

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO PAMPA**

**LUÍSA SABEDRA INDA**

**ANÁLISE NUMÉRICA DE MATERIAIS COM GRADIENTE FUNCIONAL  
UTILIZANDO O MÉTODO LDEM**

**Alegrete**

**2025**

**LUÍSA SABEDRA INDA**

**ANÁLISE NUMÉRICA DE MATERIAIS COM GRADIENTE FUNCIONAL  
UTILIZANDO O MÉTODO LDEM**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Engenharia Civil da Universidade Federal do Pampa, como requisito parcial para obtenção do Título de Bacharel em Engenharia Civil.

Orientador: Prof. Dr. Luis Eduardo Kostaschi

Coorientador: Me. Jonathan Duarte Oliveira

**Alegrete**

**2025**

**LUISA SABEDRA INDA**

**ANÁLISE NUMÉRICA DE MATERIAIS COM GRADIENTE FUNCIONAL  
UTILIZANDO O MÉTODO LDEM**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Engenharia Civil da Universidade Federal do Pampa, como requisito parcial para obtenção do Título de Bacharel em Engenharia Civil.

Trabalho de Conclusão de Curso defendido e aprovado em: 03 de dezembro de 2025.

Banca examinadora:

Prof. Dr. LUIS EDUARDO KOSTESKI - UNIPAMPA - Orientador  
Eng. Me. JONATHAN DUARTE OLIVEIRA - Membro Externo - Coorientador  
Eng. Me. CAROLINE BREMM - Membro Externo  
Profa. Dra. ANGELICA BORDIN COLPO - UNIPAMPA



Assinado eletronicamente por **LUIS EDUARDO KOSTESKI, PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR**, em 11/12/2025, às 08:37, conforme horário oficial de Brasília, de acordo com as normativas legais aplicáveis.



Assinado eletronicamente por **ANGELICA BORDIN COLPO, PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR**, em 11/12/2025, às 08:49, conforme horário oficial de Brasília, de acordo com as normativas legais aplicáveis.



Assinado eletronicamente por **JONATHAN DUARTE OLIVEIRA, Aluno**, em 11/12/2025, às 11:16, conforme horário oficial de Brasília, de acordo com as normativas legais aplicáveis.



Assinado eletronicamente por **CAROLINE BREMM, Aluno**, em 12/12/2025, às 09:21, conforme horário oficial de Brasília, de acordo com as normativas legais aplicáveis.



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site [https://sei.unipampa.edu.br/sei/controlador\\_externo.php?acao=documento\\_conferir&id\\_orgao\\_acesso\\_externo=0](https://sei.unipampa.edu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0), informando o código verificador **1922872** e o código CRC **B21F6E14**.

## AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, por toda minha vida, minha saúde e pela força que me deste ao longo desses anos. A minha fé no Senhor me manteu forte em todos os momentos, sem a sua presença nada nunca seria possível.

A minha Avó Neiva (*in memoriam*), que desde muito pequena me dizia que o estudo era a única coisa que nunca tirariam de mim, esse ensinamento levarei para o resto de minha vida. Obrigada por tudo, vó. É por você que cheguei tão longe.

A minha família, minha mãe Lisandra, meu pai Paulo e meu irmão Pedro, que nunca mediram esforços e me proveram de tudo, mas o mais importante de todas as coisas, um lar com muito amor. Foram a ponte e o suporte primordial. Obrigada.

A Universidade Federal do Pampa, lugar que foi como uma segunda casa. Onde fui presenteada pela oportunidade de persuadir o sonho de ser engenheira civil. Grata por todos os professores e colegas que me permitiu conhecer.

Ao meu orientador Luis Eduardo Kostascki, que esteve me apoiando desde os primeiros anos da graduação e me incentivando na pesquisa acadêmica, meu muito obrigada pela paciência e pelo incentivo.

Aos meus amigos, especialmente à Isabeli, Mariana, Mônica e Victor, por fazerem estes anos serem mais leves e compartilharem das mesmas experiências, são amigos que levarei para toda vida. Obrigada pela companhia. Também existiram outras pessoas muito importantes para minha formação dentro da UNIPAMPA, não como engenheira, mas como pessoa. Levarei as memórias em meu coração. Obrigada.

Torna-te quem tu és

*Friedrich Nietzsche*

## RESUMO

Os Materiais com Gradiente Funcional são compósitos avançados, caracterizados por uma variação gradual de propriedades ao longo de uma direção, o que os confere um alto desempenho em diferentes áreas de estudo, como a biomedicina, aeronáutica e a engenharia. No contexto da Engenharia Civil, a compreensão dos processos de falha, especialmente a fratura, é um aspecto crítico que tem limitações nos métodos numéricos do estado atual da arte. Neste cenário, o presente trabalho propõe uma nova abordagem para a análise do comportamento mecânico dos FGMs. O objetivo geral é analisar, por meio de simulação numérica, o comportamento de materiais com gradiente funcional utilizando o método de elementos discretos formados por barras, um método que se mostra especificamente eficaz para modelagem de fenômenos de fratura. A metodologia envolve a construção de modelos baseados na literatura existente sobre materiais com gradiente através da linguagem computacional MatLab e implementado no ambiente Abaqus. Para descrever o comportamento do material foram adotadas duas leis constitutivas com o objetivo de captar o resposta do material. Os resultados demonstram a eficácia do LDEM para a modelagem da fratura em FGMs. No entanto, o estudo indica que o aprimoramento da lei constitutiva ainda requer trabalho adicional para uma representação totalmente satisfatória do complexo comportamento dos materiais em gradiente.

**Palavras-chave:** Materiais Gradientes Funcionais (FGM); Método LDEM; Simulação Numérica; Fratura; Lei Constitutiva.

## **ABSTRACT**

Functionally Graded Materials are advanced composites, characterized by a gradual variation of properties along one direction, which grants them high performance in different areas of study, such as biomedicine, aeronautics, and engineering. In the context of Civil Engineering, understanding failure processes, especially fracture, is a critical aspect that presents limitations in state-of-the-art numerical methods. In this scenario, the present work proposes a new approach for the analysis of the mechanical behavior of FGMs. The general objective is to analyze, through numerical simulation, the behavior of functionally graded materials using the Lattice Discrete Element Method, a method that proves to be specifically effective for modeling fracture phenomena. The methodology involves the construction of models based on existing literature on graded materials using the computational language MatLab and implemented in the Abaqus environment. Two constitutive laws were adopted to describe the material behavior with the aim of capturing the material's response. The results demonstrate the effectiveness of LDEM for fracture modeling in FGMs. However, the study indicates that the improvement of the constitutive law still requires additional work for a completely satisfactory representation of the complex behavior of graded materials.

**Keywords:** Functionally Graded Materials (FGM); LDEM Method; Numerical Simulation; Fracture; Constitutive Law.

## LISTA DE FIGURAS

|                                                                                                                                                 |    |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Figura 1 - Aplicações do FGM.....                                                                                                               | 13 |
| Figura 2 - Seção transversal do bambu.....                                                                                                      | 14 |
| Figura 3 - Exemplos de aplicações de materiais com gradiente funcional: (a) Viga FGM, (b) implante dentário FGM e (c) casca cilíndrica FGM..... | 16 |
| Figura 4 - Modelo cúbico básico (a) e geração do corpo prismático (b).....                                                                      | 20 |
| Figura 8 - Etapas da metodologia de estudo.....                                                                                                 | 25 |
| Figura 9 - Distribuição de propriedades no LDEM.....                                                                                            | 27 |
| Figura 10 - Aplicação da lei bilinear no modelo FGM.....                                                                                        | 28 |
| Figura 11 - Lei trilinear para aplicação no MATLAB.....                                                                                         | 29 |
| Figura 12 - Geometria e condições de contorno da placa FGM.....                                                                                 | 32 |
| Figura 13 - Evolução da fissura nos instantes (a) 45 $\mu$ s, (b) 60 $\mu$ s, and (c) 90 $\mu$ s.....                                           | 32 |
| Figura 14 - Fissuração na placa FGM em diferentes amplitudes de carga.....                                                                      | 33 |
| Figura 15 - Placa FGM em LDEM.....                                                                                                              | 33 |
| Figura 16 - Condições de contorno e carregamento.....                                                                                           | 34 |
| Figura 17 - Concreto permeável para extração de corpos de prova.....                                                                            | 35 |
| Figura 18 - Extração dos corpos de prova cilíndricos.....                                                                                       | 35 |
| Figura 19 - Padrão de fissuração do gradiente na vertical (a) e na horizontal (b).....                                                          | 36 |
| Figura 20 - Modelagem numérica do corpo de prova cilíndrico.....                                                                                | 37 |
| Figura 21 - Condições de contorno.....                                                                                                          | 38 |
| Figura 22 - Ensaio de compressão axial.....                                                                                                     | 39 |
| Figura 23 - Ensaio de tração na flexão em três pontos (a) e quatro pontos (b).....                                                              | 40 |
| Figura 24 - Distribuição da porosidade pela altura.....                                                                                         | 41 |
| Figura 25 - Modelo discretizado e condições de contorno da compressão axial (a), flexão em quatro pontos (b) e flexão em três pontos (c).....   | 42 |
| Figura 26 - Evolução da fissura ao longo do tempo.....                                                                                          | 43 |
| Figura 27 - Fratura sob diferentes carregamentos.....                                                                                           | 44 |
| Figura 28 - Gráfico da comparação das condições de contorno.....                                                                                | 45 |
| Figura 29 - Evolução da fratura no corpo de prova com variação na face.....                                                                     | 46 |
| Figura 30 - Evolução da fratura no corpo de prova com variação na altura.....                                                                   | 46 |
| Figura 31 - Padrão de fissuração do prisma na flexão em quatro pontos (a) flexão em três pontos (b) e compressão axial (c).....                 | 48 |

## LISTA DE TABELAS

|                                                               |    |
|---------------------------------------------------------------|----|
| Tabela 1 - Propriedades da placa.....                         | 31 |
| Tabela 2 - Resistência dos prismas de concreto permeável..... | 48 |
| Tabela 3 - Resistência dos prismas de concreto permeável..... | 57 |

## **LISTA DE SIGLAS**

ABAQUS – Software de Análise por Elementos Finitos

DIC – Correlação Digital de Imagens

EFGM – Element Free Galerkin Method

FBM – Finite Block Method

FGM – Functionally Graded Material (Material com Gradiente Funcional)

LDEM – Lattice Discrete Element Method

MATLAB – Matrix Laboratory (Ambiente de Programação Numérica)

RCE – Relação Constitutiva Elementar

XFEM – Extended Finite Element Method

CP – Corpo de Prova

## LISTA DE SÍMBOLOS

$G_f$  – Energia de Fratura

$E$  – Módulo de Elasticidade

$\nu$  – Coeficiente de Poisson

$\rho$  – Densidade

$\epsilon_p$  – Deformação Crítica

$\epsilon_r$  – Deformação de Ruptura

$K_{IC}$  – Tenacidade à Fratura (Stress Intensity Factor)

$K_r$  – Fator de forma

## SUMÁRIO

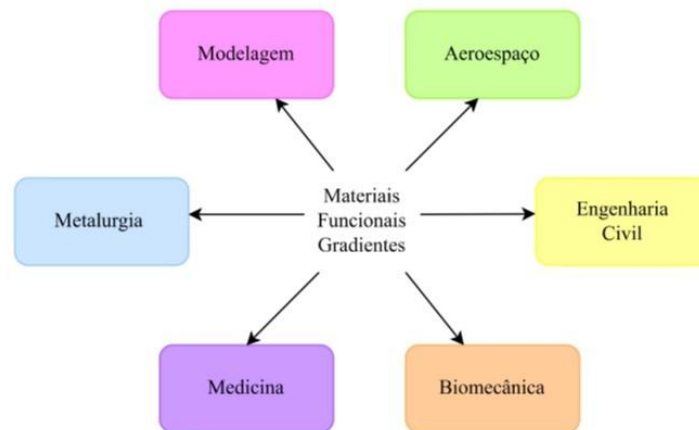
|          |                                                         |     |
|----------|---------------------------------------------------------|-----|
| <b>1</b> | <b>INTRODUÇÃO</b> .....                                 | 13  |
| 1.1      | Objetivos.....                                          | 15  |
| 1.1.1    | Objetivo Geral .....                                    | 15  |
| 1.1.2    | Objetivos Específicos .....                             | 15  |
| 1.1.3    | Justificativa.....                                      | 16  |
| <b>2</b> | <b>REVISÃO BIBLIOGRÁFICA</b> .....                      | 18  |
| 2.1      | Modelos computacionais para análise de FGM.....         | 18  |
| 2.2      | Método de elementos discretos formados por barras ..... | 20  |
| 2.3      | Lei Bilinear de Hillerborg.....                         | 21  |
| 2.4      | Lei Trilinear.....                                      | 23  |
| <b>3</b> | <b>METODOLOGIA</b> .....                                | 25  |
| 3.1      | Construção do modelo no MATLAB .....                    | 26  |
| 3.2      | Implementação do gradiente funcional.....               | 26  |
| 3.2.1    | Lei Bilinear no MATLAB .....                            | 27  |
| 3.2.2    | Lei Trilinear no MATLAB .....                           | 28  |
| <b>4</b> | <b>APLICAÇÕES</b> .....                                 | 30  |
| 4.1      | Placa FGM.....                                          | 30  |
| 4.1.1    | Modelo do LDEM .....                                    | 33  |
| 4.2      | Concreto permeável.....                                 | 34  |
| 4.2.1    | Cilindros de concreto permeável .....                   | 34  |
| 4.2.1.1  | Modelo do LDEM .....                                    | 36  |
| 4.2.2    | Prismas de concreto permeável .....                     | 38  |
| 4.2.2.1  | Modelo LDEM .....                                       | 41  |
| <b>5</b> | <b>RESULTADOS</b> .....                                 | 43  |
| 5.1      | Placa FGM.....                                          | 43  |
| 5.2      | Cilindros de concreto permeável .....                   | 45  |
| 5.2      | Prismas de concreto permeável .....                     | 47  |
| <b>6</b> | <b>CONCLUSÕES</b> .....                                 | 51  |
|          | <b>REFERÊNCIAS</b> .....                                | 53  |
|          | <b>APÊNDICE A</b> .....                                 | 536 |

## 1 INTRODUÇÃO

Os materiais gradientes funcionais, do inglês Functionally Graded Material (FGM), são classificados como materiais avançados, caracterizados pela combinação de dois ou mais constituintes em estado sólido, resultando em uma microestrutura contínua e com variação gradual de propriedades ao longo de uma ou mais direções (Bohidar et al., 2014). O compósito gerado por essa combinação possibilita o aproveitamento simultâneo das propriedades individuais dos materiais envolvidos (Mahamood et al., 2012).

