escoamento não permanente** - as propriedades do fluido variam com o passar do tempo nesse escoamento. Se no exemplo anterior a quantidade de água que entra não for a mesma quantidade de água que sai, as propriedades do fluido serão diferentes em cada ponto com o passar do tempo.
- **Escoamento uni, bi e tridimensional** - o escoamento de um fluido pode ser considerado estar ocorrendo em uma, duas ou três dimensões dependendo das características do meio em que o fluido está escoando.

## 2.2 Equação da Conservação da Massa

A massa não pode ser criada e nem destruída durante um processo, sua característica é de se manter inalterada conservando sua propriedade. Isso é garantido pelo princípio de conservação da massa que afirma o seguinte: taxa de variação total de massa dentro do volume de controle durante um intervalo de tempo é igual à massa total entrando no volume de controle menos a massa total saindo do volume de controle durante um intervalo de tempo.

$$\frac{d}{dt} \int \rho dV = \sum_e \dot{m} - \sum_s \dot{m} \quad (2.10)$$

Considerando um volume de controle fixo com forma arbitrária que possui uma superfície  $A$  e um vetor unitário na direção da normal exterior a  $A$ , a equação da conservação da massa é expressa como:

$$\frac{d}{dt} \int_{vc} \rho dV + \int_{sc} \rho (\vec{V} \cdot \vec{n}) dA = 0 \quad (2.11)$$

onde o primeiro termo da equação representa a taxa de variação de massa no tempo no interior do volume de controle (vc) e o segundo termo é a vazão total de massa através da

superfície de controle (sc) no volume de controle, sendo o vetor velocidade.

Mas, como está sendo considerado um volume de controle fixo, esse não se movimentará com o passar do tempo, a derivada no tempo do primeiro termo da equação pode ser colocada para dentro da integral, pois, o domínio de integração não muda com o tempo (ÇENGEL; CIMBALA, 2007). Já a densidade pode depender da posição dentro do volume de controle, então a derivada no tempo pode ser expressa como derivada parcial.

Assim, a equação (2.11) fica:

$$\int_{VC} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_{sc} \rho \vec{V} \cdot \vec{n} dA = 0 \quad (2.12)$$

O teorema da divergência nos permite transformar uma integral de área sobre a superfície que define o volume em uma integral de volume do divergente do vetor (ÇENGEL; CIMBALA, 2007). Assim, aplicando o teorema do divergente na equação (2.12) obtém-se a seguinte equação:

$$\int_{VC} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_{VC} \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V}) dV = 0 \quad (2.13)$$

$$\int_{VC} \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V}) \right] dV = 0 \quad (2.14)$$

A equação entre os colchetes representa a forma diferencial da equação da conservação da massa conhecida também como equação da continuidade:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V}) = 0 \quad (2.15)$$

Também é possível representar a equação (2.15) utilizando a derivada material  $D/Dt$ :

$$\frac{D\rho}{Dt} + (\vec{\nabla} \cdot \vec{V})\rho = 0 \quad (2.16)$$

Para um escoamento incompressível a equação (2.15) fica da seguinte forma:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0 \quad (2.17)$$

Expressando esta em coordenadas cartesianas temos:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2.18)$$

considerando um domínio tridimensional.

### 2.3 Equação da Quantidade de Movimento

A equação da quantidade de movimento é uma ferramenta essencial utilizada em diversas áreas que precisam analisar e determinar como certos tipos de forças se comportam e interagem em corpos, objetos e superfícies. Brunetti (2008) destaca a importância dessa equação na área da engenharia onde é necessário em muitos problemas determinar as forças que agem em estruturas sólidas, fixas ou em movimento, devido a fluidos que se movem em contato com elas. Essa equação permite realizar esse tipo de análise.

A equação da quantidade de movimento é formulada a partir da segunda lei de Newton que afirma que a soma de todas as forças externas que agem em um sistema ou volume é igual à taxa da variação temporal da quantidade do momento no sistema ou volume.

$$\sum \vec{F} = \int_{vc} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{V}) dV + \int_{sc} (\rho \vec{V}) \vec{V} \cdot \vec{n} dA \quad (2.19)$$

Essa é a equação da quantidade de movimento que se aplica a volumes de controle fixo ou se movendo a velocidade constante.

A forma diferencial da equação da quantidade de movimento é a **equação de Cauchy** que pode ser aplicada para qualquer tipo de fluido.

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{V}) + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{V} \vec{V}) = \rho \vec{g} + \vec{\nabla} \cdot \sigma_{ij} \quad (2.20)$$

Uma outra forma de escrever a equação de Cauchy é:

$$\rho \left[ \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V} \right] = \rho \vec{g} + \vec{\nabla} \cdot \sigma_{ij} \quad (2.21)$$

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho \vec{g} + \vec{\nabla} \cdot \sigma_{ij} \quad (2.22)$$

Onde o  $\sigma_{ij}$  é o tensor de tensão utilizado para determinar as tensões de superfície em um fluido.

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

Conforme Çengel e Cimbala (2007) quando um fluido está em movimento existe a pressão que age para dentro e normal à superfície do fluido e também podem existir tensões viscosas. Então vamos expressar o tensor de tensão em relação à pressão e as tensões viscosas.

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -P & 0 & 0 \\ 0 & -P & 0 \\ 0 & 0 & -P \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix} \quad (2.24)$$

Substituindo a equação (2.24) na equação (2.22) obtém-se a seguinte equação:

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \rho \vec{g} - \vec{\nabla}P + \vec{\nabla} \tau_{ij} \quad (2.25)$$

### 2.3.1 Equação de Navier-Stokes

Para obter a equação de Navier-Stokes vamos considerar, a partir de agora, um fluido newtoniano. Um fluido newtoniano é caracterizado por apresentar o tensor de tensão diretamente proporcional ao tensor da taxa de deformação. Se ainda considerarmos o fluido incompressível, o tensor de tensão viscosa para um fluido newtoniano incompressível é expresso pela seguinte equação:

$$\tau_{ij} = \begin{pmatrix} 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} & \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \mu \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \mu \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) & 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} & \mu \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \mu \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) & \mu \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) & 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (2.26)$$

Expressando a equação (2.25) em coordenadas cartesianas e substituindo a equação (2.26) nessa, tem-se:

$$\rho \frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \rho g_x + 2\mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad (2.27)$$

$$\rho \frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \rho g_x + \mu \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] \quad (2.28)$$

$$\rho \frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \rho g_x + \mu \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right] \quad (2.29)$$

O termo entre parênteses é a equação da continuidade para o escoamento incompressível por isso é igual a zero. Os três últimos termos nada mais são do que o Laplaciano ( $\nabla^2$ ). Assim a equação (2.29) fica:

$$\rho \frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \rho g_x + \mu \nabla^2 u \quad (2.30)$$

Essa é a equação para a componente  $x$ . Para obter as equações para as componentes  $y$  e  $z$  faz-se o mesmo procedimento anterior, resultando em:

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = -\frac{\partial P}{\partial y} + \rho g_y + \mu \nabla^2 v \quad (2.31)$$

$$\rho \frac{Dw}{Dt} = -\frac{\partial P}{\partial z} + \rho g_z + \mu \nabla^2 w \quad (2.32)$$

Juntando as equações (2.30), (2.31) e (2.32) tem-se a equação de Navier-Stokes para o escoamento incompressível na forma vetorial:

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\vec{\nabla}P + \rho \vec{g} + \mu \nabla^2 \vec{V} \quad (2.33)$$

A equação (2.33) está escrita na forma não conservativa. Em geral, as equações escritas na forma conservativa apresentam melhores propriedades numéricas (FORTUNA, 2000). Dessa forma a equação (2.33) pode ser escrita como:

$$\rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \rho \vec{\nabla} \cdot (\vec{V}\vec{V}) = -\vec{\nabla}P + \rho \vec{g} + \mu \nabla^2 \vec{V} \quad (2.34)$$

Essa é uma equação diferencial parcial que junto com a equação da continuidade servem para calcular o campo de pressão e velocidade de um fluido newtoniano incompressível. É uma das mais importantes equações da mecânica dos fluidos que descrevem o movimento dos fluidos em relação ao momento (quantidade do movimento) e a aceleração.

## 2.4 Adimensionalização das Equações

A adimensionalização é um recurso muito usado na mecânica dos fluidos para transformar os termos das equações que apresentam diferentes grandezas em termos adimensionais. Essa transformação consiste em utilizar variáveis adimensionais que são substituídas nas equações e depois de efetuadas algumas operações matemáticas resultam as equações adimensionalizadas.

A grande vantagem em utilizar os números adimensionais é a economia de tempo e recursos que este proporciona.

Observe que a equação (2.34) envolve grandezas como velocidade, densidade, pressão, viscosidade e gravidade. Para simplificá-la vamos utilizar as seguintes variáveis adimensionais:

$$\vec{V}^* = \frac{\vec{V}}{V_0}, \quad P^* = \frac{P}{\rho V_0^2}, \quad t^* = \frac{t V_0}{L}, \quad \vec{\nabla}^* = \vec{\nabla} L, \quad g^* = \frac{\vec{g} L}{V_0^2}$$

onde  $V_0$  e  $L$  são valores de referência de velocidade e comprimento.

Multiplicando a equação (2.34) por  $1/\rho$ , obtém-se:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\vec{V} \vec{V}) = \vec{g} - \frac{\vec{\nabla} P}{\rho} + \nu \nabla^2 \vec{V} \quad (2.35)$$

Substituindo as variáveis adimensionais na equação (2.35) tem-se:

$$\frac{V_0^2}{L} \left( \frac{\partial \vec{V}^*}{\partial t^*} \right) + \frac{V_0^2}{L} \vec{\nabla}^* \cdot (\vec{V}^* \vec{V}^*) = \vec{g}^* \frac{V_0^2}{L} - \frac{\vec{\nabla}^* P^* V_0^2}{L} + \nu \frac{V_0}{L^2} (\nabla^*)^2 \vec{V}^* \quad (2.36)$$

Multiplicando a equação (2.36) por  $L/V_0^2$  e eliminando os asteriscos, tem-se a equação (2.34) na forma adimensionalizada.

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\vec{V} \vec{V}) = \vec{g} - \vec{\nabla} P + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \vec{V} \quad (2.37)$$

Neste trabalho adotaram-se alguns procedimentos como considerar um fluido incompressível, adimensionalizar as ENS e desconsiderar a gravidade. Então, desconsiderando-se o vetor da gravidade na equação (2.37) obtém-se a equação (2.38):

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\vec{V}\vec{V}) = -\vec{\nabla}P + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \vec{V} \quad (2.38)$$

No último termo da equação anterior surge o número de Reynolds (Re). O número de Reynolds foi descoberto pelo físico Osborne Reynolds em 1880, que observou em seus experimentos que o escoamento de um fluido dependia da relação entre as forças inerciais e as forças viscosas.

$$\text{Re} = \frac{\rho V_0 L}{\mu} \quad (2.39)$$

Esse número adimensional é o principal parâmetro utilizado para caracterizar se o fluxo está sob regime laminar, transiente ou turbulento (SOUZA, 2013, p.8). Dependendo do meio o qual o escoamento acontece o número de Reynolds muda. Por exemplo, para escoamentos no interior de tubos têm-se os seguintes valores (BRUNETTI, 2008):

Re < 2000, o regime é considerado laminar.

