UNIVERSIDADE FEDERAL DO PAMPA

VITÓRIA MOREIRA DA COSTA

ANÁLISE DA PRESENÇA DE TECNOLOGIAS DIGITAIS EM COLEÇÕES DE LIVROS DIDÁTICOS DE MATEMÁTICA DO ENSINO MÉDIO: UM OLHAR PARA O CONCEITO DE FUNÇÃO

Caçapava do Sul-RS
2023

VITÓRIA MOREIRA DA COSTA

ANÁLISE DA PRESENÇA DE TECNOLOGIAS DIGITAIS EM COLEÇÕES DE LIVROS DIDÁTICOS DE MATEMÁTICA DO ENSINO MÉDIO: UM OLHAR PARA O CONCEITO DE FUNÇÃO

Trabalho de Conclusão do Curso apresentado ao Curso de Ciências Exatas - Licenciatura da Universidade Federal do Pampa, como requisito parcial para obtenção do Título de Licenciada em Ciências Exatas - Matemática.

Orientadora: Profª. Dra. Maria Arlita da Silveira Soares

Caçapava do Sul-RS
2023

Ficha catalográfica elaborada automaticamente com os dados fornecidos
pelo(a) autor(a) através do Módulo de Biblioteca do
Sistema GURI (Gestão Unificada de Recursos Institucionais).

d845a da Costa, Vitória Moreira
Análise da Presença de Tecnologias Digitais em Coleções de Livros Didáticos de Matemática do Ensino Médio: Um Olhar para o Conceito de Função / Vitória Moreira da Costa.
76 p.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade Federal do Pampa, CIÊNCIAS EXATAS, 2023.
"Orientação: Maria Arlita da Silveira Soares".

1. Registros Dinâmicos de Representação Semiótica. 2. Softwares. 3. Função Afim. 4. Função Quadrática. I. Título.

VITÓRIA MOREIRA DA COSTA

ANÁLISE DA PRESENÇA DE TECNOLOGIAS DIGITAIS EM COLEÇÕES DE LIVROS DIDÁTICOS DE MATEMÁTICA DO ENSINO MÉDIO: UM OLHAR PARA O CONCEITO DE FUNÇÃO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Ciências Exatas - Licenciatura da Universidade Federal do Pampa, como requisito parcial para obtenção do Título de Licenciada em Ciências Exatas - Matemática.

Trabalho de Conclusão de Curso defendido e aprovado em: 03 de fevereiro de 2023.

Banca examinadora:

____

Profa. Dra. Maria Arlita da Silveira Soares

Orientadora

UNIPAMPA

____

Prof. Dr. Leugim Corteze Romio

UNIPAMPA

____

Profa. Dra. Rita de Cássia Pistóia Mariani

UFSM

Assinado eletronicamente por **MARIA ARLITA DA SILVEIRA SOARES**, **PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR**, em 08/02/2023, às 20:24, conforme horário oficial de Brasília, de acordo com as normativas legais aplicáveis.

Assinado eletronicamente por **LEUGIM CORTEZE ROMIO**, **PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR**, em 08/02/2023, às 20:24, conforme horário oficial de Brasília, de acordo com as normativas legais aplicáveis.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.unipampa.edu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **1052354** e o código CRC **14B4FF3F**.

ANÁLISE DA PRESENÇA DE TECNOLOGIAS DIGITAIS EM COLEÇÕES DE LIVROS DIDÁTICOS DE MATEMÁTICA DO ENSINO MÉDIO: UM OLHAR PARA O CONCEITO DE FUNÇÃO

Vitória Moreira da Costa[1]
Maria Arlita da Silveira Soares[2]

Resumo: Este estudo tem por objetivo analisar a presença de tecnologias digitais (TD) em coleções de livros didáticos, aprovadas pelo PNLD/2021, no estudo do conceito de função (funções polinomiais). Para tanto, a opção metodológica foi de uma pesquisa qualitativa na forma de análise documental. A fonte de produção de dados foram quatro coleções de livros didáticos de Matemática do Ensino Médio, aprovadas pelo PNLD/2021 e escolhidas por escolas da rede estadual da região da campanha gaúcha. A discussão dos dados pautou-se na teoria dos Registros de Representação Semiótica, em particular, na presença de registros dinâmicos e nas articulações propostas entre esses registros, na identificação das peculiaridades do registro dinâmico e nas transformações cognitivas (tratamento e conversão). A análise dos dados permitiu concluir que as TD estão presentes nas coleções, em particular, quando os autores destacam a importância do seu uso para a aprendizagem matemática no Manual do Professor (MP) e em trechos da BNCC. As TD sugeridas no MP e identificadas no Livro do Estudante (LE) foram: softwares de construção de gráfico e software de geometria dinâmica, sem especificar qual e quando apontado, indicaram o GeoGebra, além do Calc e VisualG, que são softwares para calcular e programar, respectivamente. Em relação ao estudo de funções afim e quadrática com uso de TD, foram identificadas 52 situações, sendo 18 mapeadas em C1, 15 em C4, 13 em C3 e apenas 6 em C2. A maioria delas estão presentes no volume específico de funções e priorizam mais a percepção do registro gráfico do que a visualização. Quanto as transformações cognitivas, constatou-se que a conversão está presente em todas as situações, destacando o seguinte sentido: registro algébrico (dado no enunciado) para o gráfico (construído no software) e deste para o simbólico numérico (elaborado pelo estudante). No que tange às peculiaridades dos registros dinâmicos, verificou-se que são raras as situações que privilegiam o dinamismo de representações (5 situações), a relação funcional (3 situações) e a estabilidade da construção (4 situações). Assim, pode-se afirmar que a maioria das situações mapeadas não se diferencia das propostas para serem resolvidas com lápis e papel.

Palavras-chave: Registros Dinâmicos de Representação Semiótica. Softwares. Função Afim. Função Quadrática.