O conceito de FGM foi introduzido em 1984 por cientistas da região de Sendai, no Japão, com o objetivo de desenvolver uma barreira térmica para sistemas aeroespaciais. Desde então, o material passou a atrair atenção internacional, destacando-se como tema recorrente em pesquisas científicas devido à sua versatilidade e alto desempenho em diversas aplicações (SHIOTA *et al.*, 1996). A Figura 1 apresenta exemplos de aplicação dos materiais gradientes funcionais em diferentes áreas de pesquisa:

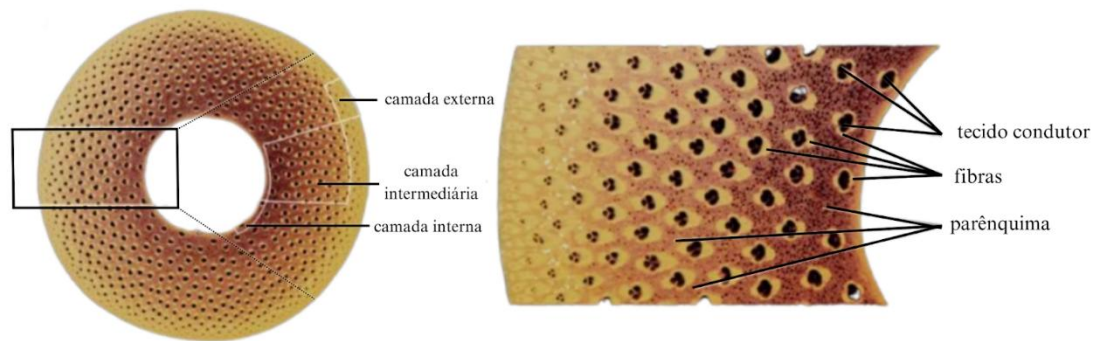
Figura 1 - Aplicações do FGM



Fonte: Elaboração própria.

Um exemplo prático de material com gradiente funcional presente na natureza é o bambu, cuja seção transversal apresenta variação gradual de propriedades ao longo da espessura, como ilustrado na Figura 2.

Figura 2 - Seção transversal do bambu



Fonte: Adaptado de Li et al. (2021).

O colmo do bambu pode ser dividido em três seções: camada externa, camada intermediária e camada interna. A morfologia do feixe vascular varia em um gradiente ao longo da seção transversal. O tecido condutor mais concentrado na camada interna do bambu aumenta a resistência do material e reduz a resistência ao fluxo de água. Verifica-se que a organização estrutural do material é o principal fator responsável pela melhoria de suas propriedades mecânicas, como a resistência à flexão e ao cisalhamento (Li et al., 2021). Esse comportamento evidencia uma distribuição funcional de propriedades ao longo da espessura do bambu, servindo como inspiração para os modelos de materiais com gradiente funcional (FGM).

Apesar de suas vantagens funcionais, os materiais com gradiente de propriedades ainda estão sujeitos a falhas, sendo a fratura uma das mais relevantes no contexto da engenharia. A compreensão dos processos de falha desses materiais tem sido objeto de diversos estudos na literatura, que abordam diferentes cenários e metodologias.

Yildirim et al. (2005) analisaram o comportamento de uma trinca superficial semi-elíptica em um revestimento de FGM constituído por zircônia e titânio, ligado a um substrato homogêneo. Sladek et al. (2003) investigaram os parâmetros de fissuração em placas ortotrópicas de FGM com pré-fissuras, enquanto Bhattacharya e Sharma (2014) estudaram a evolução da fratura por fadiga em placas submetidas a carregamentos térmicos cíclicos. Mais recentemente, Mellouli et al. (2024) exploraram o comportamento à fratura de materiais FGM com variação de porosidade bidimensional.

Por conta da alta complexidade matemática, os estudos deste material com uso dos métodos analíticos são bastante limitados. Atualmente, são escassas as pesquisas sobre FGM com tridimensionalidade, sendo um assunto mais explorado pelos autores em um campo

bidimensional (Swaminathan et al., 2017). Estudos como de Paulino et al. (2003) demonstram que é possível representar as fraturas em materiais gradientes de forma satisfatória a partir de modelos numéricos, porém, ainda são resultados poucos expressivos por conta da dificuldade de compreender o comportamento da zona coesiva do material, necessitando de técnicas computacionais mais avançadas, por conta da não-linearidade. Paulino et al. (2003) ainda afirma que há espaço para aprimoração no estudo da fratura dos FGM, como critérios com capacidade preditiva, com escalas como o tempo e espaço, e conexão do viés de pesquisa com aplicações na indústria.

## **1.1 Objetivos**

Os objetivos que nortearão o trabalho serão apresentados nos itens 1.1.1 e 1.1.2, respectivamente.

### **1.1.1 Objetivo Geral**

Analisar, através da simulação numérica, o comportamento de materiais com gradiente funcional utilizando o Método de Elementos Discretos formados por barras.

### **1.1.2 Objetivos Específicos**

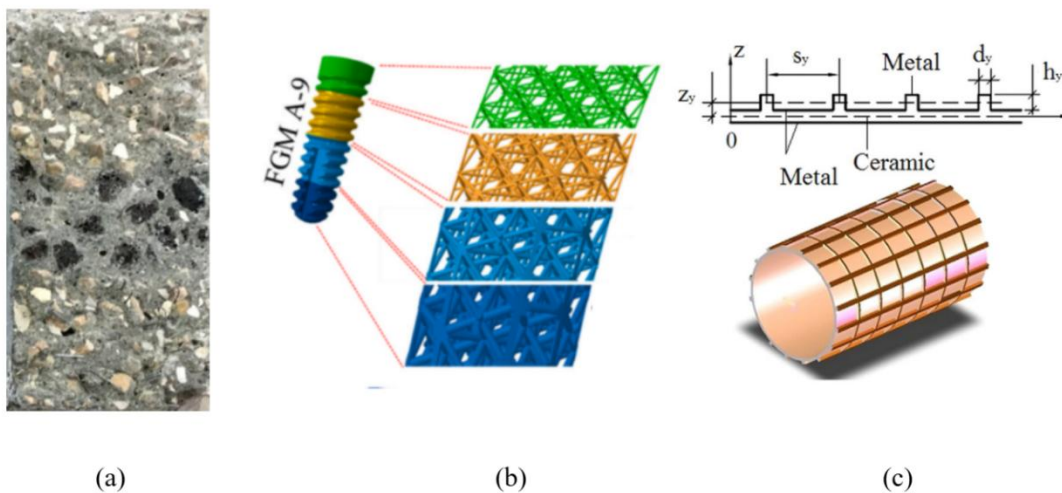
- Simular materiais com gradiente funcional utilizando o LDEM através do ambiente Abaqus.
- Propor uma variação na lei constitutiva do material, adequada para o modelo LDEM.
- Comparar o desempenho do modelo numérico em relação à representação do comportamento real dos materiais gradientes.
- Analisar os efeitos do gradiente sobre o comportamento mecânico do material, sob carregamento de compressão, tração e flexão.

- Validar os resultados numéricos por meio da comparação com dados experimentais da literatura ou com resultados obtidos por outros métodos numéricos.

### 1.1.3 Justificativa

Os materiais com gradiente funcional são relativamente recentes na pesquisa brasileira e apresentam aplicações em diversas áreas, desde a biomedicina até a aeronáutica. Essas estruturas se destacam por sua distribuição heterogênea de propriedades, o que amplia o leque de aplicações potenciais, incluindo a engenharia civil. A variabilidade das propriedades conferida por esses materiais pode proporcionar benefícios significativos, como maior desempenho estrutural e resistência localizada. A Figura 3 apresenta alguns exemplos práticos dessas aplicações em diferentes áreas.

Figura 3 - Exemplos de aplicações de materiais com gradiente funcional: (a) Viga FGM, (b) implante dentário FGM e (c) casca cilíndrica FGM



Fonte: Othman et al. (2021); Ouldyyerou et al. (2022); Duc et al. (2014).

A imagem (a) apresenta uma viga em concreto com um gradiente de propriedades na seção transversal, usada para um estudo de comportamento à flexão. Já a figura (b) mostra uma aplicação na área biomédica, com a utilização de FGM em implantes dentários com gradiente de densidade do tecido ósseo. Por fim, a imagem (c) exemplifica o uso desses materiais na engenharia estrutural, investigando o comportamento de cascas cilíndricas finas de FGM.

Portanto, a motivação deste trabalho surge da necessidade de métodos de análise numérica para uma das características mais críticas dos FGMs para a engenharia: a fratura. O estado da arte atual demonstra avanços em métodos contínuos, como o Método dos Elementos Finitos (FEM). Contudo, estes métodos frequentemente exigem critérios de dano complexos ou técnicas de retalhamento para simular o início e a propagação de descontinuidades. É neste ponto que o Método dos Elementos Discretos formados por barras (LDEM) se destaca, devido à sua formulação inerentemente discreta, ele é particularmente robusto para a modelagem de fenômenos de fratura, tratando a separação e a falha de forma natural.

Todavia, apesar do potencial dos FGMs, ainda são escassas as pesquisas que abordam sua representação em modelos numéricos discretos focados em fratura. Especificamente no contexto do LDEM, as metodologias que descrevem o comportamento de materiais com propriedades variáveis ao longo da estrutura são limitadas. Devido a essa clara lacuna no uso do método de elementos discretos para materiais com gradiente funcional, este trabalho propõe uma nova abordagem para avançar na modelagem desses materiais.

A abordagem por simulação numérica apresenta vantagens substanciais sobre os ensaios experimentais. A modelagem computacional permite uma redução expressiva dos custos e do tempo associados ao desenvolvimento e teste de protótipos físicos. Além disso, um modelo numérico validado torna-se uma ferramenta poderosa para a realização de análises paramétricas, possibilitando o estudo do material sob uma vasta gama de condições com uma agilidade impossível de ser alcançada experimentalmente. Dessa forma, a consolidação de ferramentas como o LDEM para FGMs é fundamental para acelerar o ciclo de design e viabilizar o uso destes materiais avançados na engenharia.

## 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

### 2.1 Modelos computacionais para análise de FGM

A análise de materiais funcionais gradientes por modelos numéricos têm recebido uma atenção crescente no meio da pesquisa atualmente. Os modelos numéricos abrem uma grande gama de possibilidades de métodos para a discretização dos sólidos; nesta seção da revisão teórica são apresentados alguns métodos empregados na simulação dos FGM.

Um exemplo de aplicação de FGM foi apresentado por Shan et al. (2025), onde estudam a vibração não-linear forçada aplicada em uma micro viga piezoelétrica de FGM com efeito flexo elétrico. O método adotado pelos autores para a discretização da viga foi o da quadratura diferencial, do inglês Differential Quadrature Method (DQM), aliado com o método iterativo. O estudo analisou os efeitos piezoelétrico e flexo elétrico inversos em uma viga com uma distribuição gradual dos materiais BaTiO<sub>3</sub> e PVDF ao longo da espessura, com as equações governantes, condições iniciais e de contorno obtidas pelo princípio variacional. Os autores demonstraram que o gradiente funcional altera a forma de deflexão da viga, impactando diretamente no projeto de micros sensores e micro atuadores.

Pant et al. (2017) analisam e comparam dois métodos distintos para simular um FGM composto por liga de alumínio e cerâmica: o método Galerkin de elemento livre do inglês, Element free Galerkin Method (EFGM), e o método dos elementos finitos estendidos, do inglês Extended finite element method (XFEM). O modelo discretizou uma placa composta por uma borda de liga e outra de cerâmica, com uma pré-fissura, que é carregada de forma cíclica, em modo misto. O estudo concluiu que o EFGM é uma alternativa eficaz e relativamente simples para simular problemas realistas de fraturas em materiais gradientes.

Huang et al. (2023) aplicaram o método de blocos finitos, do inglês Finite Block Method (FBM), sem malha com elementos infinitos para sólidos de FGM fissurados assimétricos. Como ferramenta de comparação, os autores investigaram soluções analíticas e outros métodos numéricos, como o método dos elementos finitos, para ilustrar a convergência do FBM. O uso do método proposto sem malha demonstrou ser uma alternativa eficiente para a simulação de FGM com fraturas complexas, ainda apresentando um baixo custo operacional.

Svyetlichnyy (2024) estudou um método específico para a fabricação de materiais com gradiente funcional, o processo de Fusão em Leito de Pó (PBF). Em seu estudo foi aplicado um

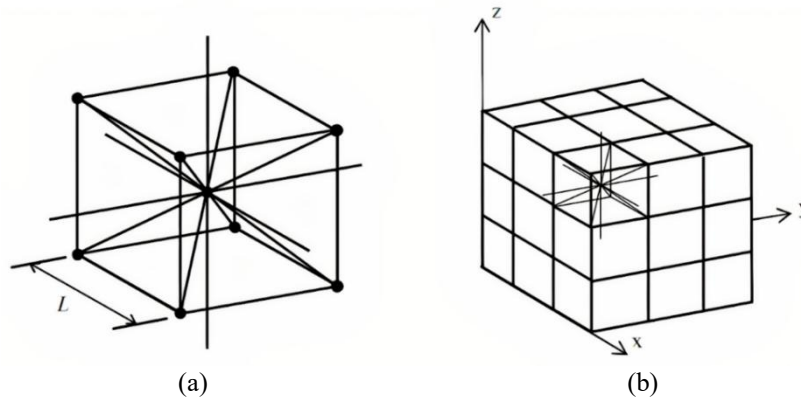
método numérico nomeado Método de Lattice Boltzmann (LBM). O LBM, um método de dinâmica de fluidos computacional (CFD), empregado para modelar os fenômenos físicos complexos, incluindo fluxo de fluido em superfície livre, fluxo de calor, fusão, solidificação e difusão de misturas de materiais.

