

LUCENARA DOS SANTOS PEREIRA

**ESTUDO E APLICAÇÕES DE FILTRAGEM DIGITAL ADAPTATIVA UTILIZANDO
O ALGORITMO LMS**

**ALEGRETE
2013**

LUCENARA DOS SANTOS PEREIRA

**ESTUDO E APLICAÇÕES DE FILTRAGEM DIGITAL ADAPTATIVA UTILIZANDO
O ALGORITMO LMS**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como parte das atividades para obtenção do título de Bacharel em Engenharia Elétrica do Curso de Engenharia Elétrica da Universidade Federal do Pampa.

Orientador: Prof. Jorge Pedraza Arpasi

Co-Orientador: Prof. Fabiano Tondello
Castoldi

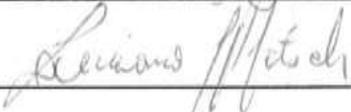
**ALEGRETE
2013**

Autoria: Lucenara dos Santos Pereira

Título: Estudo e Aplicações de Filtragem Digital Adaptativa Utilizando o Algoritmo LMS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como parte das atividades para a obtenção do título de Bacharel em Engenharia Elétrica do Curso de Engenharia Elétrica da Universidade Federal do Pampa.

Os componentes da banca, abaixo listados, consideram este trabalho aprovado

	Nome	Titulação	Assinatura	Instituição
1	Jorge Pedraza Arpasi	Prof. Dr.		unipampa
2	Lucas Compassi Severo	Prof. Me.		unipampa
3	Luciano Lopes Pfitscher	Prof. Dr.		UFSC

Data da aprovação: 11 de outubro de 2013.

*“Dedico este trabalho para todos
aqueles que desejam a minha
felicidade...”*

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, Senhor de todo o Universo, que me deu o dom da vida, me protegeu, confortou e fortaleceu para eu chegar até aqui.

Agradeço a minha família, minha mãe Cleusa e meu pai Álvaro, pessoas que Deus escolheu pra me trazerem ao mundo, e que apesar de todas as dificuldades, sempre estiveram presentes na minha vida, ajudando da forma que podiam.

Agradeço também a meus irmãos e amigos Cleonara e Alessandro, com os quais posso compartilhar minhas alegrias e tristezas sem medo de julgamento.

Agradeço ao Rafael, por tudo o que faz por mim e por entender a minha ausência durante a realização desse TCC, estendendo os agradecimentos aos seus familiares.

Agradeço a todos os amigos que conheci na Unipampa, em especial aos meus amigos Eduardo Silveira, Tanísia Possani, Luana Barcelos, Luiz Roberto Pavanato, Luana Ferreira, Marcel Stalter e todos os demais amigos, que de forma direta ou indireta me apoiaram e contribuíram para que este trabalho fosse concluído.

Agradeço aos demais colegas da Unipampa, da E.E.E.B. Manoel Viana, da E.E.E.F. Érico Veríssimo e da E.M.E.F. Ramão Guareschi.

Agradeço a todos meus professores da Graduação, Ensino Médio e Fundamental.

Agradeço a todos os meus orientadores de bolsas PBDA.

Agradeço aos funcionários da Unipampa, em especial aos da Secretaria Acadêmica, Biblioteca e Laboratórios.

Agradeço aos familiares, vizinhos, amigos da Igreja, e todos aqueles que de alguma forma fazem parte da minha vida.

Finalmente, agradeço as duas pessoas que realmente contribuíram para a realização desse trabalho, que são meus orientadores e amigos Jorge Pedraza Arpasi e Fabiano Tondello Castoldi. Considerando tudo o que fizeram por mim, com paciência e dedicação, não haveria palavras para agradecer, mas tenham a certeza da minha eterna gratidão.

"O importante é semear, produzir milhões de sorrisos de solidariedade e amizade. Procuo semear otimismo e plantar sementes de paz e justiça. Digo o que penso, com esperança. Penso no que faço, com fé. Faço o que devo fazer, com amor. Eu me esforço para ser cada dia melhor, pois bondade também se aprende. Mesmo quando tudo parece desabar, cabe a mim decidir entre rir ou chorar, ir ou ficar, desistir ou lutar; porque descobri, no caminho incerto da vida, que o mais importante é o decidir."

Cora Coralina

RESUMO

Este trabalho de conclusão de curso estuda e analisa filtros adaptativos e suas aplicações. A principal característica de um filtro adaptativo é a capacidade de adaptação contínua e automática a um dado sinal a fim de obter uma resposta desejada. Isso permite que ele possa ser utilizado em casos onde um filtro de coeficientes fixos não é adequado. A adaptação dos coeficientes do filtro é calculada utilizando alguma estimativa de erro, que é obtida a partir de sinais de referência e de entrada. Para controlar esse processo, são utilizados algoritmos de adaptação, como o LMS, que minimiza uma função objetivo baseada no erro médio quadrático. A partir do estudo dos filtros adaptativos e algoritmos de adaptação, são desenvolvidas aplicações que possam exemplificar a metodologia de projeto correspondente a cada uma das quatro classes básicas de aplicações: identificação de sistemas, modelagem inversa (ou equalização adaptativa), predição de sinal e melhoramento de sinal (ou cancelamento de interferência). Estas classes de aplicações são diferenciadas entre si pela maneira como o sinal de entrada e referência é caracterizado e extraído. Para a validação dos resultados, são realizadas e analisadas simulações no software Matlab®, descritas segundo uma modelagem matemática desenvolvida para cada aplicação.

Palavras-chave: processamento de sinais, filtragem adaptativa, algoritmo LMS.

ABSTRACT

This work approaches the study of adaptive digital filters. The main feature of an adaptive filter is the ability to automatically and continuously adjust a given signal to obtain a desired response. This allows applying it in cases when a fixed coefficients filter is not suitable. The adaptation of the filter coefficients are computed using some error estimative, which are derived from a reference and input signal. To control this process, adaptive algorithms are used, such as LMS, which minimizes an objective function based on the mean square error. Based on the study of adaptive filters and adaptation algorithms, applications are developed that may illustrate the design methodology for each of the four basic classes of applications: system identification, inverse modeling (or adaptive equalization), signal prediction and signal enhancement (or interference cancellation). These classes of applications are differentiated from each other by the way the reference signal is characterized and extracted. To validate the results, simulations are performed in Matlab ®, described according to a mathematical model developed for each application.

Key-words: signal processing, adaptive filtering, LMS algorithm.

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Estrutura de um filtro FIR na forma direta canônica.....	21
Figura 2.2 – Estrutura de um filtro de Wiener	25
Figura 2.3 – Superfície do MSE para dois coeficientes	27
Figura 2.4 – Plano formado por dois coeficientes e localização do mínimo global.....	28
Figura 2.5 – Interpretação geométrica do princípio da ortogonalidade.....	29
Figura 3.1 – Esquema de um filtro adaptativo.....	34
Figura 4.1 – Diagrama da aplicação denominada identificação de sistemas.....	43
Figura 4.2 – Esquema do surgimento do eco em sistemas VoIP.....	45
Figura 4.3 – Esquema da geração do caminho de eco.....	45
Figura 4.4 – Modelagem de um processo de cancelamento adaptativo de eco	47
Figura 4.5 – Erro de estimação para $N = 150$ e variações em μ	48
Figura 4.6 – Erro de estimação para $\mu = 0.05$ e variações em N	48
Figura 4.7 – Erro de estimação para $N = 150$ e variações nos passos	49
Figura 4.8 – Erro de estimação para $\mu = 0.005$ e variações em N	50
Figura 5.1 – Diagrama da aplicação denominada equalização de canal.....	52
Figura 5.2 – Esquema de um dispositivo de decisão.....	56
Figura 5.3 – Curvas do MSE para $N = 10$ e variações no passo μ	58
Figura 5.4 – Curvas do MSE para $N = 80$ e variações no passo μ	58
Figura 5.5 – Curvas do MSE para $\mu = 0.0001$ e variações no comprimento N	59
Figura 5.6 – Curva de BER para o caso analisado.....	60
Figura 5.7 – Sequência transmitida e recebida antes da equalização.....	60
Figura 5.8 – Sequência transmitida e recebida após a equalização, para $N = 10$ e $\mu = 0.005$	61
Figura 5.9 – Curvas do MSE para $N = 10$ e variações no passo μ	62
Figura 5.10 – Curvas do MSE para $N = 80$ e variações no passo μ	62

Figura 5.11 – Curvas do MSE para $\mu = 0.00016$ e variações no comprimento N	63
Figura 6.1 – Diagrama da aplicação denominada predição linear.....	65
Figura 6.2 – Esquema de um codificador DPCM.....	67
Figura 6.3 – Esquema de um decodificador DPCM.....	68
Figura 7.1 – Diagrama da aplicação denominada cancelamento de interferências.....	74
Figura 7.2 – Pulso característico de um ECG.....	75
Figura 7.3 – Comparação entre o ECG fetal obtido após a segunda etapa e o ECG fetal original.....	79
Figura 7.4 – Curva de aprendizagem do MSE.....	79
Figura 7.5 – Resultados para: (a) $\mu = 0.001$ e $N = 10$ (b) $\mu = 0.001$ e $N = 50$	80
Figura 7.6 – Resultados para: (a) $\mu = 0.0001$ e $N = 10$ (b) $\mu = 0.0001$ e $N = 50$	81
Figura 7.7 – Resultados para: (a) $\mu = 0.02$ e $N = 10$ (b) $\mu = 0.02$ e $N = 50$	81
Figura 7.8 – Resultados para: (a) $\mu = 0.05$ e $N = 10$ (b) $\mu = 0.05$ e $N = 50$	82

LISTA DE TABELAS

Tabela 6.1 – Resultados para $N = 10$ e variações em μ	70
Tabela 6.2 – Resultados para $\mu = 0.1$ e variações em N	71
Tabela 6.3 – Resultados para $N = 10$ e variações em μ_n e μ	72
Tabela 6.4 – Resultados para $\mu_n = 2$, $\mu = 0.0074$ e variações em N	72

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

PDS – Processamento Digital de Sinais

FIR – Finite Impulse Response

IIR – Infinite Impulse Response

MSE – Mean Squared Error

LS – Least Squares

WLS – Weighted Least Squares

ISV – Instantaneous Squared Value

LMS – Least Mean Squares

NLMS – Normalized Least Mean Squares

IP – Internet Protocol

VoIP – Voice over Internet Protocol

QoS – Quality of Service

FIFO – First in First Out

ITU-T – The Telecommunications Standardization Sector

LPCDs – Linha Privativa de Comunicação de Dados

ISI – Interferência Intersimbólica

AWGN – Additive White Gaussian Noise

ADPCM – Adaptive Differential Pulse Code Modulation

PCM – Pulse Code Modulation

DPCM – Differential Pulse Code Modulation

ECG – Eletrocardiograma

SNR – Relação sinal-ruído

LISTA DE SÍMBOLOS

$d(k)$ – sinal desejado ou de referência

$E\{ . \}$ – operador esperança matemática ou valor esperado

$e(k)$ – sinal de erro

$y(k)$ – saída do filtro adaptativo

N – número de coeficientes do filtro adaptativo

\mathbf{p} – vetor de correlação cruzada entre o sinal de entrada e o de referência

\mathbf{R} – matriz de autocorrelação do sinal de entrada

σ^2 – variância

\mathbf{w} – vetor de coeficientes do filtro adaptativo

\mathbf{w}_o – vetor ótimo de coeficientes do filtro adaptativo

$\mathbf{x}(k)$ – vetor do sinal de entrada

i – indicador de atraso

μ – passo de adaptação ou passo de convergência

$\xi(\mathbf{w})$ – função custo do erro médio quadrático

$H(z)$ – função de transferência do filtro no domínio Z

$h(k)$ – resposta ao impulso do filtro no domínio do tempo

z^{-i} – atrasos do filtro no domínio Z

$\delta(k)$ – função impulso unitário

$v(k)$ – variável aleatória qualquer

m – média de uma variável aleatória

I – matriz identidade

$\psi(\mathbf{w})$ – função que fornece o ponto fixo

$A(\mathbf{w})$ – escalar que expressa o passo

$\lambda_{máx}$ – maior autovalor

$\lambda_{mín}$ – mínimo autovalor

$\text{tr}\{.\}$ – traço

P_x – potência do sinal de entrada

α – parâmetro de suavização

τ_{MSE} – constante de tempo da convergência

M – desajuste

γ – parâmetro fixo do NLMS

μ_n – passo fixo do NLMS

λ – limiar para o decisor

$m(k)$ – amostra a ser quantizada

$c(k)$ – erro de predição

$\tilde{m}(k)$ – amostra estimada

$\hat{m}(k)$ – amostra quantizada

$c_q(k)$ – erro quantizado

n – número de bits

G_p – ganho de processamento

n_{red} – número de bits reduzidos

TX_B – taxa de bits reduzida

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	17
2. FILTROS FIR ADAPTATIVOS.....	23
2.1. Introdução.....	23
2.2. Filtros FIR	23
2.3. Probabilidade e processos estocásticos	25
2.4. Filtro de Wiener.....	27
2.5. Método Steepest Descent	32
2.6. Análise da convergência do <i>Steepest Descent</i>	33
3. ALGORITMOS DE ADAPTAÇÃO DO TIPO LMS.....	36
3.1. Algoritmo LMS	36
3.2. Estabilidade do algoritmo LMS.....	37
3.3. Velocidade de convergência do algoritmo LMS	39
3.4. Excesso de MSE e desajuste	40
3.5. Outros parâmetros de análise de desempenho.....	41
3.6. Algoritmo LMS Normalizado	42
4. IDENTIFICAÇÃO DE SISTEMAS.....	45
4.1. Introdução.....	45
4.2. Sistemas VoIP	46
4.3. Eco em sistemas VoIP.....	46
4.4. Cancelamento de eco utilizando identificação de sistemas.....	48
4.5. Simulações utilizando o algoritmo LMS	49
4.6. Simulações utilizando o algoritmo NLMS.....	51
4.7. Análise dos resultados para ambos os algoritmos adaptativos.....	52
5. EQUALIZAÇÃO DE CANAL	54
5.1. Introdução.....	54
5.2. Sistemas de comunicação.....	55
5.3. Equalização adaptativa de canais.....	56
5.3.1. Equalização supervisionada	57
5.4. Simulação de equalização adaptativa de canal.....	58
5.5. Resultados obtidos para o LMS.....	59
5.6. Resultados obtidos para o NLMS	62

5.7. Análise dos resultados para ambos os algoritmos	65
6. PREDIÇÃO LINEAR.....	67
6.1. Introdução.....	67
6.2. Princípios de modulação	68
6.3. Princípio de funcionamento de um DPCM	69
6.4. Análise do desempenho do DPCM.....	71
6.5. Simulações de um preditor linear adaptativo para DPCM através do algoritmo LMS.....	72
6.6. Simulações de um preditor linear adaptativo para DPCM através do algoritmo NLMS	73
6.7. Análise dos resultados para ambos os algoritmos de adaptação	74
7. CANCELAMENTO DE INTERFERÊNCIAS	76
7.1. Introdução.....	76
7.2. Eletrocardiogramas	76
7.3. Simulação de cancelamento de interferências em eletrocardiogramas fetais	78
7.4. Simulação de filtragem do ECG torácico.....	82
7.5. Análise geral dos resultados	84
CONCLUSÕES.....	86
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	89

1. INTRODUÇÃO

Uma área que está em constante desenvolvimento é a de processamento digital de sinais, a qual está relacionada com a aquisição, representação, manipulação e transformação de sinais, com base em um determinado objetivo de uma aplicação prática. Dentre os vários benefícios oferecidos pelo uso desses sistemas estão: baixos custos, confiabilidade, precisão, pequenos tamanhos físicos de hardware e flexibilidade [1]. Algumas aplicações incluem transmissão de informações, sistemas militares, tecnologia médica, processamento de sinais sísmicos, sensoriamento remoto, radares, multimídia, indústria automobilística, dentre tantas outras [2].

Nesse contexto, um sinal é definido como qualquer quantidade física que pode ser expressa em função do tempo, espaço, ou outra variável, carregando informações através de seus padrões de variação [3]. Para fins de simplificar a análise e o projeto de sistemas de processamento de sinais, eles são geralmente representados por funções matemáticas de uma ou mais variáveis independentes.

Os sinais podem ser representados na forma analógica (contínuos no tempo) ou digital (discretos no tempo). No entanto, os sinais obtidos do mundo real são originalmente analógicos, sendo necessário um processo de amostragem para expressá-los na forma digital. Esse processo de amostragem precisa atender ao teorema da amostragem de Nyquist, o qual afirma que a representação de sinais discretos no tempo deve ser feita com uma taxa de amostragem maior do que duas vezes a sua frequência mais elevada, para que seja possível um processo de reconstrução e retorno do sinal a sua forma analógica, evitando distorções indesejadas [4]. Neste trabalho, será considerado que os sinais já estão no formato digital, com o processo de conversão analógico-digital já realizado, de modo a obedecer ao critério de Nyquist.

Para o processamento dos sinais são utilizados sistemas, que podem ser definidos segundo várias perspectivas. Uma delas afirma que sistema é uma entidade que manipula um ou mais sinais para realizar uma operação e retornar o resultado dessa operação em forma de sinais. Outra definição mais formal é que os sistemas contínuos ou discretos no tempo transformam um dado sinal de entrada em um sinal de saída segundo uma operação especificada. Sob uma perspectiva de sinais e sistemas, um sistema é considerado uma “caixa-

preta” cujos meios são analisados em termos de entradas, saídas e propriedades, sem a necessidade do conhecimento do funcionamento interno [5].

Neste trabalho, o principal exemplo de sistemas são os filtros digitais, cuja definição pode ser dada como um processo computacional que converte um sinal de entrada $x(k)$ em um sinal de saída $y(k)$, ambos no instante de tempo k . Dentre as diversas finalidades de um filtro digital, destaca-se a capacidade de salientar determinados aspectos do sinal de entrada ou reduzir ruídos indesejados que estão presentes no mesmo. Para tanto, as amostras passadas ou futuras do sinal de entrada são ponderadas para compor o sinal de saída, conforme o comportamento desejado para este sinal. Outras funções serão verificadas nos Capítulos 4, 5, 6 e 7 deste trabalho, onde serão desenvolvidas algumas aplicações que apresentam finalidades distintas.

Os sistemas podem ser classificados de diversas formas, sendo as principais quanto à linearidade, variância no tempo e causalidade. Um sistema será linear se for possível compor uma relação do tipo $y(k) = \alpha y_1(k) + \beta y_2(k)$, onde $y_1(k)$ e $y_2(k)$ são as saídas resultantes de entradas $x_1(k)$ e $x_2(k)$, respectivamente, e α e β são constantes. Caso a relação não seja atendida, diz-se que o sistema é não-linear. Para um sistema ser invariante no tempo, é necessário que um deslocamento na entrada resulte em um mesmo deslocamento na saída, ou seja, quando uma entrada $x_1(k)$ é deslocada por k_0 amostras tornando-se $x_1(k - k_0)$, isso implique que a saída anteriormente $y_1(k)$ torne-se $y_1(k - k_0)$. Se isso não for satisfeito, diz-se que o sistema é variante no tempo. Finalmente, para identificar um sistema causal, é preciso observar se uma saída $y(k)$ depende apenas das amostras atual $x(k)$ e passadas $x(k - 1), x(k - 2), \dots$ da entrada. Por outro lado, se o sistema depende também das amostras futuras, tais como $x(k + 1), x(k + 2), \dots$, ele é considerado não-causal [6].

Prosseguindo com a idéia de filtragem, é possível distinguir dois tipos básicos de filtros digitais, o de Resposta ao Impulso Finita (FIR – *Finite Impulse Response*) e o de Resposta ao Impulso Infinita (IIR – *Infinite Impulse Response*). Estes dois tipos podem ser projetados com coeficientes fixos ou adaptativos [6]. Para filtragem digital utilizando filtros de coeficientes fixos dos tipos FIR ou IIR, geralmente é assumido que as características do sinal de entrada são conhecidas, logo, os valores dos coeficientes são escolhidos durante a fase de projeto e permanecem constantes ao longo do processo de filtragem. Para isso, é necessário o conhecimento prévio da banda de frequência que será mantida ou eliminada pelo filtro.

Entretanto, em algumas aplicações práticas, não é possível extrair informação suficiente *a priori* para projetar o filtro digital, ou os critérios de projeto podem ser variantes no tempo [3]. Para resolver estes problemas, é necessário um filtro que possa ajustar-se automaticamente de acordo com cada situação, acompanhando variações nos parâmetros de entrada sem a necessidade do conhecimento prévio do comportamento dos mesmos. Atendendo a essas características, estão os denominados filtros adaptativos, cujos coeficientes são continuamente alterados ao longo do tempo, visando à obtenção de uma equação de diferenças que melhor se adeque à finalidade de cada filtro, ou seja, a adaptação dos coeficientes será de acordo com as entradas e saídas do sistema [7]. Apesar dos filtros adaptativos serem mais complexos e difíceis de serem analisados que os não adaptativos, a versatilidade dos mesmos possibilita inúmeras aplicações, o que os torna uma importante área de conhecimento e objeto de estudo deste trabalho.

Da mesma forma que os filtros convencionais de coeficientes fixos, os filtros adaptativos podem ser lineares ou não-lineares. Considerando que um filtro adaptativo depende do sinal de entrada e varia a cada iteração, ele não poderia ser considerado linear, uma vez que violaria o princípio da superposição. No entanto, a linearidade pode ser obtida, desde que esteja sendo utilizada uma estrutura de filtro linear e a observação seja feita em um dado instante de tempo, onde os coeficientes estão fixos [1].

O projeto de um filtro adaptativo necessita da especificação de três itens básicos: aplicação, estrutura do filtro e algoritmo. As aplicações dos filtros adaptativos são definidas pela forma com que os sinais de referência e de entrada são escolhidos e inseridos no sistema de filtragem. Assim, é possível classificá-las como: identificação de sistemas (ou modelagem de sistemas), equalização adaptativa (ou modelagem inversa), cancelamento de interferência (ou melhoramento de sinal) e predição de sinal (ou predição adaptativa) [8]. Essas classes de aplicações servem de base para a modelagem de aplicações práticas que serão desenvolvidas neste trabalho.

Além da aplicação, outro item que precisa ser incluído no projeto é a escolha da estrutura do filtro. Esta é feita dependendo do tipo de filtro a ser utilizado, FIR ou IIR, sendo que para cada um deles existem estruturas que oferecem melhor desempenho. Para um filtro FIR adaptativo, a estrutura mais utilizada é a transversal, que possui uma realização na forma direta canônica. Já para um IIR, além da realização na forma direta canônica também são utilizadas estruturas em cascata, treliça e paralela [1]. O principal efeito da escolha da

estrutura está na complexidade computacional do processo e no número de iterações necessárias, sendo que a estrutura FIR utilizada ao longo deste trabalho oferece bons resultados nesses dois itens.

Após a escolha da aplicação e da estrutura do filtro, define-se qual algoritmo de adaptação será empregado. Este item de projeto é de fundamental importância para o processo de atualização dos coeficientes do filtro. Os algoritmos de adaptação são geralmente desenvolvidos considerando três aspectos principais, sendo eles a função objetivo, o sinal de erro e o método de minimização [9].

As funções objetivos comumente utilizadas envolvem uma relação entre o sinal de entrada, referência e saída, a citar: Erro Quadrático Médio (MSE – *Mean Squared Error*), Mínimos Quadrados (LS – *Least Squares*), Mínimos Quadrados Ponderados (WLS – *Weighted Least Squares*) e Valor Quadrático Instantâneo (ISV – *Instantaneous Squared Value*) [1]. Neste trabalho, os filtros adaptativos possuem uma função objetivo baseada no MSE, dado pelo valor esperado do quadrado de um sinal de erro. A definição do sinal de erro parte do princípio que, de um modo geral, o filtro adaptativo atua como um estimador, modelando um sistema de modo que a saída se aproxime de um dado sinal de referência, a partir de um sinal de entrada [10].

Para que o vetor de coeficientes ótimos no sentido médio quadrático seja encontrado, o critério adotado é a minimização da função objetivo do MSE, que em ambientes estacionários conduz ao sistema de equações de Wiener-Hopf, cujo resultado é conhecido como filtro ótimo de Wiener. Apesar do filtro de Wiener ser inadequado para sistemas não-estacionários, quando soluções mais eficientes podem ser obtidas por filtragem adaptativa, este serve de base para a verificação do desempenho de algoritmos de adaptação [9].

Alguns métodos de minimização comumente empregados em processamento de sinal adaptativo são o método de Newton, método quasi-Newton e método do Gradiente Descendente (*Steepest Descent*) [1]. Na busca por uma otimização em relação a vários aspectos, como velocidade de convergência e complexidade computacional, além da possibilidade de processamento de sinais aleatórios, foram desenvolvidos os algoritmos de adaptação, como o algoritmo dos Mínimos Quadrados Médios (LMS - *Least Mean Squares*). Apesar de possuir o mesmo princípio iterativo do *Steepest Descent* em busca do vetor de coeficientes ótimos, o algoritmo LMS apresenta a diferença e vantagem de substituir o cálculo do gradiente do MSE por estimativas instantâneas. Por sua vez, o LMS também apresenta

variações, dando origem a uma família de algoritmos nele baseados, como é o caso do LMS Normalizado (NLMS - *Normalized Least Mean Squares*) [11]. Essa variação, além do LMS convencional, é incluída neste trabalho e utilizada no desenvolvimento das aplicações nos Capítulos 4, 5, 6 e 7.