ANALYSIS OF THE PRESENCE OF DIGITAL TECHNOLOGIES IN HIGH SCHOOL MATHEMATICS TEXTBOOK COLLECTIONS: A LOOK AT THE FUNCTION CONCEPT

Abstract: This study aims to analyze the presence of digital technologies (DT) in textbook collections, approved by PNLD/2021, in the study of the concept of function (polynomial functions). Therefore, the methodological option was a qualitative research

---

[1] Acadêmica do Curso de Ciências Exatas – Licenciatura da Universidade Federal do Pampa, Campus Caçapava do Sul.
[2] Orientadora da pesquisa. Professora da Universidade Federal do Pampa, Campus Caçapava do Sul.

in the form of documental analysis. The source of data production were four collections of High School Mathematics textbooks, approved by PNLD/2021 and chosen by state schools in the campaign region in Rio Grande do Sul. The data discussion was based on the theory of the Registers of Semiotic Representation, in particular, on the presence of Dynamic registers and on the proposed articulations between these registers, on the identification of the peculiarities of the Dynamic register and on the cognitive transformations (treatment and conversion). Data analysis allowed us to conclude that DT are present in the collections, in particular, when the authors highlight the importance of their use for mathematical learning in the Teacher's Manual (MP) and in excerpts from the BNCC. The DTs suggested in the MP and identified in the Student's Book (LE) were: graphic construction software and dynamic geometry software, without specifying which and when pointed out, they indicated GeoGebra, in addition to Calc and VisualG, which are software to calculate and schedule, respectively. Regarding the study of linear and quadratic functions using DT, 52 situations were identified, 18 of which were mapped in C1, 15 in C4, 13 in C3 and only 6 in C2. Most of them are present in the specific volume of functions and prioritize the perception of the graphic record more than the visualization. As for the cognitive transformations, it was found that the conversion is present in all situations, highlighting the following meaning: algebraic record (given in the statement) for the graph (built in the software) and from this to the numerical symbol (elaborated by the student). With regard to the peculiarities of Dynamic registers, it was found that situations that favor the dynamism of representations (5 situations), the functional relationship (3 situations) and the construction stability (4 situations) are rare. Thus, it can be said that most of the mapped situations are not different from the proposals to be solved with pencil and paper.

Keywords: Dynamic Registers of Semiotic Representation. Software. Linear Function. Quadratic Function.

1. INTRODUÇÃO

O interesse por pesquisar sobre Tecnologias Digitais[3] (TD) na aprendizagem de Matemática emergiu a partir de atividades realizadas no Programa Institucional de Bolsas Iniciação à Docência (PIBID) e em componentes curriculares, como por exemplo: “Simulação e Modelagem no Ensino de Ciências e Matemática”, “Tecnologias para Aprendizagem em Ciências” e estágios supervisionados intitulados “Cotidiano da Escola: Regência I” e “Cotidiano da Escola: Regência II”, do curso de Ciências Exatas - Licenciatura, da Universidade Federal do Pampa (UNIPAMPA), campus Caçapava do Sul.

As atividades do PIBID foram realizadas durante o período de agosto de 2018 a janeiro de 2020, envolvendo duas escolas da rede pública estadual de ensino do município de Caçapava do Sul. Neste programa, os bolsistas, utilizaram, para

[3] Mais esclarecimentos acerca dos entendimentos de TD serão apresentados no referencial teórico.

desenvolver as atividades na escola, alguns recursos como: TD, jogos, materiais manipuláveis e materiais para a realização de experimentos. As intervenções foram realizadas no Ensino Médio, em turmas de 1° e 2° anos, com o objetivo de auxiliar os estudantes em sua aprendizagem e minimizar dificuldades apresentadas no estudo de conceitos da área das Ciências da Natureza. Foi possível constatar, durante a realização dessas atividades, que a utilização de TD contribuiu para a aprendizagem de conceitos dessa área, pois os estudantes que ainda não dominavam determinada tecnologia tiveram a oportunidade de aprender a usá-la e os que já sabiam como utilizar puderam ampliar seus conhecimentos, assim, as TD tornaram-se uma ferramenta importante na resolução de problemas.

O componente curricular “Simulação e Modelagem no Ensino de Ciências e Matemática”, também, contribuiu na escolha da temática por ter proporcionado a análise de diferentes recursos de simulação e animação voltados ao ensino e aprendizagem de Ciências da Natureza (Biologia, Física e Química) e Matemática, por exemplo, Modellus[4], Phet Colorado[5], Scratch[6] e Scratch Jr[7]. Bem como, na análise da importância da utilização de alguns softwares, como GeoGebra, na resolução de problemas. Além disso, foi problematizado que o uso das TD precisa ir além da mera adoção de softwares, que proporcionam a transposição do conteúdo analógico e da aula expositiva para as telas dos computadores, tablets e smartphones (OLIVEIRA, 2020 apud BORGES et al., 2021), devem, também, favorecer o desenvolvimento dos raciocínios exigidos pelas Ciências da Natureza e Matemática, bem como estimular “o espírito de investigação e a criatividade” (BRASIL, 2018, p. 475).

A utilização de TD no processo de ensino e aprendizagem, também, foi foco de discussões do componente curricular intitulado “Tecnologias para Aprendizagem em Ciências”. Neste componente, foram analisados diversos recursos disponíveis para computador ou celular (Canva[8], Powtoon[9], Kahoot[10]). Percebeu-se que a maioria desses recursos pode contribuir na aprendizagem de conceitos relacionados às Ciências da Natureza e Matemática, por possibilitarem, em especial, a simulação de

---

[4] http://ww38.modellus.co/
[5] https://phet.colorado.edu/pt_BR/
[6] https://scratch.mit.edu/
[7] https://www.scratchjr.org/
[8] https://www.canva.com/
[9] https://www.powtoon.com/
[10] https://kahoot.com/

alguns experimentos e explorarem conceitos a partir de jogos digitais. Contudo, entende-se que para explorar o potencial desses recursos, é importante escolher uma metodologia de ensino que valorize a participação ativa dos estudantes, “de modo a favorecer o estabelecimento de conjecturas, a formulação e a resolução de problemas em uma variedade de contextos, utilizando conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas” (BRASIL, 2018, p. 266).