2000 < Re < 2400, o regime é considerado transitório.

Re > 2400, o regime é considerado como turbulento.

No regime laminar as forças viscosas são mais fortes que as forças inerciais fazendo com que o fluido apresente um escoamento em camadas laminares. Já no regime turbulento, as forças inerciais se tornam predominantes influenciando no escoamento de um fluido forçando-o a apresentar movimentos caóticos (PASKIN, 2016). O regime transiente ou transitório é um regime intermediário que caracteriza a transição do regime laminar para o turbulento.

### 3 MODELAGEM COMPUTACIONAL

Este capítulo apresenta o Método de Diferenças Finitas, deduzido através de expansões em Série de Taylor, para posterior discretização das equações governantes no espaço e o Método de Euler para a progressão no tempo. Esses métodos são necessários para obter a solução numérica das equações diferenciais parciais contidas neste trabalho. As aproximações por diferenças finitas serão aplicadas para um domínio discretizado de malha uniforme e estruturada.

#### 3.1 Método de Diferenças Finitas

O Método de Diferenças Finitas é um dos muitos métodos utilizado na Dinâmica dos Fluidos Computacional (DFC) para resolução de problemas que envolvem equações diferenciais ordinárias ou parciais. Esse método numérico baseia-se na aproximação de derivadas por diferenças finitas.

Para obter a solução numérica de um problema em uma região contínua, utilizando técnicas numéricas, é necessário escolher alguns pontos discretos contidos nessa região e calcular a solução do problema. Esse processo recebe o nome de discretização e o conjunto de pontos discretos é denominado de malha (FORTUNA, 2000).

Depois de realizar a discretização na região do problema, é necessário também discretizar as equações diferenciais para tornar viável tratamento numérico dessas equações. Fortuna (2000) deixa claro que antes de resolver as equações diferenciais de forma numérica, precisam-se encontrar, para os termos que aparecem nas equações, as respectivas expressões escritas em funções dos pontos da malha, ou seja, substituir as derivadas contidas na equação diferencial por aproximações de diferenças finitas. Ao final obtemos uma equação algébrica chamada de equação de diferenças finitas (EDF).

A EDF é escrita para cada ponto da região discretizada onde é preciso calcular a solução do problema. É importante destacar que a solução do problema não é exata, e sim aproximada, devido a erros causados pelo processo de discretização das equações, de arredondamento nos cálculos computacionais e nas aproximações numéricas das condições auxiliares.

Existem diversas formas de ser obter as aproximações de diferenças finitas. As mais conhecidas e utilizadas são as expansões em série de Taylor e interpolação numérica. Neste trabalho damos preferência ao uso das expansões em série de Taylor.

### 3.2 Expansões em Série de Taylor

O teorema de Taylor expressa o seguinte enunciado (LEITHOLD, 1994):

Seja  $f$  uma função tal que  $f$  e suas  $n$  primeiras derivadas são contínuas no intervalo fechado  $[a, b]$ , pode-se escrever, para todo ponto  $x \in [a, b]$  que:

$$f(x) = f(x_0) + (\Delta x) \left. \frac{df}{dx} \right|_{x_0} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \left. \frac{d^2f}{dx^2} \right|_{x_0} + \frac{(\Delta x)^3}{3!} \left. \frac{d^3f}{dx^3} \right|_{x_0} + \dots + R_N \quad (3.1)$$

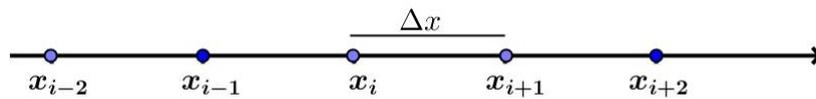
em que  $\Delta x = x - x_0$  e o termo  $R_N$  é o resto, definido como:

$$R_N = \frac{(\Delta x)^N}{N!} \left. \frac{d^N f}{dx^N} \right|_{\xi}, \xi \in [a, b]$$

onde  $N$  é considerado sempre maior que a maior ordem das derivadas.

Considere a Figura 3.1 que mostra uma malha unidimensional com alguns pontos uniformemente espaçados entre si por uma distância  $\Delta x$ .

Figura 3.1: Malha unidimensional.



Fonte: Adaptado de (FORTUNA, 2000).

Usando a expansão em série de Taylor é possível determinar a derivada primeira de  $f$  em  $x = x_i$ . Expandindo  $f(x_i + \Delta x)$  em série de Taylor em torno do ponto  $x_i$ , tem-se:

$$f(x_i + \Delta x) = f(x_i) + (\Delta x) \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_i + \frac{(\Delta x)^3}{3!} \left. \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \right|_i + \dots + R_N \quad (3.2)$$

Isolando a primeira derivada, obtém-se:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i = \frac{f(x_i + \Delta x) - f(x_i)}{\Delta x} + \left[ -\frac{(\Delta x)}{2!} \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_i - \frac{(\Delta x)^2}{3!} \left. \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \right|_i - \dots \right] \quad (3.3)$$

A expressão (3.3) indica que a primeira derivada é igual ao quociente:

$$\frac{f(x_i + \Delta x) - f(x_i)}{\Delta x}$$

mais os termos restantes da série de Taylor até o resto  $R_N$ :

$$ELT = \left[ -\frac{(\Delta x)}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_i - \frac{(\Delta x)^2}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \Big|_i - \dots \right] \quad (3.4)$$

O erro local de truncamento ( $ELT$ ) aparece porque é utilizado um número finito de termos da série de Taylor. Como não podemos tratar os infinitos termos dessa série na aproximação numérica para a derivada de  $f$ , a série foi truncada a partir da derivada de segunda ordem. O conjunto dos termos do ( $ELT$ ) geralmente é representado por  $O(\Delta x)$  ("ordem  $\Delta x$ ").

Para melhor organizar a notação escrevemos  $f_i$  para  $f(x_i)$  e  $f_{i+1}$  para  $f(x_i + \Delta x)$ . Então, com isso a expressão (3.3) fica:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (3.5)$$

a expressão (3.5) é denominada aproximação de **diferença progressiva**, pois, utiliza um ponto a frente de  $x_i$ , que é o ponto  $x_{i+1}$ .

Analogamente, a expansão em série de Taylor de  $f(x_i - \Delta x)$  em torno do ponto  $x_i$  é:

$$f(x_i - \Delta x) = f(x_i) - (\Delta x) \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_i + O(\Delta x)^2 \quad (3.6)$$

Isolando a derivada primeira, obtém-se:

$$\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_i = \frac{f_i - f_{i-1}}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (3.7)$$

a expressão (3.7) é denominada aproximação de **diferença atrasada** porque utiliza o ponto  $x_{i-1}$ , ponto esse que é situado atrás do ponto  $x_i$ .

A derivada primeira de  $f$  com  $O(\Delta x)^2$  pode ser obtida utilizando as seguintes expressões:

$$f(x_i + \Delta x) = f(x_i) + (\Delta x) \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_i + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_i + O(\Delta x)^3 \quad (3.8)$$

$$f(x_i - \Delta x) = f(x_i) - (\Delta x) \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_i + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_i + O(\Delta x)^3 \quad (3.9)$$

Subtraindo-se as expressões (3.8) e (3.9) obtém-se:

$$f(x_i + \Delta x) - f(x_i - \Delta x) = 2(\Delta x) \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i + O(\Delta x)^3 \quad (3.10)$$

Isolando a primeira derivada, tem-se:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta x} + O(\Delta x)^2 \quad (3.11)$$

por utilizar um ponto a frente e um ponto atrás de  $x_i$  a expressão (3.11) é denominada aproximação de **diferença central**.

As derivadas de ordem superior a um podem ser obtidas do mesmo modo como foram construídas as derivadas primeiras. Por exemplo, para determinar uma derivada de segunda ordem de diferença central, basta somar as expressões (3.8) e (3.9):

$$f(x_i + \Delta x) + f(x_i - \Delta x) = 2f(x_i) + (\Delta x)^2 \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_i + O(\Delta x)^4 \quad (3.12)$$

A expressão (3.12) pode ser reescrita como:

$$\left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_i = \frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x)^2 \quad (3.13)$$

Utilizando outras formas de combinações em série de Taylor podem-se deduzir outras fórmulas de diferenças. De forma resumida pode-se mostrar na Tabela 3.1 a 3.3 algumas aproximações de ordem  $O(\Delta x)^2$  (SANTOS, 1999).

Tabela 3.1: Representações de diferenças centradas de  $O(\Delta x)^2$

	$f_{i-2}$	$f_{i-1}$	$f_i$	$f_{i+1}$	$f_{i+2}$
$2(\Delta x) \frac{\partial f}{\partial x}$		-1	0	1	
$(\Delta x)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$		1	-2	1	
$2(\Delta x)^3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}$	-1	2	0	-2	1
$(\Delta x)^4 \frac{\partial^4 f}{\partial x^4}$	1	-4	6	-4	1

Fonte: (SANTOS, 1999)

Tabela 3.2: Representações de diferenças regressivas de  $O(\Delta x)^2$ 

	$f_{i-5}$	$f_{i-4}$	$f_{i-3}$	$f_{i-2}$	$f_{i-1}$	$f_i$
$2(\Delta x)\frac{\partial f}{\partial x}$				1	-4	3
$(\Delta x)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$			-1	4	-5	2
$2(\Delta x)^3\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}$		3	-14	24	-18	5
$(\Delta x)^4\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}$	-2	11	-24	26	-14	3

Fonte: (SANTOS, 1999)

Tabela 3.3: Representações de diferenças progressivas de  $O(\Delta x)^2$ 

	$f_i$	$f_{i+1}$	$f_{i+2}$	$f_{i+3}$	$f_{i+4}$	$f_{i+5}$
$2(\Delta x)\frac{\partial f}{\partial x}$	-3	4	-1			
$(\Delta x)^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$	2	-5	4	-1		
$2(\Delta x)^3\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}$	-5	18	-24	14	-3	
$(\Delta x)^4\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}$	3	-14	26	-24	11	-2

Fonte: (SANTOS, 1999)

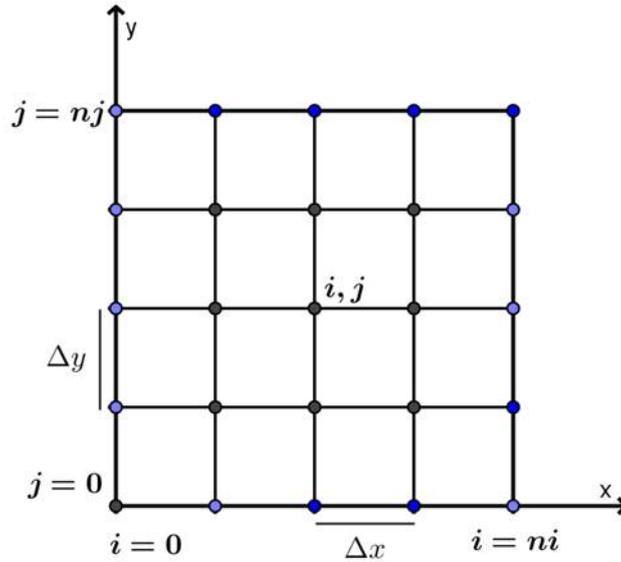
Da mesma forma pode-se deduzir EDF para funções que envolvem mais de uma variável. A Figura 3.2 mostra uma malha bidimensional estruturada, qualquer ponto  $(x_i, y_i)$  é representado na malha por  $(i, j)$ , e os pontos vizinhos são representados por  $(i \pm 1, j \pm 1)$ .