Os algoritmos do tipo LMS apresentam baixa complexidade computacional e fornecem uma aproximação confiável para a solução ótima de Wiener-Hopf, no entanto, sem requerer conhecimento de estatísticas de segunda ordem. Nesse processo, são utilizadas estimativas instantâneas das estatísticas do sinal de entrada. O ajuste dos coeficientes é realizado amostra por amostra, de forma que o erro médio quadrático seja minimizado iterativamente [4].

O principal objetivo desse trabalho é fornecer uma introdução sistemática aos conceitos básicos envolvidos na filtragem adaptativa com estrutura FIR, assim como realizar uma análise detalhada dos algoritmos tipo LMS citados, caracterizando cada parâmetro que os compõe. Além disso, as técnicas de filtragem serão analisadas em aplicações de casos práticos, onde serão verificadas as melhores configurações de cada item envolvido no processo de filtragem adaptativa, sobretudo das constantes e variáveis que compõem o algoritmo de adaptação empregado. O desenvolvimento de tais aplicações, além de exemplificar o funcionamento dos filtros em questão, irá ilustrar a importância do processamento digital de sinais em inúmeras áreas.

Para que tais objetivos sejam alcançados, inicialmente será feito um estudo das principais características dos sinais e sistemas que estão envolvidos em um processo de filtragem adaptativa. Esse estudo visa identificar como cada parâmetro do filtro influencia no seu desempenho. Em seguida, serão descritos os princípios fundamentais de filtros adaptativos, incluindo a convergência ou divergência da solução, os intervalos em que devem ser escolhidos os parâmetros, quais as vantagens e desvantagens associadas a cada escolha, como aliar eficiência e complexidade computacional, dentre outros. A combinação harmoniosa de todos esses aspectos contribui para o perfeito desempenho do filtro.

Após a análise dos métodos empregados em filtragem adaptativa, serão desenvolvidas aplicações específicas, visando à exemplificação de cada uma das quatro estruturas gerais de aplicações. O desenvolvimento de tais aplicações será baseado na modelagem matemática, através da definição dos sinais de entrada e referência, simulações no software Matlab® com variações nos parâmetros e discussão sobre implementações práticas reais.

A estrutura do trabalho está disposta da seguinte forma: no Capítulo 2 são apresentados os princípios básicos de filtragem adaptativa com estrutura FIR, passando pelo filtro de Wiener, método *Steepest Descent* e concluindo com a necessidade de utilização dos algoritmos de adaptação. No Capítulo 3, tem-se o algoritmo LMS e seu variante NLMS, analisados em relação ao princípio de funcionamento e principais parâmetros de desempenho. Nos Capítulos 4, 5, 6 e 7, são desenvolvidas e discutidas as aplicações identificação de sistemas, equalização de canal, previsão linear e cancelamento de interferências, respectivamente, utilizando os algoritmos LMS e NLMS. Por fim, têm-se as considerações finais e as referências bibliográficas utilizadas.

2. FILTROS FIR ADAPTATIVOS

2.1. Introdução

Um filtro adaptativo fornece uma saída produzida a partir de um sinal de entrada e de uma estrutura fixa com parâmetros ajustáveis através de algum método ou algoritmo adaptativo. Essa estrutura pode ser implementada por uma dentre as duas classes principais de realizações, distintas pelo tipo de resposta ao impulso, que são a FIR e a IIR. Apesar dos filtros IIR apresentarem a vantagem de necessitar menos coeficientes para executar a mesma tarefa que o filtro FIR, esta é a estrutura mais comumente utilizada em filtros adaptativos. A justificativa está na estabilidade e linearidade da resposta, o que não ocorre com os filtros IIR, pois estes possuem realimentação da saída [2]. Neste trabalho, serão utilizados exclusivamente filtros digitais adaptativos implementados com estrutura FIR, cuja forma direta canônica encontra-se na Figura 2.1. A estrutura IIR é utilizada somente para simulação de filtros de coeficientes fixos, durante a aplicação de equalização de canal descrita no Capítulo 4.

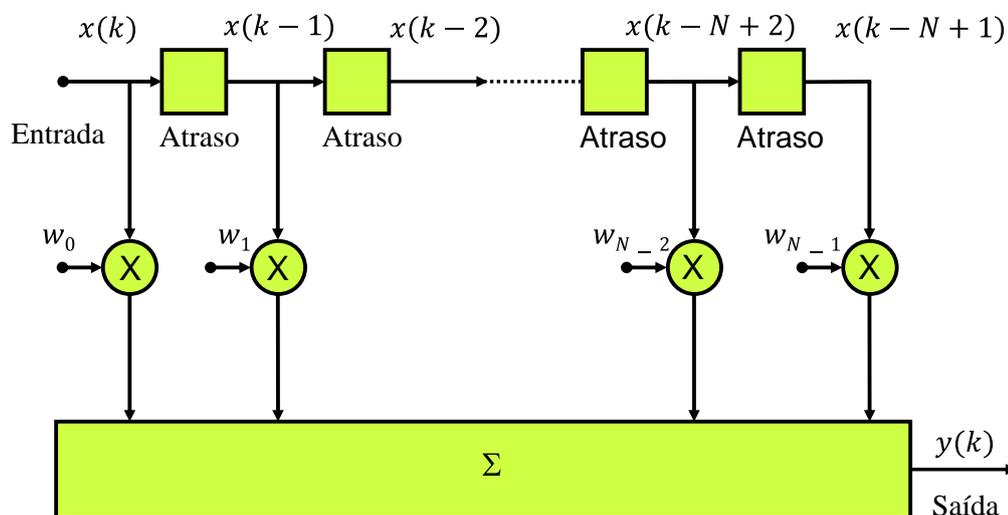


Fig. 2.1. Estrutura de um filtro FIR na forma direta canônica.

2.2. Filtros FIR

Um filtro digital FIR de estrutura transversal ou não-recursivo, apresenta uma saída $y(k)$ que pode ser descrita por uma equação de diferenças da forma:

$$y(k) = \sum_{i=0}^{N-1} w_i x(k-i) \quad (2.1)$$

$$y(k) = w_0 x(k) + w_1 x(k-1) + \dots + w_{N-1} x(k-N+1) \quad (2.2)$$

onde w_i são os N coeficientes do filtro e $x(k)$ é a entrada do filtro, no instante k [10].

Além da equação de diferenças, um filtro digital também pode ser descrito por uma função de transferência, dada no domínio complexo mapeado pela Transformada Z . Nesse caso, os coeficientes w_i correspondem à h_i , que são a resposta ao impulso $\delta(k)$ do filtro no domínio complexo da Transformada Z , como será demonstrado a seguir. Para obter-se a Equação (2.3), estabelece-se a relação $h(k)$ entre a saída $y(k)$ e a entrada $x(k)$, no domínio do tempo. A seguir, aplica-se a Transformada Z nesta relação, obtendo-se a função de transferência $H(z)$.

$$H(z) = Z\{h(k)\} = Z\left\{\frac{y(k)}{x(k)}\right\} = \frac{Y(z)}{X(z)} \quad (2.3)$$

No caso de $y(k)$ ser formada por uma cadeia de atrasos, como na Equação (2.1), a saída no domínio da Transformada Z será dada por $Y(z) = Z\{y(k)\} = Z\{w_i \sum_{i=0}^{N-1} w_i x(k-i)\}$ e a entrada será dada por $X(z) = Z\{x(k)\}$, conforme Equação (2.4).

$$H(z) = Z\left\{\frac{y(k)}{x(k)}\right\} = \sum_{i=0}^{N-1} Z\left\{\frac{w_i x(k-i)}{x(k)}\right\} \quad (2.4)$$

Ao ser definida uma função impulso $\delta(k)$ como entrada, ou seja, $x(k) = \delta(k)$, onde $Z\{\delta(k)\} = 1$, $Z\{\delta(k-i)\} = z^{-i}$ e $Z\{w_i\} = h_i$, tem-se que:

$$H(z) = \sum_{i=0}^{N-1} Z\left\{\frac{w_i \delta(k-i)}{\delta(k)}\right\} = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{h_i z^{-i}}{1} = \sum_{i=0}^{N-1} h_i z^{-i} \quad (2.5)$$

onde z^{-i} são denominados atrasos [6].

O sinal de saída de um filtro digital FIR também pode ser representado na forma vetorial, onde o somatório é indicado como uma operação de produto interno entre o vetor coluna \mathbf{w} transposto e o vetor coluna $\mathbf{x}(k)$.

$$y(k) = \mathbf{w}^T \mathbf{x}(k) \quad (2.6)$$

Sendo que o vetor de coeficientes \mathbf{w} consiste de N elementos dispostos conforme Equação (2.7), onde o vetor coluna foi representado por um vetor linha transposto.

$$\mathbf{w} = [w_0, w_1, \dots, w_{N-1}]^T \quad (2.7)$$

Da mesma forma, o vetor coluna $\mathbf{x}(k)$ é dado pelo seguinte vetor linha transposto:

$$\mathbf{x}(k) = [x(k), x(k-1), \dots, x(k-N+1)]^T \quad (2.8)$$

Em um filtro FIR adaptativo, o vetor \mathbf{w} é atualizado iterativamente e, a partir do produto interno com o vetor $\mathbf{x}(k)$, fornece uma saída $y(k)$ estimada. No entanto, uma vez que os sinais envolvidos podem ser aleatórios, o processo de estimação é realizado segundo teorias probabilísticas [2].

2.3. Probabilidade e processos estocásticos

Um sinal discreto no tempo pode ser classificado quanto à aleatoriedade como determinístico ou aleatório. Sinais determinísticos são aqueles cujo valor das amostras pode ser previsto *a priori*, e geralmente são representados segundo uma equação matemática, o que não é possível para sinais aleatórios. Sinais aleatórios dados por séries temporais, onde cada elemento é um possível valor de uma determinada variável aleatória dependente do tempo, são denominados processos estocásticos [13]. Assim, um processo estocástico é uma família de variáveis aleatórias (reais ou complexas) definidas num espaço de probabilidade [12]. Filtros seletores de frequência apresentam melhor desempenho com sinais determinísticos, enquanto que filtros adaptativos não apresentam problemas com operações envolvendo sinais aleatórios [2].

A descrição da forma de onda de um sinal aleatório não é possível, logo, a sua caracterização depende de medidas estatísticas ou modelos probabilísticos. No processo de filtragem adaptativa, algumas considerações podem ser feitas em relação às características dos sinais de entrada e de referência. Neste estudo, se assume que tais sinais são processos ergódicos estacionários, isto é, são processos aleatórios cujas médias temporais (de uma amostra em particular) são iguais às médias estatísticas (do conjunto de amostras) [3]. Isso permite a extração das informações estatísticas necessárias à análise com somente uma realização do processo.

Um processo estacionário também tem como característica a independência do tempo e, se ele for estacionário no sentido amplo, apenas duas estatísticas do processo são suficientes para descrevê-lo: a média e a correlação. A média do processo é constante para todo instante de tempo, e a função correlação entre duas variáveis aleatórias depende apenas do módulo da diferença de tempo entre elas. Como todo processo ergódico é também estacionário, ele possui média e variância constantes e independência do tempo [11].

Para a composição da função custo do MSE, utilizada no filtro de Wiener, são empregadas estatísticas de segunda ordem, ou seja, variância, autocorrelação e correlação cruzada. A variância de uma variável aleatória indica o valor esperado do quadrado do desvio da variável em relação a sua própria média, ou seja,

$$VAR[v(k)] = E\{[v(k) - m_v]^2\} \quad (2.9)$$

onde m_v indica a média da variável aleatória $v(k)$ e $E\{.\}$ é o operador estatístico valor esperado [9].

A correlação entre duas variáveis aleatórias indica o grau de similaridade entre as mesmas, quando uma delas apresenta um atraso. Quando as variáveis forem distintas, é descrita a correlação cruzada, enquanto que para a uma variável e sua versão deslocada tem-se a autocorrelação [4]. A matriz de autocorrelação \mathbf{R} possui algumas propriedades:

- \mathbf{R} é uma matriz Toeplitz, ou seja, os elementos da diagonal principal e das diagonais paralelas à diagonal principal são iguais;
- \mathbf{R} é Hermitiana para o caso complexo ($\mathbf{R}^H = \mathbf{R}$) ou simétrica para o caso real ($\mathbf{R}^T = \mathbf{R}$). Uma transposição Hermitiana \mathbf{R}^H é uma transposição seguida do conjugado complexo;
- \mathbf{R} é no mínimo positiva semi-definida, mas também pode ser positiva definida. Uma matriz positiva semi-definida caracteriza-se por possuir autovalores não-negativos e existem determinantes. Já uma matriz positiva definida é aquela onde os autovalores são todos positivos, os determinantes existem e são positivos e a matriz inversa também existe e é positiva definida. Isso implica que \mathbf{R} é não-singular, isto é, seu determinante é não nulo [1].

2.4. Filtro de Wiener

Os filtros adaptativos podem ser descritos como aproximações do filtro de Wiener, o qual ajusta seus coeficientes w_i a fim de produzir uma saída $y(k)$ que seja uma estimação do sinal de referência ou desejado $d(k)$. A diferença entre o sinal de referência e o estimado produz um sinal de erro $e(k)$, que serve de parâmetro para o ajuste dos coeficientes, e que idealmente deve ser nulo, quando o filtro encontrar o seu conjunto ótimo de coeficientes [14]. Esse processo encontra-se ilustrado na Figura 2.2.

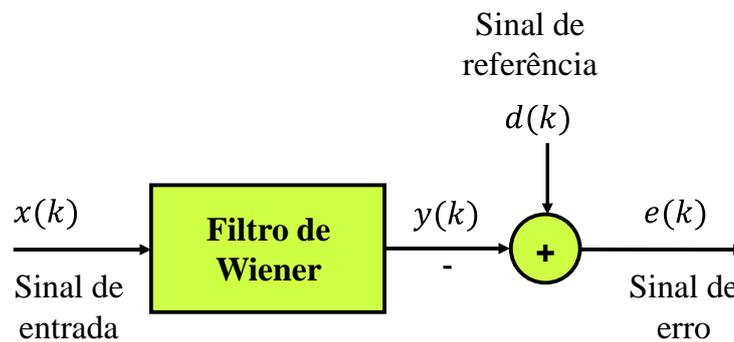


Fig. 2.2. Estrutura de um filtro de Wiener.

O critério adotado para a adaptação dos coeficientes do filtro adaptativo será a minimização da função custo do erro médio quadrático (MSE – *Mean Square Error*), onde o erro de estimação é dado conforme segue:

$$e(k) = d(k) - y(k) \quad (2.10)$$

$$e(k) = d(k) - \mathbf{w}^T \mathbf{x}(k) \quad (2.11)$$

Prosseguindo em busca de uma equação de erro médio quadrático que possa ser minimizada, tem-se na Equação (2.12) o quadrado do erro, dado na forma vetorial:

$$[e(k)]^2 = [d(k)]^2 - 2d(k)\mathbf{x}^T(k)\mathbf{w} + \mathbf{w}^T \mathbf{x}(k)\mathbf{x}^T(k)\mathbf{w} \quad (2.12)$$

Na sequência, aplica-se o operador estatístico de valor esperado (ou esperança) na Equação (2.12). Esse operador, indicado por $E\{.\}$, é obtido pela média aritmética quando todos os eventos tem igual probabilidade, e fornece um resultado que representa o valor médio esperado da variável aleatória (erro quadrático, neste caso) quando ela for analisada inúmeras vezes [9]. Assim, o erro médio quadrático, ou MSE, será:

$$MSE = E\{[e(k)]^2\} = E\{[d(k)]^2\} - 2\mathbf{w}^T E\{d(k)\mathbf{x}^T(k)\} + \mathbf{w}^T E\{\mathbf{x}(k)\mathbf{x}^T(k)\}\mathbf{w} \quad (2.13)$$

Observando-se a Equação (2.13), nota-se que a mesma é composta de três termos envolvendo processos aleatórios de segunda ordem. Esses termos correspondem às principais funções que descrevem estatisticamente um processo desse tipo, que são a variância, correlação cruzada e autocorrelação, conforme descrito na seção anterior. Desse modo, é possível reescrever a Equação (2.13), conforme apresentado na Equação (2.14), que expressa a função custo do MSE segundo uma notação estatística:

$$\xi(\mathbf{w}) = E\{[e(k)]^2\} = \sigma_d^2 - 2\mathbf{w}^T \mathbf{p} + \mathbf{w}^T \mathbf{R} \mathbf{w} \quad (2.14)$$

onde $\xi(\mathbf{w})$ é a função custo do MSE; σ_d^2 é a variância do sinal de referência considerando média nula, sendo dada por $\sigma_d^2 = E\{[d(k)]^2\}$; \mathbf{p} é o vetor de correlação cruzada entre o sinal de referência e o de entrada, dado por $\mathbf{p} = E\{[d(k)\mathbf{x}(k)]\}$; e \mathbf{R} é a matriz de autocorrelação do sinal de entrada, expressa como $\mathbf{R} = E\{\mathbf{x}^T(k)\mathbf{x}(k)\}$ [6].

Na forma expandida, o vetor de correlação cruzada é dado por:

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} E\{[d(k)x(k)]\} \\ E\{[d(k)x(k-1)]\} \\ \vdots \\ E\{[d(k)x(k-N+1)]\} \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

De forma análoga, a matriz de autocorrelação também pode ser expandida, tornando-se:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} E[x(k)x(k)] & E[x(k)x(k-1)] & \dots & E[x(k)x(k-N+1)] \\ E[x(k-1)x(k)] & E[x(k-1)x(k-1)] & \dots & E[x(k-1)x(k-N+1)] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E[x(k-N+1)x(k)] & E[x(k-N+1)x(k-1)] & \dots & E[x(k-N+1)x(k-N+1)] \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

Feitas estas considerações sobre as variáveis estatísticas, prossegue-se em busca da minimização do erro médio quadrático. A função custo do MSE, dada em relação ao vetor de coeficientes \mathbf{w} , é uma função quadrática. Então, se \mathbf{R} é positiva definida, o MSE admite um e apenas um ponto de mínimo [9]. O gráfico desta função tem a forma de um parabolóide multidimensional, e para o caso particular de dois coeficientes ($N = 2$) encontra-se na Figura (2.3).

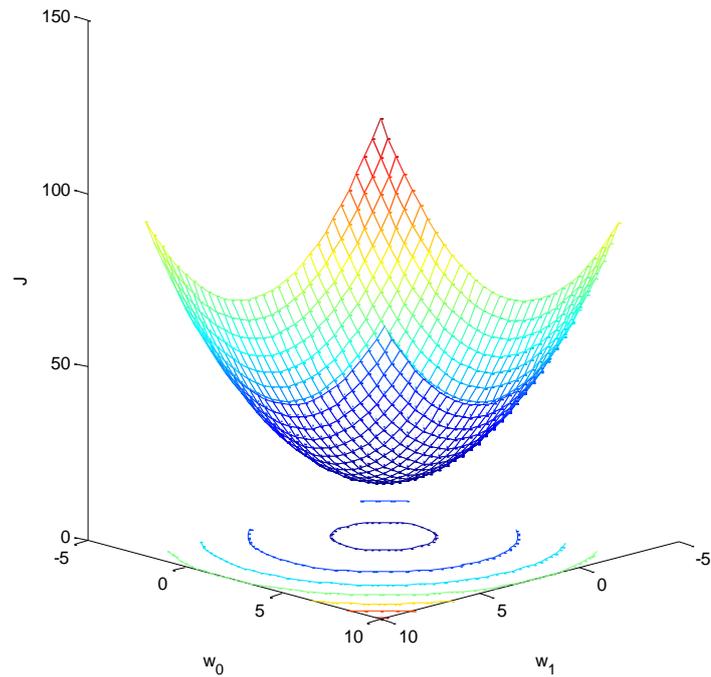


Fig. 2.3. Superfície do MSE para dois coeficientes ($N = 2$).

Como pode ser visto na Figura (2.4), desde que os sinais $x(k)$ e $d(k)$ sejam estacionários, o parabolóide multidimensional possui um único mínimo global e nenhum mínimo local, característicos de uma função convexa [7].

Uma forma de encontrar o mínimo da superfície do erro médio quadrático é através do vetor gradiente da função $\xi(\mathbf{w})$, que pode ser encontrado diferenciando-se a mesma em relação a cada coeficiente, conforme segue:

$$\nabla_{\xi}(\mathbf{w}) = \frac{\partial \xi(\mathbf{w})}{\partial \mathbf{w}} = \left[\frac{\partial \xi(\mathbf{w})}{\partial w_0}, \frac{\partial \xi(\mathbf{w})}{\partial w_1}, \dots, \frac{\partial \xi(\mathbf{w})}{\partial w_N} \right]^T \quad (2.17)$$

Que na forma vetorial, com base na equação $\xi(\mathbf{w}) = \sigma_d^2 - 2\mathbf{w}^T \mathbf{p} + \mathbf{w}^T \mathbf{R} \mathbf{w}$, pode ser dado por:

$$\nabla_{\xi}(\mathbf{w}) = 2\mathbf{R}\mathbf{w} - 2\mathbf{p} \quad (2.18)$$

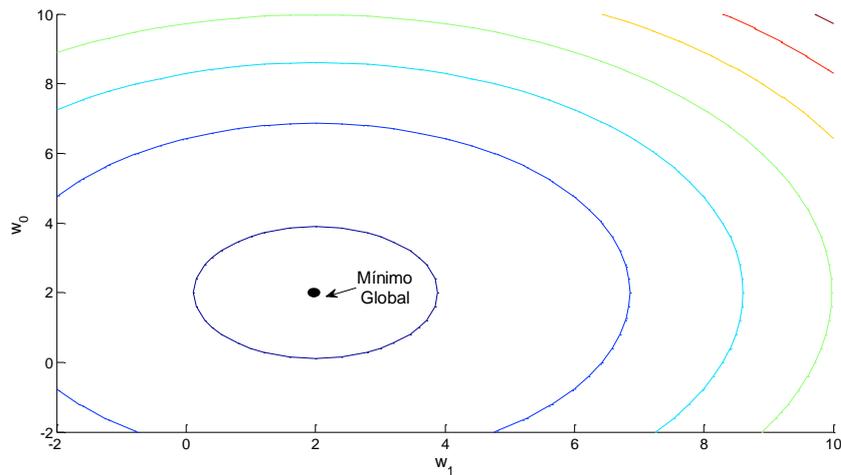


Fig. 2.4. Plano formado por dois coeficientes e localização do mínimo global.

Para que o erro quadrático médio seja minimizado, é necessário que o vetor gradiente seja nulo:

$$\nabla \xi(\mathbf{w}) = 2\mathbf{R}\mathbf{w} - 2\mathbf{p} = 0 \quad (2.19)$$

$$\mathbf{R}\mathbf{w} = \mathbf{p} \quad (2.20)$$

Resolvendo a Equação (2.20), obtém-se um conjunto de equações lineares, ou equações normais, que fornecem as coordenadas do valor mínimo da superfície, onde o vetor gradiente é nulo. Essas coordenadas compõem a solução das equações de Wiener-Hopf, que correspondem aos coeficientes do filtro de Wiener, que é considerado ótimo no sentido quadrático médio, e pode ser expresso pela Equação (2.21), assumindo que a matriz \mathbf{R} possui inversa (matriz não-singular) [1].

$$\mathbf{w}_o = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{p} \quad (2.21)$$

Uma vez que a superfície dada pela função custo é uma função convexa, não há a necessidade de avaliar a segunda derivada, que indica se o ponto do gradiente nulo é máximo ou mínimo, pois necessariamente o ponto encontrado será de mínimo, desde que a matriz de autocorrelação seja positiva-definida [9].

Além do método do gradiente, a equação do filtro de Wiener também pode ser encontrada pelo princípio da ortogonalidade. Segundo este, a condição necessária e suficiente para a função custo do MSE atingir um valor mínimo é que o correspondente valor do erro de estimação $e(k)$ seja ortogonal a cada amostra de entrada utilizada na estimação da resposta

desejada no instante k . Quando o filtro opera em situação ótima, a estimativa da resposta desejada, $y(k)$, e a correspondente estimativa do erro, $e(k)$, também são ortogonais entre si, conforme Figura 2.5 [4]. Essa afirmação será demonstrada a seguir:

$$E\{e(k)\mathbf{x}(k)\} = 0 \quad (2.22)$$

$$E\{[d(k) - y(k)]\mathbf{x}(k)\} = 0 \quad (2.23)$$

$$E\{[d(k) - \mathbf{w}^T \mathbf{x}(k)]\mathbf{x}(k)\} = 0 \quad (2.24)$$

$$E\{d(k)\mathbf{x}(k) - \mathbf{w}^T \mathbf{x}(k)\mathbf{x}(k)\} = 0 \quad (2.25)$$

$$\mathbf{p} - \mathbf{w}^T \mathbf{R} = 0 \quad (2.26)$$

Que também conduz as equações de Wiener-Hopf, cuja solução é o filtro de Wiener.