Outro componente curricular que contribuiu na escolha da temática foi o “Estágio Supervisionado: Regência I”. Durante o desenvolvimento desse componente foram realizadas diversas leituras e pesquisas sobre o processo de ensino e aprendizagem de Matemática, em particular, de conceitos geométricos, pensando em metodologias ativas e formas de promover o interesse dos estudantes nessa área. A prática docente foi realizada com estudantes do 7° ano de uma escola da rede pública estadual de Caçapava do Sul. Os conteúdos abordados foram: polígonos (principalmente, a representação no plano cartesiano); simetria de figuras; circunferência; ângulos formados por retas paralelas; ângulos internos e externos de triângulos; algoritmos, representados por fluxogramas, para construção de polígonos regulares. Para desenvolver esses conteúdos optou-se por utilizar o GeoGebra, por entender que softwares como este “são importantes para o ensino e aprendizagem de matemática, devido à capacidade que possuem de permitir ao usuário arrastar objetos dinamicamente, bem como de comparar e descobrir relações entre os entes geométricos envolvidos” (MATHIAS, 2021, p. 6).

O componente curricular “Estágio Supervisionado: Regência II”, também, influenciou na escolha da temática da pesquisa, principalmente, em relação ao conceito matemático a ser pesquisado e quanto a fonte de produção de dados (livros didáticos). A prática docente foi realizada com uma turma de 1º ano do Ensino Médio em uma escola da rede pública estadual de Caçapava do Sul. O conteúdo abordado foi função, em particular, função afim. Destaca-se que as leituras e pesquisas realizadas para a elaboração dos planejamentos, assim como alguns livros didáticos, indicam o uso de TD, principalmente, uso do GeoGebra no ensino do conceito de função. No entanto, durante a prática não foi possível utilizar esse software por falta de disponibilidade de computadores e restrições do uso de smartphones, impostas pela escola. Percebeu-se que o não uso desse recurso limitou o entendimento dos estudantes, principalmente, no que tange a representação gráfica, pois a análise das alterações provocadas na representação gráfica ao modificar os coeficientes a e b da representação algébrica da função afim, $f(x) = ax + b$, que podem ser realizadas rapidamente e de forma dinâmica no GeoGebra, foi explorada a partir de poucos exemplos, apresentados no quadro. Assim, a verificação de que a alteração do valor do coeficiente b, na representação algébrica, provoca um deslocamento vertical (translação vertical) da representação gráfica, ficou restrita a poucos exemplos.

Sublinha-se que essa prática deixou inquietações quanto a presença das TD no estudo de funções, em particular, funções polinomiais (função afim e quadrática) nos livros didáticos, visto que o livro escolhido pela escola apresentava poucas sugestões, em contrapartida ao mencionado na Base Nacional Comum Curricular - BNCC (BRASIL, 2018) ao enfatizar que as TD devem ser compreendidas, utilizadas e criadas por estudantes e professores de forma crítica, significativa e ética para comunicar-se, acessar e produzir informações e conhecimentos, bem como resolver problemas de diferentes áreas. Isso porque é cada vez mais urgente preparar os jovens para atuar em uma sociedade em constante mudança, em particular, "prepará-los para profissões que ainda não existem, para usar tecnologias que ainda não foram inventadas e para resolver problemas que ainda não conhecemos" (BRASIL, 2018, p. 473), pois a maioria das futuras profissões envolverá TD.

Nessa perspectiva, entende-se que as escolas podem cada vez mais investir na aprendizagem dos estudantes para que no futuro eles saibam explorar TD, mas também possam ser criadores/desenvolvedores desses recursos tão presentes no dia a dia da sociedade. No entanto, pesquisadores (BITTAR, 2011; BASSO; NOTARE, 2015; STORMOWSKI; GRAVINA; LIMA, 2015; SALIN; GRAVINA, 2016) afirmam que as TD ainda são pouco utilizadas em sala de aula, e as potencialidades desses recursos, já identificadas, continuam sendo pouco exploradas, principalmente, a utilização delas como ferramentas para pensar.

Diante desse contexto, esta pesquisa tem por questão norteadora: *De que forma coleções de livros didáticos indicam/sugerem a utilização de tecnologias digitais ao explorarem o conceito de função?* Na busca de responder à questão de pesquisa, tem-se por objetivo: *Analisar a presença de tecnologias digitais em coleções de livros didáticos, aprovadas pelo PNLD/2021, no estudo do conceito de função (funções polinomiais).*

A escolha do conceito de função, além de ter sido abordado no estágio supervisionado, justifica-se pelo fato de que este pode ser considerado um conceito estruturante da Matemática, pois está presente em praticamente todos os seus campos (Aritmética, Álgebra, Geometria), "caracterizando-se como o instrumento essencial para descrever, explicar e prever a interação quantidade-qualidade de regularidades em fenômenos naturais ou sociais" (SANTOS; BARBOSA, 2017, p. 316). Em outros termos, o conceito de função é fundamental na resolução de problemas presentes "nas ciências, na tecnologia, na cultura, no trabalho e nas práticas sociais. [Desse modo], o conhecimento sobre funções é importante para uma inserção crítica no mundo do trabalho e das práticas sociais" (BONINI; DRUCK; BARRA, 2018, p. 169).