O processo de Fusão em Leito de Pó para materiais com gradientes funcionais também é desenvolvido com auxílio de outros modelos numéricos, como, por exemplo, o DEM. Choudhury et al. (2023) abordam o uso do DEM como principal ferramenta para simular um material composto de propriedades similares à titânio e níquel. Em comparação com o método experimental, as simulações realizadas confirmaram a viabilidade do DEM para representar essa categoria de material.

Explorando outras abordagens numéricas, Du et al. (2025) focaram na modelagem dinâmica de micro-vigas de material funcionalmente graduado (FGM), variando de cerâmica a metal, acopladas a um cubo rígido. Para isso, os autores aplicaram um Método Sem Malha (Meshless Method), especificamente o Método de Interpolação por Pontos Radiais (RPIM). O estudo desenvolveu um modelo dinâmico acoplado rígido-flexível e a teoria de viga de Timoshenko. Os resultados das simulações numéricas demonstraram a precisão e eficiência do método sem malha proposto para prever o comportamento dinâmico e a resposta vibratória de estruturas FGM em micro-escala, validando-o como uma ferramenta eficaz para este tipo de análise.

## 2.2 Método de elementos discretos formados por barras

Figura 4 - Modelo cúbico básico (a) e geração do corpo prismático (b)



Fonte: Kostaski et al. (2011).

O método dos elementos discretos formado por barras, do inglês Lattice Discrete Element Method (LDEM), discretiza o sólido por meio de um arranjo cúbico repetido, com as massas concentradas nos nós, que são conectados por barras ortotrópicas, com liberdade nas três direções. (Nayfeh e Hefzy, 1978).

Esse método de discretização segue a segunda lei de Newton para reger o movimento resultante de cada nó; essa condição é descrita por:

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + F(t) - P(t) = 0 \quad [1]$$

onde os vetores  $\ddot{x}$  e  $\dot{x}$  representam a aceleração e velocidade nodal, respectivamente,  $M$  e  $C$  são as matrizes de massa e amortecimento,  $F(t)$  e  $P(t)$  são a força nodal interna e externa. Ambas matrizes  $M$  e  $C$  são diagonais, logo, não são acopladas, o que permite a integração no decorrer do tempo, utilizando um esquema de diferenças finitas centrais explícito. Desta maneira, em função da natureza detalhada da atualização de tempo, os deslocamentos são computados de forma natural.

Como afirma Kostaski (2012), a energia de fratura dissipada no modelo contínuo durante a ruptura precisa ser correspondente a sua representação no modelo discreto. A energia associada à fratura de uma amostra contínua de material, de dimensões  $L \times L \times L$ , resultante de uma ruptura paralela a uma de suas faces é:

$$\Gamma = Gf\Lambda = GfL^2 \quad [2]$$

sendo  $Gf$  a energia de fratura do material e  $\Lambda$  a área de fratura atual. Já a fratura do LDEM tem a contribuição de uma barra longitudinal central, quatro barras longitudinais nas bordas do módulo, e quatro barras diagonais. Então a energia do sólido é equivalente a energia de fratura do módulo do LDEM; como expressão na equação 3.

$$GfL^2 = Gf \left(4\left(\frac{1}{4}\right)A_l^f + A_l^f + 4A_d^f\right) \quad [3]$$

A área transversal  $A_i$  dos elementos longitudinais é dada por:

$$A_i = \Phi L^2 \quad [4]$$

onde  $L$  é o comprimento dos lados do módulo. Para os elementos diagonais, a área transversal é dada por:

$$A_d = \frac{2}{\sqrt{3}}\phi\delta L^2 \quad [5]$$

sendo  $\delta = 9\nu/(4 - 8\nu)$  e atribuindo o valor de  $\nu$  como 0,25, os coeficientes da equação são  $\delta = 1,125$  e  $\phi = 0,4$ . se relaciona a área de fratura ( $A_i^f$ ) com a área da barra dos elementos diagonais e longitudinais.

$$A_l^f = \frac{L^2}{\left(2 + \frac{8}{\sqrt{3}}\right)\delta} \quad [6]$$

$$\frac{A_d^f}{A_d} \approx \frac{A_l^f}{A_{di}} = \frac{1}{2\phi + \frac{8}{\sqrt{3}}\delta} = 0,3473 \quad [7]$$

### 2.3 Lei Bilinear de Hillerborg

No estudo de materiais quase-frágeis, pode se adotar que a energia liberada na formação de uma área de fratura é  $Gf$ , e pode ser descrita pela equação:

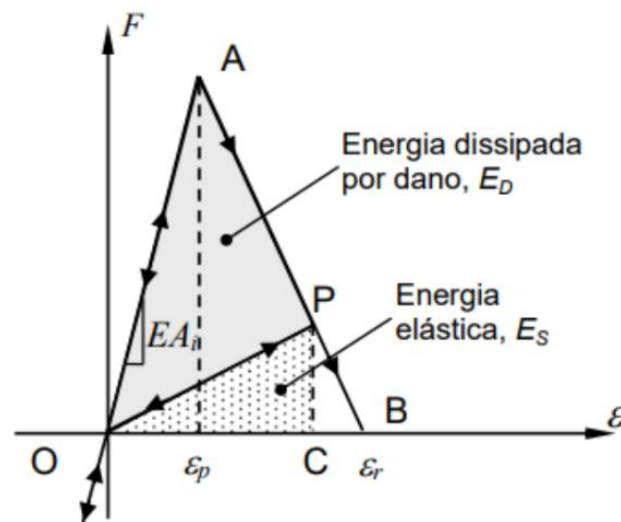
$$\int_0^{w_1} \sigma dw = Gf \quad [8]$$

onde  $w$  é a largura da fratura. A forma da curva está ligada diretamente com a natureza do material como proposto por Hillerborg (1978), sendo que para materiais que não escoam quando expostos à tração, como o concreto, assume-se que a curva independe da geometria do corpo de prova.

Rocha (1989) expandiu o modelo de lei bilinear previamente proposto, implementando a Relação Constitutiva Elementar (RCE). A modificação imposta descreve o comportamento do material pós-ruptura, capturando os efeitos irreversíveis dos materiais plásticos estudados.

Segundo Kostascki (2012), o modelo de bilinear cumpre a condição necessária, que a quantidade de energia necessária para fraturar o elemento analisado seja correspondente à área da curva debaixo do gráfico:

Figura 5 - Modelo bilinear de Hillerborg



Fonte: Kostascki (2012).

No primeiro trecho a reta OA descreve o comportamento linear do material, a inclinação é orientada pelo módulo de elasticidade do material estudado e a respectiva área do elemento, ou seja, quando  $\varepsilon \leq \varepsilon_p$  a reta da força é descrita por  $EA_i$ .

Após passar o pico A, a força começa a ser reduzida a inclinação da reta passa a ser diferente do primeiro trecho, chegando até o ponto de deformação crítica, onde a força é zero. Ou seja, no trecho onde  $\varepsilon_p < \varepsilon \leq \varepsilon_r$ , e então a reta é descrita pela equação:

$$f(\varepsilon) = EA_i \varepsilon_i \frac{\varepsilon_r - \varepsilon}{\varepsilon_r - \varepsilon_p} \quad [9]$$

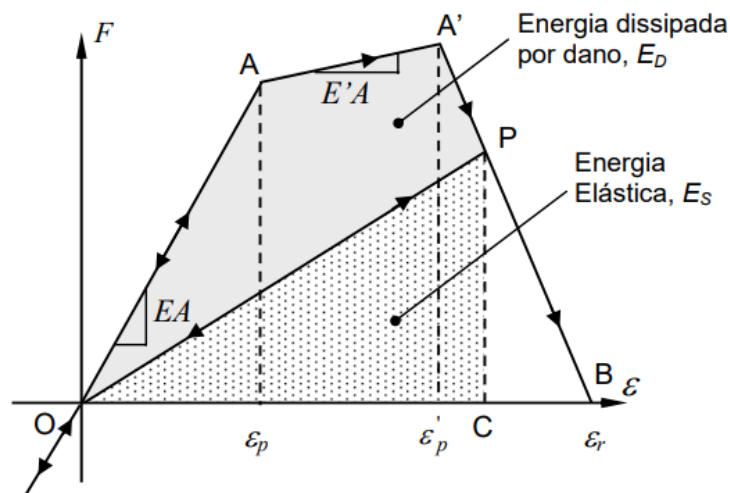
O modelo de Hillerborg satisfaz a condição de que a área debaixo da curva OAB seja equivalente à energia de fratura  $G_f$  do elemento analisado. A área ainda pode ser estudada em duas seções distintas, sendo a área OAP e a área OPC. A área OAP se refere a energia dissipada

pelo dano, representado a energia que foi irreversivelmente perdida pelo material no processo de compressão. Enquanto a área OPC representa a energia elástica dissipada, que é armazenada pelo material e não causa deformações permanentes.

## 2.4 Lei Trilinear

Batista (2007) analisou em simulações com materiais sem resposta mecânica linear após a ruptura que as deformações não são integralmente captadas com o modelo bilinear. Diante a isso, sugeriu uma alternativa à lei bilinear de Hillerborg, chamada de lei trilinear. Essa proposta é ilustrada na Figura 7, que apresenta a representação feita por Kostascki (2012), com base no modelo de Batista (2007).

Figura 6 - Lei Trilinear



Fonte: Kostascki (2012).

Com novos parâmetros de ajuste, a lei proposta por Batista permite a representação da alteração na rigidez do material após o limite elástico (ponto A), com a segunda seção do gráfico com uma curvatura E' e também a diminuição da capacidade de carga do elemento após o limite de capacidade de carga (ponto A').

Da mesma maneira que a lei bilinear, a lei trilinear começa com um trecho linear respeitando o módulo de elasticidade do material até o limite elástico, ou seja, quando  $\varepsilon \leq \varepsilon_p$  o caminho da força é descrito por  $EA_i\varepsilon$ . Após o ponto P e a curva é regida por uma nova

inclinação, representando a diminuição da capacidade de carga, do trecho  $\varepsilon_p$  até  $\varepsilon'_p$ , sendo a nova equação da reta:

$$f(\varepsilon) = EA_i c \varepsilon_p + EA_i (1 - c) \frac{\varepsilon'_p - \varepsilon}{\varepsilon'_p - \varepsilon_p} \quad [10]$$

Posteriormente ao limite de capacidade de carga ocorre o descarregamento do elemento, de  $\varepsilon'_p$  até  $\varepsilon_r$ . Esse descarregamento é expresso pela equação:

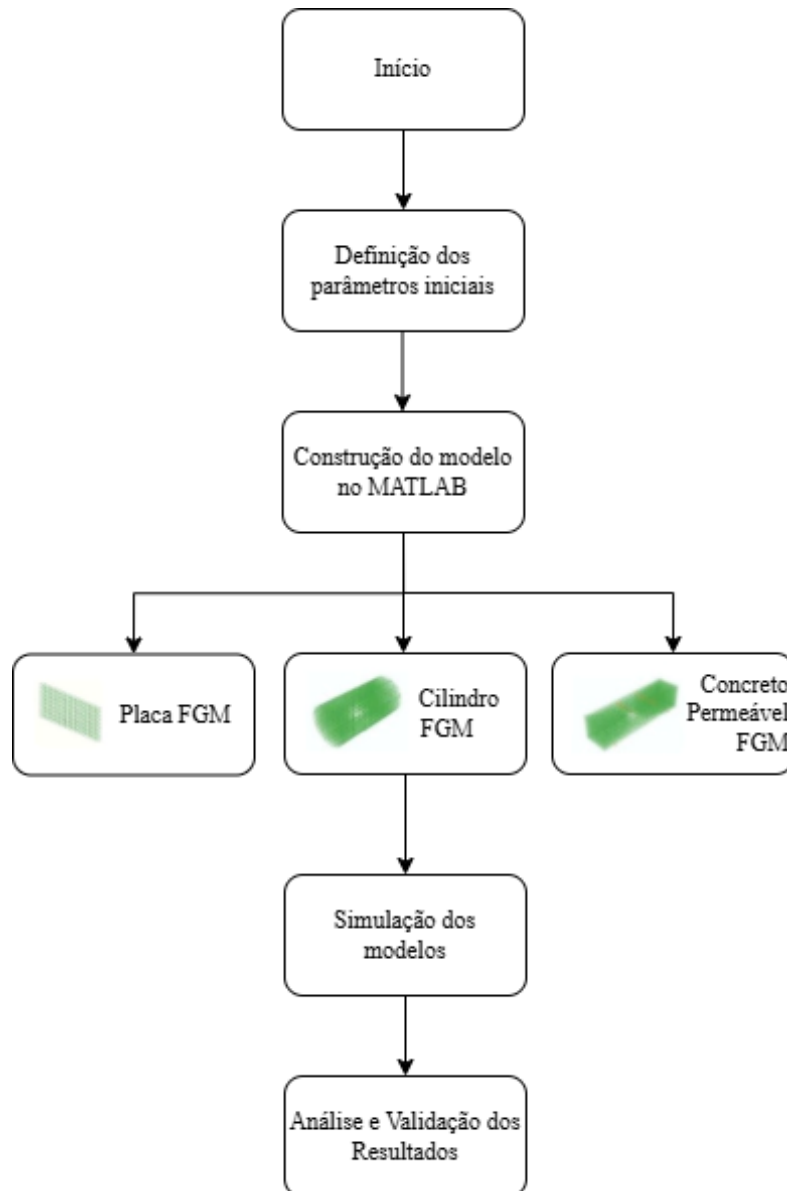
$$f(\varepsilon) = EA_i c \varepsilon_p \frac{\varepsilon_r - \varepsilon}{\varepsilon_r - \varepsilon'_p} \quad [11]$$

A lei trilinear, amplamente utilizada em estudos aliada com a lei de Hillerborg, como vemos na análise de fratura de elementos treliçados do estudo de Kostaski et al. (2011), foi selecionada por duas vantagens principais. Primeiramente, oferece a flexibilidade necessária para representar com precisão as variações de rigidez e tenacidade inerentes ao gradiente funcional. Em segundo lugar, e de forma crucial, ela permite capturar o comportamento pós-pico do material — uma análise essencial do comportamento mecânico impossível de se obter com a lei bilinear.