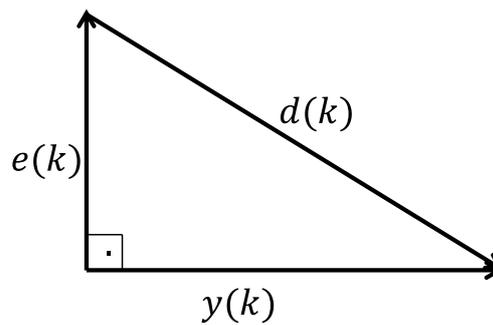


Fig. 2.5. Interpretação geométrica do princípio da ortogonalidade.

O filtro de Wiener tem pouca viabilidade prática, pois a resolução dessas operações matriciais, sobretudo a inversão, aumenta a complexidade computacional do filtro adaptativo, dificultando implementações em tempo real. Além disso, a solução ótima é baseada em estatísticas, necessitando de toda informação *a priori* dos sinais do sistema para composição da matriz de autocorrelação \mathbf{R} e do vetor de correlação cruzada \mathbf{p} , o que nem sempre é possível. Mesmo que esses sinais estejam disponíveis, pode ocorrer deles não serem estacionários, e então \mathbf{R} e \mathbf{p} variam no tempo, fazendo com que \mathbf{w}_0 tenha de ser repetidamente calculado pelos métodos matriciais. Entretanto, a importância da solução Wiener está no fato de servir como parâmetro de referência para avaliação de diversos algoritmos aplicados à filtragem adaptativa em ambientes estacionários.

O desenvolvimento de algoritmos de adaptação surgiu como forma de amenizar as dificuldades citadas anteriormente para a obtenção do filtro de Wiener. Um algoritmo de adaptação realiza o ajuste dos coeficientes \mathbf{w}_i de forma iterativa, como é o caso dos algoritmos do tipo LMS, que são desenvolvidos com base no método *Steepest Descent*, que será abordado na seção a seguir [11].

2.5. Método *Steepest Descent*

Um método que pode ser utilizado para a adaptação dos coeficientes é o método do *Steepest Descent*. Uma vez que o vetor gradiente fornece a direção de máximo crescimento de uma função, o seu oposto tende ao ponto mínimo. A cada iteração, o vetor de coeficientes se aproxima do valor ótimo, através de um passo de adaptação, que pode ser constante ou variável ao longo do processo de minimização da função objetivo.

A equação básica empregada para atualizar os coeficientes no *Steepest Descent* é dada por:

$$\mathbf{w}(k + 1) = \mathbf{w}(k) - \mu \nabla \xi(\mathbf{w}) \quad (2.27)$$

onde $\mathbf{w}(k + 1)$ é o vetor de coeficientes no instante $k + 1$, $\mathbf{w}(k)$ é o vetor de coeficientes no instante k , $\nabla \xi(\mathbf{w})$ é o gradiente da função MSE em relação aos coeficientes e μ é o chamado passo de adaptação (ou passo de convergência) [6].

Para o caso do filtro transversal $y(k) = \mathbf{w}^T \mathbf{x}(k)$, tem-se o gradiente da função custo $\xi(\mathbf{w})$ dado por:

$$\nabla \xi(\mathbf{w}) = 2\mathbf{R}\mathbf{w} - 2\mathbf{p} \quad (2.28)$$

Substituindo a Equação (2.28) na Equação (2.27), tem-se:

$$\mathbf{w}(k + 1) = \mathbf{w}(k) - \mu[2\mathbf{R}\mathbf{w}(k) - 2\mathbf{p}] \quad (2.29)$$

$$\mathbf{w}(k + 1) = \mathbf{w}(k) - \mu 2\mathbf{R}\mathbf{w}(k) + 2\mu\mathbf{p} \quad (2.30)$$

$$\mathbf{w}(k + 1) = \mathbf{w}(k)[\mathbf{I} - \mu 2\mathbf{R}] + 2\mu\mathbf{p} \quad (2.31)$$

$$\mathbf{w}(k + 1) = [\mathbf{I} - 2\mu\mathbf{R}]\mathbf{w}(k) + 2\mu\mathbf{p} \quad (2.32)$$

onde I indica uma matriz identidade, e a partir da Equação (2.34) é possível obter o vetor ótimo de coeficientes iterativamente, sem a necessidade de inversão matricial como no filtro de Wiener.

A escolha do passo de adaptação é feita de forma a aliar velocidade de convergência, estabilidade e erro residual do algoritmo de adaptação empregado. Algumas dessas características serão melhor descritas no capítulo seguinte, onde será discutido o algoritmo LMS. No entanto, a seguir tem-se a análise da convergência do *Steepest Descent*, que também é válida para o algoritmo LMS.

2.6. Análise da convergência do *Steepest Descent*

A convergência e a estabilidade do processo de adaptação do método *Steepest Descent* são garantidas, desde que o valor do passo de convergência μ seja adequadamente escolhido em determinados intervalos. A definição de tais intervalos parte do princípio que a função custo do MSE dada na Equação (2.14) precisa ser minimizada, o que ocorre quando o seu gradiente $\nabla\xi(\mathbf{w})$ dado na Equação (2.17) for nulo. Assim, o objetivo é encontrar uma “raiz” da função $\nabla\xi(\mathbf{w})$, ou seja, um ponto ótimo capaz de torná-la nula.

A solução desse problema conduz ao Teorema do Ponto Fixo, o qual permite que uma raiz seja encontrada de forma iterativa [15]. Para isso, em analogia com a Equação (2.27), descreve-se na Equação (2.33) uma função matricial $\psi(\mathbf{w})$ cujo ponto fixo \mathbf{w}_o será buscado:

$$\psi(\mathbf{w}) = \mathbf{w} + A(\mathbf{w})\nabla\xi(\mathbf{w}) \quad (2.33)$$

onde $A(\mathbf{w})$ é um escalar tal que $A(\mathbf{w}_o) \neq 0$.

Dessa forma, encontrar uma raiz da função $\nabla\xi(\mathbf{w})$ corresponde a encontrar um ponto fixo \mathbf{w}_o de $\psi(\mathbf{w})$, de tal forma que $\psi(\mathbf{w}_o) = \mathbf{w}_o$.

A condição para convergência é que a norma da derivada de $\psi(\mathbf{w}_o)$ seja menor que 1, isto é, $\|(\psi(\mathbf{w}))_{\mathbf{w}}\| < 1$, para alguma norma do espaço de matrizes [16]. Assim, busca-se $\psi'(\mathbf{w})$, que pode ser descrita como:

$$(\psi(\mathbf{w}))_{\mathbf{w}} = I + A(\mathbf{w})(\nabla\xi(\mathbf{w}))_{\mathbf{w}} + (A(\mathbf{w}))_{\mathbf{w}}\nabla\xi(\mathbf{w}) \quad (2.34)$$

onde $(\psi(\mathbf{w}))_{\mathbf{w}}$ é uma matriz que expressa a derivada em relação ao vetor \mathbf{w} , \mathbf{I} é a matriz identidade $N \times N$, $(A(\mathbf{w}))_{\mathbf{w}}$ é a derivada de $A(\mathbf{w})$ em relação ao vetor \mathbf{w} e $(\nabla\xi(\mathbf{w}))_{\mathbf{w}}$ é a derivada de $\nabla\xi(\mathbf{w})$ em relação a \mathbf{w} .

Se \mathbf{w}_o é raiz de $\nabla\xi(\mathbf{w})$, é também ponto fixo de $\psi(\mathbf{w})$, pois substituindo na Equação (2.34), obtém-se:

$$(\psi(\mathbf{w}_o))_{\mathbf{w}} = \mathbf{I} + A(\mathbf{w}_o)(\nabla\xi(\mathbf{w}_o))_{\mathbf{w}} \quad (2.35)$$

uma vez que o outro termo será zerado, pois $\nabla\xi(\mathbf{w}_o) = 0$.

Derivando a Equação (2.19), obtém-se para todo \mathbf{w} :

$$(\nabla\xi(\mathbf{w}))_{\mathbf{w}} = 2\mathbf{R} \quad (2.36)$$

Em particular, teremos que para $\mathbf{w} = \mathbf{w}_o$, a Equação (2.36) é válida, e substituindo na Equação (2.35), resulta em:

$$(\psi(\mathbf{w}_o))_{\mathbf{w}} = \mathbf{I} + 2A(\mathbf{w}_o)\mathbf{R} \quad (2.37)$$

Conforme descrito, para a convergência deve-se atender a relação $\|(\psi(\mathbf{w}_o))_{\mathbf{w}}\| < 1$, logo:

$$\|\mathbf{I} + 2A(\mathbf{w}_o)\mathbf{R}\| < 1 \quad (2.38)$$

Dessa forma, conclui-se que um possível intervalo para $A(\mathbf{w})$, de forma que o ponto fixo \mathbf{w}_o possa ser encontrado, é $(-\frac{1}{\|\mathbf{R}\|}, 0)$. No entanto, considerando a Equação (2.27), observa-se a equivalência entre $A(\mathbf{w})$ e μ , precedido pelo sinal negativo. Assim:

$$0 < \mu < \frac{1}{\|\mathbf{R}\|} \quad (2.39)$$

Se forem consideradas as características da matriz de autocorrelação \mathbf{R} , a Equação (2.39) pode ser descrita de outras formas. Apesar de distintas, todas partem do princípio que todos os elementos de \mathbf{R} tenderão a zero, com exceção da diagonal principal, pois esta é composta da correlação entre duas variáveis aleatórias iguais, o que aumenta o grau de similaridade [3].

Uma forma de expressar a matriz \mathbf{R} é dada na Equação (2.40), onde λ_i são os autovalores:

$$\mathbf{R} \cong \begin{bmatrix} \lambda_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_{k-N+1} \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

Sendo possível redefinir o intervalo para a escolha de μ como:

$$0 < \mu < \frac{1}{\lambda_{m\acute{a}x}} \quad (2.41)$$

onde $\lambda_{m\acute{a}x}$ é o maior autovalor da matriz \mathbf{R} [1].

Considerando que \mathbf{R} é pelo menos semidefinida positiva, seus autovalores são não-negativos, logo:

$$\lambda_{m\acute{a}x} \leq \sum_{i=0}^{N-1} \lambda_i = tr\{\mathbf{R}\} \quad (2.42)$$

onde $tr\{\mathbf{R}\}$ é o traço da matriz \mathbf{R} , ou seja, o somatório da diagonal principal [1]. Então, μ pode ser escolhido com mais segurança se atender ao critério:

$$0 < \mu < \frac{1}{tr\{\mathbf{R}\}} \quad (2.43)$$

Conforme mencionado anteriormente, o método *Steepest Descent* foi apresentado por servir de base para o algoritmo LMS. A principal diferença entre o algoritmo LMS e o método *Steepest Descent* é que o LMS localiza os coeficientes do filtro através da minimização do MSE amostra por amostra, a partir de estimativas instantâneas do sinal, enquanto que o *Steepest Descent* utiliza o valor esperado de todo o conjunto de amostras [11]. O algoritmo LMS, assim como o NLMS, será desenvolvido no próximo capítulo.

3. ALGORITMOS DE ADAPTAÇÃO DO TIPO LMS

3.1. Algoritmo LMS

De forma análoga ao filtro de Wiener, os filtros adaptativos têm seus coeficientes ajustados a partir da minimização do MSE, com a diferença que o processo é controlado por um algoritmo de adaptação, conforme esquema expresso na Figura 3.1. O surgimento dos algoritmos de adaptação foi devido à necessidade de uma complexidade computacional menor do que a requerida pelo filtro de Wiener, além da possibilidade de operar com sistemas variantes no tempo. Além disso, o processo de estimação das estatísticas necessárias para a implementação deste nem sempre são possíveis de serem obtidas, conforme descrito no capítulo anterior.

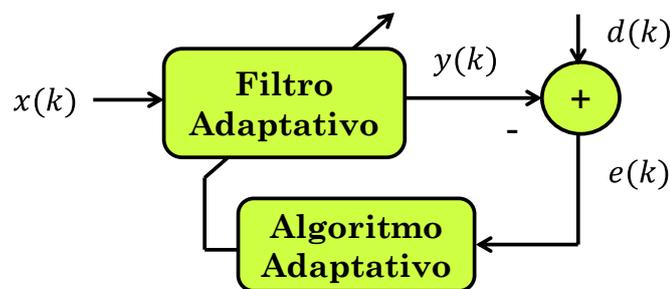


Fig. 3.1. Esquema de um filtro adaptativo.

Dentre os algoritmos de adaptação, destaca-se o LMS, que é um dos algoritmos mais utilizados em processos de filtragem adaptativa, devido à viabilidade computacional e estabilidade [9]. A sua definição parte do princípio que para minimizar o MSE não há a necessidade de conhecimento *a priori* de \mathbf{R} e \mathbf{p} , como ocorre para a obtenção da solução ótima de Wiener. Para isso, consideram-se as estimativas instantâneas dos sinais de entrada, referência e sinal de erro, ou seja, utiliza-se o próprio valor desses sinais em cada instante de tempo, à medida que eles vão sendo conhecidos pelo filtro [6].

Com isso, é possível reformular a Equação (2.27) do gradiente descendente, substituindo $\nabla \xi(\mathbf{w})$ pelas estimativas instantâneas.

Para tanto, toma-se como base a Equação (2.12), e deriva-se a mesma em relação à \mathbf{w} :

$$\nabla \xi(\mathbf{w}) = -2d(k)x(k) + 2x(k)x^T(k)\mathbf{w} \quad (3.1)$$

Cujo termo $-2\mathbf{x}(k)$ pode ser posto em evidência,

$$\nabla\xi(\mathbf{w}) = -2\mathbf{x}(k)[d(k) - \mathbf{x}^T(k)\mathbf{w}] \quad (3.2)$$

Conforme a Equação (2.10), o sinal de erro é dado por $e(k) = d(k) - \mathbf{w}^T \mathbf{x}(k)$, assim, a equação do gradiente pode ser reescrita como:

$$\nabla\xi(\mathbf{w}) = -2\mathbf{x}(k)e(k) \quad (3.3)$$

Logo, a equação de atualização dos coeficientes para o algoritmo LMS será:

$$\mathbf{w}(k+1) = \mathbf{w}(k) + 2\mu\mathbf{x}(k)e(k) \quad (3.4)$$

Assim como o *Steepest Descent*, o algoritmo LMS atualiza cada coeficiente do filtro na direção oposta ao gradiente da função custo, projetado sobre o hiperplano dos coeficientes [2]. Entretanto, a direção de atualização dos coeficientes é estimada diretamente utilizando o produto do vetor sinal de entrada do filtro pelo sinal de erro de estimação, não envolvendo inversão matricial e facilitando a sua implementação prática.

Embora o filtro adaptativo FIR utilize uma estrutura linear apenas com zeros ajustáveis, a sua estabilidade depende da configuração do algoritmo utilizado para ajustar seus coeficientes.

3.2. Estabilidade do algoritmo LMS

Para a estabilidade do algoritmo LMS, é necessário que μ seja escolhido em determinados intervalos, de forma similar à descrita no Capítulo 2 para o *Steepest Descent*, cujas relações resultantes foram $0 < \mu < \frac{1}{\|\mathbf{R}\|}$, $0 < \mu < \frac{1}{\text{tr}\{\mathbf{R}\}}$ e $0 < \mu < \frac{1}{\lambda_{\text{máx}}}$.

No entanto, nas situações em que são empregados filtros transversais, o traço de \mathbf{R} corresponde a N vezes a potência do sinal de entrada; deste modo é possível dispor de uma relação bastante útil quando os autovalores de \mathbf{R} não são conhecidos:

$$0 < \mu < \frac{1}{NP_x} \quad (3.5)$$

onde N é o comprimento do filtro e P_x é a potência do sinal de entrada [6].

Essa relação é válida e pode ser demonstrada. Para tanto, inicialmente considera-se a matriz de autocorrelação \mathbf{R} , dada na forma genérica:

$$\mathbf{R}_x = \begin{bmatrix} r_x(0) & r_x(1) & \dots & r_x(b-1) \\ r_x(1) & r_x(0) & \dots & r_x(b-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_x(b-1) & r_x(b-2) & \dots & r_x(0) \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

Para a maioria dos processos aleatórios, as b amostras consecutivas serão correlacionadas inversamente proporcionais ao tempo, isto é, quanto maior a distância entre duas amostras, menor será a correlação entre elas. Portanto, com exceção da diagonal principal, onde a distância entre as mostras é nula, as demais tenderão a zero, o que resulta em uma matriz da forma:

$$\mathbf{R}_x = \begin{bmatrix} r_x(0) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & r_x(0) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & r_x(0) \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

No entanto, observa-se que o termo $r_x(0)$ corresponde a variância de x , que é o próprio P_x , adotado na Equação (3.5). Além disso, como há N elementos na diagonal, considera-se NP_x como uma boa aproximação para \mathbf{R} . Substituindo em $\frac{1}{\|\mathbf{R}\|}$, tem-se $\frac{1}{NP_x}$.

A obtenção da potência P_x pode não ser possível diretamente, sendo necessária a aplicação de um método recursivo. Para tanto, parte-se do princípio que sinais aleatórios têm energia infinita e potência finita expressa como:

$$P_x = E[x^2(k)] = \sigma_x^2 + m_x^2 = r_{xx}(0) \quad (3.8)$$

onde σ_x^2 é a variância, m_x^2 é o quadrado da média e $r_{xx}(0)$ é a autocorrelação no instante $k = 0$, todos em relação ao sinal de entrada $x(k)$ [14].

A partir disso, em muitas aplicações reais a potência do sinal no tempo k pode ser estimada usando uma técnica de media móvel expressa como:

$$\hat{P}_x(k) = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} |x(k-i)|^2 \quad (3.9)$$

Que pode ser reescrita conforme Equação (3.10):

$$\hat{P}_x(k) \cong \left(1 - \frac{1}{N}\right) \hat{P}_x(k-1) + \frac{1}{N} |\mathbf{x}(k)|^2 \quad (3.11)$$

Ou ainda, substituindo $\frac{1}{N}$ pelo parâmetro de suavização α :

$$\hat{P}_x(k) \cong (1 - \alpha) \hat{P}_x(k-1) + \alpha |\mathbf{x}(k)|^2 \quad (3.12)$$

onde $\alpha < 1$ [7].

A escolha do passo de adaptação em intervalos adequados garante a convergência. No entanto, a Equação (3.5) mostra que o tamanho de μ é inversamente proporcional ao comprimento do filtro e a potência do sinal de entrada. Esse fato interfere em diversos parâmetros de desempenho, como a velocidade de convergência, por exemplo.

3.3. Velocidade de convergência do algoritmo LMS

Um parâmetro importante no projeto de um filtro adaptativo é a taxa de convergência, que indica a velocidade com que os coeficientes se aproximam de seus valores ótimos, ou seja, o tempo necessário para que o MSE seja reduzido ao seu valor mínimo.

Uma equação que fornece uma aproximação desse tempo τ_{MSE} é dada por:

$$\tau_{MSE} = \frac{1}{\mu \lambda_{\min}} \quad (3.13)$$

onde λ_{\min} é o menor autovalor da matriz \mathbf{R} [7].

A Equação (3.13) mostra que o tempo requerido para o algoritmo convergir é inversamente proporcional ao tamanho do passo, o que induziria a escolha de um valor elevado para μ , a fim de aumentar a taxa de convergência. Entretanto, a Equação (3.5), assim como as demais equações a ela relacionadas, mostra que o tamanho do passo de convergência não pode ser escolhido arbitrariamente, devido às restrições de estabilidade.

Outra forma de descrever o tempo necessário para convergência é obtida pela substituição de μ pelo seu limite superior, dado na Equação (2.41), o que resulta em:

$$\tau_{MSE} > \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} \quad (3.14)$$

onde o termo $\frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}}$ é chamado de espalhamento dos autovalores da matriz \mathbf{R} [1].

Portanto, verifica-se que a taxa de convergência também está intensamente relacionada com as características do sinal de entrada. O espalhamento dos autovalores pode ser visto como a magnitude dos espectros máximos e mínimos de um sinal [7]. Assim, para os casos onde o espectro é relativamente plano, tais como um ruído branco, a velocidade de convergência é mais rápida. Entretanto, para sinais com grandes variações de potência, tais como a fala, a taxa de convergência esperada é menor.

A velocidade de convergência do algoritmo LMS está ligada a outro parâmetro denominado *tracking*, que é a velocidade com que o filtro é capaz de se adaptar as variações estatísticas dos sinais [2]. Quando as características do sinal de entrada variam lentamente no tempo, o LMS tem um desempenho eficiente, seguindo a movimentação do MSE mínimo, estando sujeito apenas a atrasos decorrentes da baixa velocidade de convergência, que pode ser melhorada com o aumento do passo. Entretanto, o aumento de μ pode provocar um excesso de MSE e aumentar o desajuste, o que não é desejável.

3.4. Excesso de MSE e desajuste

A performance do algoritmo LMS em ambiente estacionário pode ser descrita pelo excesso de MSE e desajuste. A utilização do vetor gradiente verdadeiro em condições livre de ruídos faz com que os métodos adaptativos converjam para o mínimo MSE e tendam a permanecer nessa região. Entretanto, o algoritmo LMS utiliza a estimativa do gradiente verdadeiro, que pode não ser nula mesmo no mínimo MSE, o que provoca a atualização aleatória dos coeficientes em torno dos valores ótimos [9].

Este ruído adicional que é inserido pelo algoritmo e fornecido na saída do filtro adaptativo, quando medido é chamado excesso de MSE, o qual é o aumento médio do MSE sobre o MSE mínimo, após a convergência. Uma forma de medi-lo é através da Equação (3.15):

$$MSE_{exc} = \mu N (MSE_{\min}) \quad (3.15)$$

onde MSE_{\min} é o mínimo MSE na solução ótima em estado estacionário [7].

A Equação (3.15) mostra que o ruído do algoritmo é proporcional ao tamanho do passo μ e ao comprimento do filtro N . Logo, para melhorar o desempenho, o valor do passo de convergência deve ser pequeno, o que diminui a taxa de convergência. Um filtro com maior número de coeficientes, além de aumentar a complexidade computacional, também contribui para o aumento do MSE_{exc} .

Uma normalização do excesso de MSE com o mínimo MSE é chamada de desajuste, dado na Equação (3.16).

$$M = \frac{MSE_{exc}}{MSE_{mín}} = \frac{\mu N (MSE_{mín})}{MSE_{mín}} = \mu N \quad (3.16)$$

O desajuste representa a diferença entre o erro médio quadrático produzido pelo algoritmo e o erro médio quadrático mínimo [1]. Analisando as equações, verifica-se que ele aumenta de forma proporcional ao tamanho do passo μ e comprimento do filtro N .

3.5. Outros parâmetros de análise de desempenho

Além das condições de estabilidade, taxa de convergência, excesso de MSE e desajuste, um filtro adaptativo também pode ser analisado em relação a outros aspectos, como complexidade computacional, estrutura e robustez.

A complexidade computacional indica o número de operações aritméticas executadas pelo algoritmo a cada iteração, determinando a possibilidade de implementação em tempo real. Para a implementação do algoritmo LMS, são requeridas $N + 1$ multiplicações para calcular a saída do filtro e obter $2\mu e(k)$, e N multiplicações para obter $2\mu e(k)\mathbf{x}(k)$, resultando em um total de $2N + 1$ multiplicações por amostra, além das $2N$ adições necessárias [10].

A estrutura é a forma de implementação do filtro adaptativo, podendo ser transversal, treliça, cascata, paralela, dentre outras. Interfere na complexidade computacional, taxa de convergência e propriedades numéricas [4]. No entanto, a estrutura transversal oferece um bom desempenho nesses itens, e será a única abordada neste trabalho.

Finalmente, a robustez está relacionada com a menor sensibilidade do algoritmo a erros do sistema. O algoritmo LMS é relativamente robusto, o que significa dizer que pequenas incertezas do modelo e perturbações com pouca energia resultam apenas em pequenos erros

de estimação [11]. No entanto, para aumentar a robustez, pode ser feita a normalização do passo usando uma estimação da potência do sinal de entrada, o que resulta no algoritmo LMS Normalizado.

3.6. Algoritmo LMS Normalizado

Apesar de o algoritmo LMS ser o mais utilizado de todos os algoritmos adaptativos, surgiram algumas variações a fim de simplificar a sua implementação, acelerar a convergência dos coeficientes em direção aos valores ótimos ou reduzir o erro residual dos coeficientes em regime permanente.

Uma dessas variações é o algoritmo LMS Normalizado (NLMS - *Normalized Least Mean Squares*), que difere do LMS convencional por apresentar um passo de convergência μ dependente do sinal de entrada $\mathbf{x}(k)$. Essa variação tem como objetivo reduzir o ruído que surge no algoritmo resultante da estimação do gradiente quando os valores do sinal de entrada são grandes [11].