Contudo, pesquisadores (SANTOS; BARBOSA, 2017; SALIN; GRAVINA, 2016,) tem mapeado dificuldades na aprendizagem desse conceito, dentre eles destaca-se:

> [...] dificuldade em entender o significado de função como relação entre grandezas; dificuldade em fazer a correspondência entre informações do campo algébrico para o campo geométrico e vice-versa; dificuldade em **reconhecer a mesma função, em duas representações diferentes**; dificuldade em entender o significado da linguagem simbólica que envolve o estudo de funções; em particular, dificuldade em tratar letras como números generalizados e/ou interpretá-las como variáveis. (SALIN; GRAVINA, 2016, p. 2, grifos nossos)

Entende-se que a utilização de TD, em particular, softwares de Matemática Dinâmica pode contribuir para amenizar essas dificuldades, pois eles permitem a percepção simultânea de diferentes representações matemáticas de um mesmo objeto, bem como "uma constante interpretação das ações sobre as diferentes representações que se descortinam, de forma simultânea, na tela do computador" (SALIN; GRAVINA, 2016, p. 7), o que potencializa o desenvolvimento da capacidade de visualização[11].

A análise de livros didáticos de Matemática do Ensino Médio justifica-se por entender que:

> Sua importância aumenta ainda mais em países como o Brasil, onde uma precaríssima situação educacional faz com que ele acabe determinando conteúdos e condicionando estratégias de ensino, marcando, pois, de forma decisiva, o que se ensina e como se ensina o que se ensina. (LAJOLO, 1996, p. 3)

[11] Um entendimento para visualização será apresentado no referencial teórico a partir das ideias de Soares, Ferner e Mariani (2018), fundamentadas em Duval (2011).

Assumindo essa percepção do livro didático, destaca-se a importância de pesquisas sobre a abordagem de conteúdos matemáticos, em especial, da presença de TD nesses materiais. Se o livro define o quê e como se ensina, é importante que se possa identificar a abordagem proposta por eles para conteúdos específicos, a serem adotados nas escolas públicas brasileiras, visto que o Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) faz uma análise geral das obras, e a partir disso repensar alguns encaminhamentos. Quanto as TD nas coleções de livros didáticos de Matemática do Ensino Médio, o documento intitulado "Guia Digital – PLND/2021" afirma que:

> A exploração de tecnologias digitais se faz presente nas obras por meio do uso de computadores, smartphones, calculadoras, planilhas eletrônicas, Podcast e aplicativos. Essas tecnologias servem de aporte para a realização de pesquisas, de simulações e cálculos e, posteriormente, para a divulgação de resultados em blogs, podcasts e redes sociais. No entanto, há obras que se limitam ao uso de calculadoras, planilhas eletrônicas e softwares de geometria dinâmica, com orientações superficiais ao(à) professor(a) de como explorá-los. (BRASIL, 2021, p. 27)

O que reafirma o entendimento de que o documento apresentado pelo PNLD descreve uma análise geral das obras, em particular, para algumas temáticas, por exemplo, presença de TD. No que segue, são apresentados o referencial teórico e a metodologia da pesquisa, bem como o cronograma para a realização deste estudo.

2. TECNOLOGIAS DIGITAIS E OS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

As TD estão cada vez mais presentes na vida das pessoas, não apenas no trabalho e nas escolas, mas no vestuário (como a introdução de componentes digitais na composição de tecidos), nos equipamentos domésticos, nos meios de locomoção, nos equipamentos de comunicação, entre outros. Pode-se afirmar que as TD impactam diretamente o funcionamento da sociedade, em particular, na comunicação, no acesso e produção de informações e conhecimentos, na resolução de problemas, nas práticas sociais e no mundo do trabalho. Em relação ao mundo do trabalho, pode-se dizer que as profissões do futuro terão como base as TD. Assim, as escolas devem preparar os estudantes para essas profissões que virão e para futuros problemas que surgirão com elas. (BRASIL, 2018).

Nesse viés, entende-se que as escolas precisam (re)pensar suas práticas para inserir cada vez mais TD no processo de ensino e aprendizagem de diferentes áreas do conhecimento, bem como promover situações em que a criação de TD, por estudantes e professores, seja possível. Destaca-se que o termo tecnologia, utilizado neste trabalho, deve ser compreendido como “um conjunto de conhecimentos e princípios científicos que se aplicam ao planejamento, à construção e à utilização de um equipamento em um determinado tipo de atividade” (KENSKI, 2003 apud OLIVEIRA, 2018, p. 26). Em particular, no contexto da Matemática Escolar, o termo tecnologia, especialmente, TD se refere aos computadores, tablets e smartphones, “incluindo o acesso à internet e outros recursos (softwares, aplicativos, ferramentas) para uso com esses dispositivos” (WALLE, 2009, p. 130).

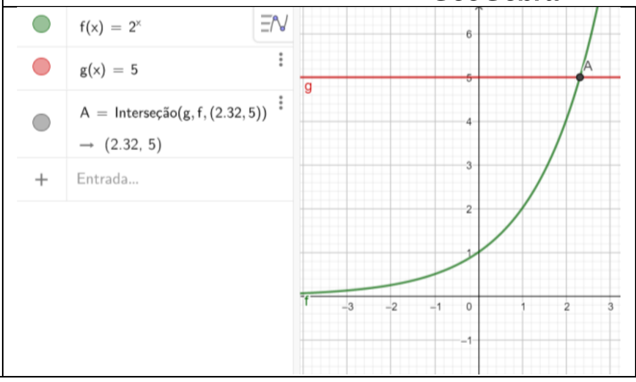
Esses entendimentos enfatizam as TD como uma ferramenta essencial no processo de ensino e aprendizagem de Matemática e sua presença nas aulas é recomendada por pesquisadores (BORBA; SILVA; GADANIDIS, 2014; BASSO; NOTARE, 2015; GRAVINA, 2015; STORMOWSKI; GRAVINA; LIMA, 2015) e documentos curriculares (BRASIL, 2018) para “modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados” (BRASIL, 2018, p. 267). De forma mais ampla, eles recomendam o uso de TD nas aulas como ferramentas para pensar, representar, comunicar e argumentar.