### 3 METODOLOGIA

Neste capítulo são apresentadas as etapas metodológicas adotadas para a realização das simulações numéricas, incluindo a definição das propriedades numéricas e a seleção do tamanho da malha. A Figura 8 apresenta o fluxograma esquematizando os procedimentos desenvolvidos ao longo do estudo para alcançar os objetivos propostos.

Figura 5 - Etapas da metodologia de estudo



Fonte: Elaboração própria.

### 3.1 Construção do modelo no MATLAB

A construção dos modelos para simulação foi realizada a partir da linguagem MATLAB, do MathWorks, com o objetivo de reproduzir, numericamente, modelos com diferentes geometrias, propriedades mecânicas e condições de contorno. Cada modelo apresenta um script em formato INP, para posterior simulação no ABAQUS.

O modelo é discretizado por barras conectadas por nós, sendo que cada barra carrega a propriedade do material atribuída à sua posição na estrutura. Cada conjunto cúbico formado por nós e barras é denominado módulo, e uma sequência desses módulos constitui a malha, conforme a geometria estudada. O tamanho do módulo, representado por  $L$ , influencia diretamente a precisão da simulação, uma vez que uma malha mais refinada permite capturar com maior fidelidade o comportamento estrutural do material.

O programa permite a definição das propriedades mecânicas e geométricas do material de acordo com o modelo a ser simulado. As propriedades mecânicas inseridas são: módulo de elasticidade, energia de fratura, deformação crítica  $\epsilon_p$ , densidade e coeficiente de Poisson. Esses valores são atribuídos às barras da estrutura conforme a posição no modelo e podem ser constantes ou variar de acordo com a definição do gradiente funcional.

Além dos parâmetros mecânicos, também é definida uma geometria para o material, de acordo com a dimensão do modelo e o tamanho do módulo, que constitui a malha. Os valores utilizados foram definidos conforme o objetivo de cada simulação, obtidos a partir de dados disponíveis na literatura, como será demonstrado na seção de aplicações.

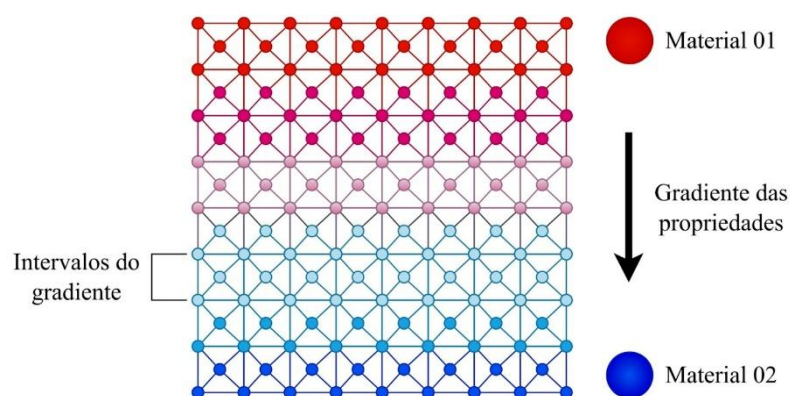
### 3.2 Implementação do gradiente funcional

A distribuição de determinadas propriedades do material é realizada de forma gradual ao longo da estrutura, por meio da implementação de um gradiente funcional. A suavidade dessa transição depende do número de camadas definidas no modelo, sendo que os valores das propriedades em cada camada são calculados com base em um valor mínimo e um valor máximo previamente estabelecidos.

Os valores mínimo e máximo são utilizados para a construção de uma matriz linear com valores igualmente espaçados, de acordo com o número de camadas definido. Cada um desses

valores é então atribuído a um nó, com base em sua posição na malha. No caso de uma variação ao longo da altura do modelo, por exemplo, a coordenada Y é utilizada como referência. O programa calcula a posição de cada barra com base no seu baricentro e a classifica em um grupo correspondente ao intervalo de altura relativo a cada camada. Como pode ser observado na Figura 09: o material 01, em vermelho, é designado ao topo da malha, e varia em um gradiente até o material 02, em azul, em intervalos.

Figura 6 - Distribuição de propriedades no LDEM



Fonte: Elaboração própria.

A partir dessa posição, é aplicada a lei correspondente de acordo com o valor da propriedade gradiente. Essa abordagem possibilita a utilização de diferentes leis constitutivas: a bilinear e trilinear, permitindo representar adequadamente o comportamento dos materiais com gradiente funcional.

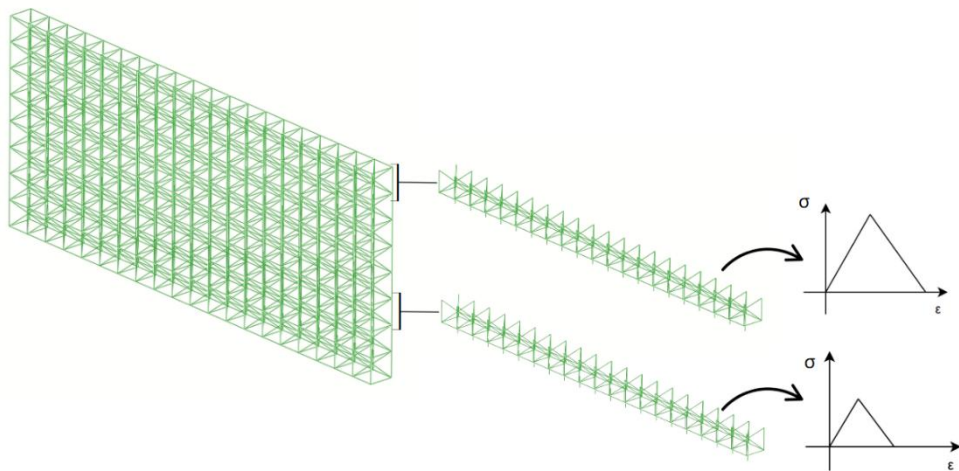
### 3.2.1 Lei Bilinear no MATLAB

Com os parâmetros dos materiais definidos, o script do modelo numérico avança para uma nova rotina responsável pela descrição da lei constitutiva do material. Cabe ressaltar que, embora os dados iniciais sejam referenciados em termos de força, a rotina interna do MATLAB processa essas informações como tensão, simplesmente dividindo a força pela área. A formulação adotada é baseada em dois pontos principais da curva tensão-deformação: o ponto de tensão máxima, que representa o limite de resistência do material, e o ponto de deformação máxima, que delimita a extensão do comportamento após o pico de tensão. Por conta de diferença de comprimento entre as barras longitudinais e diagonais o programa divide a

deformação máxima ( $\epsilon_r$ ) em dois parâmetros,  $E_r$  para as barras longitudinais e  $E_{rdiagonal}$  para as barras longitudinais. Como o comportamento inicial do gráfico tensão-deformação obedece ao seu módulo de elasticidade designado até chegar ao ponto de tensão máxima, por conta da Lei de Hooke, a inclinação apresentada na lei é igual para qualquer ponto da malha.

Cada intervalo de propriedades tem sua lei descrita de acordo com a sua região na malha. A partir da disposição da faixa de determinada propriedade a sua equação correspondente é aplicada, assegurando que a resposta numérica acompanhe o material que a representa. Em um modelo com energia de fratura variável, a faixa do limite extremo da propriedade tem um pico maior que a faixa no limite inferior, o que confere uma resistência maior para o topo da malha, como pode se observar na Figura 10.

Figura 7 - Aplicação da lei bilinear no modelo FGM

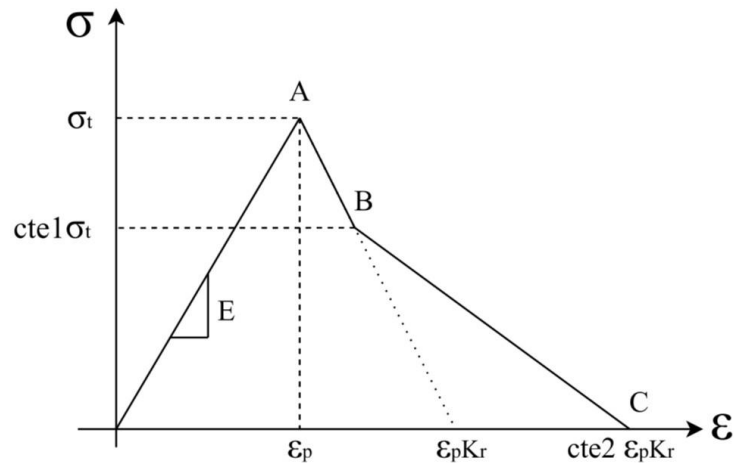


Fonte: Elaboração própria.

### 3.2.2 Lei Trilinear no MATLAB

Com o objetivo de representar com maior precisão o comportamento dos materiais analisados, foi implementada uma lei constitutiva mais condizente com os resultados observados em ensaios experimentais: a lei trilinear. Dentro da rotina de descrição dos materiais, a nova formulação foi inserida com dois parâmetros distintos: constante 1 (cte1) e constante 2 (cte2).

Figura 8 - Lei trilinear para aplicação no MATLAB



Fonte: Elaboração própria.

Como representa a Figura 11, a lei trilinear incrementa uma reta de rigidez diferente da inicial ao gráfico de tensão-deformação, representando o comportamento do material na fase de endurecimento. Após ultrapassar o ponto A, que representa o pico de tensão, o gráfico segue até o ponto B, que é definido pela constante 1. Ou seja, com essa implementação, a seção de endurecimento pode ter um pico de tensões maior que A, quando o valor de  $cte1$  for maior que 1, o que é um comportamento observado em alguns materiais de forma experimental. Em seguida, inicia-se a fase de amolecimento, representada pela reta BC, que se estende até o ponto C, determinado pelo produto entre a constante  $cte2$ , o fator  $Kr$  e a deformação crítica  $\epsilon_p$ .

As constantes  $cte1$  e  $cte2$  controlam, respectivamente, a intensidade do endurecimento e a extensão do amolecimento na curva trilinear. A altura do ponto B é definida pelo produto da tensão máxima de ruptura pela constante 1. Já a constante 2, aliada de outras propriedades do material, determina a posição do ponto C. Dessa forma, a implementação dessas duas variáveis permite ajustes no formato final da lei constitutiva sem a necessidade de alterar as propriedades do material, o que é notadamente útil para adequar os resultados numéricos aos dados experimentais.

A distribuição da lei constitutiva trilinear ao longo da malha segue o mesmo critério adotado na aplicação da lei bilinear. Diferentemente da lei bilinear, é necessário calcular a área debaixo da curva usando duas energias de fratura; nesse caso considera-se  $Gf^*$  como a área do primeiro triângulo (que começa no ponto 0, atravessa o ponto A e termina em  $\epsilon_p Kr$ ) e  $Gf^+$  como a área do segundo triângulo (formado pelos pontos  $\epsilon_p Kr$ , B e C). Assim temos:

$$\frac{(Gf^*+Gf^+)A^f}{L_i} = \acute{A}rea \quad [12]$$

Com base nas áreas da lei constitutiva, desenvolve-se as equações que permitem estabelecer a relação entre as constantes  $cte1$  e  $cte2$ , garantindo uma proporcionalidade entre elas, a fim de garantir que o gráfico resultante tenha uma forma compatível com o comportamento físico esperado do material.

$$\frac{(Gf^+ \cdot Af^+)}{L_i} = \frac{\epsilon_p \cdot K_r \cdot \sigma_t}{2} = \frac{\epsilon_p \cdot K_r \cdot E \cdot A_i \cdot E_p}{2} \quad [13]$$

$$K_r = Gf^* \cdot \frac{Af^*}{A_i} \cdot \frac{2}{L_i \cdot \epsilon_p^2 \cdot E} \quad [14]$$

$$\frac{Gf^+ \cdot Af^+}{L_i} = \frac{(cte2 \cdot \epsilon_p \cdot K_r - \epsilon_p \cdot K_r) \cdot cte1 \cdot \sigma}{2} \quad [15]$$

$$\frac{Gf^+ \cdot Af \cdot 2}{L_i \cdot E \cdot A_i \cdot \epsilon_p} = (cte2 - 1) \cdot K_r \cdot cte1 \quad [16]$$

$$\frac{Gf^+}{Gf^*} = cte1(cte2 - 1) \quad [17]$$

## 4 APLICAÇÕES

### 4.1 Placa FGM

Cheng et al. (2018) realizaram um estudo numérico da propagação de uma fissura em uma placa de material gradiente. A abordagem utilizada foi a peridinâmica, inicialmente introduzida por Silling (2000) como uma forma de modelar fraturas dinâmicas. A peridinâmica se trata de um modelo não local que utiliza uma reformulação da lei de movimento, de maneira a não ter uma variável espacial. O tipo do modelo peridinâmico tratado no artigo é *bond-based*,

e busca representar o comportamento frágil de uma placa FGM com imperfeições submetida a um carregamento dinâmico.