Utilizando as expansões em série de Taylor podemos obter para  $f = f(x, y)$  uma aproximação de  $O(\Delta x)^2$  para  $\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{i,j}$ , expressa do seguinte modo:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{i,j} = \frac{f_{i+1,j} - f_{i-1,j}}{2\Delta x} + O(\Delta x)^2 \quad (3.14)$$

Derivadas mistas do tipo  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$  podem ser determinadas expandindo  $f(x_i + \Delta x, y_i + \Delta x)$  em torno do ponto  $(x_i, y_i)$ :

Figura 3.2: Malha bidimensional.



Fonte: Adaptado de (FORTUNA, 2000).

$$f(x_i + \Delta x, y_i + \Delta y) = f(x_i, y_i) + (\Delta x) \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{i,j} + (\Delta y) \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{i,j} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_{i,j} + \frac{2(\Delta x)(\Delta y)}{2!} \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right|_{i,j} + \frac{(\Delta y)^2}{2!} \left. \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right|_{i,j} + R_N$$

onde o último termo  $R_N$  é o resto.

Mas, uma forma direta é construir as aproximações de diferenças finitas separadamente para cada dimensão, para isso considere:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) \quad (3.15)$$

resolvendo primeiro o termo entre parênteses por diferenças centrais de segunda ordem obtemos:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{f_{i+1,j} - f_{i-1,j}}{2\Delta x} \right) + O(\Delta x)^2 \quad (3.16)$$

Utilizando o operador  $\frac{\partial}{\partial y}$  aos pontos  $(i \pm 1, j)$ , tem-se a seguinte equação:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{f_{i+1,j} - f_{i-1,j}}{2\Delta x} \right) + O(\Delta x)^2 = \frac{1}{2\Delta x} \left( \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{i+1,j} - \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{i-1,j} \right) + O(\Delta x)^2 \quad (3.17)$$

Aproximando as derivadas que aparecem entre parênteses por diferenças centrais de se-

gunda ordem:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{1}{2\Delta x} \left( \frac{f_{i+1,j+1} - f_{i+1,j-1}}{2\Delta y} - \frac{f_{i-1,j+1} - f_{i-1,j-1}}{2\Delta y} \right) + O[(\Delta x)^2, (\Delta y)^2] \quad (3.18)$$

Simplificando a expressão (3.18), tem-se a EDF para uma derivada mista:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \Big|_{i,j} = \frac{f_{i+1,j+1} - f_{i+1,j-1} - f_{i-1,j+1} - f_{i-1,j-1}}{4(\Delta x)(\Delta y)} + O[(\Delta x)^2, (\Delta y)^2] \quad (3.19)$$

As deduções aqui apresentadas são para funções escalares, mas de forma semelhante podem ser aplicadas para funções vetoriais.

Para o âmbito deste trabalho as aproximações aqui apresentadas são suficientes, para maiores detalhes sobre o método ou busca por aproximações de maior ordem, discretização para malhas não uniformes ou maiores conhecimentos podem ser encontrados no livro de (FORTUNA, 2000) e o trabalho de (SANTOS, 1999).

### 3.3 Método de Euler

Os fenômenos físicos podem ser classificados como estacionários ou transientes (FORTUNA, 2000). No caso dos estacionários a solução de um problema não depende do tempo, já os fenômenos transientes a solução é dependente do tempo.

O método de Euler é um método explícito utilizado para calcular soluções de problemas em intervalos sucessivos de tempo a partir dos valores iniciais das grandezas em  $t_0$ .

Considere uma equação geral da forma:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = F \quad (3.20)$$

com condição inicial:

$$u(\vec{x}, t_0) = u_{init}$$

Observando a equação (3.20) e sua condição inicial, nota-se que essa apresenta variáveis independentes  $\vec{x}$  e  $t$ , no caso de um problema bidimensional no espaço temos  $\vec{x} = (x, y)$ . Para obter uma solução numérica precisa-se discretizar a equação (3.20) em relação as coordenadas espaciais e temporal.

Discretizando primeiro a equação (3.20) nas coordenadas espaciais, tem-se:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{i,j} = F|_{i,j} \quad (3.21)$$

Pode-se notar que o lado esquerdo da equação representa as derivadas em relação ao tempo, precisa-se então discretizar a equação (3.21) na coordenada temporal. A discretização no tempo possibilita obter relações entre valores da  $u$  em instantes sucessivos de tempo.

Discretizando a equação (3.21) no nível de tempo  $n$ , temos:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{i,j}^n = F|_{i,j}^n \quad (3.22)$$

De forma geral, o valor de  $u$  na posição  $(i, j)$  e no instante de tempo  $t_0 + n\Delta t$  é representado por  $u|_{i,j}^n$  ou somente  $u_{i,j}^n$ . Para relacionar os valores de  $u_{i,j}^{n+1}$  com os de  $u_{i,j}^n$  vamos aproximar a derivada temporal por diferenças progressivas de primeira ordem:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{i,j}^n = \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t} + O(\Delta t) \quad (3.23)$$

Substituindo a equação (3.23) na equação (3.22), obtém-se:

$$\frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t} = F|_{i,j}^n + O[(\Delta t), (\Delta \vec{x})^m] \quad (3.24)$$

A expressão (3.24) pode ser escrita da forma:

$$u_{i,j}^{n+1} = u_{i,j}^n + (\Delta t) F|_{i,j}^n \quad (3.25)$$

O lado direito da equação anterior só depende de valores de  $u$  conhecidos no nível  $n$ . Portanto, a equação (3.25), representa o **método de Euler explícito**.

Substituindo o valor  $n = 0$  na equação (3.25) tem-se:

$$u_{i,j}^1 = u_{i,j}^0 + (\Delta t) F|_{i,j}^0 \quad (3.26)$$

que é uma fórmula explícita para  $u_{i,j}^1$ , já que os valores podem ser determinados em função dos valores conhecidos de  $u_{i,j}^0$ . Lembre-se que  $u_{i,j}^0$  são valores da condição inicial, para  $t = t_0$ .

Escrevendo a expressão (3.26) para cada ponto do domínio espacial  $(i, j)$  em que

se desejam os valores de  $u$  no nível de tempo  $n = 0$ , obtém-se um conjunto de equações independentes que permitem facilmente calcular os valores de  $u_{i,j}^1$ . Após o cálculo de  $u_{i,j}^1$ , entraremos no nível de tempo  $n = 1, 2, 3, \dots$  e repetir o mesmo procedimento para calcular os valores para  $u_{i,j}^2, u_{i,j}^3, u_{i,j}^4, \dots, u_{i,j}^n$ , sucessivamente para todos os pontos do domínio.

O método de Euler é um método explícito, de fácil implementação, pois depende somente de valores já calculados, porém os métodos implícitos possuem regiões de estabilidade, em geral, muito maiores que a dos métodos explícitos permitindo maiores passos de integração. O método de Euler melhorado e Runge-Kutta são exemplos de métodos implícitos muito usados em problemas da DFC.

### 3.4 Método da Projeção-passo fracionado

Uma das dificuldades para resolver numericamente as equações de Navier-Stokes e continuidade é a condição de incompressibilidade, cujo o campo de velocidades deve ter divergência nula. Logo, a pressão passa a ser uma variável não relacionada a qualquer equação constitutiva, como consequência existe um acoplamento desconhecido entre pressão e velocidade que impede que as duas variáveis possam ser aproximadas independentemente. Para desacoplar pressão e velocidade surgem diversos métodos, entre eles, os métodos de projeção.

O método do passo fracionado é um método utilizado para resolver as equações de Navier-Stokes e da continuidade para um escoamento incompressível. Ele consiste em obter o avanço no tempo através da decomposição de cada passo do tempo em uma sequência de dois ou mais passos desacoplando pressão e velocidade (ANTUNES, 2008).

Um dos primeiros a desenvolver esse método para as equações de Navier-Stokes foi Chorin (1968) com o propósito de superar as dificuldades numéricas que as equações de Navier-Stokes apresentavam devido ao acoplamento da velocidade e pressão. A partir de então o método se tornou comum devido sua eficiência computacional, por causa da possibilidade de subdividir um problema complexo em outros problemas mais simples e de mais fácil implementação computacional (CAMPOS, 2005, p.45).

O método de passo fracionado consiste em separar as equações de Navier-Stokes discretizadas em relação ao tempo em uma equação convectiva-difusiva conhecida como equação de Burger e em uma equação de Poisson.

Considere a equação de Navier-Stokes adimensionalizada e discretizada no tempo:

$$\frac{\vec{V}^{n+1} - \vec{V}^n}{\Delta t} = -\vec{\nabla} P^{n+1} - \vec{\nabla}(\vec{V}\vec{V})^n + \frac{1}{\text{Re}}(\nabla^2 \vec{V}^n) \quad (3.27)$$

Uma variável intermediária ( $\vec{V}^*$ ) é criada ao dividir a equação (3.27) em duas:

$$\frac{\vec{V}^* - \vec{V}^n}{\Delta t} = -\vec{\nabla}(\vec{V}\vec{V})^n + \frac{1}{\text{Re}}\nabla^2 \vec{V}^n \quad (3.28)$$

$$\frac{\vec{V}^{n+1} - \vec{V}^*}{\Delta t} = -\vec{\nabla} P^{n+1} \quad (3.29)$$

Aplicando o operador divergente ( $\vec{\nabla} \cdot$ ) na equação (3.29) e considerando o  $\vec{\nabla} \cdot \vec{V}^{n+1} = 0$  obtém-se a equação de Poisson (3.30).

$$(\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla})P^{n+1} = \frac{1}{\Delta t} \vec{\nabla} \cdot \vec{V}^* \quad (3.30)$$

A equação de Burguer (3.28) desconsidera o termo da pressão nas equações do momento, e por meio dela é possível obter, num primeiro passo, um campo de velocidade intermediário ou aproximado (RENGEL; MARTINS; SPHAIER, 1999). O campo de velocidade intermediário é utilizado para obter o campo de pressão através da equação de Poisson, e esta possibilita encontrar o campo de velocidade final.