Considerando que o passo de adaptação é da forma:

$$\mu = \frac{\mu_n}{\gamma + \|\mathbf{x}(k)\|^2} \quad (3.17)$$

A atualização dos coeficientes utilizando o algoritmo NLMS será dada por:

$$\mathbf{w}(k+1) = \mathbf{w}(k) + \frac{\mu_n}{\gamma + \|\mathbf{x}(k)\|^2} e(k)\mathbf{x}(k) \quad (3.18)$$

Ou:

$$\mathbf{w}(k+1) = \mathbf{w}(k) + \frac{\mu_n}{\gamma + \mathbf{x}^T(k)\mathbf{x}(k)} e(k)\mathbf{x}(k) \quad (3.19)$$

onde μ_n é um valor de passo inicial fixo, $\|\mathbf{x}(k)\|^2 = \mathbf{x}^T(k)\mathbf{x}(k)$ é o quadrado da norma euclidiana do sinal de entrada e γ é um parâmetro positivo que impede que o denominador seja nulo ou muito pequeno, o que levaria o passo a um valor muito grande ou até mesmo a divisão por zero [1].

O parâmetro γ é adequado para sinais de voz, por exemplo, onde a amplitude pode variar em valores muito elevados a momentos de completo silêncio. Uma escolha adequada para γ é dada na Equação (3.20) [7].

$$\gamma \cong \frac{1}{10} \|\mathbf{x}(k)\|^2 \quad (3.20)$$

Para garantir a estabilidade do NLMS, o passo μ_n deve ser escolhido em um intervalo adequado. Para a definição desse intervalo, comparam-se as equações de atualização dos coeficientes do LMS e do NLMS, verificando que o fator de convergência de fato aplicado na direção de $2e(k)\mathbf{x}(k)$ do LMS é $\frac{\mu_n}{2tr\{\mathbf{R}\}}$ para o NLMS, considerando que $E\{\mathbf{x}^T(k)\mathbf{x}(k)\} = tr\{\mathbf{R}\}$ [1]. Assim, os limites para a escolha de μ_n são:

$$0 < \mu = \frac{\mu_n}{2tr\{\mathbf{R}\}} < \frac{1}{tr\{\mathbf{R}\}} \quad (3.21)$$

O que conduz a:

$$0 < \mu_n < 2 \quad (3.22)$$

Para a aplicação do algoritmo NLMS é necessário algum conhecimento do processo estocástico de entrada, a fim de obter os valores de $\|\mathbf{x}(k)\|^2$ e γ , evitando a instabilidade. Quando isso não é possível, considera-se que o escalar de normalização é a soma dos quadrados dos sinais que em cada momento se encontram na cadeia de atrasos que compõe o filtro transversal adaptativo [7]. O cálculo recursivo da norma quadrática é possível porque a cada nova iteração apenas uma amostra é inserida à entrada, enquanto que a mais antiga é descartada e as demais são deslocadas, o que caracteriza uma janela deslizante. Dessa forma:

$$\|\mathbf{x}(k)\|^2 = \mathbf{x}^2(k) + \mathbf{x}^2(k-1) - \mathbf{x}^2(k-N+1) \quad (3.23)$$

A velocidade de convergência do algoritmo LMS Normalizado é significativamente maior do que a do algoritmo LMS padrão, que precisa de um tempo maior até atingir o regime permanente. Além disso, a normalização em função da entrada torna o NLMS imune a alterações bruscas do sinal de entrada [9].

No entanto, apesar do algoritmo NLMS ter uma convergência mais rápida em comparação com o algoritmo LMS, ele apresenta um erro maior em regime que o LMS, quando são utilizadas as mesmas condições de operação. A complexidade computacional do

NLMS também é mais elevada que a do LMS padrão, devido à inclusão do cálculo de uma norma quadrática, de uma divisão e uma soma do termo γ [1].

4. IDENTIFICAÇÃO DE SISTEMAS

4.1. Introdução

Na classe de aplicação de filtragem adaptativa denominada identificação de sistemas, o objetivo do filtro adaptativo é fornecer um modelo linear que seja capaz de representar, segundo algum critério, uma aproximação de um sistema desconhecido.

O princípio de funcionamento pode ser descrito pela Figura 4.1, onde se tem um sinal $x(k)$ que serve como entrada tanto do sistema que será modelado quanto do filtro adaptativo. Após a passagem pelo sistema desconhecido, o sinal de entrada filtrado é eventualmente somado a um ruído $n(k)$ e serve como sinal de referência $d(k)$, a partir do qual o filtro adaptativo estima um modelo que possa descrever o comportamento de tal sistema [3].

Para que a modelagem seja possível, é necessário que o erro $e(k)$ dado pela diferença entre o sinal de referência e o sinal estimado seja mínimo. Se houver a presença de ruído $n(k)$ no sistema, conforme indicado na Figura 4.1, o erro mínimo é aquele que contém somente as componentes do sinal de ruído [11]. Este aspecto pode ser benéfico em determinadas aplicações reais, quando o sinal buscado é o próprio $n(k)$.

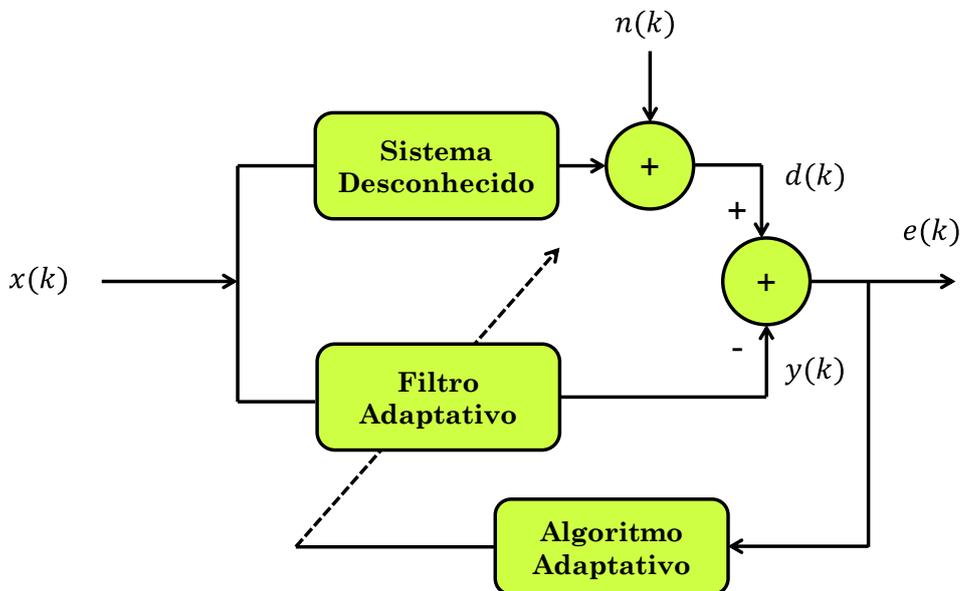


Fig. 4.1. Diagrama da aplicação denominada identificação de sistemas.

Visando uma melhor compreensão dessa classe de aplicação, será desenvolvido um exemplo real baseado no processo de estimação de uma função de transferência que descreva um caminho do eco em sistemas de voz sobre IP (VoIP - *Voice over Internet Protocol*), para que seja possível cancelá-lo.

4.2. Sistemas VoIP

A tecnologia VoIP utiliza o Protocolo da Internet (IP) para transmitir voz sobre uma rede de dados, podendo ser internet ou intranet. A importância desse sistema está no melhor aproveitamento da banda de transmissão disponível, resultando em custos mais acessíveis nas ligações de longa distância. Somados a isso, está a popularização e a diminuição dos custos de computadores pessoais e o acesso residencial à Internet através de modems (moduladores/demoduladores), utilizando a rede telefônica como coadjuvante para conexão com outra rede de características diferentes [17]. No entanto, é necessário que seja observada também a qualidade do serviço (QoS – *Quality of Service*), um conceito que inicialmente não era considerado, pois importava somente que os dados fossem transmitidos sem perdas e na ordem em que eram recebidos, obedecendo a regra de que o primeiro que chega é o primeiro que sai (FIFO - *First In First Out*) [18].

Apesar da ITU-T (*International Telecommunication Union, the Telecommunications Standardization Sector*) permitir uma latência entre 150ms e 300ms, ou seja, que a informação leve esse tempo para percorrer o circuito, o ideal seria uma transmissão sem atrasos [18]. Assim, para que o sistema VoIP opere com qualidade, a voz precisa ser transmitida sem atrasos ou cortes na fala, com controle de *jitter* (atraso na entrega de dados) e de perda de pacotes. No entanto, os sistemas VoIP são afetados por um grande problema, que é o eco.

4.3. Eco em sistemas VoIP

Embora o eco seja benéfico em algumas situações, como em radares e sonares, ou na medicina em equipamentos de ultra-som, o mesmo não ocorre na telefonia, onde causa um grande desconforto em uma comunicação de voz e, dependendo da intensidade, pode até mesmo inviabilizar a fluência do diálogo. Uma forma utilizada para controlar o efeito nocivo do eco é a utilização de supressores, que atenuam o sinal de retorno da voz enquanto o

ouvinte está em silêncio. Isso gera um grande inconveniente quando ambos os usuários falam ao mesmo tempo, pois parte da conversação será eliminada. Não obstante, esse sistema também é incapaz de lidar eficazmente com atrasos acima de 100ms [17]. Esses fatores fazem surgir a necessidade de novos métodos de eliminação de eco.

O eco em sistemas VoIP surge de duas formas, sendo classificado como eco acústico e eco de linha. O eco acústico é devido a reverberação do sinal de voz no aparelho telefônico, enquanto que o eco de linha surge no circuito de interface entre um equipamento de acesso à Internet e a linha telefônica, ou seja, na parte analógica [19]. Neste trabalho, o foco será dado ao eco de linha. Este esquema de geração de eco é mostrado na Figura 4.2, considerando uma comunicação entre dois usuários, A e B. No momento de captura do sinal de voz do usuário B proveniente da linha telefônica, pode ocorrer do servidor detectar também uma parcela dos sinais que tinham sido enviados por A, fazendo com que eles retornem para a placa de som do computador e sejam transmitidos pela rede.

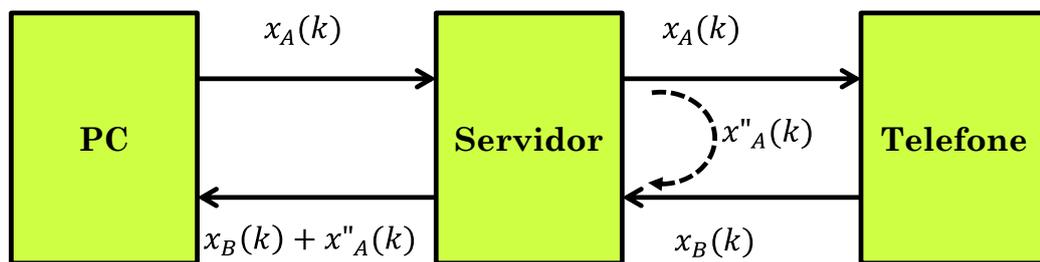


Fig. 4.2. Esquema do surgimento do eco em sistemas VoIP.

Esta parcela é o eco $x''_A(k)$, que pode ser entendido como o resultado da passagem da voz do usuário A por um filtro digital $H(z)$, conforme Fig. 4.3. Assim, uma vez conhecido esse caminho de eco, seria possível o projeto de um filtro com parâmetros fixos que fornecessem com exatidão a componente de ruído gerada pelo eco, para posterior subtração da mesma. Entretanto, esse caminho não é conhecido antecipadamente e possui atrasos distintos dependendo das distâncias entre os usuários, de equipamentos e outros fatores, além de não ser constante. A variação neste sistema é decorrente da conexão ou desconexão de telefones durante a conversação, transferência de chamadas, mudanças lentas em ganho,

dentre outros. A soma desses fatores implica na flutuação da função de transferência do caminho de eco.

Uma alternativa quando o ambiente externo é desconhecido ou variante no tempo é utilizar uma ferramenta que consiga, em tempo real, gerar um modelo do sistema causador do eco, além de atualizá-lo caso as características sejam alteradas durante a operação. Atendendo a essas características estão os filtros adaptativos, que necessitam de pouco conhecimento prévio sobre a origem do eco, pois ao longo do processo vão atualizando seus coeficientes através de algoritmos e descrevendo a resposta impulsiva do sistema, com isso atenuando a componente indesejada.

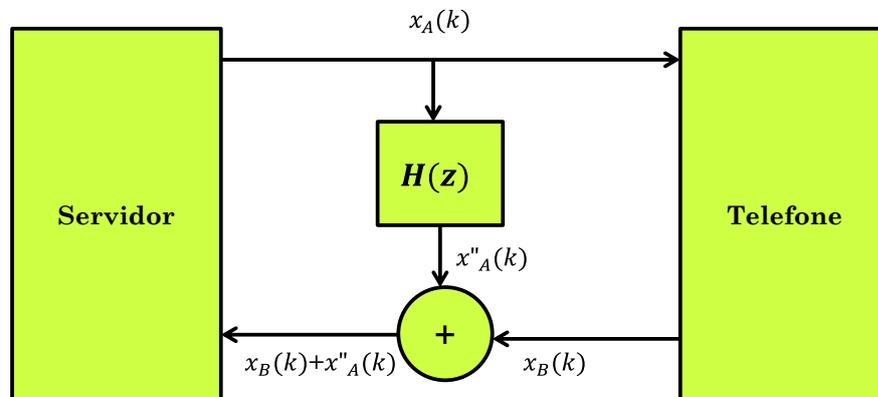


Fig. 4.3. Esquema da geração do caminho de eco.

4.4. Cancelamento de eco utilizando identificação de sistemas

A modelagem do cancelamento de eco segundo a aplicação identificação de sistemas é ilustrada na Fig. 4.4. Nesse processo, um sinal de voz do usuário A é utilizado como entrada $x_A(k)$ tanto do filtro adaptativo quanto do sistema desconhecido. Após a passagem de $x_A(k)$ pelo sistema $H(z)$, cujos coeficientes não são conhecidos *a priori*, tem-se um sinal filtrado que é chamado de eco $x''_A(k)$. Essa parcela atrasada e atenuada é somada ao sinal de voz do usuário B, denominado $x_B(k)$, compondo o sinal de referência $d(k)$, que serve como parâmetro de comparação para o filtro adaptativo $H'(z)$ estimar o caminho de eco. O erro de saída será dado pela diferença:

$$e(k) = d(k) - y(k) = [x_B(k) + x''_A(k)] - y_A(k) \quad (4.1)$$

Após a minimização do MSE, supondo que o sinal de entrada não possui correlação com o sinal de voz do usuário B, a saída de erro $e(k)$ deverá conter somente $x_B(k)$, que pode ser transmitido ao usuário A.

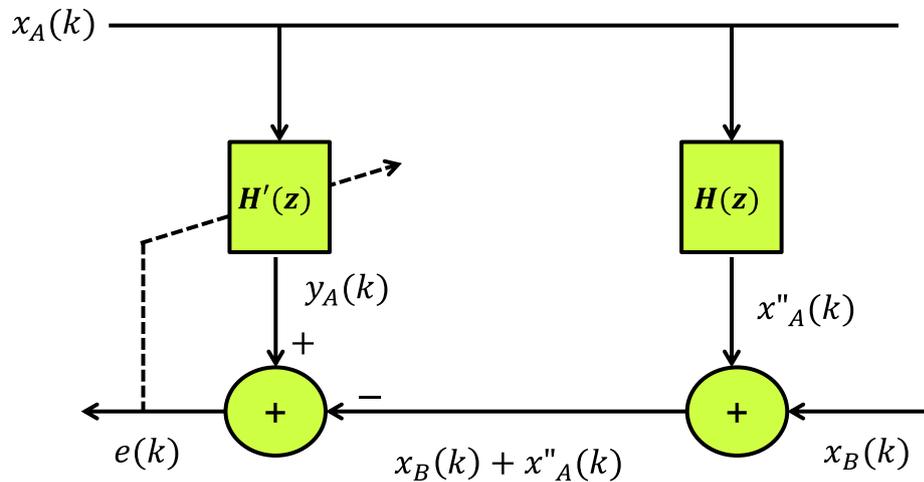


Fig. 4.4. Modelagem de um processo de cancelamento adaptativo de eco.

4.5. Simulações utilizando o algoritmo LMS

Inicialmente, foram obtidos os sinais de voz dos usuários A e B utilizando o software Audacity®, o qual também foi utilizado para a inserção de componentes de eco. Definidos os sinais de entrada e referência, para a implementação das simulações no software Matlab® a partir do algoritmo LMS, faz-se necessária a escolha adequada do número de coeficientes N e do passo de convergência μ . Para isso, considera-se o intervalo descrito pela Equação (3.5).

A fim de analisar a influência do passo, fixou-se o número de coeficientes em $N = 150$, uma vez que os resultados obtidos com valores de N menores não foram satisfatórios. Assim, com um limite superior de $\mu = 3.1054$, variou-se este parâmetro em $\mu = 0.0005$, $\mu = 0.005$, $\mu = 0.05$, obtendo-se as curvas do erro de estimação médio quadrático conforme Figura 4.5. Salienta-se que a opção por analisar o erro de estimação, definido como a diferença entre o sinal de voz original do usuário B e a saída de erro do sistema, foi devido ao fato que o MSE nesse caso não tende ao valor nulo, o que dificultaria a análise da convergência.

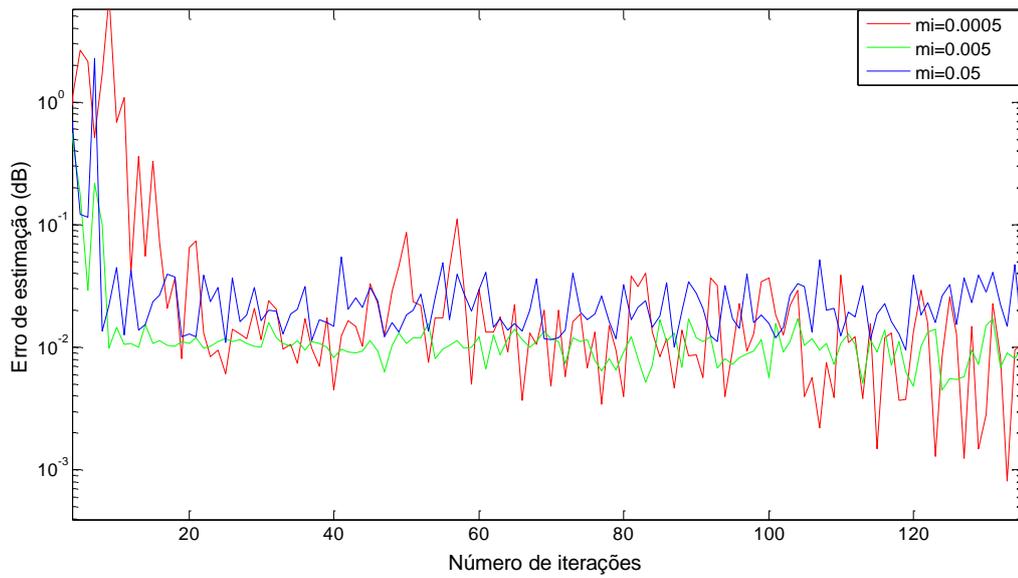


Fig. 4.5. Erro de estimação para $N = 150$ e variações em μ .

Na sequência, fixou-se o passo em $\mu = 0.05$ e variou-se o número de coeficientes no intervalo de convergência, que permitia um máximo de 9000. Para não comprometer a complexidade computacional, foram feitos testes até um máximo de 200 coeficientes. Logo, são dadas na Figura 4.6 as curvas de aprendizagem obtidas para valores de $N = 100$, $N = 150$ e $N = 200$.

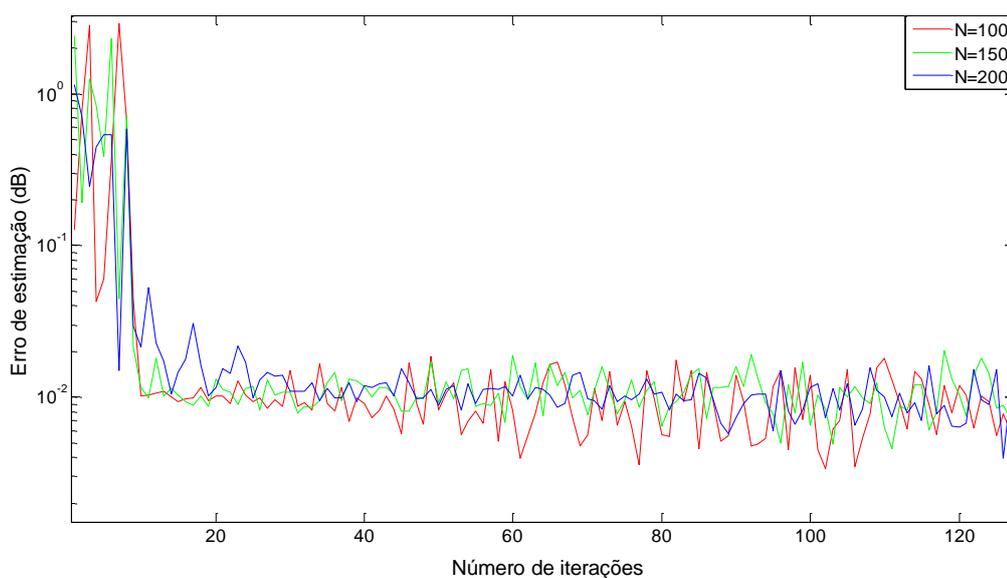


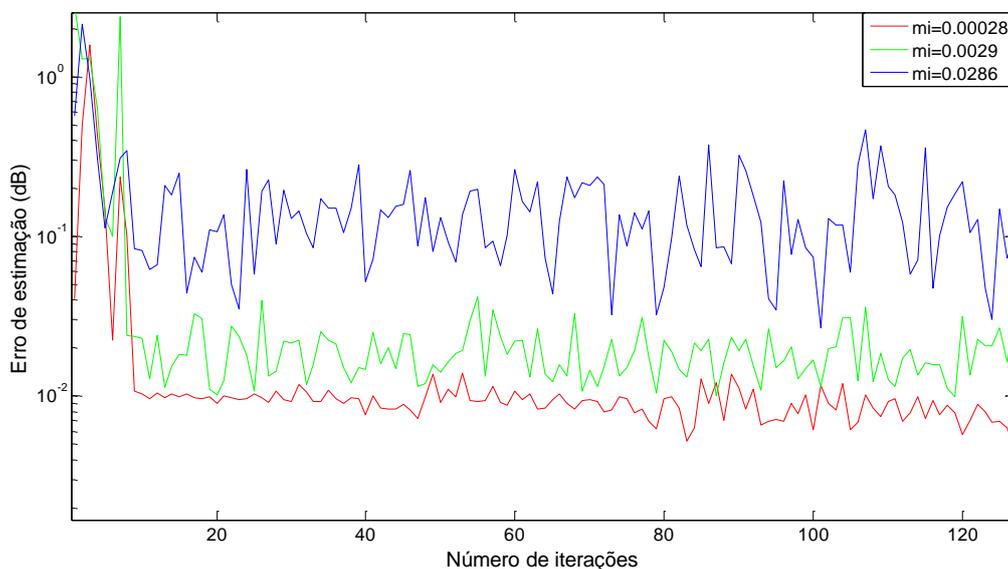
Fig. 4.6. Erro de estimação para $\mu = 0.05$ e variações de N .

4.6. Simulações utilizando o algoritmo NLMS

Dando continuidade a análise do processo de cancelamento de eco utilizando filtragem adaptativa, aplica-se o algoritmo LMS Normalizado para adaptar os coeficientes. A metodologia para definição dos sinais de entrada e referência se mantém inalterada em relação ao experimento com o LMS, a única alteração é a variação do passo e do número de coeficientes ao longo das simulações.

De forma análoga aos experimentos feitos com o algoritmo LMS, inicialmente foi fixado o número de coeficientes em $N = 150$ e variado o tamanho do passo. Entretanto, conforme descrito no Capítulo 3, o algoritmo NLMS tem um passo μ que depende de um passo inicial μ_n , um fator γ e de $\|x(k)\|^2$. Para processamento em tempo real, utilizando processos estocásticos, o valor de $\|x(k)\|^2$ e de γ serão continuamente alterados, resultando em um passo de adaptação variável, o que não ocorreu durante as simulações. Neste caso, a norma quadrática do vetor sinal de entrada é $\|x(k)\|^2 = 15.8768$ e $\gamma = \frac{1}{10} \|x(k)\|^2 = 1.5877$. Logo, as variações acontecerão em μ_n , que permite uma escolha dentro do intervalo $0 < \mu_n < 2$. Assim, os valores escolhidos foram $\mu_n = 0.5$, $\mu_n = 0.05$ e $\mu_n = 0.005$; o que fornece passos $\mu = 0.0286$, $\mu = 0.0029$ e $\mu = 0.00028$, respectivamente. As curvas de aprendizagem obtidas encontram-se na Figura 4.7, expressando o decréscimo do MSE ao longo das iterações.

Fig. 4.7. Erro de estimação para $N=150$ e variações nos passos.



Na sequência, o valor de μ_n foi fixado em $\mu_n = 0.005$ e por consequência $\mu = 0.00028$, e variado o comprimento do filtro para $N = 100$, $N = 150$ e $N = 200$, obtendo-se as curvas de aprendizagem expressas na Figura 4.8.