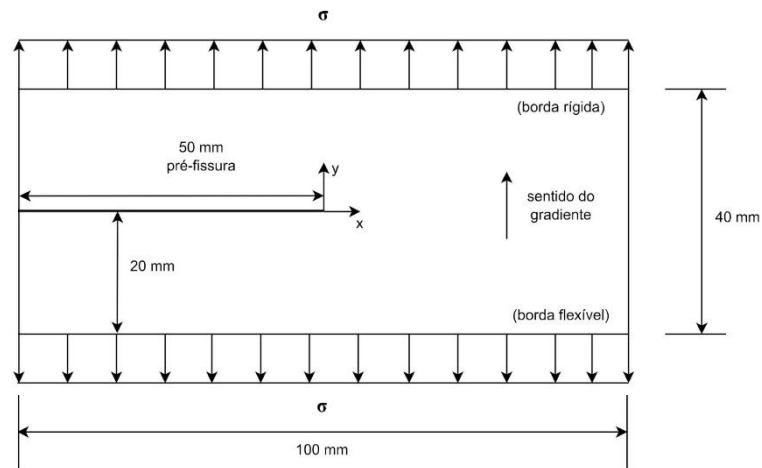
A placa possui uma geometria retangular, com 100 mm de largura e 40 mm de altura, com uma trinca horizontal de 50 mm. O gradiente varia no sentido da direção y, onde a borda inferior é constituída por um material flexível e a superior por um material rígido. O módulo de elasticidade varia de 3,8 a 11,1 GPa, a tenacidade à fratura varia de 2,1 a 3,6 MPa·m<sup>1/2</sup> e a densidade de 948 a 1812 kg/m<sup>3</sup>, como é apresentado na Tabela 1. As bordas da placa são submetidas por um carregamento dinâmico uniforme e simétrico, como é representado na Figura 12.

Tabela 1 - Propriedades da placa

| Parâmetro                   | Camada Superior | Camada Inferior |
|-----------------------------|-----------------|-----------------|
|                             | Rígida          | Flexível        |
| E (Gpa)                     | 11,1            | 3,8             |
| $K_{IC}$                    | 3,6             | 2,1             |
| $\rho$ (kg/m <sup>3</sup> ) | 1812            | 948             |

Fonte: Adaptado de Cheng et al. (2018).

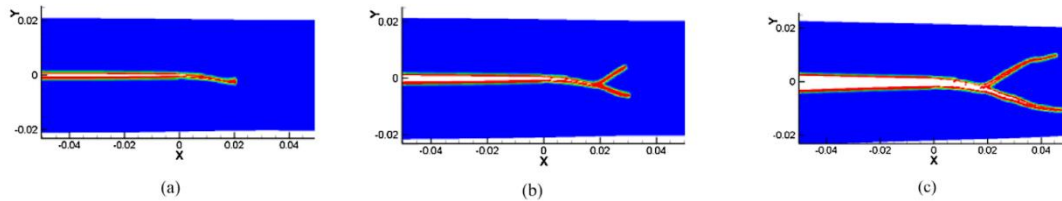
Figura 9 - Geometria e condições de contorno da placa FGM



Fonte: Adaptado de Cheng et al. (2018)

Com o modelo desenvolvido, os autores observaram a evolução da trinca em diferentes instantes, sendo analisadas tanto a trajetória quanto a ocorrência de ramificações.

Figura 10 - Evolução da fissura nos instantes (a) 45  $\mu$ s, (b) 60  $\mu$ s, and (c) 90  $\mu$ s

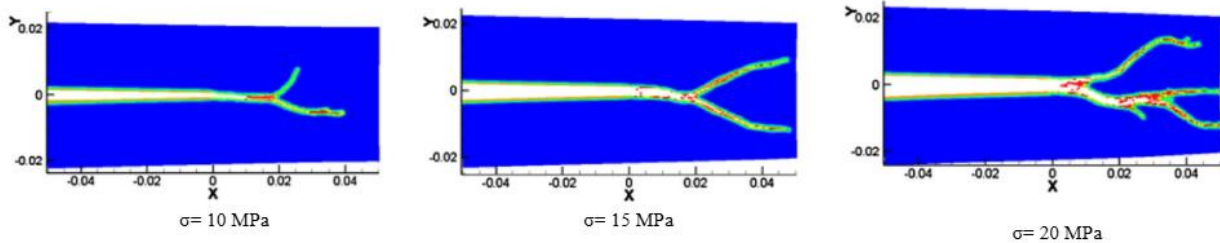


Fonte: Cheng et al. (2018)

A Figura 13 mostra o resultado encontrado pelos autores na placa de FGM carregada nas bordas. Observa-se que a trinca começa na pré-fissura, com uma forma retilínea, logo inclinando-se, suavemente, para a borda flexível. Essa forma inclinada da fissura é esperada em materiais que variam ao longo de sua estrutura, pois a borda flexível apresenta uma resistência menor à tração que a placa está submetida, logo, fissura antes que a borda rígida. No instante 60  $\mu$ s existe uma bifurcação da fissura, onde há uma inclinação mais acentuada em direção a borda superior da placa, enquanto, para borda de menor resistência, a inclinação é mais sutil. Esse comportamento evidencia o efeito da distribuição gradiente das propriedades mecânicas sobre o padrão de fratura.

Além da análise da fissura ao longo do tempo, Cheng et al. (2018) também exploram o efeito de diferentes tensões de carregamento de tensão aplicados a placa.

Figura 11 - Fissuração na placa FGM em diferentes amplitudes de carga

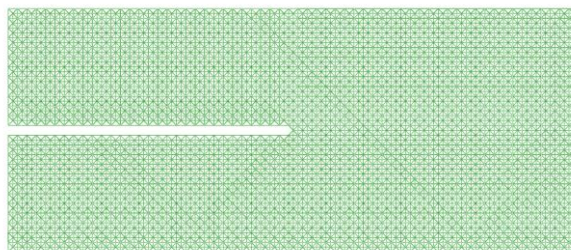


Fonte: Cheng et al. (2018)

#### 4.1.1 Modelo do LDEM

Com base no estudo de Cheng et al. (2018), foi desenvolvido o modelo numérico da placa FGM. A placa foi discretizada com as mesmas dimensões e propriedades de material gradiente do estudo original, variando do material rígido na borda superior para o material flexível na borda inferior. A representação da placa discretizada é apresentada na Figura 15.

Figura 12 - Placa FGM em LDEM



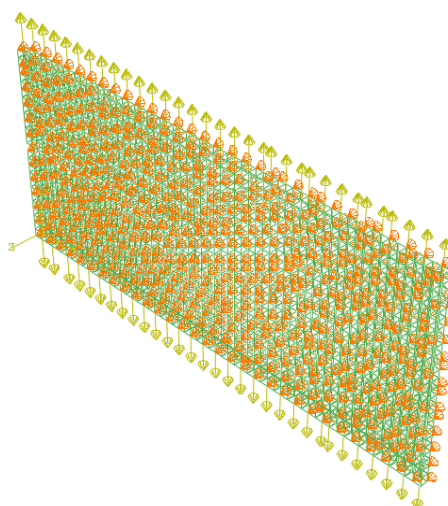
Fonte: Elaboração Própria

A dimensão dos módulos cúbicos adotada foi de 0,16 centímetros, considerando a simplicidade geométrica da estrutura, este tamanho de módulo constitui uma malha relativamente fina. A espessura da placa foi composta por dois módulos, e a variação do material em sua altura foi distribuída em 20 intervalos linearmente espaçados, ou seja, com uma

variação linear de propriedades do topo até a base da placa. A pré-fissura foi construída pela remoção de uma fileira de módulos na região central esquerda da placa.

Para replicar as condições de carregamento do estudo de Cheng et al. (2018), que utilizam um carregamento de tração simétrico, o modelo numérico foi submetido a uma carga linearmente distribuída nas suas bordas superior e inferior, como apresentado na Figura 15. Além do carregamento também é aplicada uma restrição na direção Z do modelo, que impede deslocamentos na direção da espessura da placa, para a simulação do problema de forma puramente bidimensional, ou seja, um estado plano de tensões.

Figura 13 - Condições de contorno e carregamento



Fonte: Elaboração Própria

## 4.2 Concreto permeável

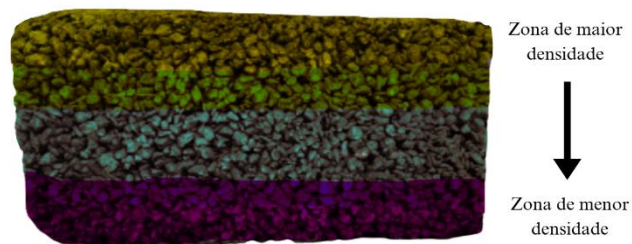
### 4.2.1 Cilindros de concreto permeável

O modelo experimental desta aplicação baseia-se no trabalho em desenvolvimento de Oliveira (2024). Enquanto Oliveira analisa o comportamento de um concreto permeável sob tração, flexão, fadiga à flexão e a sua taxa de infiltração, a aplicação numérica tem o foco principal em comparar os resultados quanto à ruptura dos modelos cilíndricos do estudo experimental. Para isso, foram moldados cubos com dimensões de 400 x 400 x 200 mm,

produzidos com um concreto cuja resistência à compressão é de 12 MPa, resistência à tração de 2,18 MPa e módulo de elasticidade de 17,15 GPa.

Após a mistura dos materiais, o concreto permeável é disposto em formas metálicas e passa pelo processo de adensamento mecânico, com o auxílio de um rolo. Esse procedimento resulta em uma distribuição gradiente de sua densidade, conferindo-o como um material funcional gradiente. No topo do prisma, onde existe o contato direto da superfície com o rolo, o concreto acaba sofrendo um adensamento maior, o que causa uma zona de menor porosidade e maior densidade, como é possível observar na Figura 17.

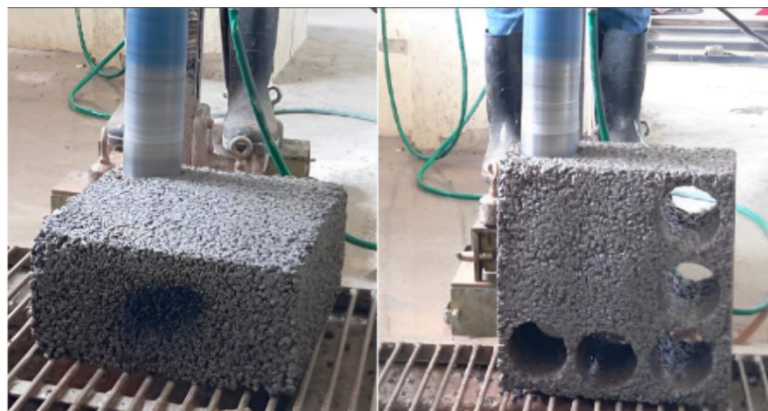
Figura 14 - Concreto permeável para extração de corpos de prova



Fonte: Grupo de pesquisa MAEC (2024)

Deste prisma são extraídos os corpos de prova para o teste, como apresentado na Figura 15. O processo de extração ocorre em duas direções: vertical e horizontal. A variação no sentido da extração dos cilindros resulta em materiais gradientes com duas disposições, uma ao longo da seção transversal e outra ao longo da altura.

Figura 15 - Extração dos corpos de prova cilíndricos (a) vertical e (b) horizontal



(a)

(b)

Fonte: Grupo de pesquisa MAEC (2024).

Figura 16 - Padrão de fissuração do gradiente na vertical (a) e na horizontal (b)



Fonte: Grupo de pesquisa MAEC (2024)

Verificou-se que a orientação da extração dos corpos de prova influenciou diretamente o modo de fissuração. Quando extraídos na direção vertical, onde o gradiente de propriedades é distribuído ao longo da altura do CP, a fissura tem um desvio de percurso. O desvio de percurso observado ocorre pelo aumento das densidades ao longo das camadas, que restringem e desviam o caminho da trinca. Enquanto os corpos de prova que são extraídos na direção horizontal, onde o gradiente de propriedades é distribuído ao longo da face do CP, tem uma programação de fissura mais uniforme, atravessando o material de face a face. Esse comportamento reflete a influência direta do padrão de gradiente no mecanismo de fratura do material.

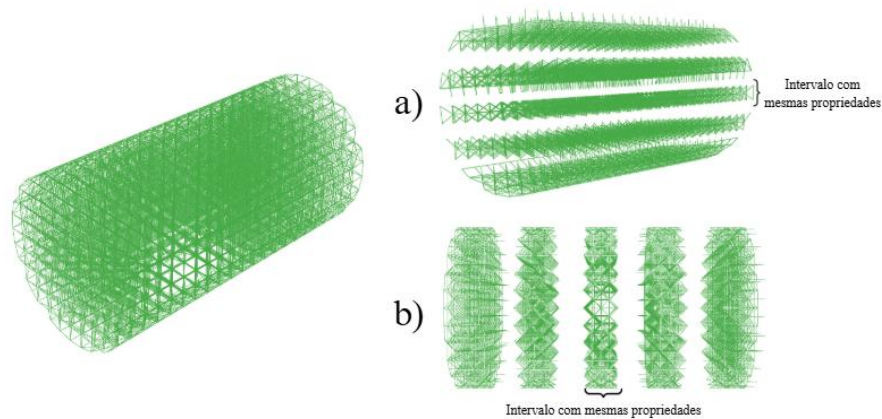
#### 4.2.1.1 Modelo do LDEM

Com base no modelo experimental estudado, foram desenvolvidos modelos numéricos de acordo com cada orientação de ensaio. Duas hipóteses foram formuladas e testadas para representar a variação observada no concreto permeável. A modelagem foi iniciada com uma hipótese simples de gradiente, considerando a variação de apenas uma propriedade do material. Essa abordagem visou correlacionar a variação observada experimentalmente com um único fator dominante, a energia de fratura.

A energia de fratura foi definida de forma variável ao longo do corpo de prova, acompanhando o gradiente de porosidade observado experimentalmente. Para o modelo prismático, o domínio foi discretizado em 10 intervalos, onde cada segmento recebeu um valor específico de energia de fratura condizente com os dados de compactação obtidos experimentalmente.

Baseado nas dimensões experimentais foram construídos os cilindros com os gradientes em ambos sentidos, como é possível observar na Figura 20. O cilindro a) representa o corpo de prova que foi retirado no sentido horizontal e o cilindro b) no sentido vertical.