A ordem da resolução deste método, basicamente se resume nas seguintes etapas:

- Calcular a velocidade intermediária  $\vec{V}^*$ ;
- Resolver a equação de Poisson para calcular o campo de pressão;
- Corrigir as velocidades e a pressão.

Ou seja, resolver as equações apresentadas anteriormente na seguinte sequência: (3.28), (3.30) e (3.29) para cada passo de tempo.

### 3.5 Método da Penalidade

O uso do método da penalidade ajuda a resolver as equações de Navier-Stokes para um escoamento incompressível. Esse método possibilita desacoplar a pressão e a velocidade contidas nessas equações. Buk Junior (2007) explica em seu trabalho que o mecanismo que permite esse desacoplamento é a relaxação da condição de incompressibilidade no sentido que um problema incompressível é aproximado através de uma for-

mulação levemente compressível.

A formulação penalizada é obtida estabelecendo uma relação entre a pressão e os campos de velocidades, tal que:

$$P = -\lambda \left( \vec{\nabla} \cdot \vec{V} \right) \quad (3.31)$$

onde  $\lambda$  é o parâmetro de penalização e pode ser expresso como  $\lambda = c\mu$ . Geralmente  $c$  representa uma constante que está relacionado com o tamanho de palavra do computador utilizado podendo variar de acordo com o caso estudado (simulado), por isso não podemos definir um valor preciso para este.

À medida que  $\lambda$  tende ao infinito o divergente do campo de velocidades deve tender a zero para que a pressão permaneça finita. O parâmetro  $\lambda$  deve ser suficientemente grande para que a compressibilidade introduzida seja mínima, mas não grande demais para que cause complicações numéricas (PASKIN, 2016, p.8).

Substituindo a equação (3.31) na equação (2.38) obtém-se:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \left( \vec{V} \vec{V} \right) + \frac{c}{\text{Re}} \vec{\nabla} \left( \vec{\nabla} \cdot \vec{V} \right) + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \vec{V} \quad (3.32)$$

Ao final desse procedimento a pressão é eliminada restando apenas à velocidade na equação, ou seja, resolve-se a equação somente em relação aos campos de velocidades.

## 4 ESTUDO DE CASOS

Neste capítulo apresentam-se os casos onde o escoamento de um fluido incompressível newtoniano é simulado utilizando um algoritmo escrito e desenvolvido em linguagem C através do ambiente de desenvolvimento integrado e livre Dev C++. São implementados os casos de um escoamento em uma cavidade quadrada com tampa móvel e um escoamento passando por um ressalto hidráulico. Esses problemas são amplamente utilizados nas simulações numéricas das equações de Navier-Stokes e servem como objetos iniciais para estudos na área da dinâmica de fluidos (RENGEL; MARTINS; SPHAIER, 1999).

### 4.1 Cavidade Quadrada

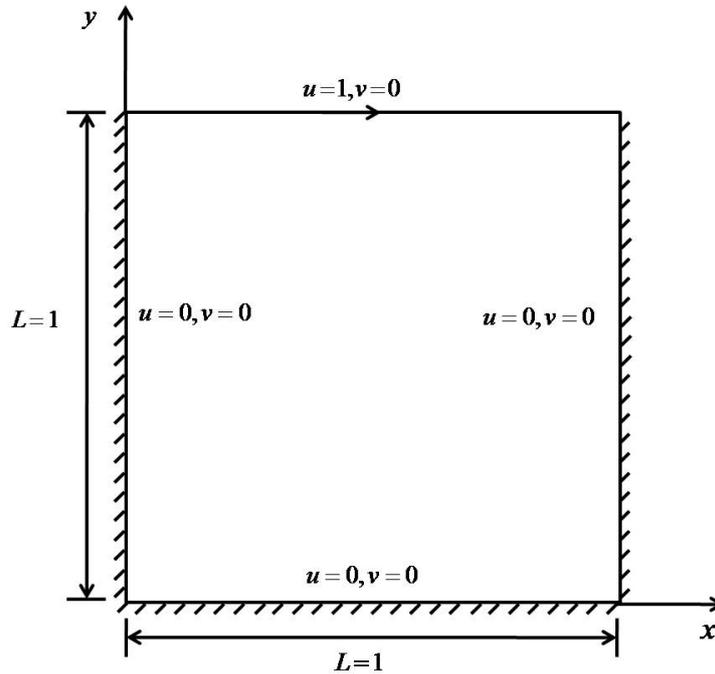
Por apresentar uma geometria simples o problema da cavidade quadrada é utilizado em inúmeros trabalhos para implementar, testar, analisar métodos, avaliar o comportamento da pressão e velocidade em escoamentos e analisar condições de contorno. Mas, apesar da cavidade quadrada apresentar características geométricas simples, o escoamento de um fluido em seu interior apresenta movimentos considerados complexos, como recirculações.

O problema desse caso é determinado considerando inicialmente um fluido em repouso, no qual sai dessa condição pelo movimento da parte superior móvel (tampa) da cavidade com velocidade constante e máxima  $u = 1$ . Devido a tensões viscosas, o movimento da tampa "puxa" o fluido que está adjacente à ela, originando o escoamento (FORTUNA, 2000, p. 306). Nas paredes laterais e a inferior as velocidades  $u$  e  $v$  são iguais a zero. A geometria bidimensional do problema e as condições de contorno são mostradas na Figura 4.1. Para reduzir o trabalho computacional na simulação numérica, esse problema é amplamente estudado em um plano bidimensional. O trabalho de Ghia, Ghia e Shin (1982) utilizado para comparação dos resultados obtidos também traz esse escoamento em um plano bidimensional.

Existem diversos tipos de condições de contorno e a escolha adequada é um fator determinante para obter a solução mais próxima possível da solução exata do problema. As condições de contorno utilizadas nesse caso são as de Dirichlet, onde a solução da variável é descrita na fronteira (ZILL; CULLEN, 2008).

No presente trabalho, para simular o escoamento em uma cavidade quadrada

Figura 4.1: Geometria e condições de contorno da cavidade quadrada.



Fonte: Adaptado de (RENGEL; MARTINS; SPHAIER, 1999).

utilizou-se o método de diferenças finitas agregado com o método da penalidade e o método da projeção-passo fracionado, considerando o número de Reynolds igual a 100, 400 e 1.000 e uma malha uniforme e quadrangular  $81 \times 81$ . Para o método da projeção-passo fracionado e o método da penalidade usaram-se aproximações progressivas para os termos transientes e aproximações centrais para os termos convectivos e difusivos.

Os resultados numéricos das velocidades foram comparados com os resultados apresentados no trabalho de Ghia, Ghia e Shin (1982), no qual os números de Reynolds variam de 100 até 10.000, simulado também para um escoamento em uma cavidade quadrada, mas usando uma malha uniforme  $129 \times 129$ . A seguir são apresentados os resultados numéricos obtidos no desenvolvimento do trabalho.

## 4.2 Resultados numéricos da cavidade quadrada

Na Figura 4.2 são apresentados os perfis de velocidade para  $u$  em  $x = 0,5L$  (a) e  $v$  em  $y = 0,5L$  (b) para Reynolds 100. As soluções numéricas foram obtidas através do método da penalidade e o da projeção, os mesmos são comparados com resultados numéricos obtidos por Ghia, Ghia e Shin (1982), cuja a referência é amplamente utilizada como fim de comparação. Observando os gráficos nota-se que o método da projeção está

mais próximo dos resultados de Ghia do que o método da penalidade, porém é necessário destacar que a malha utilizada  $81 \times 81$  é menor que a de Ghia  $129 \times 129$ .

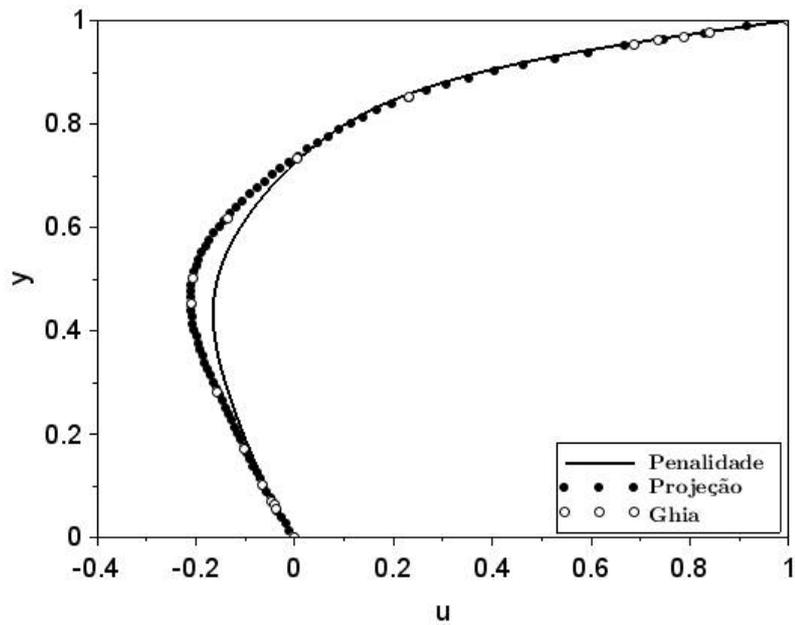
Para o número de Reynolds 100 os efeitos dos termos difusivos e advectivos ainda não são tão significativos devido ao baixo valor de Reynolds. Esses termos começam a ser expressivos à medida que o número de Reynolds aumenta e o comportamento do escoamento no interior da cavidade sofre algumas modificações em relação a velocidade e pressão.

Na Figura 4.3 foram avaliados os perfis de velocidade para  $u$  em  $x = 0,5L$  (a) e  $v$  em  $y = 0,5L$  (b) para Reynolds 400. A malha e os métodos utilizados foram os mesmos de Reynolds 100. A solução numérica com o método da projeção se mostrou em concordância com a de Ghia, diferente da solução do método da penalidade. À medida que o número de Reynolds aumentou o método da penalidade se mostrou instável, não gerando resultados satisfatórios. Uma das causas possíveis para este método está se mostrando pouco preciso pode ser o refinamento da malha que está inferior do que o necessário e como a pressão está escrita em termos das velocidades no método da penalidade, à medida que aumenta o número de Reynolds os termos difusivos e advectivos se tornam cada vez mais importantes, determinando decisivamente os campos de velocidade.