Borba, Silva e Gadanidis (2014) entendem que a produção de conhecimento matemático é condicionada pela tecnologia utilizada, isto é, conforme a tecnologia avança novos problemas, envolvendo essa área, podem ser explorados e resolvidos. Para eles, a natureza dos problemas e da atividade matemática está em simbiose com o design das tecnologias que são utilizadas, com as potencialidades das mídias usadas para fazer sentido a conceitos ou produzir conhecimentos matemáticos. Os autores defendem que, o uso de TD pode possibilitar o desenvolvimento de um trabalho que se adapta a distintos ritmos de aprendizagem e permite aos estudantes conjecturar, analisar, visualizar, abstrair, bem como aprender com seus erros, ideias essas explicitadas na BNCC.

Bittar (2011, p. 159) afirma que, “a tecnologia deve ser usada com fins de permitir ao aluno ter acesso a propriedades ou a aspectos de um conceito; ou ainda a atividades matemáticas diferentes daquelas habitualmente tratadas no ambiente papel e lápis”. Para tanto, é importante ter claro as competências/habilidades/objetivos a serem alcançados e escolher a tecnologia de modo a atendê-los. Por exemplo, pode-se solicitar aos estudantes que elaborarem estratégias para resolver a equação $2^x = 5$, utilizando a janela gráfica do GeoGebra. Como pode ser verificado no Quadro

1, à esquerda, a solução do problema a partir de procedimentos na representação algébrica não requer a utilização do software, basta lápis e papel. Mas, perceba que o enunciado do problema não requer apenas a solução da equação exponencial, ele exige que a representação gráfica seja utilizada como representação intermediária. Para tanto, o estudante precisa analisar as funções presentes na equação, ou seja, $f(x) = 2^x$ e $g(x) = 5$, bem como compreender que a solução é dada pela coordenada x do ponto de intersecção das funções (Quadro 1, à direita).

Quadro 1: Diferentes tecnologias na resolução de uma equação exponencial

	GeoGebra	
Lápis e papel $2^x = 5$ $\log_2 2^x = \log_2 5$ $x = \log_2 5$ $x \cong 2{,}32$		A resolução da equação, a partir da análise dos gráficos das funções $f(x)$ e $g(x)$, é dada pela coordenada x do ponto A de interseção dos gráficos das funções.

Fonte: Elaborado pela autora com base em Borba, Silva e Gadanidis (2014).

A defesa pela presença das TD nas escolas, principalmente, nas aulas de matemática, apresentada neste trabalho, vem ao encontro das ideias de Basso e Notare (2015, p. 3, grifos nossos) ao afirmarem que:

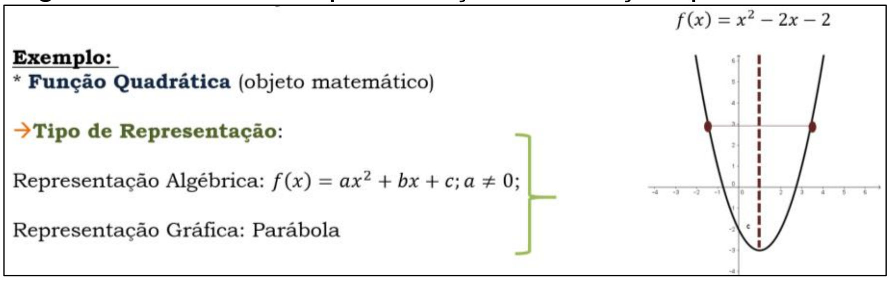
> Não estamos falando aqui em utilizar a tecnologia para proporcionar mais praticidade e rapidez na execução de algoritmos ou na resolução de problemas, nem mesmo no uso da tecnologia para dar praticidade ao trabalho do professor ou para tornar a aula mais atraente e interessante para o aluno. Estamos falando em **utilizar a tecnologia de modo a desencadear o pensamento matemático, a proporcionar aos alunos possibilidades para acessar e manipular objetos matemáticos até então não acessíveis**.

Em outros termos, defende-se o uso de TD que contribuam para o desenvolvimento de novas formas de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente. Nessa perspectiva, Balacheff e Kaput (1996 apud BASSO; NOTARE, 2015, p. 3), entendem que as TD contribuem "para a produção de uma nova forma de realismo dos objetos matemáticos. As versões virtuais de objetos matemáticos produzem a sensação de existência material, dada a possibilidade de alterá-los na tela do computador", transformando-se em verdadeiras ferramentas matemáticas, que permitem pensar em matemática de uma nova maneira.

Concorda-se com Balacheff e Kaput (1996 apud BASSO; NOTARE, 2015) que as TD produzem a sensação da existência material dos objetos matemáticos, mas é importante mencionar que o acesso aos objetos matemáticos, com base em Duval (2003, 2006, 2011, 2012, 2013), se dá apenas por meio de representações semióticas. As “representações semióticas são as frases em linguagem natural, as equações, e não as palavras, os algarismos e as letras. São as figuras, os esquemas, os gráficos e não os pontos, raramente visíveis, ou os traços” (DUVAL, 2011, p. 38).

Destaca-se que, as representações semióticas “não são somente necessárias para fins de comunicação, são igualmente essenciais à atividade cognitiva do pensamento (DUVAL, 2012, p. 269), isto é, as representações são instrumentos para comunicar o conhecimento matemático e são instrumentos que dão suporte aos processos cognitivos que produzem esse conhecimento. Cada representação semiótica evidencia particularidades distintas do objeto matemático. Em outras palavras, “o conteúdo de uma representação depende mais do registro de representação do que do objeto representado” (DUVAL, 2003, p. 22). Por exemplo, a simetria, em uma função quadrática, é observada de forma mais evidente na representação gráfica do que na representação algébrica (Figura 1).

Figura 1: Diferentes representações da função quadrática



Fonte: Elaborada pela autora.