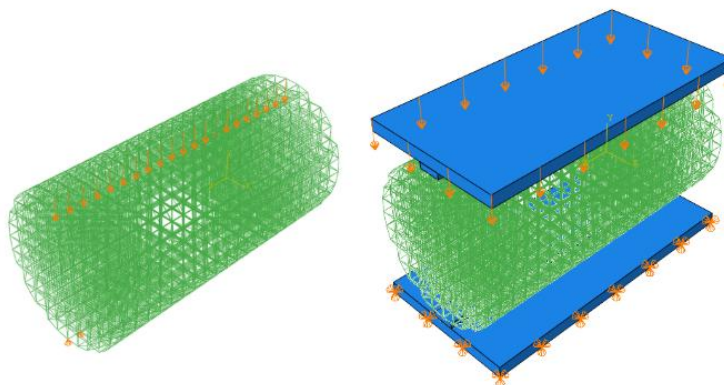
Figura 17 - Modelagem numérica do corpo de prova cilíndrico



Fonte: Elaboração Própria

Foram adotados dois métodos para a condição de contorno das simulações. O primeiro consistiu na restrição do deslocamento dos nós inferiores do cilindro e a aplicação de um deslocamento a uma determinada amplitude nos nós superiores. Enquanto a segunda abordagem incluiu a modelagem de taliscas de madeiras e placas de aço para distribuir os esforços para o corpo de prova de maneira mais condizente com o que é observado no ensaio de compressão. A representação de ambas as abordagens de contorno é apresentada na Figura 21.

Figura 18 - Condições de contorno



Fonte: Elaboração Própria

#### 4.2.2 Prismas de concreto permeável

O modelo experimental desta aplicação baseia-se no trabalho em desenvolvimento de Oliveira et al. (2025). O estudo experimental tem como objetivo investigar o comportamento mecânico de um concreto permeável por meio da realização dos seguintes ensaios: compressão axial, compressão diametral, tração na flexão em três e quatro pontos. Nos ensaios realizados, foram obtidos os seguintes parâmetros representativos do material: a densidade do concreto foi determinada como  $1850 \text{ kg/m}^3$ ; o módulo de elasticidade, obtido a partir do ensaio de flexão a quatro pontos, foi de  $7,43 \text{ GPa}$ ; a resistência à tração, medida pelo ensaio de compressão diametral, resultou em  $0,85 \text{ MPa}$ , correspondente a uma deformação crítica de  $1,14 \times 10^{-4}$ ; e a energia de fratura média foi estimada em  $15 \text{ N/m}$ .

No presente trabalho, apenas os ensaios de compressão axial e de tração na flexão (em três e quatro pontos) serão considerados na etapa de simulação numérica, visando reproduzir e analisar o comportamento observado nesses casos específicos. Os espécimes cúbicos, usados para compressão axial, tem dimensões de  $150 \times 150 \times 150 \text{ mm}$  e uma densidade média de  $1870,97 \pm 13,10$ , enquanto os espécimes prismáticos, usados para os ensaios de tração na flexão, tem dimensões de  $100 \times 100 \times 350 \text{ mm}$ , com uma densidade média de  $1844,17 \pm 20,46$ .

A Figura 22 apresenta o padrão de fissuração em resposta à compressão axial do elemento. Esta distribuição das fissuras foi analisada por meio de correlação de imagens digitais (DIC) usando o software GOM.

Figura 19 - Ensaio de compressão axial

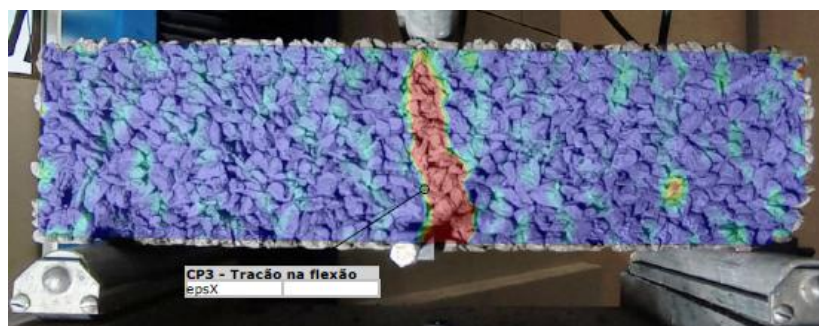


Fonte: Oliveira et al. (2025)

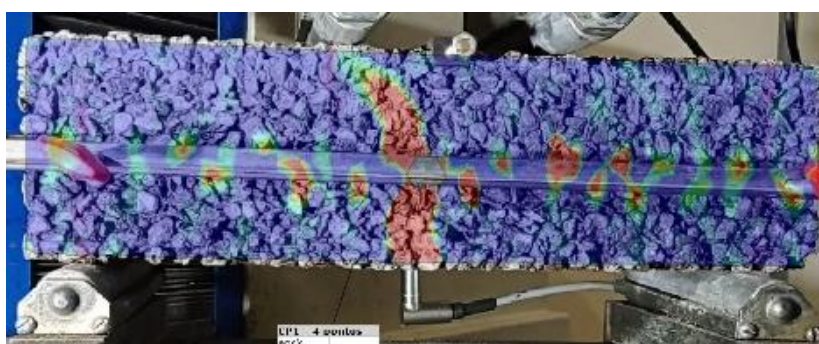
O padrão de fissura observado foram feixes verticais ao longo do cubo, de forma dispersa. Enquanto a resistência a compressão média, calculada com de 10 testes, foi de 4,80 MPa com desvio padrão de  $\pm 0,51$  Mpa.

A Figura 18 apresenta o padrão de fissuração em resposta à tração na flexão de três e quatro pontos. Esta distribuição das fissuras foi também analisada por meio de correlação de imagens digitais (DIC) usando o software GOM.

Figura 20 - Ensaio de tração na flexão em três pontos (a) e quatro pontos (b)



(a)



(b)

Fonte: Oliveira et al. (2025)

Nos ensaios de tração na flexão em três pontos foi obtida uma resistência média de 1,79 MPa, com desvio padrão de 0,02 MPa. Os corpos de prova apresentaram fissuração concentrada na região central inferior das vigas, indicando ruptura típica por flexão. O comportamento pós-fratura foi semelhante entre as amostras, com trinca dominante vertical.

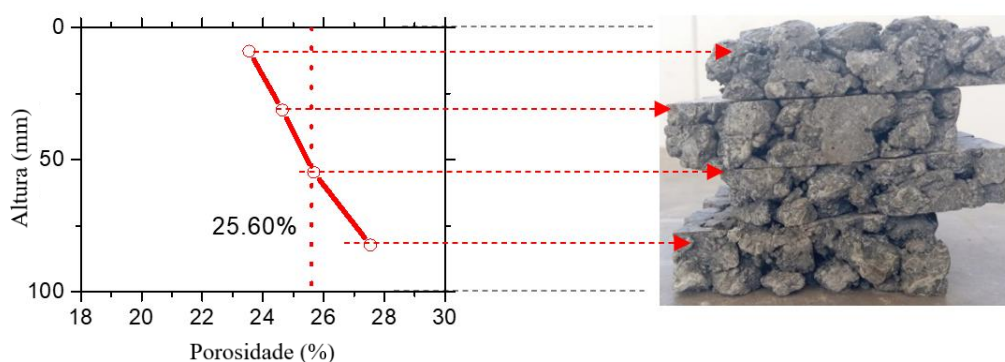
No ensaio de flexão em quatro pontos, a resistência média foi de 1,66 MPa, com desvio padrão de 0,29 MPa. Os resultados ficaram próximos aos obtidos na configuração de três pontos, apresentando uma variação de aproximadamente 8%. A fissura se forma no terço central da viga, verticalmente da base até o topo. No entanto, nessa configuração, a fissuração nem sempre ocorre exatamente no centro, apresentando um caminho mais variável.

#### 4.2.2.1 Modelo LDEM

Com base nas propriedades, geometria e condições de contorno descritas, serão desenvolvidos modelos de concreto permeável utilizando o método LDEM. Diferentes abordagens foram utilizadas a fim de implementar a lei constitutiva adequada para o modelo de concreto permeável.

A estratégia de modelagem constituiu na utilização do mapeamento da distribuição de poros ao longo do material. Utilizaram-se os dados experimentais provenientes do seccionamento de um corpo de prova, permitindo a quantificação da porcentagem de porosidade camada por camada. A partir dessa análise realizada no modelo experimental, foi possível traçar o perfil de distribuição de vazios para ser reproduzido dentro do modelo numérico. O comportamento da porosidade em função da altura, utilizado como base para a definição da distribuição da energia de fratura da simulação, é apresentado na Figura 24.

Figura 21 - Distribuição da porosidade pela altura



Fonte: Grupo de pesquisa MAEC (2024).

Para implementar esse comportamento no algoritmo numérico, realizou-se um ajuste dos dados experimentais apresentados. A função matemática resultante, que descreve a variação da porosidade em relação à altura e que foi inserida no código computacional, é expressa pela Equação 18:

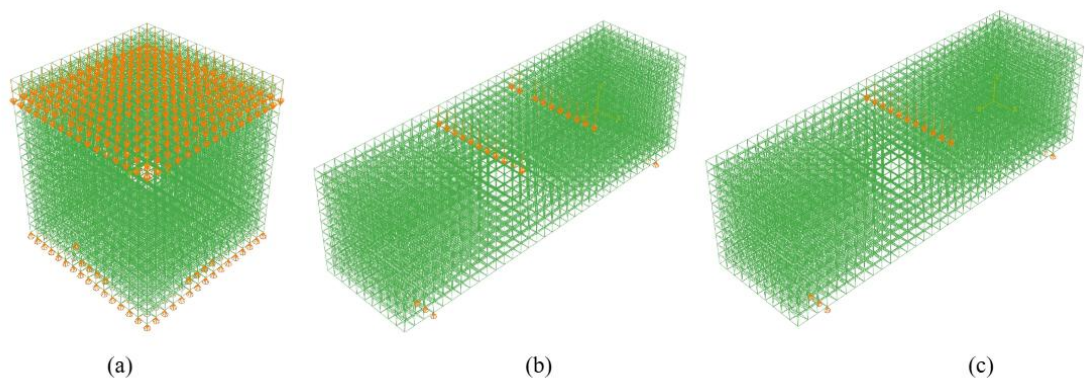
$$y = 1,8392x - 42,187 \quad [18]$$

Adicionalmente à lei constitutiva de fratura, foram definidos os parâmetros elásticos e físicos globais para a simulação. O modelo numérico adotou um Módulo de Elasticidade de

7,43 GPa, Coeficiente de Poisson de 0,25 e densidade aparente de 1850 kg/m<sup>3</sup>. Em relação à discretização espacial, a malha foi gerada com elementos de comprimento base igual a 1 cm, com 10 faixas de valores de porosidade.

A Figura 25 ilustra a discretização espacial adotada para os domínios de análise, bem como a disposição dos vínculos de apoio e a região de aplicação do carregamento para cada uma das configurações geométricas estudadas.

Figura 22 - Modelo discretizado e condições de contorno da compressão axial (a), flexão em quatro pontos (b) e flexão em três pontos (c)



Fonte: Elaboração Própria

As simulações foram estruturadas em duas abordagens distintas quanto à distribuição das propriedades materiais. Para o modelo utilizando a lei constitutiva bilinear, o gradiente funcional foi representado através da discretização do domínio em faixas horizontais com propriedades variáveis. Já para as análises com a lei trilinear, adotou-se uma modelagem simplificada, utilizando a média aritmética das propriedades para compor um material homogeneizado.

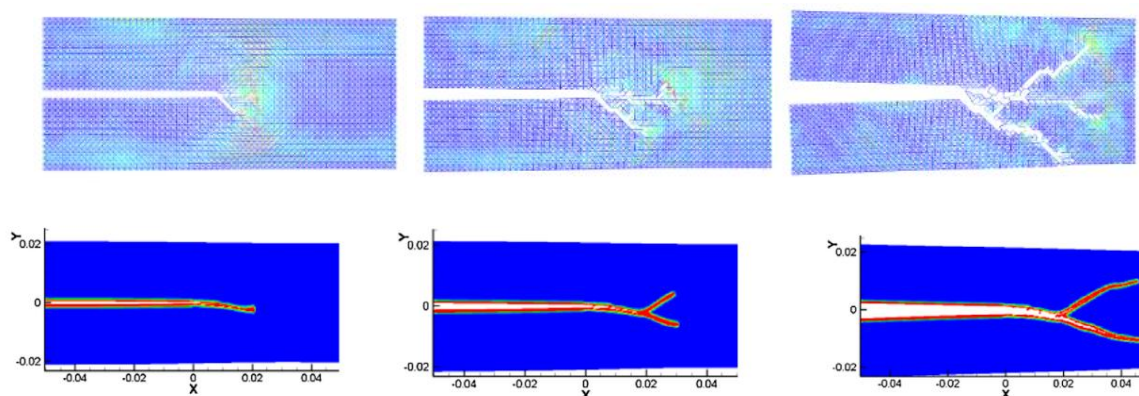
## 5. RESULTADOS

Nos itens a seguir, serão apresentados os resultados obtidos com as simulações numéricas para cada caso estudado, comparando-se o padrão de fissuração e a resistência encontrada com a literatura.

### 5.1 Placa FGM

Os resultados obtidos através da simulação numérica para a placa FGM, submetida a uma tensão de tração de 15 MPa, são detalhados na Figura 26, onde se exhibe a progressão do padrão de fissuração ao longo dos passos de tempo. A figura demonstra a transição de um estado estático para um comportamento dinâmico de fratura sob esta carga específica. Inicialmente, o foco está sobre a região da pré-fissura, onde se nota a formação da zona de processo de fratura impulsionada pela concentração de tensões na ponta da fissura, o que é um comportamento esperado em sólidos com pré-fissuras.

Figura 23 - Evolução da fissura ao longo do tempo



Fonte: Elaboração Própria.