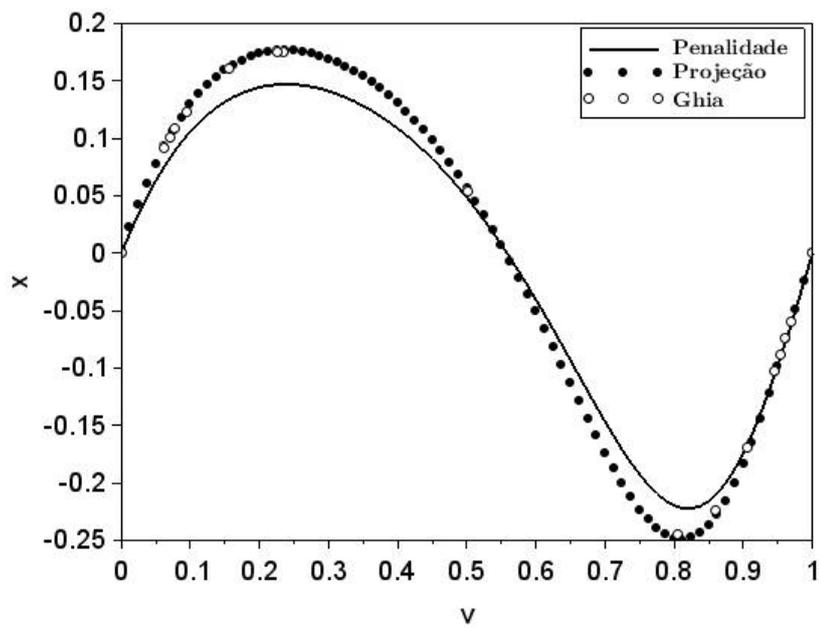
A Figura 4.4 mostra os perfis de velocidade no centro da cavidade para  $u$  e  $v$  em  $x = 0,5L$  e  $y = 0,5L$  para Reynolds 1.000. Pode-se notar boa concordância dos resultados do método da projeção com o da referência, ao contrário dos resultados obtidos para o método da penalidade que apresenta valores distantes quando comparado com o da referência. Para Reynolds 1.000 os efeitos difusivos e advectivos são predominante e o escoamento no interior da cavidade apresenta fortes recirculações como pode-se observar na Figura 4.5 que mostra o comportamento do campo das velocidades  $u$  (a) e  $v$  (b) do método da projeção.

Observando o campo das velocidades  $u$  e  $v$  do método da projeção na Figura 4.5 podemos notar que em relação a componente  $u$  a velocidade é máxima na parte superior  $u = 1$  e continua decrescendo à medida que flui para o interior apresentando uma velocidade mínima no centro do vórtice na parte inferior da cavidade. Para a componente  $v$  a velocidade mínima está localizada no vórtice da parte direita e a velocidade máxima no vórtice da parte lateral e nas outras partes da cavidade a velocidade se mantém quase constante. É necessário destacar que a Figura 4.5 mostra o mapa colorido das velocidades  $u$  e  $v$ , não as linhas de corrente do escoamento.

Como para uma malha  $81 \times 81$  o método da penalidade não se aproximou dos

Figura 4.2: Perfil das velocidades  $u$  e  $v$  para  $Re = 100$ .

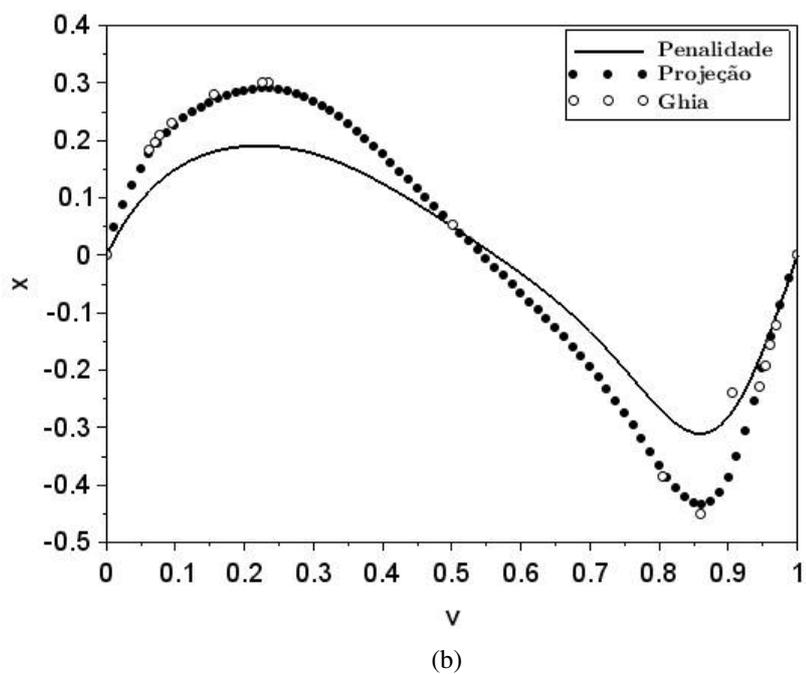
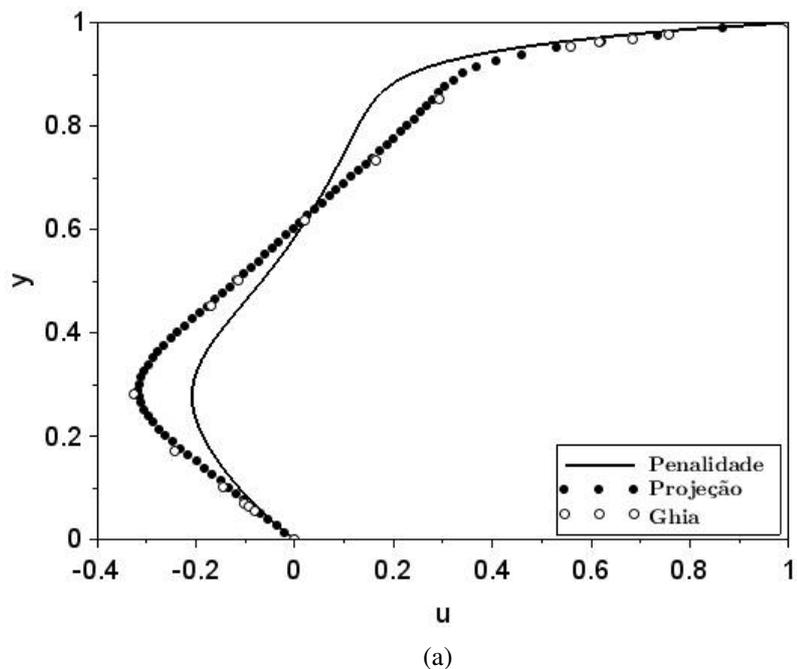
(a)



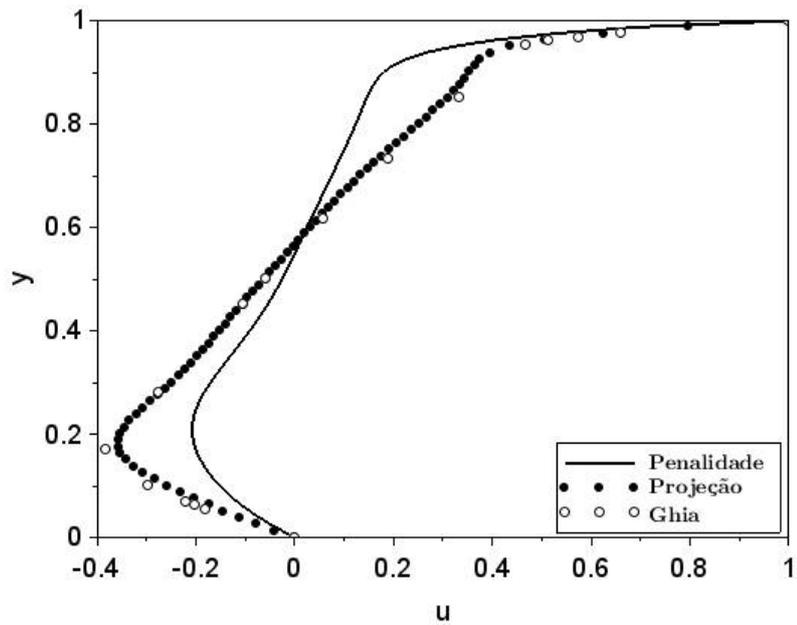
(b)

Fonte: Elaborada pelo autor.

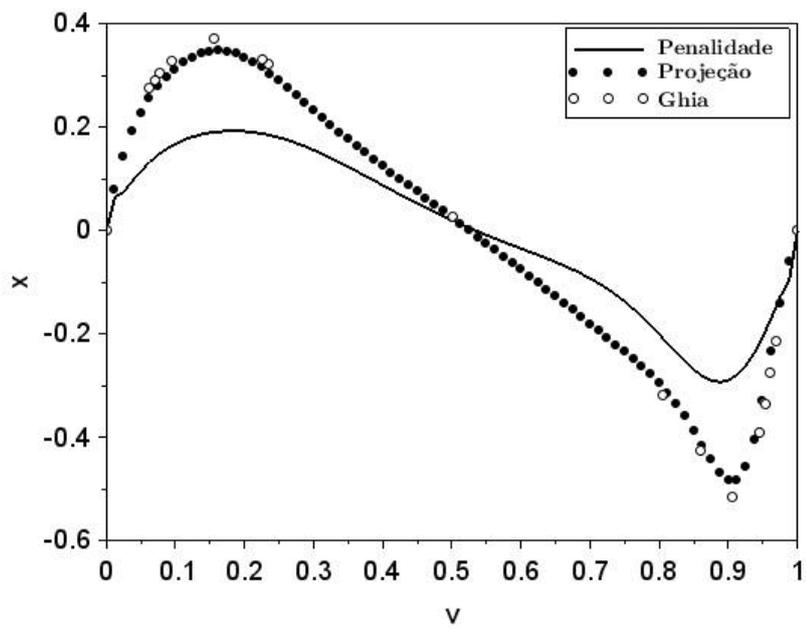
Figura 4.3: Perfil das velocidades  $u$  e  $v$  para  $Re = 400$ .



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 4.4: Perfil das velocidades  $u$  e  $v$  para  $Re = 1.000$ .