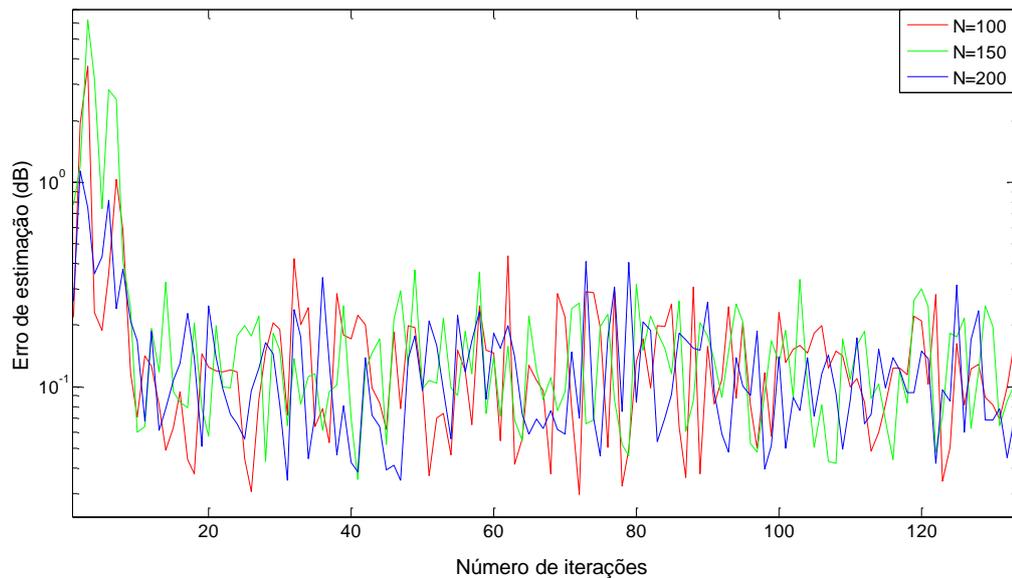


Fig. 4.8. Erro de estimação para variações de N e $\mu = 0.005$.

4.7. Análise dos resultados para ambos os algoritmos adaptativos

De uma forma geral, conclui-se que os experimentos forneceram resultados satisfatórios, uma vez que houve a convergência do algoritmo, visualizado através das curvas de aprendizagem. Além disso, foram feitos testes empíricos, onde os sinais de voz inicialmente imersos em ruídos, o que os tornava inaudíveis, foram significativamente melhorados após o processo de filtragem adaptativa.

Um aspecto que deve ser mencionado é a influência da correlação entre os sinais de voz dos usuários A e B, visto que há uma probabilidade de não convergência em decorrência da possível correlação entre eles, o que faria com que não somente as componentes de eco fossem atenuadas, mas também a parte que se tem interesse, que é o sinal de voz de B a ser transmitido. No entanto, geralmente o grau de similaridade entre as vozes dos usuários não é

significativo a ponto de tornar o cancelador de ruído inutilizável, apesar de introduzir limitações em sua capacidade de cancelamento.

Analisando as curvas obtidas nas Figuras 4.5 e 4.7, verifica-se que à medida que o passo é aumentado, a convergência do algoritmo é mais rápida, mas com desajuste maior. Gráficamente, o desajuste pode ser identificado como o erro estimado remanescente mesmo após a sua minimização. Considerando que em um sistema de cancelamento de eco em VoIP a convergência precisa ser relativamente rápida, o tamanho do passo deve ser o maior possível para manter uma precisão satisfatória.

De forma análoga, a observação das curvas expressas nas Figuras 4.6 e 4.8 permite concluir que com o aumento do número de coeficientes houve uma diminuição da taxa de convergência, o que fica evidenciado pelo erro de estimação relativamente elevado no início das curvas. No entanto, a tendência é que ele diminua ao longo do tempo e forneça um resultado adequado. Observa-se também que a diferença de desempenho em termos de velocidade de convergência entre os três valores de comprimento não foi significativa, se comparada as variações na taxa de convergência. Para que as mudanças fossem melhor evidenciadas, teriam que ser feitas variações superiores a 50, o que aumentaria a complexidade computacional.

No entanto, a escolha do número de coeficientes é um parâmetro de grande importância na aplicação identificação de sistemas. Se ocorrer da ordem do filtro, dada pelo número de coeficientes, ser subestimada, o algoritmo não será capaz de levar os coeficientes para o ponto ótimo global, pois sequer existirão coeficientes suficientes para simular o funcionamento do sistema desconhecido. Já o impacto causado no resultado por uma superestimação de ordem é menor, pois mesmo assim é possível atingir o ponto ótimo de funcionamento, desde que os coeficientes de maior ordem sejam anulados, o que anula também o efeito por eles produzido. Entretanto, coeficientes desnecessários aumentam significativamente a complexidade computacional do algoritmo de adaptação do filtro, além de aumentar o desajuste e a taxa de convergência.

Comparando os algoritmos adaptativos, verifica-se que o NLMS apresenta um melhor desempenho, sobretudo em termos de taxa de convergência. Porém, a desvantagem de utilizá-lo é a maior complexidade computacional requerida, conforme visto no Capítulo 3.

5. EQUALIZAÇÃO DE CANAL

5.1. Introdução

Na classe de aplicação dos filtros adaptativos denominada equalização de canal ou modelagem inversa, o objetivo do filtro é estimar um modelo que possa ser utilizado como representação do inverso de um sistema desconhecido. A disposição em cascata do modelo inverso (equalizador) e do sistema desconhecido (canal), conforme Figura 5.1, faz com que o sistema de comunicação atue somente como um atrasador ideal, compensando distorções em um dado sinal transmitido [11].

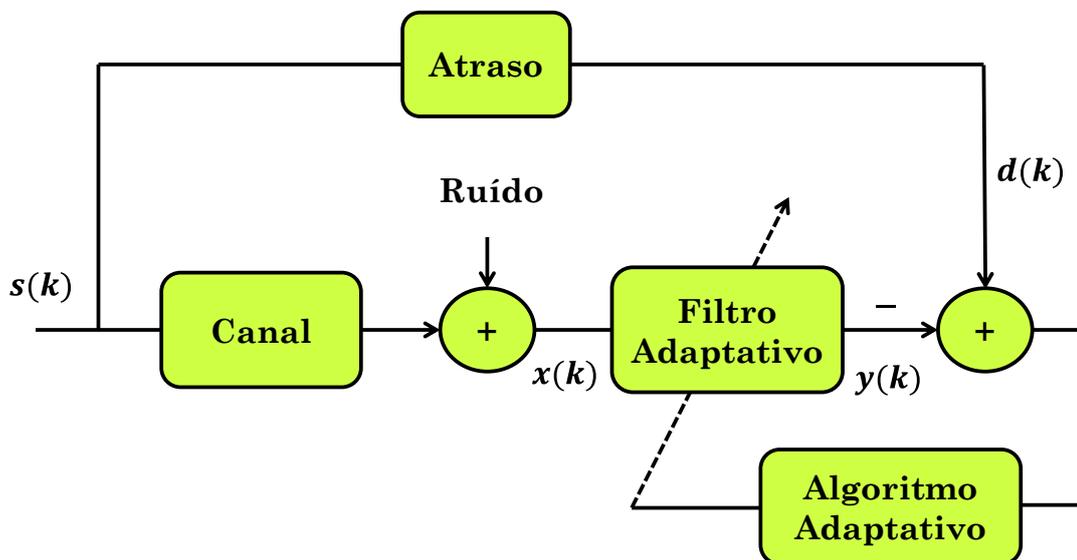


Fig. 5.1. Diagrama da aplicação denominada equalização de canal.

Na Figura 5.1, é ilustrado o princípio de funcionamento de um processo de equalização adaptativa de canal. Nesta, um sinal $s(k)$ é transmitido pelo canal, estando vulnerável a presença de ruídos. Em seguida, a saída do canal serve como entrada do filtro adaptativo, que tem como sinal de referência uma versão atrasada de $s(k)$, para compensar o tempo requerido para o envio dos dados ou o processamento [10]. No intuito de cancelar o possível ruído que foi inserido pelo canal, o filtro adaptativo atualiza seus coeficientes para compor um modelo inverso do canal ruidoso. Com isso, após a minimização do MSE, considerando um sistema com ruídos desprezíveis, a convolução entre a resposta ao impulso

do canal com ruídos $H_{can}(z)$ e a resposta ao impulso do filtro adaptativo $W_{eq}(z)$ resultará em um impulso, isto é:

$$H_{can}(z)W_{eq}(z) = z^{-L} \quad (5.1)$$

o que significa que na saída $y(k)$ será fornecido o próprio sinal $s(k)$ deslocado, ou seja, $s(k - L)$, onde L é o atraso que foi inserido para compor o sinal de referência [9].

A partir da Equação (5.1), é possível descrever a função de transferência do filtro adaptativo como:

$$W_{eq}(z) = \frac{z^{-L}}{H_{can}(z)} \quad (5.2)$$

Analisando a Equação (5.2), pode-se afirmar que para um canal descrito por um filtro IIR com numerador e denominador não-triviais, a função de transferência do equalizador também deve ser IIR. Já para o caso de $H_{can}(z)$ ser IIR somente pólos, $W_{eq}(z)$ será FIR. Ou ainda, se $H_{can}(z)$ é descrito por um filtro FIR, teremos que $W_{eq}(z)$ será IIR somente pólos. Essas três considerações descrevem o conceito de modelo inverso do canal [1].

A modelagem inversa é uma tecnologia reconhecida e pode ser empregada em vários segmentos, tais como em MODEMs, por exemplo, quando as características do canal de comunicação variam com o tempo, sendo necessária uma equalização que seja capaz de acompanhar essas variações, como é o caso da adaptativa [12].

5.2. Sistemas de comunicação

Um MODEM, cuja denominação é a contração das palavras modulador/demodulador, é um equipamento de comunicação digital que transforma um sinal digital a ser enviado em um sinal analógico dentro da faixa da linha telefônica e reconstrói o mesmo no seu destino. A importância da modulação está na limitação de banda das linhas telefônicas, o que dificulta a transmissão em banda-base, que é caracterizada pela transmissão dos dados na sua forma digital e sem onda portadora [12].

Este equipamento faz parte de um sistema de comunicação, que é composto de três elementos básicos: uma fonte emissora dos dados, um canal de comunicação que realiza o processo de transmissão e um receptor dos dados transmitidos [20]. Apesar de o foco ser as

características do canal de comunicação, o MODEM será utilizado como base para a definição de alguns parâmetros, pois este compõe uma parte física do processo de transmissão e recepção, onde são implementados os equalizadores.

Idealmente, um canal de comunicação deveria transmitir informações sem quaisquer tipos de alterações nas mesmas. No entanto, essas condições ideais não ocorrem, uma vez que em sistemas reais há uma série de limitações que interferem no processo de transmissão. Geralmente o canal é dispersivo, ou seja, cada pulso de dado transmitido é bastante afetado por pulsos adjacentes, provocando o surgimento de interferência intersimbólica (ISI), caracterizada pela sobreposição de símbolos de uma mesma fonte de dados. A ISI implica na maior fonte de erro de bit no fluxo de dados reconstruído na saída do receptor, além de ser responsável pela limitação da capacidade de transmissão do canal, um grande problema de sistemas atuais de comunicação digital. Outra fonte de erros de bits em um sistema de transmissão de dados é o ruído térmico, que surge de forma simultânea com a ISI, e pode fazer com que um símbolo emitido por uma fonte sofra alterações, não sendo entendido ou corretamente decodificado pelo receptor do sistema [20].

Apesar da premissa de que a mensagem recebida nunca será exatamente igual à mensagem transmitida, é desejável que ela seja mais próxima possível e que os erros sejam minimizados. Uma forma de o receptor cancelar os efeitos do canal dispersivo e ruidoso, gerando uma sequência de pulsos livres de ISI e de ruído térmico, e fazendo com que a função de transferência do sistema atenda aos critérios de um sistema ideal de Nyquist, é o emprego de equalização [21]. No entanto, considerando as dificuldades de prever o comportamento de um canal ou os ruídos que estarão presentes, é mais adequado que essa equalização seja adaptativa, o que pode ser feito empregando filtros adaptativos.

5.3. Equalização adaptativa de canais

A equalização adaptativa de canal utiliza algoritmos de processamento em tempo real ou em blocos [11]. Este armazena um conjunto de símbolos antes do tratamento, enquanto que o anterior faz a correção à medida que os símbolos são recebidos, como é o caso do LMS. Em MODEMs de comunicação que operam juntamente a linhas telefônicas e cujo padrão é definido pelas séries V da ITU-T, é utilizado o algoritmo LMS para a equalização adaptativa através de filtros transversais [22]. Outros algoritmos que possuem melhores características de

convergência como o RLS e seus derivados [1], não são em geral utilizados em MODEMs para canais de telefonia, devido a complexidade de implementação em DSPs ser maior do que os da família LMS. Além disso, o equalizador baseado no LMS, em geral, possui capacidade de *tracking* adequada para o canal telefônico [22].

A implementação de um equalizador adaptativo pode ser feita através de duas técnicas: equalização supervisionada ou equalização autodata. Na autodata, considera-se a impossibilidade de treinamento periódico com o envio de uma sequência pré-estabelecida, sendo consideradas as características estatísticas (de segunda ordem ou superiores) do sinal emitido e do sinal recebido [1]. Já na equalização supervisionada, é possível a utilização de sequências de treinamento, e será abordada nesse trabalho, pois é a utilizada nos MODEMs da série V [21].

5.3.1. Equalização supervisionada

Em um processo de equalização supervisionada, supõe-se a possibilidade de que a fonte emita periodicamente ou quando houver necessidade uma sequência de símbolos que seja previamente conhecida no receptor. Com isso, é possível que seja feita a adaptação dos coeficientes, a partir da minimização do MSE, cujo erro nesse caso é descrito pela diferença entre a sequência que percorreu o sistema canal/equalizador e a que estava disponível no receptor. Quando o processo de treinamento é concluído, o equalizador adaptativo representa um modelo inverso do canal ruidoso e está preparado para atuar em uma transmissão normal de dados, passando a atuar no modo de decisão direta ou DDA (*Decision Direct Adaptation*), que serve para compensar pequenas variações durante a transmissão [7].

Considerando a Fig. 5.2, onde $y(k)$ representa a amostra binária obtida após a transmissão pelo canal e passagem pelo equalizador, esse valor é comparado com um limiar pré-estabelecido no dispositivo de decisão. Se o limiar for ultrapassado, o receptor tomará uma decisão favorável ao valor superior, caso contrário, a decisão será pelo inferior. Mas também pode ocorrer de o valor de $y(k)$ ser exatamente igual ao limiar. Nesse caso, o receptor faz um sorteio do símbolo transmitido, onde ambos os símbolos tem igual probabilidade de ocorrência, desde que o limiar esteja exatamente no meio, o que caracteriza um canal simétrico binário [4]. Considerando uma sequência binária composta de 1 e -1, podem surgir dois tipos de erros:

- Erro de primeiro tipo, quando o símbolo 1 foi escolhido, e o valor correto era -1;
- Erro de segundo tipo, quando o símbolo -1 foi escolhido, e o valor correto era 1.

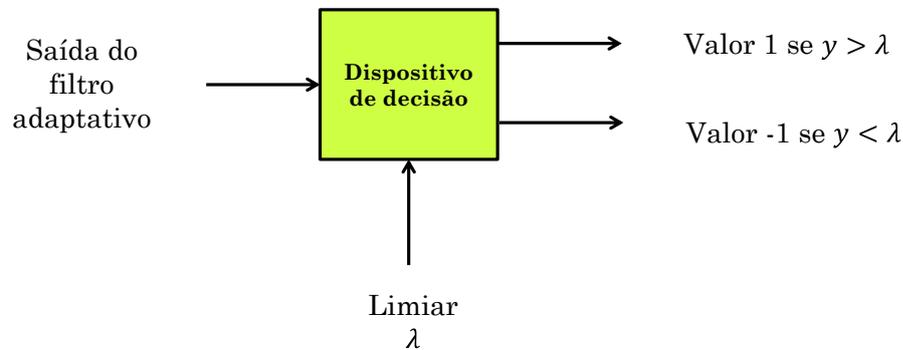


Fig. 5.2. Esquema de um dispositivo de decisão.

Em uma transmissão de símbolos binários equiprováveis, deve-se sempre escolher o limiar no ponto médio entre os pontos máximos $-A$ e $+A$ do pulso. Pela Fig. 5.2, onde se tem dois símbolos -1 e 1, o limiar deve ser igual à zero [20].

5.4. Simulação de equalização adaptativa de canal

Para a configuração do filtro adaptativo que atuará como equalizador é necessária a definição dos sinais de entrada e referência, assim como dos parâmetros do algoritmo adaptativo empregado. Conforme a descrição do esquema da Figura 5.1, o sinal de entrada é o resultado da passagem de uma sequência por um canal ruidoso e dispersivo. Na prática, o ruído e a interferência simbólica estão presentes simultaneamente no canal, afetando os dados transmitidos de maneira combinada. Desta forma, o receptor otimizado foi projetado para tratar conjuntamente o ruído e os efeitos dispersivos do canal.

Considerando que um canal dispersivo é caracterizado pela influência entre bits vizinhos em diferentes instantes de tempo, o que pode ser descrito por uma cadeia de atrasos, modelou-se tal canal por um filtro IIR somente pólos, logo, o modelo inverso será um filtro FIR, conforme explicado anteriormente. Além disso, foi considerado que 10 coeficientes eram suficientes para descrever o filtro IIR e demonstrar o funcionamento do processo de equalização.

Para simular um canal ruidoso, é inserido um ruído branco gaussiano aditivo (AWGN - *Additive White Gaussian Noise*) na saída do canal. A utilização desse ruído se justifica pelo ruído térmico presente no canal ser caracterizado por amplitudes pequenas na forma de variáveis aleatórias com função de distribuição gaussiana ou normal, distribuído ao longo de todo o espectro de frequência de interesse, ou seja, com densidade espectral de potência constante [12].

Após a composição do sistema, foi definida a sequência de treinamento que atua como sinal de entrada por um conjunto de dados binários ± 1 gerados aleatoriamente. O sinal desejado é a própria entrada do canal, pois se considera que a sequência é conhecida em ambos os lados, emissor e receptor. Salienta-se que não foi inserido atraso no sinal de entrada ou no de referência, pois este serve apenas para compensar o tempo de envio dos dados, o que não ocorre durante as simulações.

5.5. Resultados obtidos para o LMS

A partir da metodologia descrita anteriormente, foram realizados diversos testes, visando analisar o desempenho do equalizador implementado através do algoritmo LMS. Apesar dos equalizadores que operam juntamente com os MODEMs da série V utilizarem 80 coeficientes [22], inicialmente foi fixado o comprimento do filtro em $N = 10$, pois esse era o número de coeficientes que o canal havia sido configurado, e o objetivo era verificar o ocorrido para diferentes valores de passo de convergência, quando canal e equalizador são descritos por filtros de comprimentos semelhantes. Então, considerando o limite superior de 0.0383 para a escolha do passo, variou-se este parâmetro em $\mu = 0.009$, $\mu = 0.001$ e $\mu = 0.0007$, obtendo as curvas do MSE expressas na Figura 5.3.

Em seguida, foi considerado o número padrão de 80 coeficientes e também analisado o comportamento para três valores de passo de convergência. O objetivo desse teste era analisar a superestimação do número de coeficientes, além das variações decorrentes da alteração de μ . Como o limite nesse caso era de 0.0048, os valores escolhidos para os testes foram $\mu = 0.001$, $\mu = 0.0002$ e $\mu = 0.00005$. As curvas geradas para os três casos encontram-se na Figura 5.4.

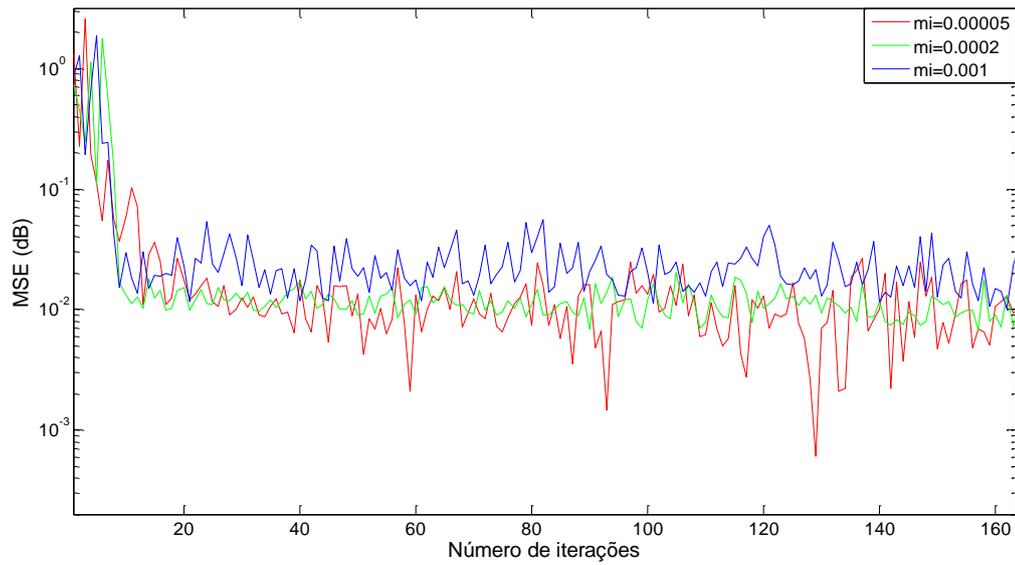


Fig. 5.3. Curvas do MSE para $N = 10$ e variações no passo μ .

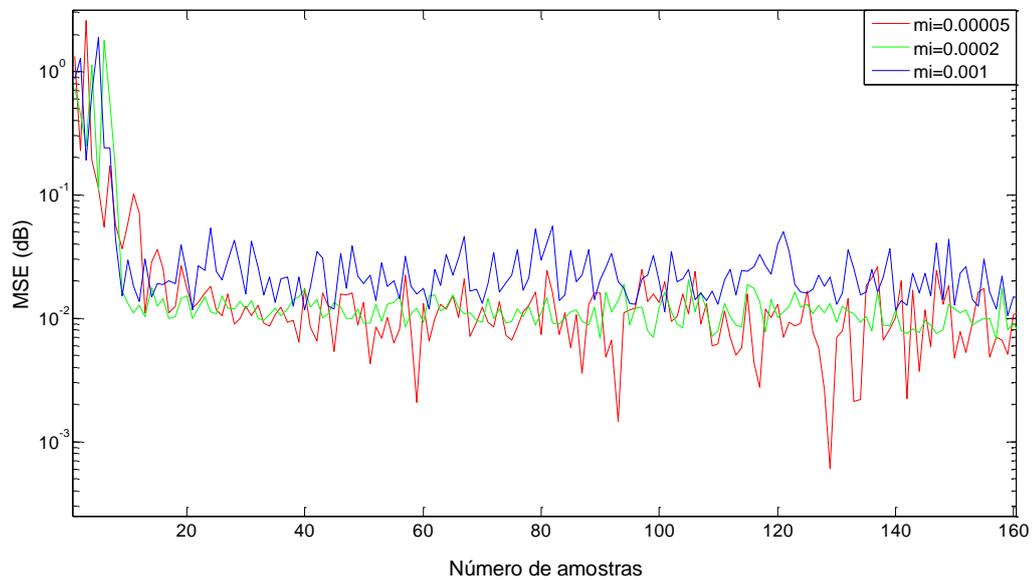


Fig. 5.4. Curvas do MSE para $N = 80$ e variações no passo μ .

Na sequência, foram realizados testes para avaliar o equalizador mediante variações no número de coeficientes, para um mesmo valor de passo. Os valores analisados foram $N = 10$ (mesmo comprimento do filtro que representa o canal), $N = 80$ (valor padrão para

MODEMs) e $N = 150$ (superestimação acentuada). O passo foi fixado em $\mu = 0.0001$, que garante a convergência para os três casos, inclusive o mais crítico que é para $N = 150$, onde o limite superior é 0.0026. As curvas de aprendizagem resultantes encontram-se na Figura 5.5.

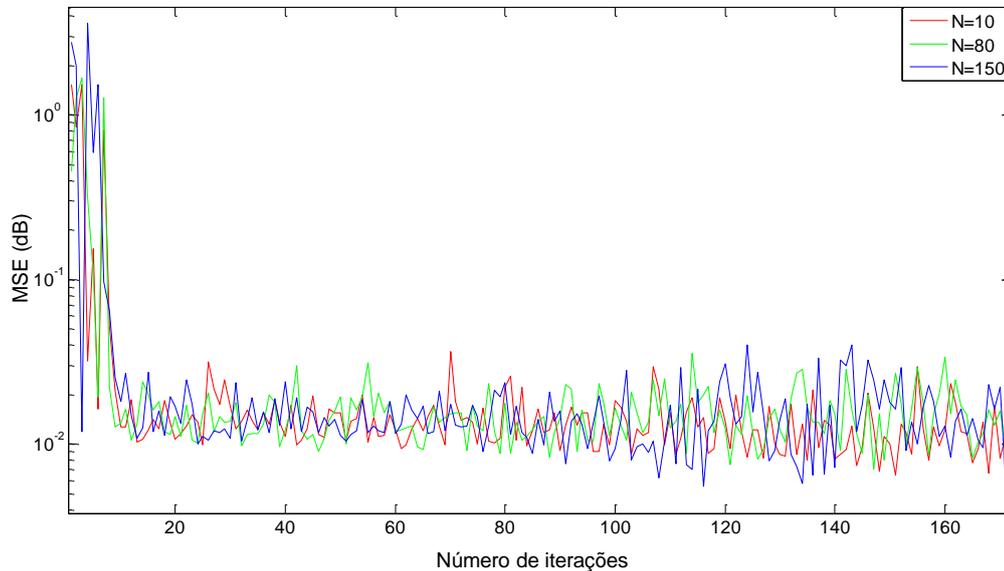


Fig. 5.5. Curvas do MSE para $\mu = 0.0001$ e variações no comprimento N .