Conforme a simulação avança no tempo, é possível observar que a propagação da fissura não ocorre de maneira uniforme ou simétrica, revelando a influência do gradiente no padrão de fissuração. A assimetria da fratura é intrinsicamente ligada à como os materiais distintos reagem ao carregamento aplicado. Na região superior, onde está situado o material mais rígido, forma-

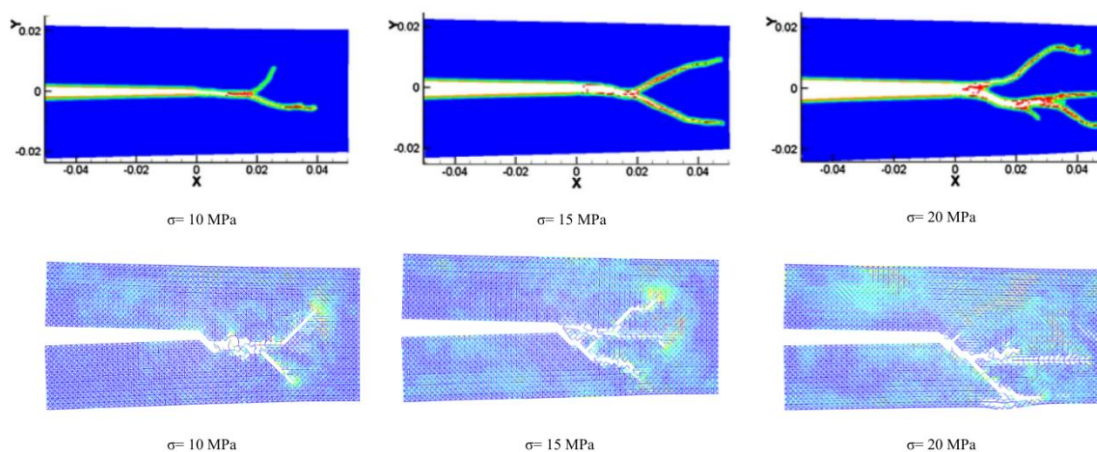
se um único caminho de fissuração. Enquanto na região inferior, composta por um material mais flexível, o padrão de fissuração apresenta um processo de ramificação, resultando em dois caminhos de fratura distintos.

Este comportamento encontra-se intrinsecamente associado às propriedades locais dos constituintes, tendo o módulo de elasticidade como fator determinante na resposta mecânica. A região superior, caracterizada por maior rigidez ( $E = 11,1$  GPa), apresenta resistência à instabilidade. Essa propriedade tende a mitigar a taxa de nucleação e crescimento de vazios, restringindo a interação entre microfissuras e resultando, macroscopicamente, em uma propagação mais estável e contida.

Em contrapartida, a região inferior, com módulo de elasticidade reduzido ( $E = 3,6$  GPa), demonstra maior suscetibilidade à instabilidade. Neste cenário, o fenômeno de ramificação surge como um mecanismo físico fundamental para o equilíbrio do sistema: a bifurcação da trinca permite dissipar o excesso de energia acumulada através da criação de múltiplas novas superfícies de fratura na fase de menor rigidez.

Além da análise temporal, investigou-se a influência da magnitude da carga no comportamento da fratura. A Figura 27 ilustra a resposta da placa quando submetida a tensões de 10, 15 e 20 MPa.

Figura 24 - Fratura sob diferentes carregamentos



Fonte: Elaboração própria

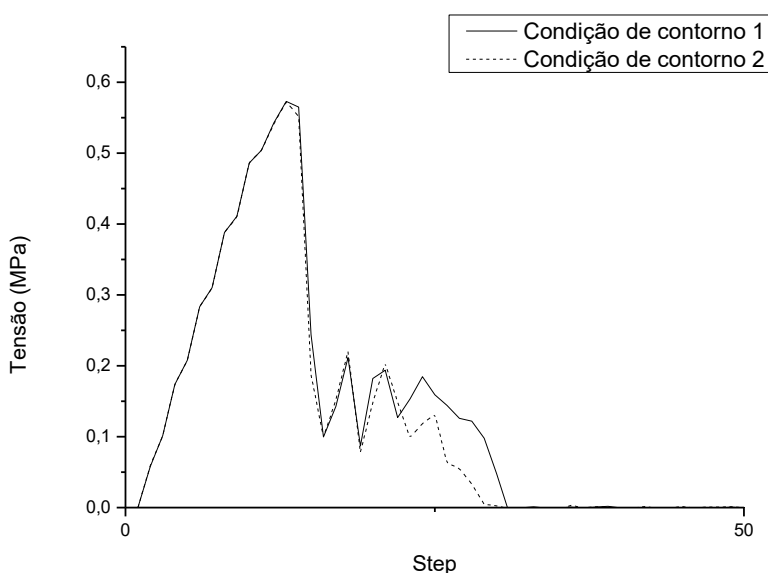
Ao comparar as respostas dos métodos nota-se que o modelo estudado apresentou uma sensibilidade maior aos carregamentos do que no modelo peridinâmico. Enquanto no modelo

base o processo de bifurcação de um dos caminhos da fratura na zona menos resistente começa a se evidenciar a partir de 20 MPa, o modelo formado por barras começa a captar esta resposta com um carregamento de 15 MPa. Isso sugere que, no modelo de elementos discretos, o impacto do carregamento foi mais intenso, levando a um grau de fraturamento superior para o mesmo nível de tensão nominal.

## 5.2 Cilindros de concreto permeável

Preliminarmente à análise dos mecanismos de fratura, realizou-se um estudo de sensibilidade para definir se existia uma diferença significativa entre as duas condições de contorno da simulação. Investigou-se a influência da utilização de taliscas que, nos ensaios experimentais, buscam mitigar o esmagamento local das extremidades, na resposta mecânica do modelo. A Figura 28 apresenta a comparação das curvas de tensão *versus* passo para as duas configurações.

Figura 25 - Gráfico da comparação das condições de contorno



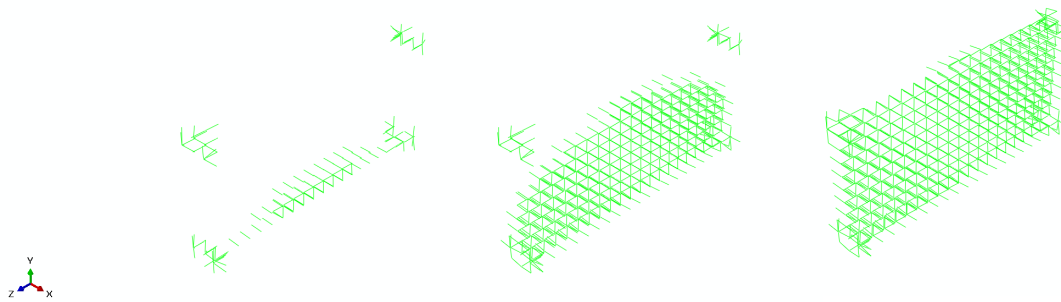
Fonte: Elaboração Própria

Observa-se que a inserção das taliscas não promoveu alterações significativas no comportamento da simulação, resultando em curvas praticamente sobrepostas, especialmente na fase elástica e no pico de tensão. Contudo, a modelagem desses elementos elevou, consideravelmente, o tempo de processamento dos ensaios. Diante da divergência desprezível

nos resultados e da necessidade de otimização do tempo de análise, optou-se por adotar a Condição de Contorno 1 para as simulações subsequentes.

A resposta do modelo de concreto permeável cilíndrico com a variação de porosidade ao longo da face é apresentada na Figura 28. Para melhor clareza do processo de fissuração, a figura exibe apenas os elementos fraturados, permitindo observar o caminhamento da fissura.

Figura 26 - Evolução da fratura no corpo de prova com variação na face

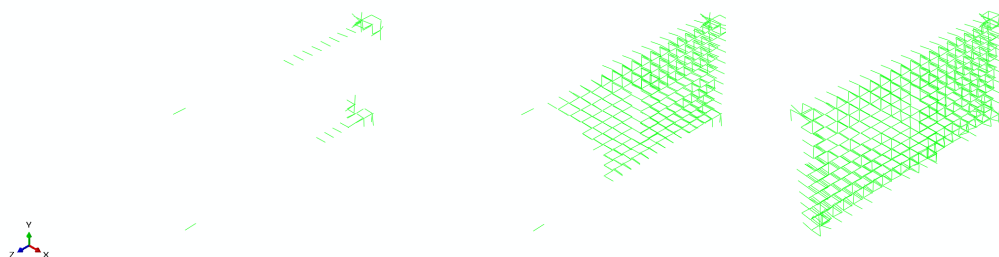


Fonte: Elaboração Própria

Nota-se uma forte concordância qualitativa com os ensaios experimentais, evidenciando que a falha é governada pelo gradiente de porosidade do material. O dano tem origem nas zonas de fragilidade, ou seja, na região inferior do cilindro, e avança para região da maior resistência. Também alinhado ao padrão observado experimentalmente, a fratura desenvolve-se na região central da face e atravessa integralmente a seção do espécime

A influência da variação de porosidade do material ao longo do eixo longitudinal é ilustrada na Figura 29. Diferentemente da análise restrita à variação na face, este resultado expõe a evolução da fratura através da profundidade do cilindro, validando que o caminho preferencial de ruptura é dependente da direção da distribuição do gradiente.

Figura 27 - Evolução da fratura no corpo de prova com variação na altura



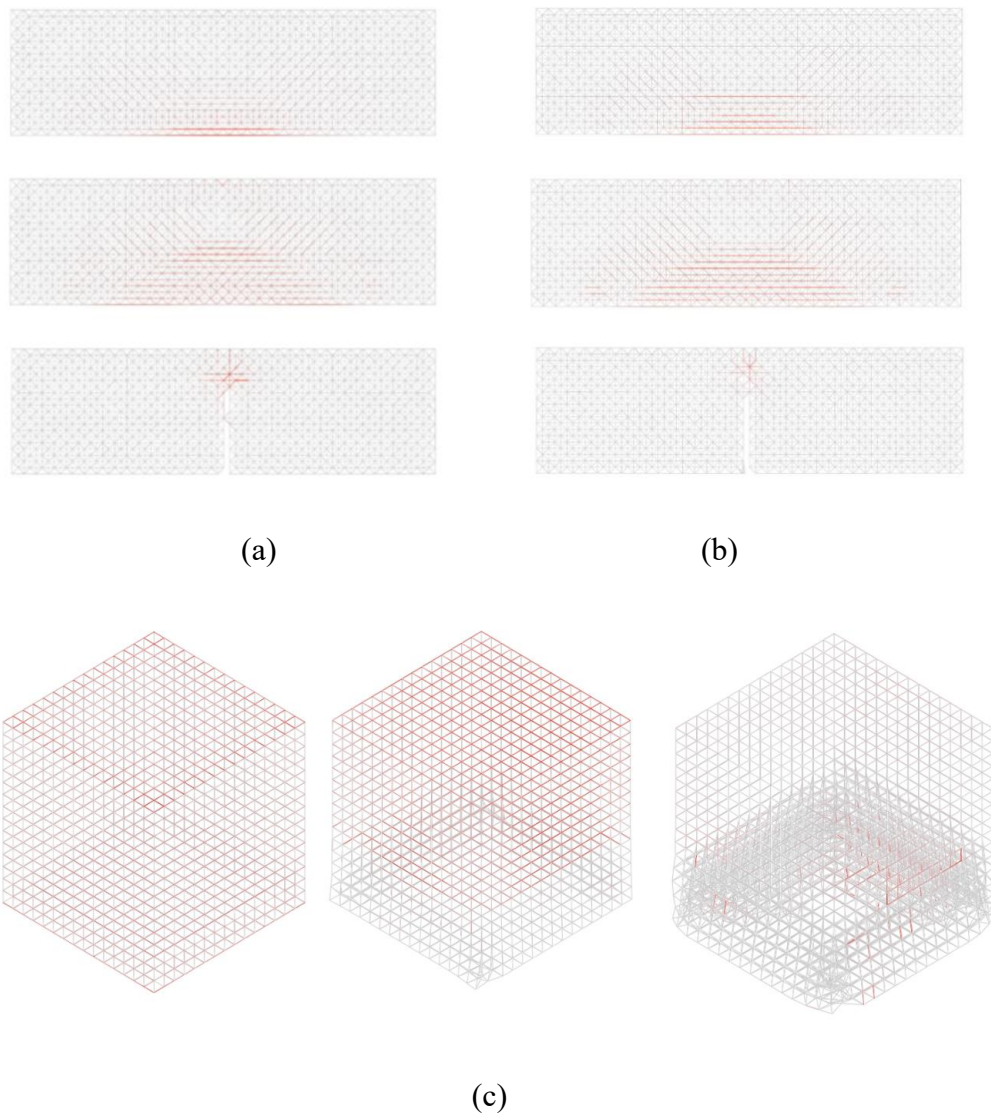
Fonte: Elaboração Própria

Conforme apresentado, a simulação reproduziu fielmente a origem da falha na zona porosa e seu avanço inicial. Entretanto, difere do experimental quanto à trajetória final. No ensaio real, a alta resistência da face frontal atuou como uma barreira, forçando a fissura a desviar lateralmente. Já no modelo LDEM, a fratura propagou-se linearmente através de todo o eixo longitudinal, ignorando esse efeito de barreira. Tentativas de calibrar o modelo através do aumento da discrepância de porosidade entre as zonas, visando tornar a face frontal ainda mais rígida, não resultaram na alteração da trajetória, sugerindo que outros fatores podem governar esse fenômeno de desvio.

### **5.3 Prismas de concreto permeável**

A Figura 30 apresenta os padrões de fratura obtidos para as configurações de carregamento de flexão em três e quatro pontos, bem como para a compressão axial.

Figura 28 - Padrão de fissuração do prisma na flexão em quatro pontos (a) flexão em três pontos (b) e compressão axial (c)



Fonte: Elaboração Própria

Os modos de ruptura simulados foram condizentes com as observações experimentais. Na flexão, a fissura se inicia no terço central do vão e ascende até o topo da seção. Enquanto isso, na compressão axial, a fratura se desenvolve a partir da base, identificada como a zona de menor capacidade resistente.

Uma análise mais específica revela distinções na zona de fratura entre os ensaios de flexão. Diferente do arranjo em três pontos, a flexão em quatro pontos apresenta uma região crítica mais ampla, no terço central, resultando em uma zona de fissuração mais extensa, fenômeno capturado tanto numérica quanto experimentalmente.

Já na compressão axial, a simulação reproduziu fielmente o padrão de fissuração vertical observado em laboratório. Essa morfologia evidencia uma distribuição uniforme dos deslocamentos laterais ao longo da altura do espécime, confirmando que as condições de contorno adotadas não induziram efeitos de confinamento nas extremidades. Conclui-se, portanto, que tanto o modelo numérico quanto o ensaio físico operaram sob um estado de tensão puramente uniaxial.