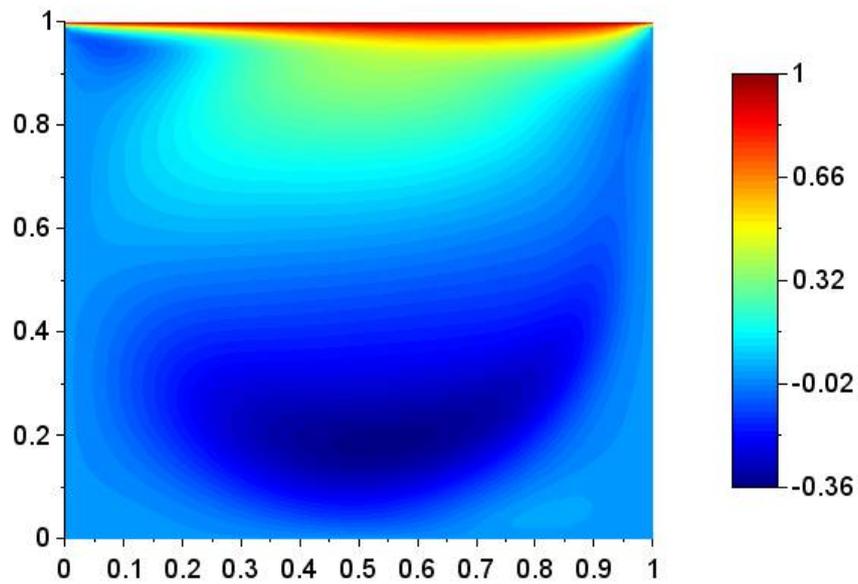
(a)



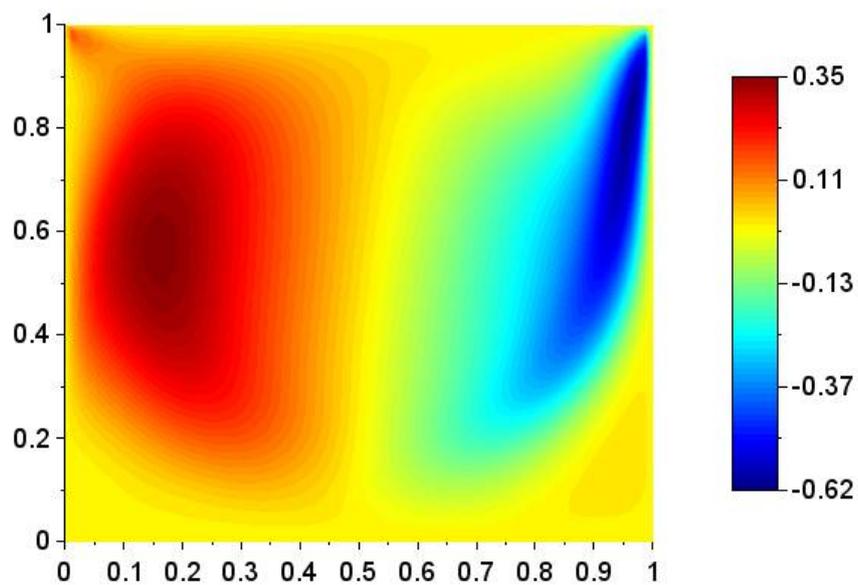
(b)

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 4.5: Campo das velocidades  $u$  (a) e  $v$  (b) para  $Re = 1.000$  pelo método da projeção.



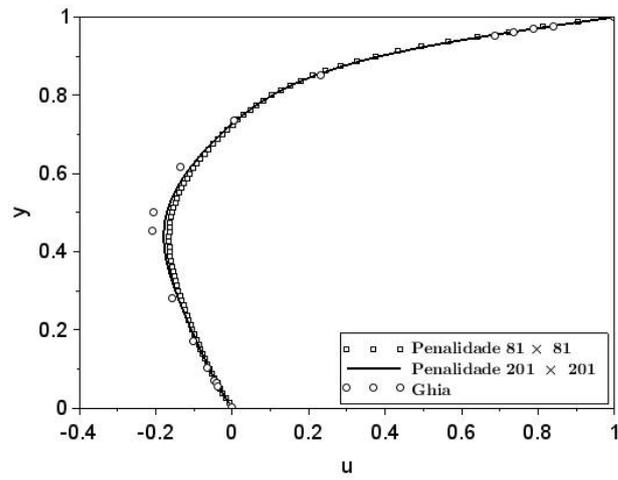
(a)



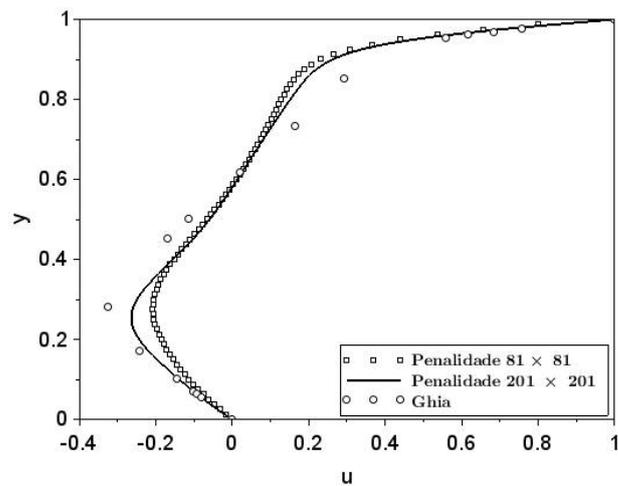
(b)

Fonte: Elaborada pelo autor.

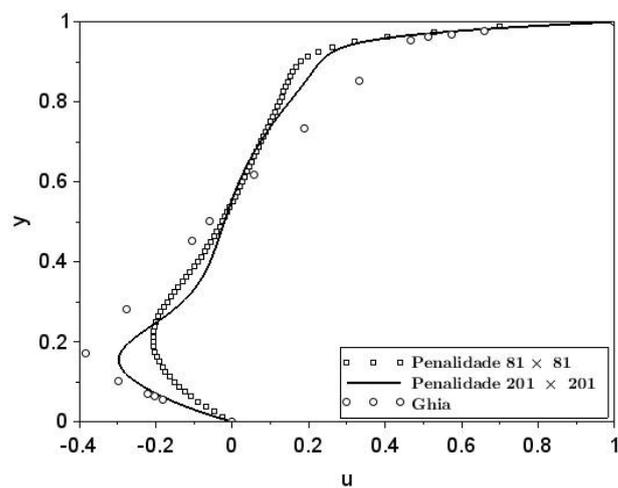
Figura 4.6: Perfil das velocidades  $u$  para  $Re = 100$  (a), 400 (b) e 1.000 (c) com diferentes malhas para o método da penalidade.



(a)



(b)



(c)

Fonte: Elaborada pelo autor.

resultados da referência de Ghia, decidiu-se utilizar uma malha  $201 \times 201$ , mais refinada para obter uma aproximação melhor para Reynolds 100, 400 e 1.000. Na Figura 4.6 os gráficos mostram que no método da penalidade a solução fica mais precisa quando se refina a malha. Portanto, para obter resultados melhores a malha deveria ser mais refinada, porém o nosso poder computacional é limitado.

Para todas as simulações foram adotados  $\Delta t = 10^{-5}$  e o critério de parada considera a variação relativa de um passo para o outro menor que  $10^{-8}$ .

### 4.3 Ressalto Hidráulico

O ressalto hidráulico é um fenômeno caracterizado pela transição descontínua de um escoamento, ou seja, uma alteração brusca no escoamento em regime rápido para um escoamento em regime lento (MEES, 2008). Geralmente são usados em obras hidráulicas como em barragens e hidrelétricas como um meio para dissipar energia evitando erosões que podem causar danos a essas estruturas.

Existem vários tipos de ressalto hidráulico, sendo que estes são classificados de acordo com o número de Froude. O número de Froude é um número adimensional que estabelece uma relação entre as forças inerciais e gravitacionais. Como o foco deste trabalho não é especificamente o número de Froude para maiores detalhes pode-se consultar o trabalho de Mees (2008) e Souza (2011).

O escoamento no ressalto hidráulico é um problema muito utilizado como objeto de estudo por alguns autores como Rengel, Martins e Sphaier (1999), Gartling (1990), Armary et al. (1983) entre outros, por apresentar uma geometria simples e de fácil imposição das condições de contorno. A simulação desse escoamento permite avaliar os movimentos recirculares que acontecem na parede superior e inferior e também possibilita analisar regiões de separação e unificação da camada limite do escoamento.

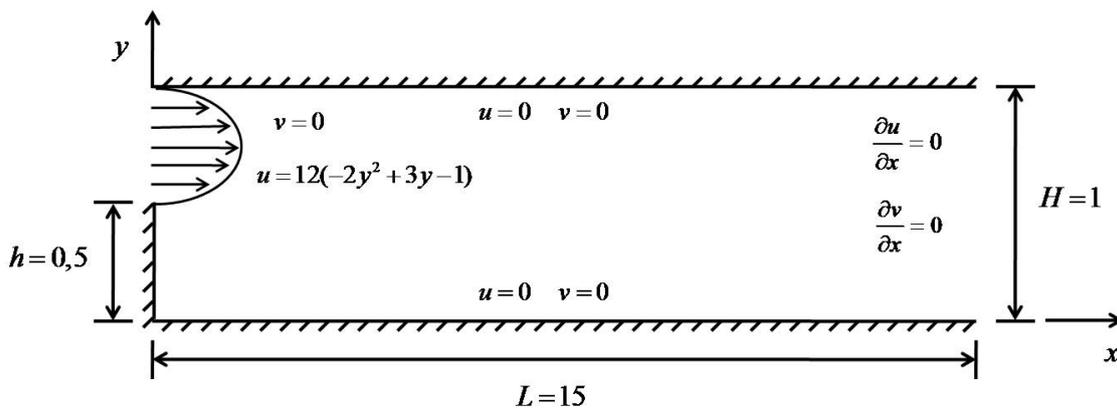
A Figura 4.7 mostra a representação geométrica do caso, com suas dimensões e condições de contorno explicitadas. Nesta figura consta o comprimento do ressalto hidráulico  $L = 15$ , a altura a jusante  $H = 1$  e a altura a montante onde o fluido entra  $h = 0,5$ . As condições de contorno utilizadas para este caso são as de Neumann e Dirichlet. Como descrito anteriormente às condições de contorno de Dirichlet especificam o valor da função na fronteira, já as condições de contorno de Neumann definem a derivada normal a função do domínio, ou seja, é um fluxo (FORTUNA, 2000), (ZILL; CULLEN, 2008).

O campo de velocidade de entrada no ressalto hidráulico apresenta um fluxo paralelo com uma componente horizontal parabólica definida por  $u = 12(-2y^2 + 3y - 1)$  para  $0,5 < y < 1$ , garantindo uma velocidade máxima de entrada igual a  $u_{max} = 1,5$ . Para a componente  $v$  inicialmente a velocidade é zero.

O escoamento no ressalto hidráulico foi simulado para Reynolds 100 e 400, utilizando método de diferenças finitas e o método da projeção, pois este apresentou resultados melhores do que o método da penalidade no caso anterior (cavidade quadrada). Para os termos transientes usaram-se diferenças progressivas, para os termos convectivos em relação a  $x$  usou-se diferenças regressivas e para os demais termos foram utilizadas diferenças centrais.

Por não encontrar nenhuma referência que utilizasse os mesmos critérios de análise sobre os perfis de velocidades horizontal e vertical em relação ao centro do ressalto hidráulico, será apresentado os resultados obtidos sem compará-los com nenhuma referência.

Figura 4.7: Geometria e condições de contorno do ressalto hidráulico.



Fonte: Adaptado de (RENGEL; MARTINS; SPHAIER, 1999).

#### 4.4 Resultados numéricos do ressalto hidráulico

Para o caso do ressalto hidráulico foi utilizado uma malha uniforme retangular  $376 \times 41$ , contendo ao todo 15.416 nós. A variação do tempo foi considerada  $\Delta t = 10^{-6}$  para Reynolds 100 e 400.