Outro item que pode ser analisado em um processo de equalização adaptativa é a taxa de erro de bit (BER – *Bit Error Rate*), que representa o número de bits recebidos de um fluxo de dados ao longo de um canal de comunicação que foram alterados. É calculado pelo número de bits errôneos divididos pelo total de bits transferidos durante um dado intervalo. É uma medida adimensional que está diretamente relacionada à relação sinal-ruído do canal de comunicação (SNR) [20]. Com esses dados, é possível compor uma curva, como a expressa na Figura 5.6 para o caso analisado. Observa-se que a mesma se manteve constante, pois não foram obtidos erros após o processo de equalização aliado ao decisor, além de que a sequência era de certa forma cíclica. Por isso, as curvas de BER não foram incluídas em novos testes.

Finalmente, foram geradas as formas de onda para as sequências transmitida e recebida, considerando o resultante da passagem pelo canal (Figura 5.7) e da passagem pelo equalizador (Figura 5.8), mesmo sem utilizar o decisor. Nessa situação, o filtro adaptativo estava configurado com 10 coeficientes e um passo de 0.005.

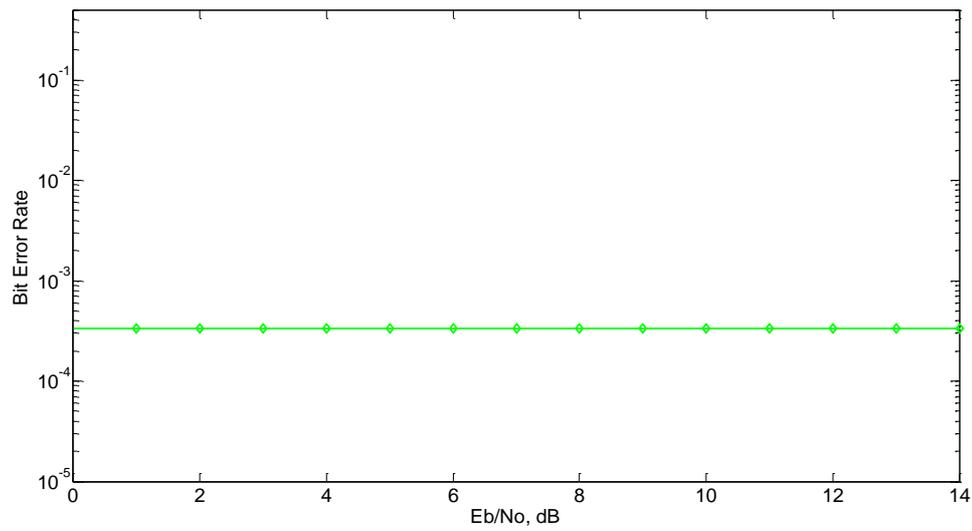


Fig. 5.6. Curva de BER para o caso analisado.

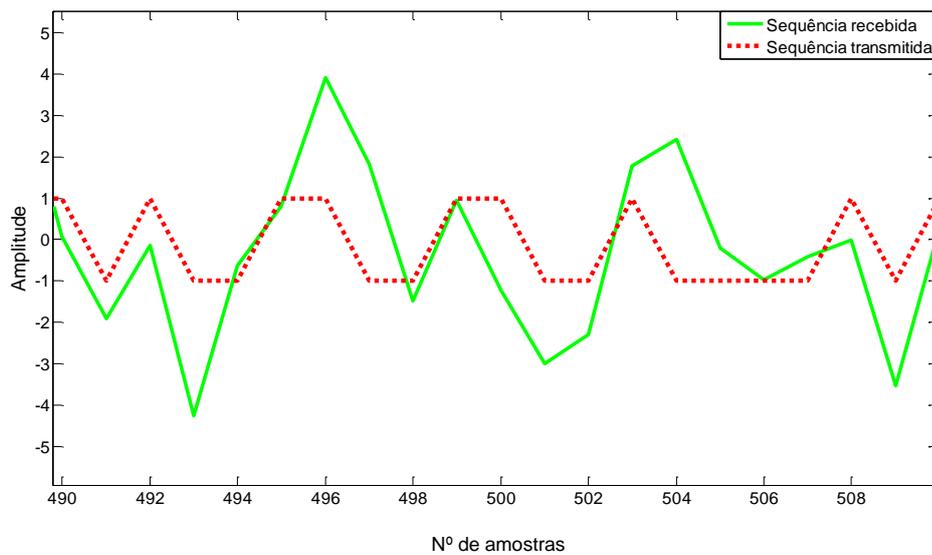


Fig. 5.7. Sequências transmitida e recebida antes da equalização.

5.1. Resultados obtidos para o NLMS

Procedimentos semelhantes foram adotados para a realização dos testes utilizando o algoritmo NLMS, com exceção das curvas de BER e das formas de onda das sequências, uma vez que esses resultados eram semelhantes aos anteriores, tornando-se desnecessária a sua apresentação.

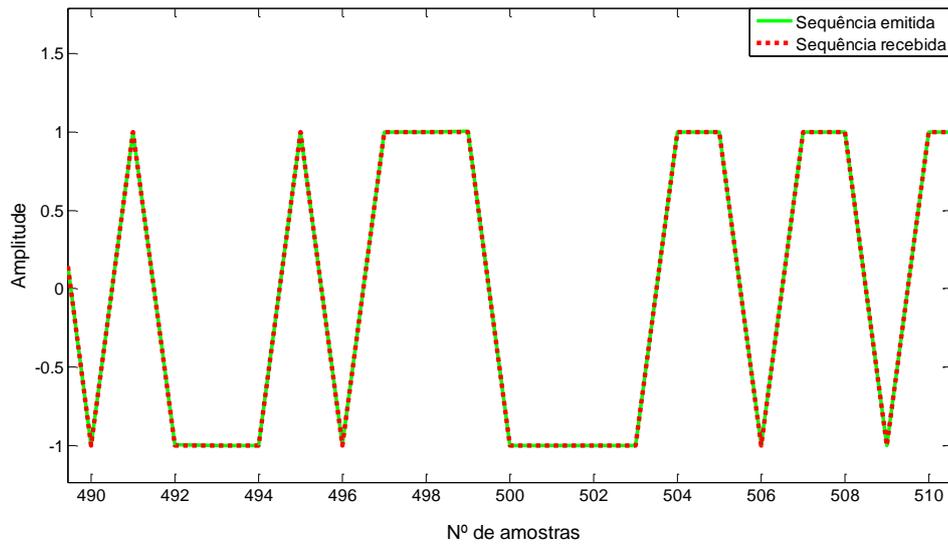


Fig. 5.8. Sequências transmitida e recebida após a equalização, para LMS, $N = 10$ e $\mu = 0.005$.

De forma análoga ao caso anterior, foi fixado o comprimento do filtro em $N = 10$ e variados os tamanhos de passo. No entanto, para o NLMS devem ser configurados os parâmetros μ_n , γ e μ . Considerando que os sinais estavam disponíveis, é possível obter um valor único para a norma quadrática como $\|x(k)\|^2 = 274.8451$, mas em uma implementação em tempo real esse valor será alterado a cada iteração. Já o valor resultante para γ foi de 27.4845. Assim, com valores de $\mu_n = 2$, $\mu_n = 0.5$ e $\mu_n = 0.09$, os passos resultantes serão $\mu = 0.0097$, $\mu = 0.0024$ e $\mu = 0.00043$, onde o primeiro valor se assemelha ao do caso LMS e permite uma comparação, e os demais servem para a verificação da influência da diminuição do passo no NLMS, considerando número de coeficientes semelhantes para o canal e o equalizador. As formas de onda resultantes para o MSE encontram-se na Figura 5.9.

A seguir, foi analisado o comportamento do equalizador para diferentes valores de passo, considerando o número de coeficientes geralmente utilizado em MODEMs, que é de 80 coeficientes. Neste experimento, foram utilizados passos menores do que o do caso $N = 10$, para compensar o aumento no número de coeficientes. Os valores escolhidos foram $\mu_n = 0.2$, $\mu_n = 0.05$ e $\mu_n = 0.007$, que resultam em $\mu = 0.00066$, $\mu = 0.00016$ e $\mu = 0.000023$. As curvas escolhidas encontram-se na Figura 5.10.

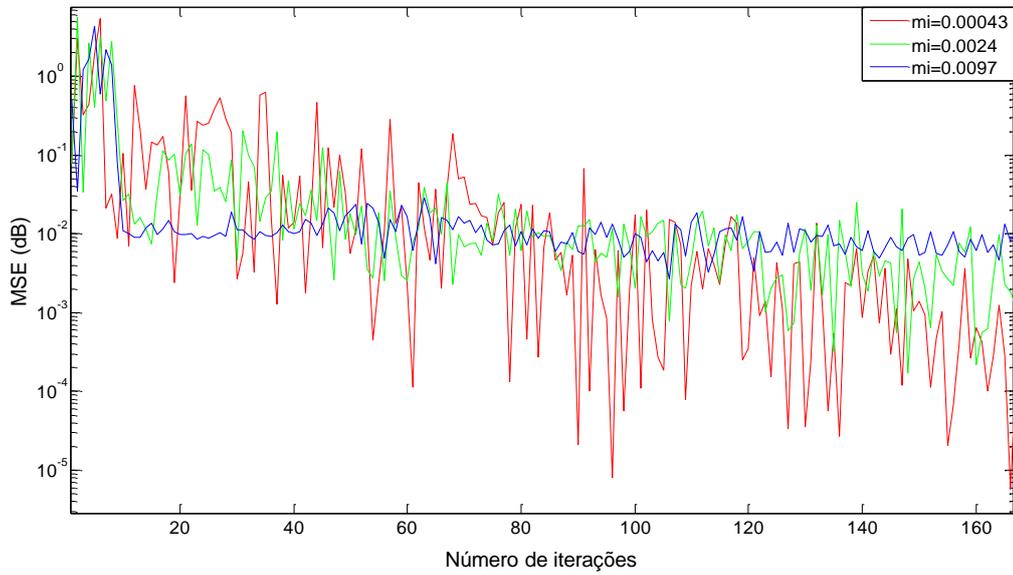


Fig. 5.9. Curvas do MSE para $N = 10$ e variações no passo μ .

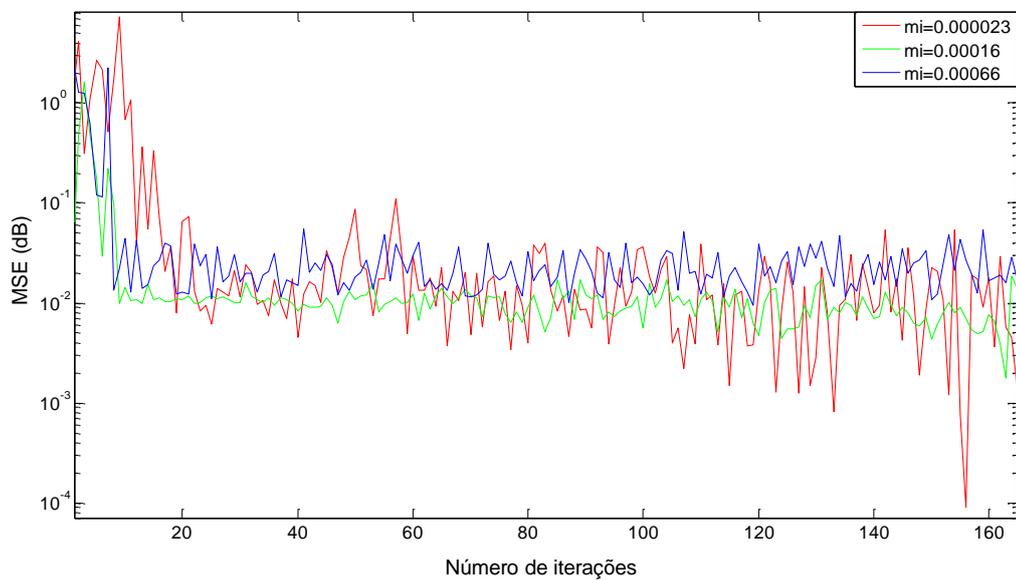


Fig. 5.10. Curvas do MSE para $N = 80$ e variações no passo μ .

Para finalizar, foi verificada a influência do número de coeficientes, variando-os em $N = 10$, $N = 80$ e $N = 150$, pelos mesmos motivos citados para o LMS. O passo manteve-se em $\mu_n = 0.05$, que resulta em $\mu = 0.00016$, valor pequeno e que se assemelha ao utilizado

para o LMS, permitindo uma certa comparação. O MSE resultante está expresso na Figura 5.11.

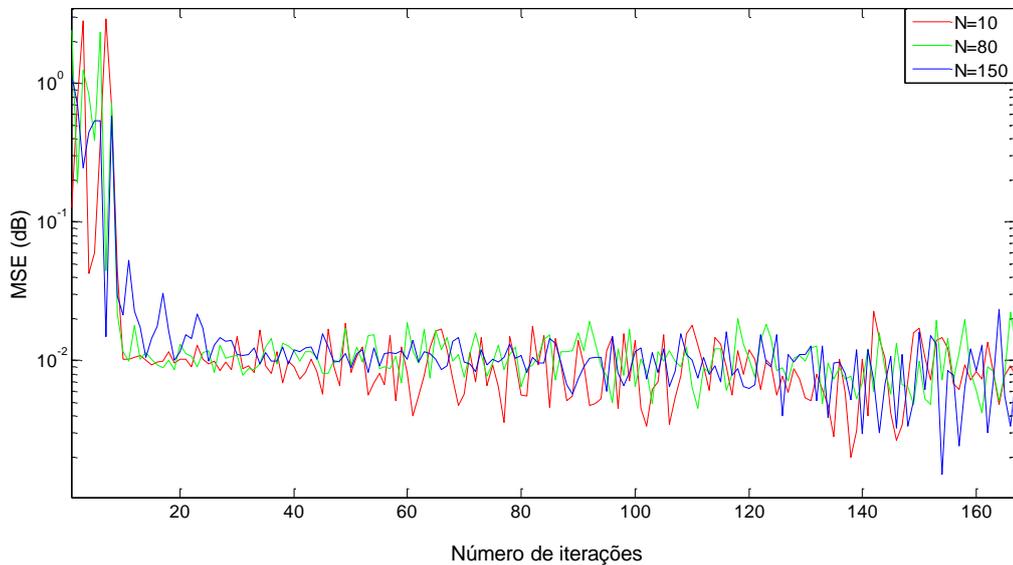


Fig. 5.11. Curvas do MSE para $\mu = 0.00016$ e variações no comprimento N .

5.2. Análise dos resultados para ambos os algoritmos

Neste capítulo, foi apresentada uma metodologia para equalização adaptativa de MODEMs de comunicação, utilizando os algoritmos de adaptação LMS e NLMS. Ao final do processo, verificou-se que o canal de comunicação representativo do sistema foi equalizado, pois o sinal degradado (Figura 5.7) tornou-se limpo após a passagem pelo filtro adaptativo, que atua como equalizador, conforme Figura 5.8. Além disso, os resultados obtidos foram satisfatórios, uma vez que equilibraram velocidade de convergência e precisão.

Algumas observações podem ser feitas, dentre elas é que a diminuição do passo provoca uma diminuição na velocidade de convergência, tanto no algoritmo LMS quanto no NLMS, conforme Figuras 5.3, 5.4, 5.8 e 5.9. Outra observação é que, para um canal modelado com 10 coeficientes, os resultados para um equalizador de $N = 10$ e $N = 80$ não apresentam grandes diferenças, como pode ser visualizado nas Figuras 5.5 e 5.11. Isso indica que a superestimação não impede o funcionamento do equalizador, desde que não seja excessiva, pois isto implicaria em um aumento da complexidade computacional e do desajuste, que é a diferença entre o erro médio quadrático produzido pelo filtro e o mínimo.

Embora tenham sido verificadas diferenças sutis em relação à variação de N com μ fixo, não é recomendável que a ordem do filtro adaptativo seja menor do que a do canal, pois isto impediria a obtenção de um ponto ótimo global. Além disso, o canal é um sistema desconhecido, o que justifica a utilização de um maior número de coeficientes (80, por exemplo), visando uma boa modelagem, mesmo que haja a anulação de coeficientes excedentes.

Ainda convém salientar que, embora isto não tenha sido feito durante as simulações, é necessária a inserção de um atraso no sinal de referência, conforme Figura 5.1. Isto fará com que o tempo de processamento em implementações em tempo real seja compensado no momento da comparação com o sinal estimado.

Por fim, pode-se concluir que o uso de filtragem adaptativa mostrou-se eficiente em um processo de equalização, e que os parâmetros μ e N devem ser configurados de tal forma a fornecer um resultado aceitável em termos de qualidade, mas, sobretudo com uma boa velocidade de convergência. A velocidade de convergência será definida pelos intervalos de tempo em que as sequências de treinamento devem ser enviadas, ou seja, quanto maior a frequência de envio das mesmas, maior deverá ser a velocidade de convergência, para que o tempo total gasto com o processo de equalização não comprometa o envio dos dados. Isso vai depender das características, em termos de variação, de cada canal a ser equalizado.

6. PREDIÇÃO LINEAR

6.1. Introdução

Na estrutura de aplicação denominada predição linear, o filtro adaptativo busca descrever uma predição para a evolução de um sinal, tendo como base o conhecimento de suas versões atrasadas ou adiantadas. Portanto, a entrada do filtro é o sinal de referência com um deslocamento de L amostras [3]. No caso de a saída do filtro ser a resposta do sistema, diz-se que o filtro adaptativo opera como um preditor, enquanto que no caso em que se usa o erro estimado como saída do sistema diz-se que o filtro adaptativo opera como um preditor de erro [23].

Na Figura 6.1 é possível visualizar um esquema de predição linear de um sinal, que opera conforme descrito acima. Para esta configuração, o MSE será dado por:

$$\xi = E\{[x(k) - \mathbf{w}^T \mathbf{x}(k - L)]^2\} \quad (6.1)$$

A minimização do MSE conduzirá a um filtro adaptativo FIR cujos coeficientes são os elementos de \mathbf{w} , e a saída $y(k)$ será um modelo estimado correspondente a entrada $x(k)$, obtido a partir das versões atrasadas $x(k - L), x(k - L - 1), \dots, x(k - L - N)$, onde N é o número de coeficientes [1].

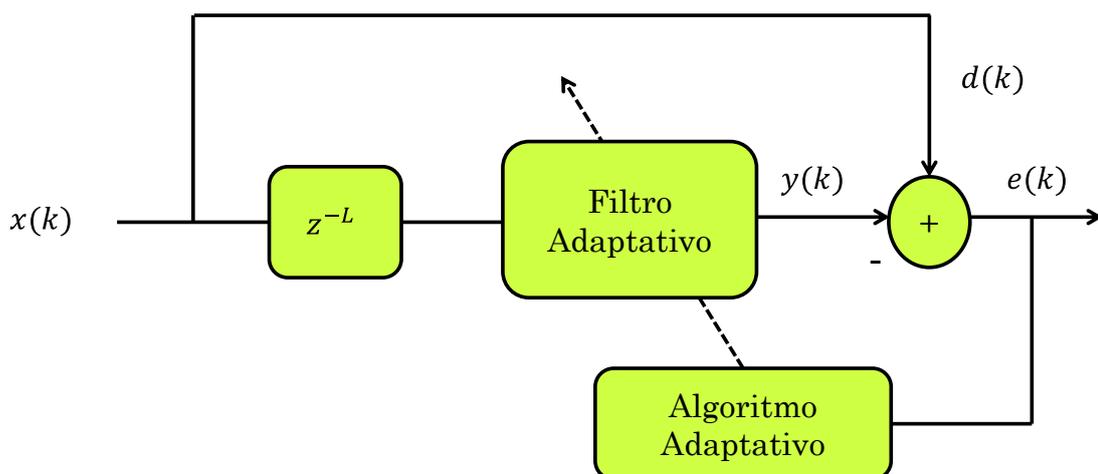


Fig. 6.1. Diagrama da aplicação denominada predição linear.

Para que este tipo de aplicação seja melhor analisado, será considerado um caso de adaptação do preditor linear que compõe a Modulação por Código de Pulso Diferencial (DPCM - *Differential Pulse Code Modulation*). A importância desse tipo de aplicação está na necessidade de digitalização de sinais analógicos, uma vez que o uso de sinais digitais apresenta inúmeras vantagens, conforme citado no Capítulo 1.

6.2. Princípios de modulação

Durante o processo de digitalização, são empregadas técnicas de amostragem, quantização e codificação, fazendo com que o sinal resultante seja representado através de números binários [12]. A amostragem consiste de sucessivos chaveamentos a uma dada frequência de amostragem f_s , cujo inverso é o tempo de amostragem T_s , obtendo um conjunto de amostras do sinal analógico original. Por sua vez, a quantização toma essas amostras com infinitos valores de amplitude e os reconfigura de acordo com níveis de quantização pré-estabelecidos, fazendo com que eles sejam expressos em níveis discretos de tensão [6]. Já a codificação serve para a transformação desses sinais discretos em bits, podendo ser do tipo formato de onda, paramétrica ou híbrida, sendo que o primeiro tipo apesar de operar a altas taxas de transmissão garante uma boa qualidade do sinal processado e é menos complexo computacionalmente [11].

Os principais tipos de codificação por formato de onda são a Modulação por Código de Pulso (PCM – *Pulse Code Modulation*), Modulação por Código de Pulso Diferencial (DPCM - *Differential Pulse Code Modulation*) e Modulação por Código de Pulso Diferencial Adaptativa (ADPCM – *Adaptive Differential Pulse Code Modulation*). A codificação PCM apresenta um princípio de funcionamento bastante simplificado, consistindo apenas em amostrar e quantizar amostras do sinal original. A simplicidade é a principal vantagem dessa técnica, mas as altas taxas de transmissão limitam as suas aplicações. Já a codificação DPCM tem o intuito de diminuir a necessidade por altas taxas de transmissão, utilizando a alta correlação entre sucessivas amostras para diminuir a taxa. Isso ocorre porque, em média, o sinal pouco se modifica de uma amostra para a seguinte, o que faz com que a variância entre amostras adjacentes sejam menores do que a do próprio sinal. Quando codificadas em um sistema PCM padrão, o sinal resultante apresenta informação redundante, ou seja, que não são essenciais para o entendimento da mensagem transmitida, podendo ser eliminadas [20].

A diminuição das taxas de transmissão parte do princípio que esse tipo de codificação utiliza um preditor linear que estima o valor da amostra atual com base nas passadas. Em seguida, compara-se a amostra estimada com a original, transmitindo-se somente o erro entre ambas. Como o sinal de erro tem amplitudes mais baixas que o sinal original, são necessários menos bits para a sua representação, e por consequência, a taxa de transmissão para o DPCM pode ser diminuída em relação ao PCM [12]. A modulação ADPCM é uma versão com preditor e quantizador adaptativo, e não será abordada, pois o processo de quantização adaptativa não utiliza filtragem adaptativa e está fora do escopo deste trabalho, sendo utilizado somente o DPCM com preditor linear adaptativo [24].

6.3. Princípio de funcionamento de um DPCM

Na Figura 6.2 encontra-se o esquema do transmissor de um sistema DPCM. O processo se inicia com a obtenção de um erro de previsão $c(k)$, dado pela diferença entre o sinal de entrada previamente amostrado $m(k)$ e o sinal estimado $\tilde{m}(k)$, este obtido através de um preditor linear. Assim, o erro de previsão dado por:

$$c(k) = m(k) - \tilde{m}(k) \quad (6.2)$$

é enviado para um quantizador, cuja saída $c_q(k)$ é da forma:

$$c_q(k) = c(k) + q(k) \quad (6.3)$$

onde $q(k)$ é o erro de quantização, inserido pelo quantizador [6].

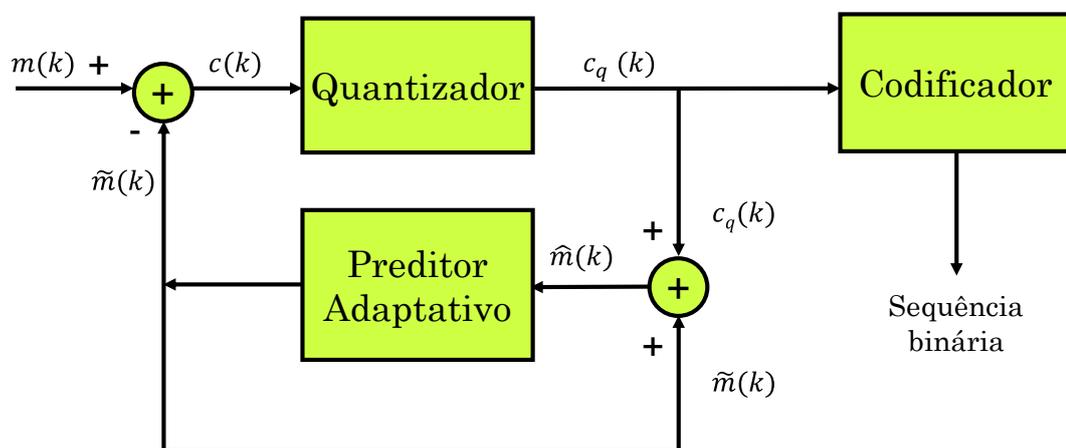


Fig. 6.2. Esquema de um codificador DPCM.