Além disso, torna-se imprescindível pontuar que a Matemática é a área do conhecimento na qual há sempre ou quase sempre “prioridade das representações sobre os objetos do conhecimento. E [...] a distinção entre os objetos matemáticos e suas múltiplas representações constitui uma das principais dificuldades de compreensão na aprendizagem” (DUVAL, 2011, p. 34). Por isso, ao propor atividades, para serem desenvolvidas com auxílio de TD, é preciso considerar a mobilização e coordenação de diferentes representações semióticas para que os estudantes não confundam o objeto matemático com suas representações Segundo Duval (2006, p. 111), registro é uma forma particular de representação, em outros termos “nem todos os sistemas semióticos são registros, somente aqueles que permitem a transformação de representações" (DUVAL, 2006, p. 111). São registros de representação semiótica: língua natural (argumentação), sistemas de escritas (numérica, algébrica e simbólica), figuras geométricas e gráficos.

O funcionamento do pensamento em Matemática, segundo Duval (2011), depende da transformação de representações semióticas. Há dois tipos de transformação semiótica: tratamento e conversão. O tratamento refere-se a uma transformação que produz uma representação semiótica do mesmo tipo, por exemplo, resolução de uma equação exponencial (exposta no lado esquerdo do Quadro 1). A conversão é entendida "como uma transformação de uma representação em outra conservando a totalidade ou uma parte do conteúdo da representação inicial" (SOARES, 2016, p. 51). Por exemplo, transformar uma situação, dada na língua natural, em que as grandezas são diretamente proporcionais, na sua representação algébrica, ou seja, $(f(x) = ax, a \neq 0\,)$. É essa transformação que conduz aos mecanismos subjacentes à compreensão em Matemática (DUVAL, 2003).

A importância dos registros de representação semiótica na aprendizagem matemática, enfatizada por Duval (2011) e sistematiza na teoria denominada "Teoria dos Registros de Representação Semiótica", é evidenciada na BNCC ao mencionar que:

> [...] na Matemática, o uso dos registros de representação e das diferentes linguagens é, muitas vezes, necessário para a compreensão, a resolução e a comunicação de resultados de uma atividade. Por esse motivo, **espera-se que os estudantes conheçam diversos registros de representação e possam mobilizá-los para modelar situações diversas** por meio da linguagem específica da matemática – verificando que os recursos dessa linguagem são mais apropriados e seguros na busca de soluções e respostas – e, ao mesmo tempo, promover o desenvolvimento de seu próprio raciocínio. (BRASIL, 2018, p. 529, grifos nossos)

Apresentadas as caraterísticas do objeto matemático sob a ótica de Duval (2003, 2011, 2012) retoma-se a discussão acerca das TD e busca-se relacionar com os registros de representação semiótica, destacando os registros dinâmicos de representação. Nessa perspectiva, Gravina (2015, p. 238, grifos nossos) compreende que com as TD há novas possibilidades para criar, produzir e divulgar conhecimentos. Assim, com as TD há probabilidade de "interagir com **sistemas dinâmicos de representação**[12], que externalizam e internalizam novos pensamentos, em contínuo

---

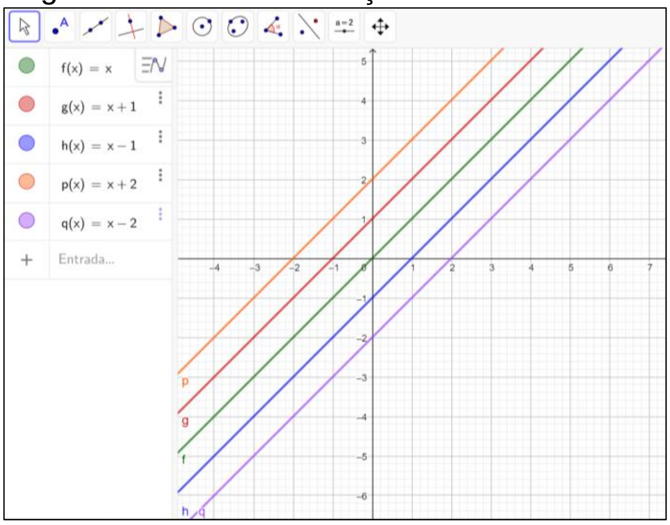
[12] Gravina (2015, p. 243), fundamentada em Duval (2011), denomina as representações semióticas apresentadas por softwares, por exemplo, GeoGebra de registros dinâmicos de representação

processo de ação/reação entre sujeito e ferramenta". Para ela, as TD e as "formas de pensar estão em completa dependência, pois se por um lado as ferramentas servem para externalizar pensamentos, por outro lado os pensamentos são internalizações de ações sobre as ferramentas" (ibidem).

Segundo Gravina (2015, p. 252), a interação com sistemas dinâmicos de representação, proporcionada pelas TD, apresenta novas formas de pensar, o que pode trazer complexidades ao processo de ensino e aprendizagem de Matemática. Isso porque uma TD, por exemplo, um software "não se limita a expandir nossas possibilidades de pensamento. Ele transforma, de forma concomitante, as formas de pensar e as formas de veicular o conhecimento". Em outras palavras, ele transforma a forma de raciocinar, representar, comunicar e argumentar.

Softwares como o GeoGebra – caracterizado como ambiente dinâmico de aprendizagem matemática – apresentam simultaneamente diferentes registros (língua natural, geométrico, gráfico, sistema de numeração) com algumas particularidades. Conforme Stormowski, Gravina e Lima (2015, p. 4), a primeira particularidade a ser considerada é o *dinamismo das representações*, "que se caracteriza pela possibilidade de mover elementos matemáticos representados, sem que estes percam as propriedades subjacentes (propriedades oriundas de sua representação no software)". Pode-se observar essa peculiaridade ao analisar a translação do gráfico da função $f(x) = x$ (Figura 2).