Além do padrão de fissuração, a resistência à tração foi um comportamento analisado na comparação entre modelos, como é apresentado na Tabela 02.

Tabela 2 – Resistência dos prismas de concreto permeável

| Tipo de Ensaio   | Método       | Média (MPa) |
|------------------|--------------|-------------|
| Flexão 3 Pontos  | Experimental | 1,79 ± 0,02 |
|                  | Numérico     | 2,38 ± 0,15 |
| Flexão 4 Pontos  | Experimental | 1,66 ± 0,29 |
|                  | Numérico     | 1,72 ± 0,10 |
| Compressão Axial | Experimental | 4,8 ± 0,51  |
|                  | Numérico     | 2,93 ± 0,09 |

Fonte: Elaboração Própria.

A análise dos ensaios de flexão em três e quatro pontos revela que o modelo numérico com a lei bilinear tende a superestimar a resistência do material. No ensaio de flexão em três pontos a resistência tem um aumento de 32,96%, enquanto no ensaio de quatro pontos o aumento foi de 3,61%. A magnitude da discrepância no ensaio de três pontos indica que a configuração da simulação ainda é insatisfatória para representar a resistência real do modelo, enquanto o ensaio de quatro pontos demonstra uma representatividade significativamente maior, revelando uma concordância satisfatória.

O ensaio de compressão axial expôs a maior diferença nos valores de resistência. Em contraste a superestimação dos modelos de flexão, a compressão teve uma diminuição no seu valor de resistência em 38,96% em relação aos ensaios experimentais. Isso indica que o modelo

numérico necessita ajustes quanto as propriedades relacionadas ao comportamento em resposta à compressão.

## 6. CONCLUSÕES

O presente trabalho propôs a aplicação do Método dos Elementos Discretos formado por barras (LDEM) na análise comportamental de materiais quase-frágeis com gradiente funcional (FGM). A partir das simulações realizadas, foi possível avaliar a capacidade do modelo em capturar fenômenos complexos de propagação de dano em meios gradientes e a resistência mecânica.

O primeiro estudo analisa a fratura de uma placa com material gradiente reportada na literatura, discretizada por meio da peridinâmica. O método numérico aplicado pelo estudo se alinha com os resultados obtidos pelos estudos. O modelo construído captura, de forma satisfatória, a trajetória da fissura ao longo do tempo e sob diferentes gamas de carregamentos.

Nos corpos de prova cilíndricos de concreto permeável submetidos a tração indireta por compressão axial, os resultados dos modelos numéricos apresentaram, relativamente, uma similaridade no padrão da fissuração com os ensaios experimentais. O modelo reproduziu a origem de falha nas zonas mais porosas e a direção da propagação. Contudo, identificou-se uma limitação em um dos modelos enquanto ao desvio da fratura observado nos ensaios experimentais. Enquanto experimentalmente a barreira de rigidez imposta pela face menos porosa forçou o desvio lateral da trajetória, o modelo numérico indicou a ruptura integral da seção transversal. As tentativas de refinamento através da intensificação do gradiente de propriedades não alteraram este comportamento.

As simulações dos prismas de concreto permeável submetidos à flexão (três e quatro pontos) e à compressão axial, realizadas com base na distribuição experimental de propriedades, capturaram, moderadamente, os traços distintivos dos modos de falha. No que tange aos resultados quantitativos, embora tenham sido observadas divergências nos valores absolutos de resistência entre os modelos numérico e experimental, manteve-se a proporcionalidade e a hierarquia de desempenho entre os diferentes ensaios. Essas discrepâncias sugerem a necessidade de um refinamento futuro na discretização da malha e na calibração das propriedades para ampliar a precisão numérica.

Por fim, conclui-se que o LDEM demonstra potencial como ferramenta para a análise inicial de materiais com gradiente funcional, possibilitando uma representação satisfatória dos fenômenos observados. No entanto, sua classificação como método plenamente eficiente e confiável requer maior investigação e calibração em estudos futuros. O método conseguiu

identificar corretamente onde as falhas começam baseando-se na distribuição dos poros, o que traz informações importantes para o projeto de materiais heterogêneos. Para trabalhos futuros, sugere-se o desenvolvimento de um modelo com faixas aliado a lei trilinear e investigar leis de dano mais complexas para melhorar a resposta do modelo após a ruptura inicial, especialmente em casos onde a rigidez muda bruscamente.

## REFERÊNCIAS

BATISTA, Rubén Galiano. **APLICAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DISCRETOS AO ESTUDO DE MICROMECAÂNICA DO DANO DE MATERIAIS MICROPOROSOS DE MATRIZ METÁLICA**. 2007. 176 f. Tese (Doutorado) - Curso de Engenharia, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2007.

BHATTACHARYA, Somnath *et al.* Fatigue Crack Growth Simulations of FGM Plate under Cyclic Thermal Load by XFEM. **Procedia Engineering**, [S.L.], v. 86, p. 727-731, 2014. Elsevier BV. <http://dx.doi.org/10.1016/j.proeng.2014.11.091>.

BOHIDAR, Shailendra Kumar; SHARMA, Ritesh; MISHRA, Prabhat Ranjan. **Functionally graded materials: A critical review**, v.1, n. 7, 2014.

CHENG, Zhanqi; LIU, Yingkai; ZHAO, Jun; FENG, Hu; WU, Yizhang. Numerical simulation of crack propagation and branching in functionally graded materials using peridynamic modeling. **Engineering Fracture Mechanics**, [S.L.], v. 191, p. 13-32, mar. 2018. Elsevier BV. <http://dx.doi.org/10.1016/j.engfracmech.2018.01.016>.

CHOUDHURY, Shakti Swaroop; ANNABATTULA, Ratna Kumar; AMIRTHALINGAM, Murugaiyan. A methodology for the development of functionally graded powder spreading in laser powder bed fusion process using discrete element method. **Welding in the World**, [London], v. 68, p. 1-14, 2024. Disponível em: <https://doi.org/10.1007/s40194-024-01796-4>.

DU, Chaofan *et al.* Dynamic Modeling and Simulation of a Hub-FGM Micro-Beam Based on Meshless Method. **Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics**, [S.L.], v. 57, n. 10, p. 2433-2446, 2025. Disponível em: <https://doi.org/10.6052/0459-1879-25-253>.

DUC, Nguyen Dinh; THANG, Pham Toan. Nonlinear buckling of imperfect eccentrically stiffened metal–ceramic–metal S-FGM thin circular cylindrical shells with temperature-dependent properties in thermal environments. **International Journal Of Mechanical Sciences**, [S.L.], v. 81, p. 17-25, abr. 2014. Elsevier BV. <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2014.01.016>.

ENTE ITALIANO DI NORMAZIONE. **UNI EN 12390-5: Testing hardened concrete: Part 5: Flexural strength of test specimens**. Milano, 2019.

Hillerborg, A. **A Model for Fracture Analysis**. Cod LUTVDG/TV BM-3005/1-8, 1978.

HUANG, W.; YANG, J.J.; SLADEK, J.; SLADEK, V.; WEN, P.H.. Meshless finite block method with infinite elements for axisymmetric cracked solid made of functionally graded materials. **European Journal Of Mechanics - A/Solids**, [S.L.], v. 97, p. 104852, jan. 2023. Elsevier BV. <http://dx.doi.org/10.1016/j.euromechsol.2022.104852>.

KOSTESKI, Luis Eduardo. **APLICAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DISCRETOS FORMADO POR BARRAS NO ESTUDO DO COLAPSO DE ESTRUTURAS**. 2012. 203 f. Tese (Doutorado) - Curso de Engenharia, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2012.

KOSTESKI, Luis. The truss-like discrete element method in fracture and damage mechanics. **Engineering Computations: International Journal For Computer-Aided Engineering And Software: Truss-like DEM**, Inglaterra, v. 28, n. 6, p. 765--787, 2011.

LI, Shan *et al.* 3D Visualization of Bamboo Node's Vascular Bundle. **Forests**, [S.L.], v. 12, n. 12, p. 1799, 17 dez. 2021. MDPI AG. <http://dx.doi.org/10.3390/f12121799>.

MAHAMOOD, Rasheedat M. *et al.* **Functionally graded material: An overview**. Proceedings of the World Congress on Engineering (2012), ResearchGate, v. 3, p. 4–6, 2012.

MELLOULI, H. *et al.* Effect of porosity gradient on fracture mechanics of bi-directional FGM structures: phase field approach. **Theoretical And Applied Fracture Mechanics**, [S.L.], v. 134, p. 104723, dez. 2024. Elsevier BV. <http://dx.doi.org/10.1016/j.tafmec.2024.104723>.

Nayfeh, A.H. and Hefzy, M.S. (1978), "Continuum modeling of three-dimensional trusslike space structures", **AIAA Journal**, Vol. 16/8, pp. 779–787.

OLIVEIRA, Jonathan Duarte *et al.* Experimental and Numerical Compressive Strength of a Pervious Concrete. **Procedia Structural Integrity**, [S.L.], v. 66, p. 313-319, 2024. Elsevier BV. <http://dx.doi.org/10.1016/j.prostr.2024.11.081>.

OTHMAN, M. A.; EL-EMAM, H. M.; SELEEM, M. H.; SALLAM, H. E. M.; MOAWAD, M.. Flexural behavior of functionally graded concrete beams with different patterns. **Archives Of Civil And Mechanical Engineering**, China, v. 21, n. 4, p. 386-399, 14 out. 2021. Springer Science and Business Media LLC. <http://dx.doi.org/10.1007/s43452-021-00317-0>.

PANT, Mohit; SHARMA, Kamal; BHATTACHARYA, Somnath. Application of EFGM and XFEM for Fatigue Crack growth Analysis of Functionally Graded Materials. **Procedia Engineering**, [S.L.], v. 173, p. 1231-1238, 2017. Elsevier BV. <http://dx.doi.org/10.1016/j.proeng.2016.12.135>.

PAULINO, G.H.. Failure of Functionally Graded Materials. In: ALIABADI, Ferri M.H. (ed.). **Comprehensive Structural Integrity**. 2. ed. Estados Unidos da América: Elsevier, 2003. Cap. 13. p. 607-644.

ROCHA, Marcelo Maia. **RUPTURA E EFEITO DE ESCALA EM MATERIAIS NÃO-HOMOGÊNEOS DE COMPORTAMENTO FRÁGIL**. 1989. 123 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 1989.

SHAN, Lichang; XIAO, Guangchun; LI, Anqing; ZHOU, Shasha; WANG, Li; SU, Weiguang; LIU, Yonglong; YANG, Lei; SONG, Xiaoyue. Nonlinear forced vibration of the FGM piezoelectric microbeam with flexoelectric effect. **Alexandria Engineering Journal**, [S.L.], v. 110, p. 386-399, jan. 2025. Elsevier BV. <http://dx.doi.org/10.1016/j.aej.2024.10.028>.

SHIOTA, Ichiro *et al* (ed.). **Functionally Graded Materials**. Japão: Elsevier Science, 1996. 792 p.

SILLING SA. Reformulation of elasticity theory discontinuities and long range forces. **J Mech Phys Solids** 2000;48(1):175–209.

SLADEK, J *et al*. Transient heat conduction analysis in functionally graded materials by the meshless local boundary integral equation method. **Computational Materials Science**, [S.L.], v. 28, n. 3-4, p. 494-504, nov. 2003. Elsevier BV. <http://dx.doi.org/10.1016/j.commatsci.2003.08.006>.

SVYETLICHNYY, Dmytro. Lattice Boltzmann Modeling of Additive Manufacturing of Functionally Graded Materials. **Entropy**, Basel, v. 27, n. 1, art. 20, 2025. Disponível em: <https://doi.org/10.3390/e27010020>.

SWAMINATHAN, K. *et al*. Thermal analysis of FGM plates – A critical review of various modeling techniques and solution methods. **Composite Structures**, [S.L.], v. 160, p. 43-60, jan. 2017. Elsevier BV. <http://dx.doi.org/10.1016/j.compstruct.2016.10.047>.

YILDIRIM, B *et al*. Three dimensional fracture analysis of FGM coatings under thermomechanical loading. **International Journal Of Fracture**, [S.L.], v. 132, n. 4, p. 371-397, abr. 2005. Springer Science and Business Media LLC. <http://dx.doi.org/10.1007/s10704-005-2527-9>.

## APÊNDICE A – APLICAÇÃO DA LEI TRILINEAR NOS MODELOS DE CONCRETO PERMEÁVEL

Este apêndice apresenta os resultados obtidos na aplicação da lei constitutiva trilinear em modelos de prismas de concreto permeável. Ressalta-se que, para estas análises, foi realizada a homogeneização das propriedades, não representando a distribuição de gradiente funcional (FGM) abordada no corpo principal deste trabalho.

Os valores de resistência obtidos nos ensaios de flexão (3 e 4 pontos) e compressão axial, utilizando a lei trilinear sob a condição de homogeneização, são apresentados na tabela 03.

Tabela 3 - Resistência dos prismas de concreto permeável

| Tipo de Ensaio   | Método                   | Média (MPa) |
|------------------|--------------------------|-------------|
| Flexão 3 Pontos  | Experimental             | 1,79 ± 0,02 |
|                  | Numérico (Lei Trilinear) | 2,28 ± 0,06 |
| Flexão 4 Pontos  | Experimental             | 1,66 ± 0,29 |
|                  | Numérico (Lei Trilinear) | 2,05 ± 0,06 |
| Compressão Axial | Experimental             | 4,8 ± 0,51  |
|                  | Numérico (Lei Trilinear) | 7,63 ± 0,05 |

Fonte: Elaboração Própria.

Os resultados numéricos obtidos com a lei trilinear foram superiores aos valores experimentais em todos os testes realizados. Porém, é importante notar que a proporcionalidade dos ensaios de três e quatro pontos foi de 11,22%, se alinhando de forma coerente com a norma europeia UNI EM 12390-5, que prevê 13% de diferença entre esses ensaios.

A maior diferença foi observada no ensaio de compressão axial, que atingiu 7,63 MPa, superestimando o valor de resistência em mais de 50% do valor experimental.