O sinal de erro quantizado $c_q(k)$ serve como entrada para o codificador e também para o preditor. No codificador, esse sinal é convertido para dígitos binários, atendendo a relação $L \geq 2^n$, onde L é o número de níveis de quantização e n é o número de bits. Já para o preditor, $c_q(k)$ é somado com uma versão anterior do sinal estimado $\tilde{m}(k)$, resultando em um sinal de entrada quantizado $\hat{m}(k)$, isto é:

$$\hat{m}(k) = \tilde{m}(k) + c_q(k) \quad (6.4)$$

No preditor linear, essa soma é processada e resulta em uma estimaco do próximo sinal de entrada $\tilde{m}(k)$, completando o ciclo [20].

Na Figura 6.3, é dado o esquema de um receptor, que serve para reconstruir o sinal de entrada, a partir do erro quantizado. Primeiro, os dados dos n bits recebidos são convertidos para o sinal de erro quantizado $c_q(k)$ usando quantizao, através de um decodificador. Então, em um segundo estágio, o sinal de erro quantizado reconstruído $c_q(k)$ é somado a saída atual reconstruída $\tilde{m}(k)$, gerada por um preditor, para compor a próxima saída quantizada $\hat{m}(k)$ [11].

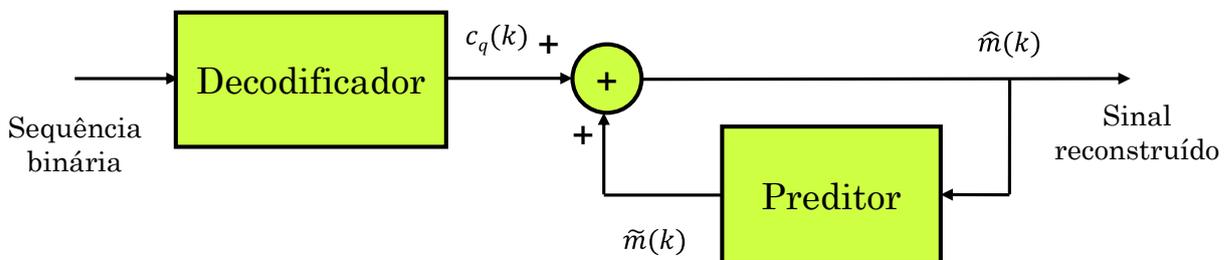


Fig. 6.3. Esquema de um decodificador DPCM.

Observa-se que esse sinal reconstruído $\hat{m}(k)$ difere do sinal de entrada $\tilde{m}(k)$ somente pelo valor do erro quantizado $c_q(k)$. Logo, quanto menor for $c_q(k)$, mais próximo estará o sinal recebido do que foi transmitido. A minimizao desse erro está diretamente relacionada ao desempenho do preditor, ou seja, da sua capacidade de fornecer uma estimaco o mais fidedigna possível [24]. Uma forma de implementar o preditor linear é através de um filtro adaptativo, controlado por um algoritmo de adaptao, como os do tipo LMS.

6.4. Análise do desempenho do DPCM

Uma forma de avaliar o desempenho de um DPCM é através das relações sinal-ruído e do ganho de processamento [24]. A relação sinal-ruído de saída do sistema DPCM é dada por:

$$(SNR)_{saída} = \frac{\sigma_m^2}{\sigma_q^2} \quad (6.1)$$

onde σ_m^2 é a variância da amostra de entrada original $m(k)$ com média nula e σ_q^2 é a variância do erro de quantização $c_q(k)$.

Por sua vez, a relação sinal-ruído de quantização é definida por:

$$(SNR)_{quant} = \frac{\sigma_c^2}{\sigma_q^2} \quad (6.2)$$

onde σ_c^2 é a variância do erro de predição [20].

Finalmente, o ganho de processamento é descrito como:

$$G_p = \frac{\sigma_m^2}{\sigma_c^2} \quad (6.3)$$

Pode-se observar que um ganho G_p superior a 1 indica que houve uma melhoria na relação sinal-ruído, devido ao esquema de quantização diferencial. Assumindo que σ_m^2 é fixa para um sinal em banda-base, a maximização do ganho será dada em função da minimização da variância σ_c^2 do erro, tarefa destinada ao filtro de predição.

O aumento do ganho de processamento pode implicar numa redução da taxa de bits. Considerando sinais de voz, o DPCM apresenta uma superioridade em torno de 4 a 11dB em relação ao PCM padrão, mesmo com um preditor de primeira ordem [20]. Além disso, para um sinal modulante senoidal, a partir da relação:

$$10 \log_{10}(SNR)_{saída} = 1.8 + 6n \quad (6.4)$$

onde n é o número de bits, verifica-se que cada 6 dB do ruído de quantização é equivalente a 1 bit por amostra. Assim, a vantagem do DPCM também pode ser dada em taxa de bits, sendo que para uma taxa de amostragem constante de 8kHz a economia com o uso do DPCM será em torno de 8 a 16 kbps (1 a 2 bits por amostra) em relação ao PCM padrão.

6.5. Simulações de um preditor linear adaptativo para DPCM através do algoritmo LMS

Considerando que a função do preditor é estimar a próxima amostra a ser quantizada, a partir de uma versão atrasada, configura-se o processo segundo a estrutura de aplicação denominada predição linear. Para isso, é necessária a definição dos sinais de entrada e referência, para composição da função objetivo do MSE, além dos parâmetros N e μ .

O sinal de entrada do filtro de predição linear consiste da versão quantizada da amostra de entrada $\hat{m}(k)$ somada ao erro quantizado $c_q(k)$. Já o sinal de referência foi definido como a versão anterior de $m(k)$, ou seja, $m(k-L) = m(k-1)$. Ao longo das simulações foi variada a ordem do preditor (número de coeficientes do filtro adaptativo) e o tamanho do passo de convergência.

Para a definição do número de coeficientes, considerou-se a informação de que os codificadores operam com preditores de no máximo décima ordem, no intuito de melhorar o ganho de processamento. Assim, foi feito o experimento inicial, fixando o número de coeficientes em $N = 10$, o que fornece um limite superior para a escolha do passo em $\mu = 1.0336$, pois $P_x = 0.0967$. Os valores escolhidos para μ se encontram na Tabela 6.1, juntamente com os respectivos valores obtidos para $(SNR)_{saída}$, $(SNR)_{quant}$, G_p , n_{red} (número de bits que poderiam ser reduzidos em relação ao PCM), considerando a Equação (6.4), e TX_B (taxa de bits que também poderia ser reduzida).

Tabela 6.1. Resultados para $N = 10$ e variações em μ .

N	μ	$(SNR)_{saída}$	$(SNR)_{quant}$	G_p	n_{red}	TX_B (kbps)
10	0.00001	10.9285	0.9667	11.3049	1	8
10	0.0001	23.7619	0.9385	25.3187	1	8
10	0.001	41.6414	0.9256	44.9864	2	16
10	0.01	56.2317	0.9165	61.3574	2	16
10	0.1	70.6409	0.9115	76.6572	2	16

Na sequência, foi fixado o valor do passo em $\mu = 0.1$ e avaliado o desempenho do preditor para diferentes valores de N . Nesse caso, foram considerados valores inferiores a $N = 10$, pois algumas versões anteriores de DPCM ainda operam com preditores de menor ordem. Os valores de N , assim como os demais parâmetros de desempenho que estão sendo analisados, encontram-se na Tabela 6.2.

Tabela 6.2. Resultados para $\mu = 0.1$ e variações em N .

N	μ	$(SNR)_{saída}$	$(SNR)_{quant}$	G_p	n_{red}	TX_B (bps)
1	0.1	51.4198	0.9201	55.8845	2	16
3	0.1	55.4031	0.9175	60.3876	2	16
5	0.1	55.6159	0.9163	60.6959	2	16
7	0.1	55.8681	0.9172	60.9134	2	16
9	0.1	56.0972	0.9160	61.2389	2	16

6.6. Simulações de um preditor linear adaptativo para DPCM através do algoritmo NLMS

Os experimentos realizados com o algoritmo LMS foram repetidos com o algoritmo NLMS, considerando uma norma quadrática de valor $\|x(k)\|^2 = \|m(k)\|^2 = 247.1450$, o que implica em $\gamma = 24.7145$. Mantendo um comprimento do preditor em $N = 10$, e variando μ_n e μ , conforme a Tabela 6.3, foram obtidos os resultados correspondentes também expressos na mesma.

Em seguida, foi fixado o valor do passo μ_n no máximo que garante a convergência, que é $\mu_n = 2$, e variadas as ordens do preditor. Os resultados deste experimento encontram-se na Tabela 6.4.

Tabela 6.3. Resultados para $N = 10$ e variações em μ_n e μ .

N	μ_n	μ	$(SNR)_{saída}$	$(SNR)_{quant}$	G_p	n_{red}	TX_B (bps)
10	0.5	0.0018	46.0429	0.9210	49.9912	2	16
10	1.0	0.0037	50.5299	0.9170	55.1064	2	16
10	1.5	0.0055	53.0488	0.9180	57.7892	2	16
10	2.0	0.0074	54.6064	0.9168	59.5629	2	16
10	3.0	0.110	56.7237	0.9161	61.9172	2	16

Tabela 6.4. Resultados para $\mu_n = 2$, $\mu = 0.0074$ e variações em N .

N	μ_n	μ	$(SNR)_{saída}$	$(SNR)_{quant}$	G_p	n_{red}	TX_B (bps)
1	2	0.0074	51.0484	0.9206	55.4540	2	16
3	2	0.0074	53.9200	0.9179	58.7436	2	16
5	2	0.0074	54.1242	0.9174	58.9945	2	16
7	2	0.0074	54.3562	0.9184	59.1839	2	16
9	2	0.0074	54.5544	0.9174	59.4641	2	16

6.7. Análise dos resultados para ambos os algoritmos de adaptação

Após a realização dos experimentos, pode-se observar que fixando o número de coeficientes em $N = 10$, que é a máxima ordem de preditores encontrada nos equipamentos comerciais que utilizam DPCM, e variando o tamanho de μ , variam também as relações sinal-ruído e o ganho de processamento. À medida que μ aumenta, a SNR de saída e o ganho também aumentam, mas a SNR de quantização diminui. Já para passos fixos, um aumento no número de coeficientes também aumenta a SNR de saída e o ganho, assim como diminui a SNR de quantização. No entanto, como o intervalo analisado era pequeno, de 1 a 10, as variações não foram significativas.

Mesmo sem grandes alterações entre os resultados de $N = 1$ e $N = 10$, a justificativa por não utilizar um filtro de primeira ordem é devido a um problema resultante da tendência dos erros de predição se acumularem ao longo do tempo. Por essa razão, surge a necessidade de não limitar a dependência da evolução do sinal apenas a última amostra, mas sim, às últimas. Por isso o modelo construído para o DPCM é recursivo e escreve o sinal amostrado previsto no instante k como a combinação linear ponderada das N amostras anteriores, e onde os coeficientes de ponderação são determinados de forma a minimizar o erro médio quadrático.

Com os parâmetros configurados foi possível obter uma redução de até 2 bits e, por consequência, uma redução da taxa em 16kbps. Assim, pode-se dizer que o DPCM, usando esta técnica de preditor adaptativo, pode reduzir a taxa de 64 kbps do PCM para uma taxa de 48 kbps. Porém, como os DPCMs em geral trabalham com a inserção de erros, pode ocorrer de diminuir a qualidade de transmissão de voz. Esse fator não foi significativo durante as simulações, fornecendo sinais com qualidade satisfatória.

Na Tabela 6.3 foi colocado, propositalmente, um valor de passo superior ao estipulado para os limites de convergência, que é $0 < \mu_n < 2$. O observado foi que, mesmo com $\mu_n = 3$, ocorreu a convergência. A explicação está no valor de γ , que nesse caso foi elevado, o que acaba reduzindo significativamente o tamanho do passo μ . Assim, fica evidente que a definição do intervalo foi feita com a consideração de um γ de valor quase insignificante, somente para evitar as divisões por zero ou um aumento excessivo do passo de convergência, quando a norma quadrática fosse muito pequena.

7. CANCELAMENTO DE INTERFERÊNCIAS

7.1. Introdução

Em uma estrutura de cancelamento de interferências, também chamada melhoria de sinal, o filtro tem o objetivo de cancelar um ruído desconhecido presente em um sinal. Para isso, utiliza como entrada $x(k)$ do filtro adaptativo um sinal correlacionado com o ruído, e como sinal de referência o sinal corrompido pelo ruído desconhecido [1]. Como pode ser visualizado na Fig. 7.1, quando a saída do filtro $y(k)$ aproximar o ruído $r(k)$ contido no sinal de referência, ocorrerá a anulação do mesmo, restando na saída de erro $e(k)$ somente uma versão melhorada do sinal $s(k)$.

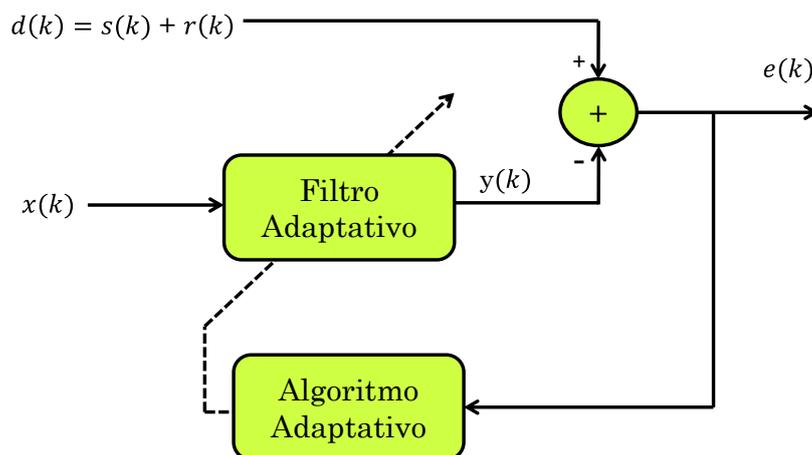


Fig. 7.1. Diagrama da aplicação denominada cancelamento de interferências.

A fim de melhor exemplificar essa classe de aplicação, será estudado um exemplo de filtragem adaptativa envolvendo o cancelamento de interferências que surgem em eletrocardiogramas, sobretudo em eletrocardiogramas abdominais, nos quais há uma grande dificuldade de extração da componente fetal [25].

7.2. Eletrocardiogramas

Um eletrocardiograma (ECG) é o registro da atividade elétrica do coração, obtido a partir de eletrodos dispostos no corpo humano, os quais capturam um sinal que é amplificado

e enviado para o eletrocardiógrafo. A principal característica de um ECG é o pulso simples ilustrado na Figura 7.2, onde estão apresentados os cinco picos e vales denominados P, Q, R, S e T, sendo que as ondas Q, R e S juntas são denominadas complexo QRS, a partir do qual se obtém informações como a frequência cardíaca, a qual é um importante indicador de anormalidades do sistema de condução. Além disso, a forma padronizada dos picos e vales, em termos de amplitude e duração do pulso, fazem com que valores fora dos padrões sirvam de base para os diagnósticos médicos e detecção de doenças [26].

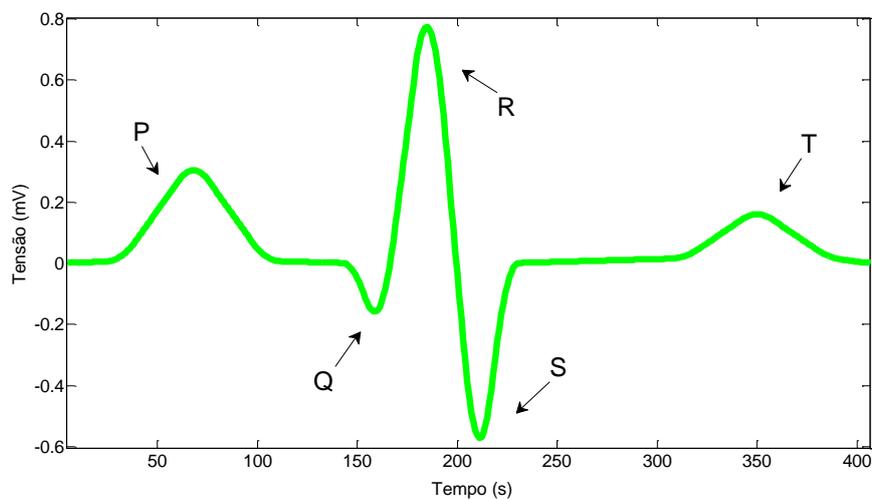


Fig. 7.2. Pulso característico de um ECG.

Esse tipo de exame era utilizado apenas para avaliação de adultos, no entanto, vem sendo adotado também para análises de fetos. O monitoramento fetal através de ECGs permite a identificação precoce de diversos problemas, tais como as arritmias cardíacas fetais, que podem ser de três tipos: extra-sístoles atriais (batimentos cardíacos anormais), bloqueio atrioventricular total (diminuição dos batimentos cardíacos) e taquicardia atrial sustentada (aumento nos batimentos cardíacos) [26].

Uma grande dificuldade encontrada é a obtenção do ECG, pois o mesmo é realizado através de métodos invasivos, onde é necessária a alocação dos eletrodos diretamente ao crânio do feto no útero da mãe, o que pode ocasionar inúmeros problemas para o feto e a gestante, como infecções [25]. Por isso, surge a necessidade de novos métodos, como a captação externa do ECG, através do abdômen da gestante. No entanto, somado a esse sinal de ECG fetal também existem diversas interferências, que impedem a visualização do complexo QRS [27].

A interferência mais significativa é a distorção provocada pelo ECG materno, que não pode ser eliminada por filtros seletores de frequência por apresentar espectro que se superpõe ao fetal. No domínio do tempo, ambos os sinais se cruzam, coincidindo seus complexos QRS entre 27% e 46,5% do total do complexo QRS fetal. O mesmo também acontece no domínio da frequência, no qual o QRS materno está presente entre as frequências 10 Hz e 40 Hz, enquanto o fetal começa a partir dos 20 Hz [27]. Outras interferências existentes em um ECG fetal, assim como nos demais tipos de ECGs, são as harmônicas de 60 Hz e o ruído térmico (ou de medição). Este é inerente à maioria dos equipamentos eletrônicos, enquanto que as harmônicas de 60 Hz são provenientes da rede elétrica, causadas por indução ou efeito eletrostático [26].

Essas interferências de 60 Hz podem ser eliminadas com técnicas de filtragem adaptativa, tanto por filtros de coeficientes fixos quanto adaptativos. No entanto, a aplicação de um filtro rejeita-banda eliminaria também uma faixa de frequência em torno das indesejadas, resultando na perda de dados. Outro problema enfrentado é a variação harmônica resultante da entrada ou retirada de cargas da rede elétrica do hospital, a qual um filtro seletor de frequências não consegue acompanhar, ao contrário de um filtro adaptativo. De forma análoga, um ruído térmico também apresenta comportamento imprevisível, sendo necessária a aplicação de técnicas que se adaptam ao longo do tempo.

Assim, serão projetados e analisados filtros adaptativos FIR para o cancelamento de tais interferências, especificando os parâmetros envolvidos e definindo os sinais de entrada e referência que devem ser utilizados.

7.3. Simulação de cancelamento de interferências em eletrocardiogramas fetais

Inicialmente, foram gerados sinais característicos de eletrocardiogramas maternos e fetais, através do software Matlab®, que também foi utilizado durante as simulações. O sinal de ECG fetal tem 0,25mV de amplitude e uma frequência cardíaca de 139 batimentos por minuto, enquanto que o ECG materno tem 3,5mV de amplitude e 89 batimentos por minuto.

Para a composição do ECG abdominal, foi feito um somatório entre um sinal de ECG fetal puro, um sinal de ECG materno após a passagem por um filtro FIR de 10 coeficientes fixos definidos aleatoriamente, a fim de descrever um caminho de propagação entre a cavidade torácica e o abdômen, mais um ruído da rede elétrica dado por um sinal senoidal

com harmônicas de 60 Hz, que foram variadas ao longo das simulações para verificação da capacidade do filtro em acompanhar variações do sistema, e ainda um ruído térmico, dado por um ruído branco gaussiano aditivo (AWGN).

O processo de filtragem estudado foi realizado em duas etapas, onde a primeira destina-se a eliminação do ruído térmico e o sinal senoidal da rede elétrica, e a segunda aplica-se no cancelamento do ECG materno. Esta configuração foi escolhida devido ao fato de os dois primeiros tipos de interferências existirem em sinais de ECGs em geral, enquanto que o terceiro tipo é específico de ECG fetal captado do abdômen. Assim, o primeiro esquema pode ser utilizado em outras aplicações, e servirá de análise para o desempenho do filtro mediante variações do passo de convergência e do comprimento do filtro.

Na primeira etapa de filtragem, o sinal de referência foi tomado como um ECG abdominal. Para o sinal de entrada, utilizou-se uma componente senoidal com harmônicas de 60 Hz, defasada em relação ao ruído de mesma fonte presente no ECG abdominal, somada com um ruído branco gaussiano que modela o ruído térmico. Assim, o sistema teve a seguinte composição:

- $d(k) = s_1(k) + r_1(k) + r_2(k) + r_3(k)$
- $x(k) = x_1(k) + x_2(k)$

onde:

- $s_1(k)$: eletrocardiograma fetal gerado no software Matlab®;
- $r_1(k)$: interferência de 60 Hz, descrita como $sen(2\pi 60t) + sen(2\pi 120t) + sen(2\pi 180t)$, para o caso de três harmônicas. Foram variadas ao longo do processo para ser analisado o desempenho do filtro adaptativo;
- $r_2(k)$: ruído térmico modelado por um ruído branco gaussiano de amplitude 0.02;
- $r_3(k)$: eletrocardiograma materno após a passagem pelo filtro FIR de coeficientes fixos;
- $x_1(k)$: sinal correlacionado com a interferência de 60 Hz, dado pelo sinal senoidal defasado em relação a $r_1(k)$;
- $x_2(k)$: sinal correlacionado com o ruído térmico, sendo dado por outro ruído branco gaussiano gerado aleatoriamente.

Implementando esta etapa, serão obtidos os sinais $y_1(k)$ e $e_1(k)$, onde:

- $y_1(k)$: saída estimada da composição ruidosa $r_1(k) + r_2(k)$;

- $e_1(k)$: sinal de erro contendo o ECG fetal e o ECG materno.

Na segunda etapa, projeta-se um filtro para eliminar a componente materna, tendo como sinal de referência a saída do sistema anterior e como sinal de entrada um ECG captado da região torácica da gestante, igualmente filtrado pelo esquema da primeira etapa, a fim de eliminar as harmônicas de 60 Hz e o ruído térmico. Após a convergência, o sinal de erro deve ser um ECG fetal livre de ruídos. Assim, têm-se as seguintes configurações para os sinais de entrada e referência desta etapa:

- $d(k) = e_1(k)$
- $x(k) = x_3(k)$

onde:

- $e_1(k)$: saída de erro da primeira etapa de filtragem, contendo o ECG fetal e o ECG materno;
- $x_3(k)$: sinal correlacionado com os batimentos cardíacos que afetam o ECG fetal, dado pelo próprio ECG materno filtrado na primeira etapa.

Os sinais resultantes desta segunda etapa são $y_2(k)$ e $e_2(k)$, onde:

- $y_2(k)$: saída estimada dos batimentos cardíacos maternos;
- $e_2(k)$: saída de erro contendo o ECG fetal com o complexo QRS apto para análise.

Na segunda etapa de filtragem, também é necessária uma filtragem prévia do ECG torácico, a fim de remover as principais interferências. Para tanto, o mesmo é processado em um esquema semelhante a primeira etapa, tendo como sinal de referência o ECG torácico com as interferências, sendo considerados o ruído térmico e o de 60 Hz. Como entrada, têm-se os sinais correlacionados com as interferências, conforme descrito. As formas de onda resultantes para o sinal de ECG torácico filtrado e o sinal original serão abordadas mais adiante.

A partir da metodologia descrita, são realizadas as duas etapas de filtragem utilizando o algoritmo LMS. Durante o processo, variam-se o passo de convergência μ e o número de coeficientes N , na busca por uma melhor configuração. Assim, com o objetivo de obter um erro mínimo no complexo QRS, o que aumentaria a precisão dos diagnósticos médicos, mas

sem grandes perdas em termos de velocidade de convergência, os resultados expressos na Figura 7.3 foram obtidos com um número de coeficientes $N = 200$ e um passo de convergência $\mu = 0.001$ para a primeira etapa, e $\mu = 0.001$ e $N = 100$ para a segunda. A definição dos parâmetros foi feita a partir da análise gráfica do sinal de erro de saída $e(k)$ e do MSE em cada configuração. Finalmente, na Fig. 7.4, tem-se a curva do MSE obtida ao final do processo, com os parâmetros escolhidos.