Figura 2: Gráfico da Função Afim



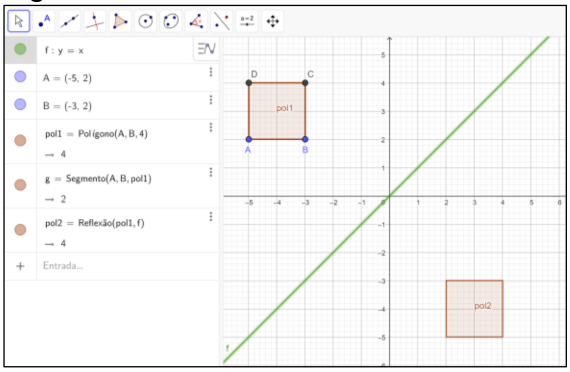
Fonte: Elaborada pela autora.

semiótica. Isso porque as representações produzidas no software não são estáticas, por exemplo, uma figura geométrica é "uma coleção de 'desenhos em movimento', que respeita um certo procedimento de construção".

O gráfico em forma de reta (Figura 2) apresenta, exatamente a mesma figura, mas em diferentes posições no plano cartesiano. Também, é possível verificar as transformações cognitivas: tratamento gráfico (translação vertical) e conversão (representação algébrica e gráfica - as diferentes posições do gráfico, no plano cartesiano, estão relacionadas a diferentes representações algébricas ($f(x) = ax + b$) – modificações dos valores de b). Ou seja, pode-se analisar famílias de funções sob a ótica de "operações algébricas e correspondentes movimentos geométricos nos gráficos associados" (SALIN; GRAVINA, 2016, p. 7).

A *relação funcional* é outra peculiaridade dos registros dinâmicos. Para elaborar uma construção no software, geralmente, são utilizadas ferramentas que apresentam implicitamente relações funcionais entre elementos matemáticos: "os elementos iniciais da construção são as variáveis independentes, os elementos finais são as variáveis dependentes, e a 'lei' da função é dada pelo procedimento intermediário (com mais ou menos passos de construção automatizados)" (STORMOWSKI; GRAVINA; LIMA, 2015, p. 5). Por exemplo, na ferramenta "Reflexão em relação a uma reta" do GeoGebra, os elementos iniciais são objeto (quadrado – pol1) e uma reta, e é a partir deles que se obtém o elemento resultante, isto é, o objeto simétrico em relação a reta (Figura 3). Os elementos visíveis são os iniciais (reta, $y = x$, e quadrado - pol1) e o elemento final (objeto simétrico – pol2), mas o processo de obtenção (que é automatizado pelo software) está implícito na representação. Entende-se que é importante discutir com os estudantes os processos matemáticos que estão por detrás da representação do pol2 para a compreensão, neste caso, do conceito de reflexão axial.

Figura 3: Reflexão Axial

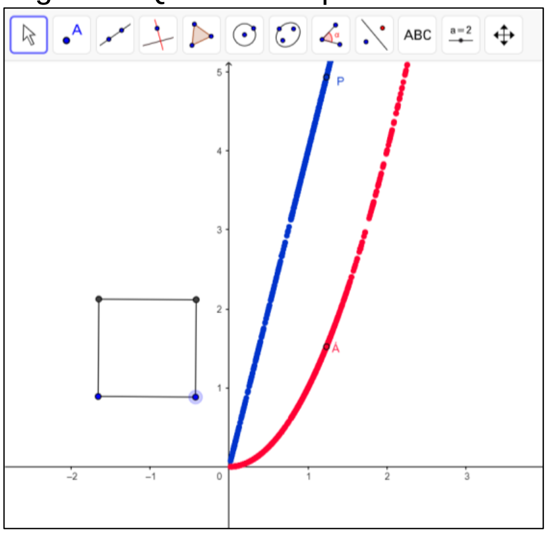


Fonte: Elaborada pela autora.

Outra peculiaridade é a *estabilidade da construção*. Após elaborar uma construção e manipular os elementos que a originaram ocorrem transformações no objeto que está na tela do computador, “mas as relações geométricas impostas à construção, bem como as relações que delas decorrem, se mantém invariantes” (STORMOWSKI; GRAVINA; LIMA, 2015, p. 6). Essa ideia é evidenciada na Figura 4, pois ao movimentar o vértice do quadrado a medida do seu lado é alterada, mas a figura permanece a mesma. Assim, há variação no perímetro e na área que dependem da medida do lado do quadrado. Essa relação de dependência é transferida para as coordenadas dos pontos P e A, que percorrem o gráfico, à medida que um dos vértices do quadrado é movimentado.

A situação apresentada na Figura 4 é um exemplo de conversão de representações semióticas, especificamente, da representação geométrica para a gráfica, sem ser utilizada a representação algébrica, isto é, ela não é condição para obtenção do gráfico. Conforme Stormowski, Gravina e Lima (2015), situações como essa são pouco exploradas nas aulas de matemáticas, pois os livros didáticos, geralmente, destacam o processo de obtenção do gráfico a partir da representação algébrica, e não o contrário. A relação entre geometria e funções, evidenciada nessa situação, também, é pouco explorada.

Figura 4: Quadrado – perímetro e área



Fonte: Elaborada pela autora.

As peculiaridades da representação dinâmica supracitadas, segundo Stormowski, Gravina e Lima (2015, p. 6), “conferem à ela uma distinção dos registros previamente apresentados (língua natural, geométrico, gráfico, sistemas de numeração). Para evidenciar estas peculiaridades, o mesmo será denominado de registro de representação dinâmica” ou registros dinâmicos.