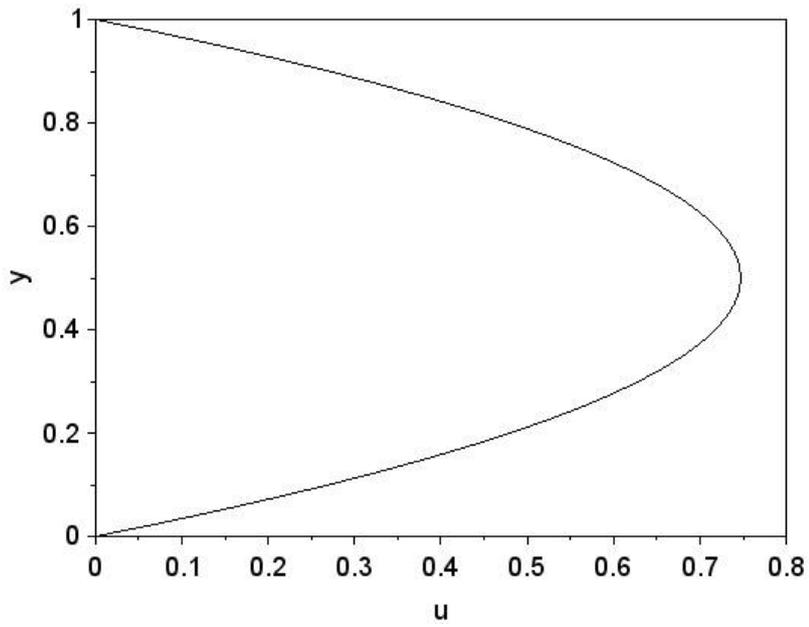
A Figura 4.8 mostra o perfil das velocidades  $u$  e  $v$  para Reynolds 100 em  $x = L/2$  e  $y = H/2$ . O fluido na região de entrada do ressalto hidráulico para a componente  $u$  tem perfil parabólico, esse perfil, para Reynolds 100, também é mantido depois do escoamento

desenvolvido dentro do ressalto hidráulico, como nota-se em  $x = L/2$  pela Figura 4.8(a). Para a componente  $v$  o perfil da velocidade apresenta variações acentuadas no início, e a partir de  $x = 5$  começa a ficar constante no restante do escoamento, observado na Figura 4.8(b).

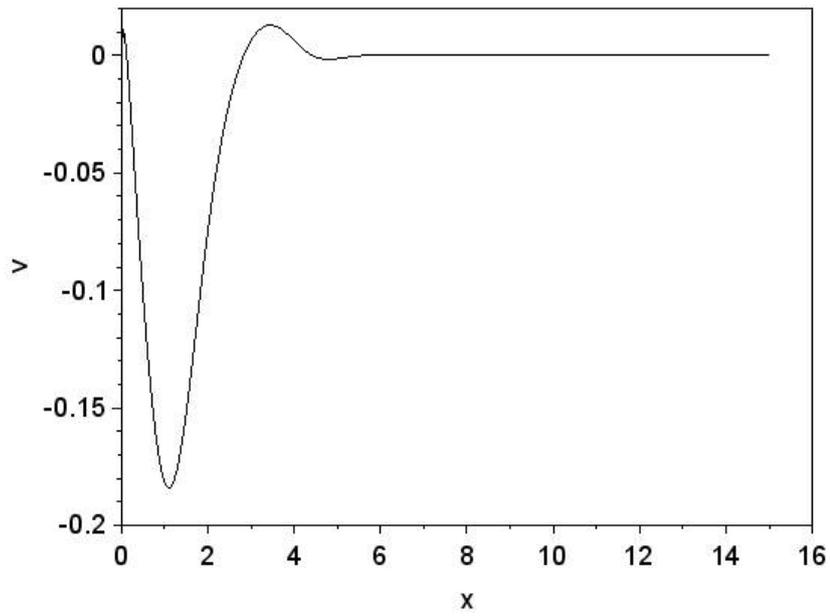
A Figura 4.9 mostra em detalhes o campo das velocidades  $u$  e  $v$  para Reynolds 100. É possível notar na Figura 4.9(a) que a velocidade  $u$  é máxima no centro da região de entrada do fluido, decrescendo à medida que se afasta desse centro em direção as paredes superior e inferior. A velocidade  $v$  possui variações significativas de valores próximo da entrada do fluido como pode-se perceber na Figura 4.9(b). Nesta figura também pode-se constatar a formação de um vórtice localizado no canto inferior esquerdo.

Para o caso simulado utilizando Reynolds 400 os resultados obtidos são um pouco diferente dos resultados do caso anterior. A Figura 4.10 apresenta o perfil das velocidades  $u$  em  $x = L/2$  e  $v$  em  $y = H/2$  para Reynolds 400 e a Figura 4.9 mostra a distribuição das velocidades  $u$  e  $v$  em todo o ressalto hidráulico. Com o aumento do número de Reynolds o comportamento de  $u$  começa a deixar de ser parabólico e vórtices mais acentuados surgem no canto inferior esquerdo. No caso do ressalto hidráulico temos um problema em que o escoamento é estritamente convectivo por apresentar uma geometria em que o termo difusivo não causa efeitos dominantes sobre o fluido.

Figura 4.8: Perfil das velocidades  $u$  (a) e  $v$  (b) para  $Re = 100$  através do método da projeção.



(a)



(b)

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 4.9: Campo das velocidades  $u$  (a) e  $v$  (b) para  $Re = 100$  pelo método da projeção.

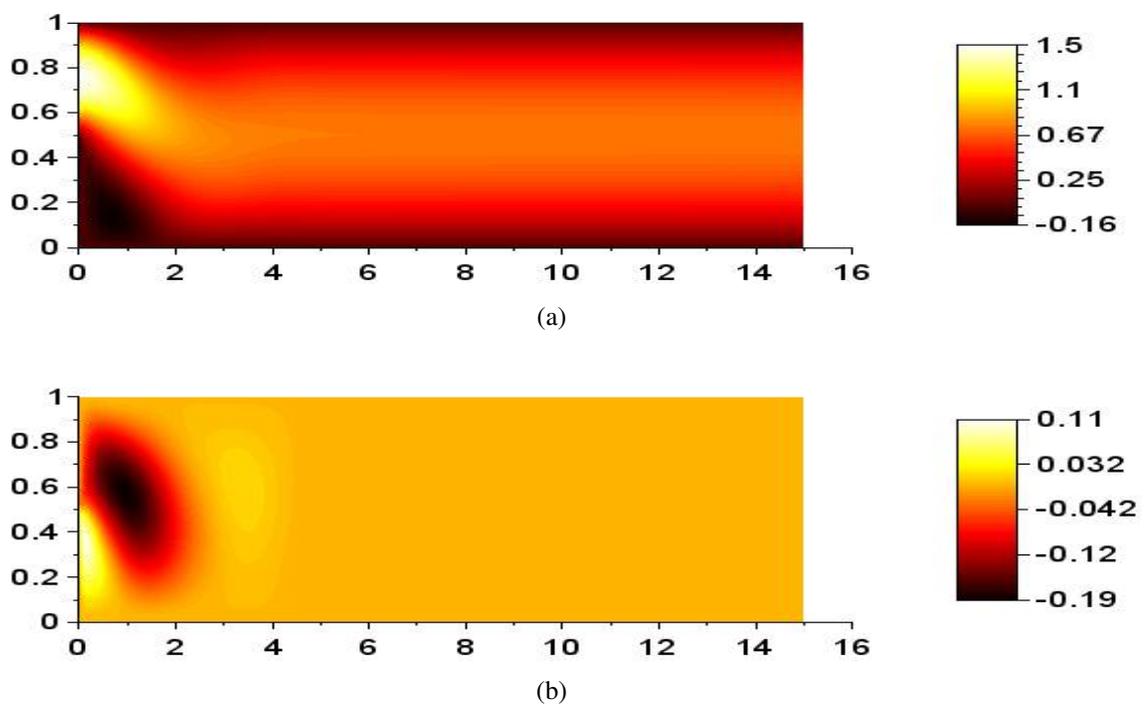
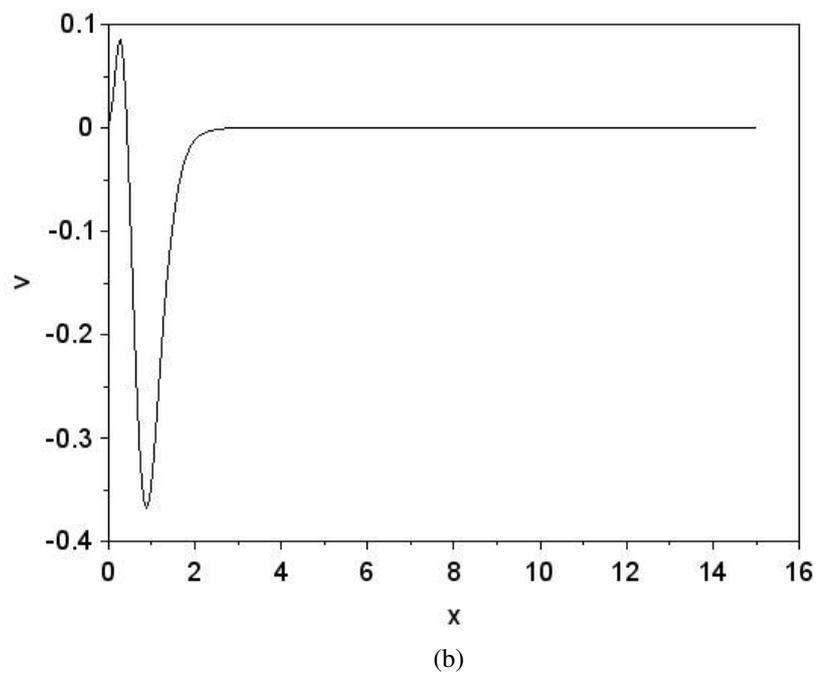
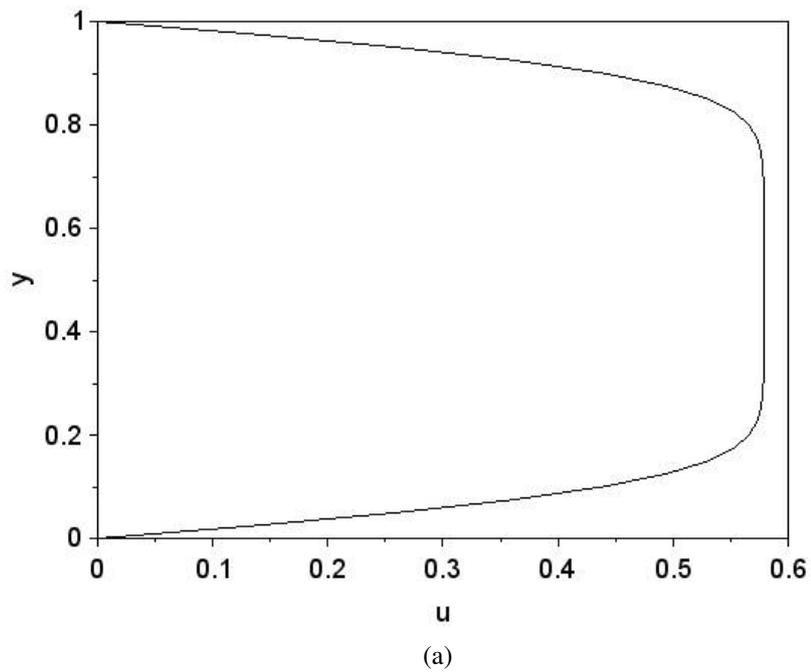
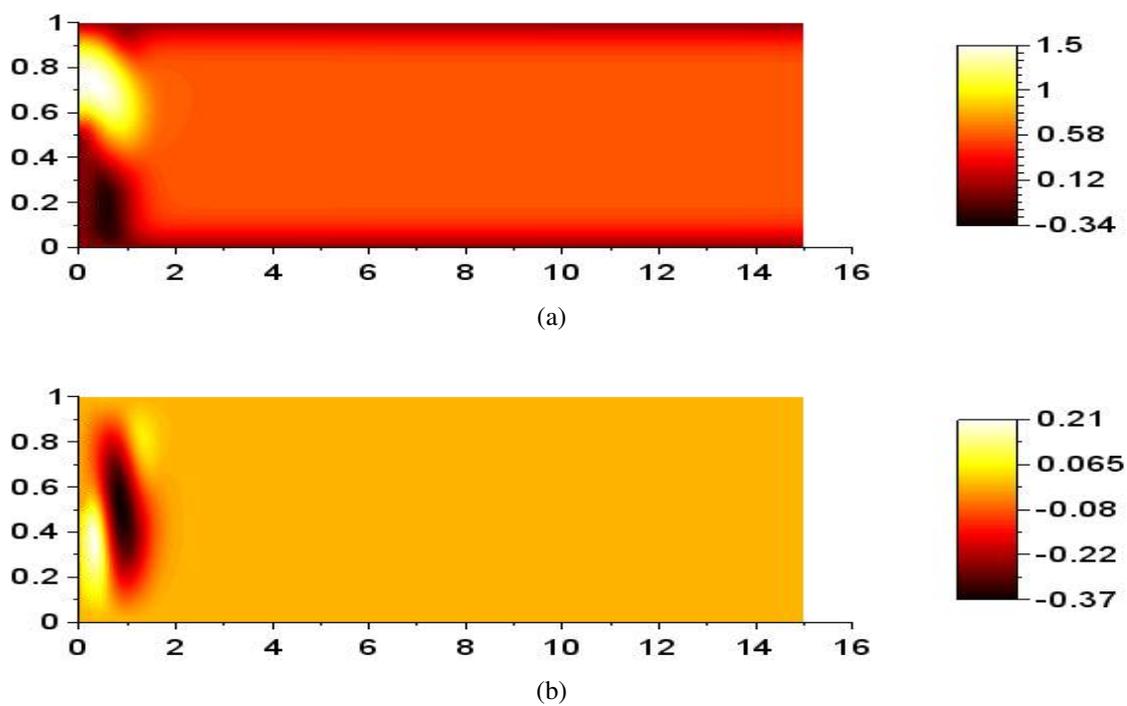