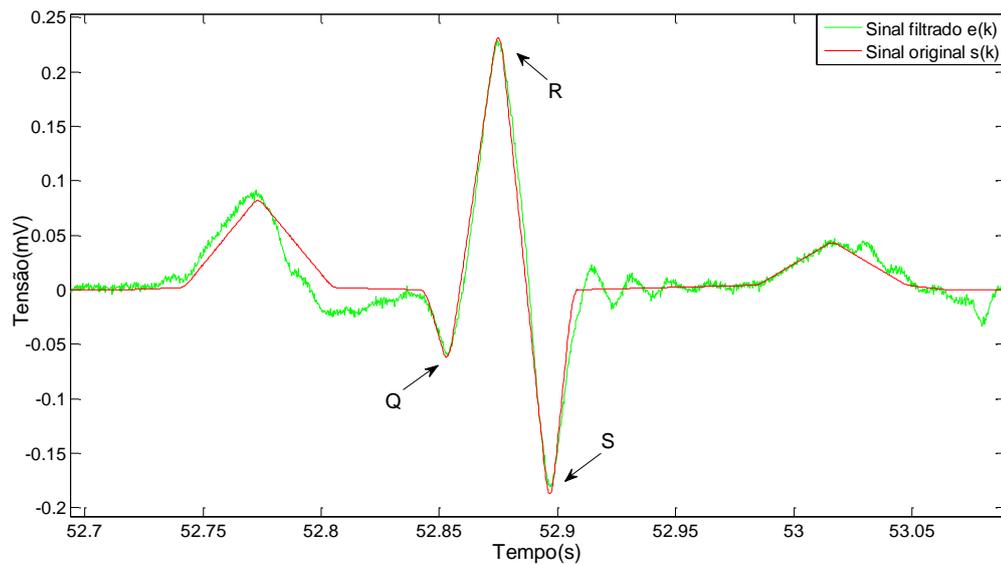


Fig. 7.3. Comparação entre o ECG fetal obtido após a segunda etapa e o ECG fetal original.

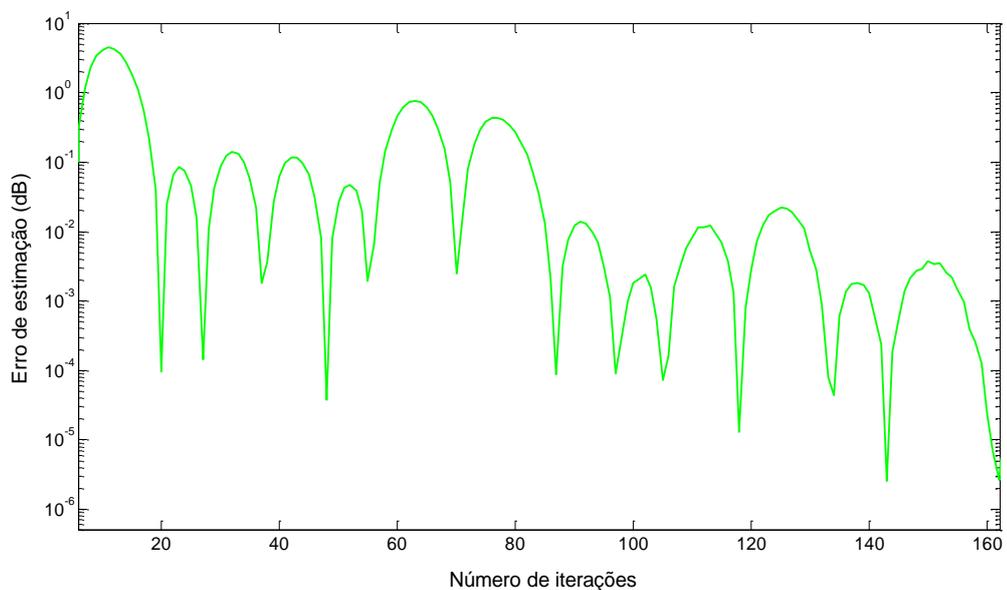


Fig. 7.4. Curva de aprendizagem do MSE.

Considerando os problemas decorrentes da correlação entre os sinais de ECG fetal e ECG materno, que dificultam a visualização dos resultados, optou-se por não realizar o experimento de extração da componente fetal a partir do ECG abdominal utilizando o algoritmo NLMS. No entanto, para demonstrar a influência da utilização deste algoritmo, assim como da variação de μ e N na aplicação de cancelamento de interferências, foi analisado o processo de filtragem do ECG torácico materno para eliminação do ruído térmico e interferência de 60 Hz.

7.4. Simulação de filtragem do ECG torácico

Após a realização da filtragem para extração do complexo QRS fetal, optou-se por tomar como base o processo de filtragem do ECG torácico materno, devido a rápida convergência e melhor visualização dos resultados. Utilizando a metodologia descrita anteriormente para os sinais de entrada e referência, inicia-se o processo de filtragem para cancelamento da interferência de 60 Hz e do ruído térmico.

Fazendo uso do algoritmo de adaptação LMS, foi definido um valor de passo em $\mu = 0.001$, e verificado o resultado para dois valores de passo, $N = 50$ e $N = 10$, obtendo-se os sinais conforme a Figura 7.5. Na sequência, foi diminuído o passo para $\mu = 0.0001$ e variado N para os mesmos dois valores, onde o resultado encontra-se na Figura 7.6.

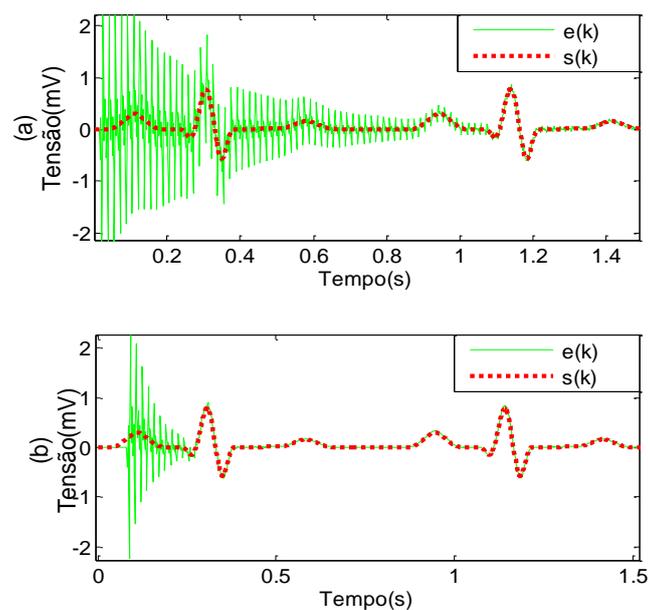


Fig. 7.5. Resultados para: (a) $\mu = 0.001$ e $N = 50$. (b) $\mu = 0.001$ e $N = 10$.

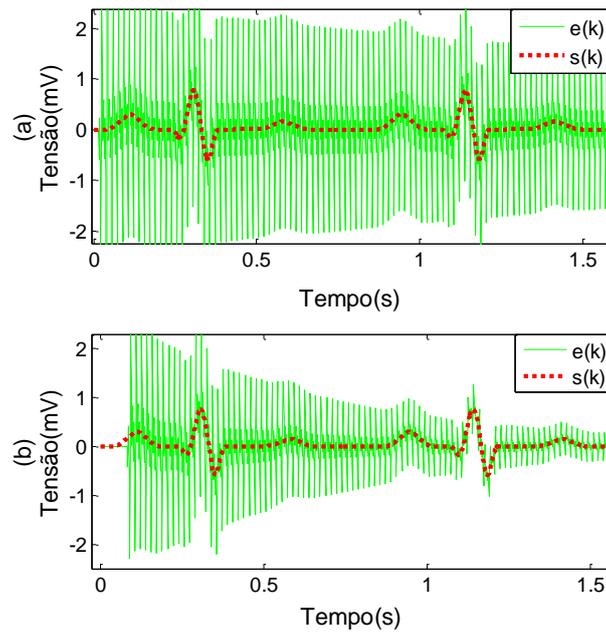


Fig. 7.6. Resultados para: (a) $\mu = 0.0001$ e $N = 50$. (b) $\mu = 0.0001$ e $N = 10$.

Repetindo a metodologia para o algoritmo NLMS, foi fixado $\mu_n = 0.2$, o que implica em $\mu = 0.00038$, e variado $N = 50$ e $N = 10$, obtendo os resultados da Figura 7.7. Em seguida, foi diminuído o valor do passo para $\mu_n = 0.05$, o que fornece $\mu = 0.00095$, resultando na Figura 7.8.

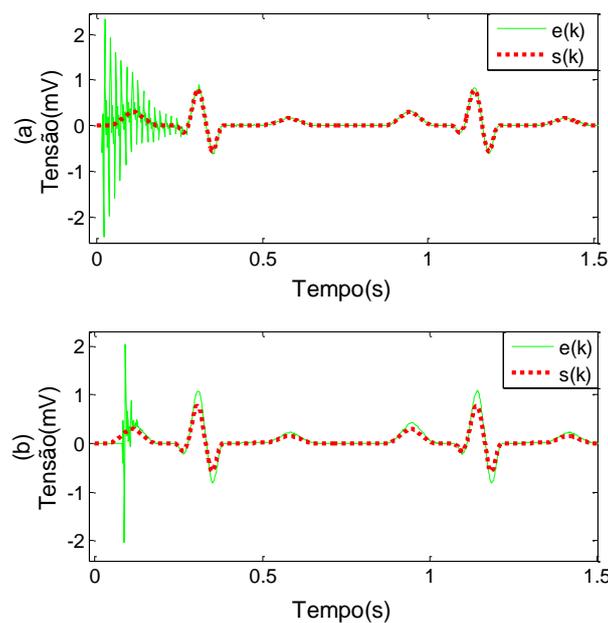


Fig. 7.7. Resultados para: (a) $\mu_n = 0.2$ e $N = 50$. (b) $\mu_n = 0.2$ e $N = 10$.

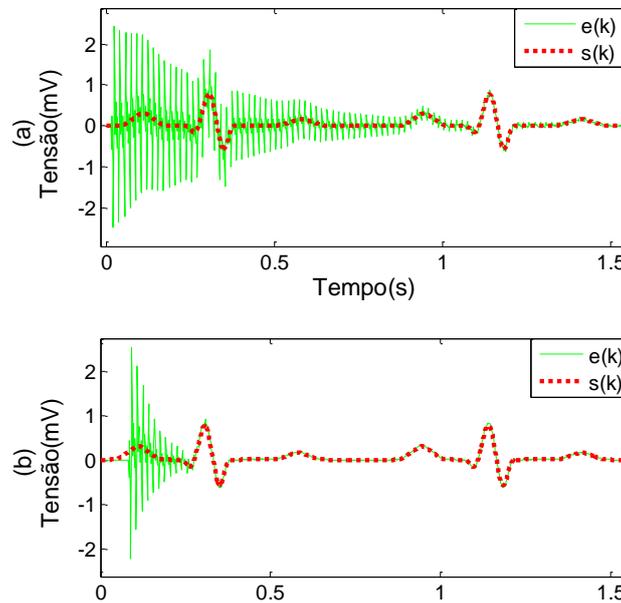


Fig. 7.8. Resultados para: (a) $\mu_n = 0.05$ e $N = 50$. (b) $\mu_n = 0.05$ e $N = 10$.

7.5. Análise geral dos resultados

Após a filtragem, os resultados obtidos mostram que o sinal proveniente do abdômen apresenta um complexo QRS fetal com precisão suficiente para a realização de diagnósticos médicos em relação as arritmias cardíacas, sem a necessidade de técnicas invasivas que podem ser prejudiciais para o feto e a gestante. Assim, pode-se concluir que filtros FIR adaptativos que utilizam o algoritmo LMS são eficientes nesta aplicação, pois acompanham as variações do sistema, além de possuírem baixa complexidade computacional, o que é ideal para processamento em tempo real.

Convém salientar que somente o complexo QRS foi adequadamente filtrado por este método devido a sua diferença estatística em relação ao resto do ECG. O segmento QRS tem uma variância mais alta que o segmento SQ (que vai da onda S até a próxima onda Q). Isso faz com que esta componente materna seja melhor estimada e cancelada do ECG abdominal. Apesar de ocorrer uma certa distorção no restante do sinal, em virtude da correlação existente entre sinais de ECG maternos e fetais, é possível visualizar a convergência do algoritmo LMS, através da Figura 7.4.

Analisando a Figura 7.5, verifica-se que com a redução do número de coeficientes a velocidade de convergência tem uma significativa melhora. Na Figura 7.6, a diminuição do passo implicou na redução da velocidade de convergência, de tal forma que o sinal não foi adequadamente filtrado durante os dois primeiros pulsos mostrados, tanto para 10 quanto para 50 coeficientes, embora com $N = 50$ o excesso de MSE seja bem mais elevado. Já na Figura 7.7, onde foi utilizado o algoritmo NLMS, com um passo semelhante ao da Figura 7.6, observa-se que a convergência ocorreu antes, para ambos os valores de N . No entanto, neste mesmo experimento, para $N = 10$ a taxa de convergência foi elevada de tal forma que aumentou o desajuste ao longo dos pulsos, diminuindo a precisão. Por fim, na Figura 7.8, com o NLMS e utilizando um passo ligeiramente superior, houve um acréscimo na velocidade de convergência, permitindo a análise do ECG em torno do segundo pulso.

Dessa forma, fica evidente a rápida convergência e a capacidade de adaptação dos algoritmos tipo LMS. Uma convergência mais acelerada pode ser obtida com o aumento no passo de convergência ou redução no comprimento do filtro, mas com conseqüente acréscimo no erro final. De forma análoga, o erro e a velocidade de convergência podem ser reduzidos com a diminuição de μ ou aumento no número de coeficientes.

CONCLUSÕES

Ao longo deste trabalho foram realizados estudos e análises sobre os princípios fundamentais de filtragem digital adaptativa, utilizando a estrutura FIR. Para tanto, foi abordado o filtro ótimo de Wiener, que pode servir como parâmetro de comparação da resposta dos filtros adaptativos, em condições invariantes no tempo. Durante o estudo do mesmo, foram apontadas as dificuldades de sua utilização, estas relacionadas com a complexidade computacional decorrente do cálculo de inversões matriciais, ou ainda da falta de informação dos sinais envolvidos.

Na sequência, foi estudado o método de minimização *Steepest Descent*, que surge como forma de substituição dos métodos de busca pela solução ótima de Wiener, calculando os coeficientes de forma recursiva. No entanto, apesar de diminuir a complexidade computacional, esse método ainda requer conhecimento *a priori* dos sinais processados.

Uma opção para solucionar esse problema foi o desenvolvimento do algoritmo de adaptação LMS. O algoritmo LMS também é baseado nos princípios de busca do ponto ótimo utilizando o gradiente, mas requer somente as amostras atuais dos sinais envolvidos, o que permite uma variedade de aplicações. Nesse sentido, foram analisadas as metodologias de implementação de quatro aplicações reais, buscando exemplificar cada uma das classes de aplicações em que a filtragem adaptativa está dividida. Para estas, foram feitas as definições de sinais de entrada e referência do filtro adaptativo, verificando o ocorrido para diferentes valores de passo de convergência e número de coeficientes.

Analisando os resultados obtidos através das simulações, pode-se constatar que, mantido o número de coeficientes, à medida que o passo é aumentado a velocidade de convergência também aumenta. Entretanto, esse aumento precisa estar limitado dentro dos intervalos que garantem a convergência do algoritmo, conforme foi demonstrado utilizando o Teorema do Ponto Fixo. Se a opção for pela manutenção do tamanho do passo e variação do comprimento do filtro, o aumento deste implicará na redução da taxa de convergência e aumento do desajuste. No entanto, algumas aplicações precisam de um número mínimo de coeficientes, como é o caso da identificação de sistemas e equalização de canal, que estimam um modelo de um determinado sistema.

Para o esquema de cancelamento de eco, é necessário que o número de coeficientes seja suficiente para fazer uma boa estimação do caminho do eco e efetuar o seu cancelamento, transmitindo um sinal o mais audível quanto possível, com um intervalo de tempo adequado para a convergência. Já para a equalização de canal, é preciso que o equalizador tenha um mínimo de coeficientes para estimar um modelo inverso que minimize a ISI e o ruído térmico que distorcem o sinal, mas com um pequeno gasto de tempo, pois no momento da filtragem adaptativa o canal se destina somente ao envio das sequências de treinamento.

Ainda na equalização de canal, constata-se também que resultados melhores com essa configuração serão obtidos quando o canal for um filtro IIR somente polos, pois o seu inverso a ser modelado pelo filtro corresponde a uma estrutura FIR. No caso de o canal ser um filtro FIR, ou IIR de numerador e denominador não triviais, os modelos inversos seriam do tipo IIR. Isso dificultaria a modelagem, uma vez que a estrutura IIR precisaria ser aproximada por um FIR adaptativo, requerendo um grande número de coeficientes.

Apesar das limitações na escolha do passo μ e do comprimento N , em função de uma alta taxa de convergência, convém salientar que os resultados obtidos para valores que implicam em taxas menores são muito mais satisfatórios, considerando o desempenho em regime permanente, após a convergência. Assim, o ideal é que seja definido o tempo máximo que o filtro pode levar para convergir, sem comprometer o resultado final e, a partir disso, diminuir o passo e aumentar o número de coeficientes o máximo possível dentro desse limite.

Na aplicação de predição linear, exemplificada com o DPCM, cujo número de coeficientes máximo utilizado nos dispositivos comerciais é de $N = 10$, foi observado que com o aumento do passo os ganhos obtidos foram maiores, o que implicará em uma maior redução do número e taxa de bits. Apesar de parecer contraditório um aumento de passo implicar na redução da taxa de bits, isso pode ser explicado pelo fato que a taxa de bits requerida está relacionada com a quantidade de informações que deve ser transmitida. Assim, quanto melhor a estimação feita pelo preditor linear, menor será o erro de quantização que será codificado para o envio, sendo necessários menos bits para codificar a informação a ser transmitida, reduzindo a taxa de bits requerida para enviar toda a mensagem em um dado intervalo de tempo.

Considerando que a velocidade de convergência precisa ser elevada para que a próxima amostra seja predita em um intervalo mínimo de tempo, além do aumento do passo, também poderia ser reduzido o comprimento do filtro. No entanto, esta opção não é adequada,

pois uma melhor predição é aquela que envolve o comportamento de um maior número de amostras anteriores, por isso o valor máximo $N = 10$ é mais recomendado, considerando as limitações comerciais.

Para a aplicação de cancelamento de interferências em eletrocardiogramas, o processo pode ser realizado tanto online quanto off-line. Se for online, deve-se aliar velocidade e precisão. Porém, se for off-line e houver um grande número de amostras disponíveis, as escolhas de μ e N podem ser voltadas somente para a precisão, obtendo excelentes resultados, tanto para o LMS quanto para o NLMS. Mesmo no modo off-line, os filtros adaptativos possuem um melhor desempenho do que os de coeficientes fixos, pois minimizam a perda de dados significativos no caso do ruído térmico e da interferência de 60 Hz, além de serem adequados para o caso de espectros superpostos, como o que ocorre entre o eletrocardiograma fetal e materno, quando obtido do abdômen da gestante por técnicas não-invasivas.

Analisando todas as considerações realizadas neste trabalho, pode-se concluir que a filtragem adaptativa pode fornecer bons resultados, sobretudo em sistemas variantes no tempo, desde que os parâmetros sejam adequadamente configurados de acordo com cada aplicação e algoritmo de adaptação utilizado.

Este trabalho de conclusão de curso teve uma abordagem ampla no intuito de fornecer uma base para o desenvolvimento de futuros trabalhos na área de filtragem digital adaptativa. Como forma de continuação do mesmo, podem ser analisados outros algoritmos de adaptação nas diferentes aplicações, assim como a realização de pesquisas focadas em uma determinada aplicação, buscando estabelecer critérios mais específicos para a escolha dos parâmetros, ou até mesmo otimizar as metodologias empregadas.

Como sugestões específicas de trabalhos futuros pode-se citar a implementação do quantizador adaptativo do sistema DPCM, obtendo um ADPCM. Outra opção seria a análise do desempenho do filtro adaptativo na equalização de canais cujo modelo inverso tem estrutura IIR. Pode-se ainda buscar formas de contornar o problema da correlação entre sinal e ruído na filtragem de ECG abdominal para extração da componente fetal. No cancelamento de eco, além da eliminação do eco de linha analisado, pode ser feito um estudo para cancelar o eco acústico. Por fim, há a possibilidade de implementação prática de alguma aplicação.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] DINIZ, P. S. R., **Adaptive Filtering: Algorithms and Practical Implementation**, Rio de Janeiro: Springer, 2008.
- [2] MADISETTI, V. K., **The Digital Signal Processing Handbook: Digital Signal Processing Fundamentals**, New York: CRC Press, 2010.
- [3] MANOLAKIS, D. e INGLE, V., **Applied Digital Signal Processing**, Cambridge: Pearson Prentice Hall, 2011.
- [4] ADALI, T. e HAYKIN, S., **Adaptive Signal Processing**, New Jersey: Wiley, 2010.
- [5] PALAMIDES, A. e VELONI, A., **Signals and Systems Laboratory with MATLAB**, CRC Press, 2011.
- [6] TAN, L., **Digital Signal Processing: Fundamentals and Applications**, London: Elsevier, 2008.
- [7] KUO, S. M. e GAN, W.-S., **Digital Signal Processors: Architectures, Implementations, and Applications**, New Jersey: Pearson Prentice Hall, 2005.
- [8] STEARNS, S. D. e HUSH, D. R., **Digital Signal Processing with Examples in Matlab**, CRC Press, 2011.
- [9] BENVENUTO, N. e CHERUBINI, G., **Algorithms for Communications Systems and their Applications**, England: Wiley, 2004.
- [10] PROAKIS, J. G. e MANOLAKIS, D. G., **Digital Signal Processing: Principles, Algorithms, and Applications**, New Jersey: Pearson Prentice Hall, 2007.
- [11] MOON, T. K. e STIRLING, W. C., **Mathematical Methods and Algorithms for Signal Processing**, New Jersey: Pearson Prentice Hall, 2000.
- [12] FREEMAN, R. L., **Telecommunications Transmission Handbook**, New York: John Wiley & Sons, Inc., 1998.
- [13] LATHI, B. P., **Sinais e Sistemas Lineares**, Porto Alegre: Bookman, 2007.
- [14] POULARIKAS, A. D., **Signals and Systems Primer with Matlab**, New York: CRC Press, 2007.
- [15] FRANCO, N. B., **Cálculo Numérico**, São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2006.
- [16] SPERANDIO, D.; MENDES, J. T. e SILVA, L. H. M., **Cálculo Numérico**, São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2006.
- [17] AMARAL, J. C. F., **Cancelamento de Eco em Telefonia IP Utilizando Filtro Adaptativo**, Novo Hamburgo, Feevale, TCC, 2010.

- [18] RACHID, E. M., **Cancelamento de Eco em Telefonia IP**, Campinas-SP, Unicamp, dissertação de mestrado, 2004.
- [19] CAREZIA, A. H. C., **Redução Adaptativa de Eco e de Ruído para Terminais Viva-voz**, São Paulo, USP, Mestrado, 2002.
- [20] HAYKIN, S., **Sistemas de Comunicação: Analógicos e Digitais**, Porto Alegre: Bookman, 2004.
- [21] VARGAS, C. H. V., **Implementação de Técnicas de Equalização Adaptativa em FPGA para Canais WiMax**, Florianópolis, UFSC, Mestrado, 2004.
- [22] TREICHLER, J. R.; FIJALKOW, I. e JOHNSON, C. R. J., **Fractionally Spaced Equalizers: how long should they really be?** *IEEE Signal Processing*, New Jersey, v. 13, p. 65-80, 1996.
- [23] CASTOLDI, F. T., **Desenvolvimento de Algoritmos Adaptativos Usando a Descrição de Distúrbio Mínimo com Restrições**, Rio de Janeiro, UFRJ, Mestrado, 2007.
- [24] ZHAO, Y.; LI, X.; AN, L.; SUN, J. e WANG, L., **Research on Encoding/Decoding Method of Electric Physical Information Based on LMS-ADPCM Algorithm**, IEEE, In: The International Conference on Advanced Power System Automation and Protection, IEEE, 2011.
- [25] SHI-JIN, L., **Extraction of Fetal Electrocardiogram Using Recursive Least Squares and Normalized Least Mean Squares Algorithms** In: 3rd International Conference on Advanced Computer Control, 2011, Harbin.
- [26] SÖRNMO, L.; LAGUNA, P. **Bioelectrical Signal Processing in Cardiac and Neurological Applications**. Elsevier Academic Press, 2005.
- [27] ORTEGA, R. A., **Implementation of a Real-Time Algorithm for Maternal and Fetal Heart Rate Monitoring in a Digital Signal Controller Platform**. In: 32nd Annual International Conference of the IEEE EMBS, 2010, Buenos Aires.