Figura 4.10: Perfil das velocidades  $u$  (a) e  $v$  (b) para  $Re = 400$  através do método da projeção.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 4.11: Campo das velocidades  $u$  (a) e  $v$  (b) para  $Re = 400$  pelo método da projeção.



## 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Simular as equações de Navier-Stokes utilizando o método de diferenças finitas foi o principal objetivo deste trabalho desde o início. Quando se trabalha com essas equações, uma das principais dificuldades enfrentadas é o acoplamento da pressão e velocidade. Como forma de tentar superar este obstáculo foram utilizados dois métodos, o método da projeção e o método da penalidade. O método da projeção consiste em dividir a equação de Navier-Stokes em duas partes, ficando com uma equação para a velocidade (equação de Burger) e outra para a pressão (equação de Poisson). O método da penalidade possibilita colocar o termo da pressão em função da velocidade, assim obtemos uma nova equação em que todos os termos são dados em relação a velocidade.

Os dois métodos foram implementados, ajustados e testados da melhor forma possível para obter um resultado satisfatório. Ao começar simular o escoamento na cavidade quadrada com o método da penalidade os resultados gerados não se apresentaram tão satisfatórios quando comparado com os resultados da referência (Ghia). Com a intenção de melhorar os resultados deste método precisou-se refinar a malha, aumentando o número de nós o que ocasionou em mais tempo de execução do programa.

Acredita-se que para obter resultados melhores com este método precisaria refinar a malha ainda mais, ou seja, aumentar expressivamente o número de nós. Ao analisar os perfis de velocidade obtidos com esse método nota-se que ainda não estão de acordo com os apresentados na literatura. Ao simular o mesmo caso utilizando o método da projeção, com uma malha menos refinada os resultados obtidos estavam em concordância com o da referência utilizada.

Como o método da projeção se mostrou mais eficaz que o método da penalidade, decidiu-se utilizá-lo para simular o escoamento no interior do ressalto hidráulico, o segundo caso estudado neste trabalho. Os resultados numéricos para este caso confirmaram o que foi analisado em alguns trabalhos, como a presença de vórtices no interior do ressalto hidráulico e velocidade apresentando comportamento parabólico quando utilizado número de Reynolds 100.

Nos casos simulados com o método da projeção, os resultados obtidos foram satisfatórios, o que possibilitou avaliar detalhadamente através deste o escoamento no interior da cavidade quadrada e do ressalto hidráulico. As características apresentadas do escoamento no interior da cavidade quadrada são tipicamente difusivas, ao contrário do escoamento do ressalto hidráulico no qual a velocidade mesmo depois de desenvolvida

não apresenta muitas alterações e o escoamento é mais convectivo.

Cabe como tarefa futura realizar novas simulações com o método da penalidade para os dois casos com malhas mais refinadas, ajustar e testar o mais preciso possível os valores dos parâmetros utilizados como o  $\Delta t$  e o valor da constante  $c$  para se aproximar mais do resultado desejado. Pois, os resultados apresentados com este método não estão muito longe dos valores da referência, nos fazendo acreditar que esse método merece ser analisado mais detalhadamente.

## REFERÊNCIAS

- ANTUNES, A. R. E. **Um sistema computacional utilizando uma formulação de passo fracionado e o método dos elementos finitos por arestas para a análise de escoamentos incompressíveis tridimensionais usando computação paralela**. 166 p. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) — Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2008.
- ARMALY, A. J. et al. Experimental and theoretical investigation of backward-facing step flow. **Fluid Mech**, v. 127, p. 473–496, 1983.
- ASSY, T. M. **Mecânica dos fluidos: fundamentos e aplicações**. 2. ed. Rio de Janeiro: LCT, 2004.
- BISTAFA, S. R. **Mecânica dos fluidos: noções e aplicações**. São Paulo: Blücher, 2010.
- BRUNETTI, F. **Mecânica dos fluidos**. 2. ed. rev. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2008.
- BUK JUNIOR, L. **Estudo numérico do escoamento ao redor de um cilindro fixo**. 62 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) — Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2007.
- CAMPOS, M. D. **Simulação numérica de fluídos pelo método de elementos finitos baseados em volumes de controle com a técnica do passo fracionado**. 91 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) — Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2005.
- ÇENGEL, Y. A.; CIMBALA, J. M. **Mecânica dos fluidos: fundamentos e aplicações**. São Paulo: McGraw-Hill, 2007.
- CHORIN, A. J. Numerical solution of the Navier-Stokes equations. **Mathematics of Computation**, v. 22, p. 745–762, 1968.
- FIGUEIREDO, F. P. **Simulação numérica e computacional de correntes de turbidez de baixa densidade para sedimentação de bacias**. 109 p. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) — Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2010.
- FORTUNA, A. O. **Técnicas computacionais para dinâmica dos fluidos: conceitos básicos e aplicações**. São Paulo: Edusp, 2000.
- FOX, R. W. **Introdução a mecânica dos fluidos**. Rio de Janeiro: LTC, 2010.
- GARTLING, D. K. A test problem for outflow boundary conditions flow over a backward-facing step. **International Journal For Numerical Methods In Fluids**, v. 11, p. 953–967, 1990.
- GHIA, U.; GHIA, K. N.; SHIN, C. T. High-re solutions for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and multigrid method. **Journal Computational Physycs**, Ohio, v. 48, p. 387–620, 1982.

- GIACCHINI, B. L. **Uma breve introdução ao método dos elementos finitos**. Minas Gerais: Universidade Federal de Minas Gerais, 2012.
- LEITHOLD, L. **O cálculo de geometria analítica**. 3. ed. São Paulo: Harbra, 1994.
- MEES, A. A. A. **Caracterização das solicitações hidrodinâmicas em bacias de dissipação por ressalto hidráulico com baixo número de Froude**. 157 p. Dissertação (Mestrado em Recursos Hídricos e Saneamento Ambiental) — Universidade Federal do Rio Grande do Sul - UFRGS, Porto Alegre, 2008.
- MUNSON, B. R.; YOUNG, D. F.; OKIISHI, T. H. **Fundamentos da mecânica dos fluidos**. São Paulo: Edgar Blücher, 2004.
- NAOZUKA, G. T. **Simulação numérica de dispersão de poluentes na atmosfera**. 92 p. Monografia (Bacharelado em Ciências da Computação) — Universidade Estadual de Londrina, Londrina-PR, 2016.
- PASKIN, L. **Implementação das equações incompressíveis de Navier-Stokes em uma formulação penalizada de elementos finitos**. 51 p. Monografia (Bacharelado em Engenharia Naval e Oceânica) — Escola Politécnica da Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, Rio de Janeiro, 2016.
- RENGEL, J. E.; MARTINS, S. B. C.; SPHAIER, H. S. Estudo comparativo de diferentes métodos de desacoplamento pressão-velocidade nas equações de Navier-Stokes. In: **XV Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica**. Águas de Lindóia, São Paulo: ABCM, 1999. Anais eletrônicos. Disponível em: <<http://www.abcm.org.br/anais/cobem/1999/pdf>>. Acesso em: 07 jun. 2017.
- SANTOS, L. C. C. Métodos numéricos para escoamentos em altas velocidades. **22 Colóquio Brasileiro de Matemática**, IMPA, Rio de Janeiro, 1999.
- SILVA JUNIOR, A. F. **Método dos volumes finitos para equação de convecção e difusão em uma dimensão espacial**. 135 p. Dissertação (Mestrado em Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia) — Universidade Federal Fluminense, Volta Redonda, 2012.
- SOUZA, M. M. **Solução das equações de Navier-Stokes para fluidos incompressíveis via Elementos Finitos**. 118 p. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada) — Universidade Federal do Rio Grande do Sul - UFRGS, Porto Alegre, 2013.
- SOUZA, P. M. B. M. **Estudo da dissipação por ressalto hidráulico a jusante de descarregadores não convencionais**. 135 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) — Universidade do Porto, Portugal, 2011.
- ZILL, D. G.; CULLEN, M. R. **Equações Diferenciais**. 3. ed. São Paulo: Pearson, 2008.