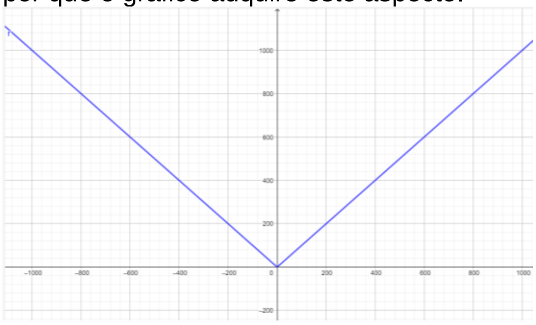
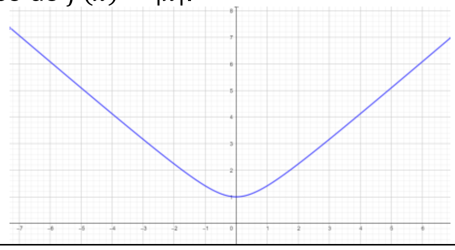
Ainda, em relação aos softwares voltados ao processo de ensino e aprendizagem de Matemática, Duval (2013, p. 32) compreende, do ponto de vista cognitivo, que eles apresentam três grandes inovações. A mais fascinante, nas palavras do teórico, é o poder de visualização. “A segunda é que eles constituem um meio de transformações de todas as representações produzidas na tela”. Em outros termos, os softwares não são apenas uma ferramenta de cálculo, “eles cumprem uma função de simulação e de modelagem que ultrapassa tudo o que podemos imaginar ‘mentalmente’” ou produzir com lápis e papel. A terceira inovação refere-se à produção quase imediata de representações semióticas, ou seja, é um clique e o gráfico de uma função é exposto na tela do computador.

As inovações, mencionadas por Duval (2011), geram do ponto de vista cognitivo, o interesse e os benefícios pedagógicos das TD, em particular, dos softwares utilizados no ensino e aprendizagem de Matemática. Do ponto de vista da formação do cidadão, as TD são indispensáveis dada sua presença cada vez mais constante na vida das pessoas, conforme já abordado. Contudo, Duval (2011, p. 32) questiona: “do ponto de vista dos objetivos da educação relacionados ao desenvolvimento da inteligência e à sua autonomia em matemática e na utilização da matemática, é também tão óbvio ou tão simples [a utilização de TD]?”

Esse questionamento é posto para chamar a atenção de que os softwares contribuem no desenvolvimento do pensamento matemático, mas é preciso ficar atento ao fato de que a visualização, proporcionada por esses recursos, pode conduzir o “olhar dos estudantes” ao reconhecimento perceptivo de formas (figuras geométricas, gráficos) produzidas na tela. No entanto, a visualização é uma “atividade cognitiva intrinsicamente semiótica e não apenas de percepção” (SOARES; FERNER; MARIANI, 2018, p. 28), pois permite a identificação de variáveis visuais pertinentes em cada representação do objeto matemático. Outro aspecto a ser considerado no uso dos softwares é o fato de que “a visualização na tela repousa sobre o processo de discretização e não visualiza a continuidade matemática e o infinito” (DUVAL, 2013, p. 32).

Entende-se que o questionamento exposto por Duval (2011) evidencia que os softwares, em particular, o GeoGebra, proporcionam aos estudantes uma exploração inicial, o que permite elaborar e testar conjecturas, mas a validade ou não da solução deve ser fundamentada em critérios de argumentação matemática. O Quadro 2 apresenta uma atividade em que o gráfico de função é construído no GeoGebra, considerando uma escala específica para x e y.

Quadro 2: Análise do gráfico de função construído no GeoGebra

Atividade:	***Argumentação:***
A figura a seguir representa o gráfico da função $r: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $r(x) = \sqrt{x^2 + 1}$, traçado no GeoGebra para $-1000 \leq x \leq 1000$, $0 \leq y \leq 1000$. Explique por que o gráfico adquire este aspecto. 	Para valores "grandes" de x, a constante 1 tende a ficar desprezível em relação a x^2, $\sqrt{x^2 + 1} \approx \sqrt{x^2} = \|x\|$, logo, o gráfico fica próximo do gráfico de $f(x) = \|x\|$; Mas, para valores "pequenos" de x, a constante 1 interfere, logo, o gráfico de $r(x)$ difere-se do gráfico de $f(x) = \|x\|$. 

Fonte: Elaborado pela autora a partir de Giraldo, Caetano e Mattos (2013).

O gráfico, apresentado pela janela gráfica do GeoGebra (figura a esquerda no Quadro 2), para a escala dada, pode ser associado, via percepção, ao gráfico da função $f(x) = |x|$, mas ao alterar a escala dos eixos, não é o gráfico da função que muda, mas sim, o seu aspecto. Ou seja, quando a escala é alterada não é observado um gráfico diferente, nem o gráfico muda de comportamento, mesmo que a percepção conduza a essa ideia, apenas o aspecto do gráfico é alterado, pois a observação é a realizada de outro ponto de vista.

Assim, para compreender que o gráfico não se altera, nem seu comportamento, o estudante precisa visualizar, o que requer a identificação das variáveis visuais pertinentes, em especial, na representação algébrica, isto é, para valores "grandes" de x a constante 1 tende a ficar desprezível em relação a x^2. Entende-se que analisar um mesmo gráfico sob diferentes pontos de vista pode contribuir na identificação das propriedades da função e, portanto, a compreensão do seu comportamento (GIRALDO; MATTOS; CAETANO, 2013). Destaca-se que as ferramentas do software facilitam a realização desse tipo de atividade, pois rapidamente a escala dos eixos é modificada, o que seria extremante difícil de realizar com lápis e papel. Além disso, a representação gráfica, exposta pelo software, proporciona uma análise global da relação de crescimento/decrescimento entre as variáveis, o que a construção de um gráfico com base nos dados produzidos em uma tabela numérica não permite.

Quanto a aprendizagem do conceito de função, foco deste estudo, Bonini, Druck e Barra (2018, p. 169, grifos nossos) entendem que:

> [...] **é necessário identificar seus diferentes registros de representação de forma articulada**, a ponto de os estudantes poderem transitar facilmente de um a outro nas diversas situações de uso. Assim, no trabalho escolar com funções torna-se necessário a discussão dos registros: verbais, por tabelas, algébricos e gráficos, salientando suas respectivas características, limites e vantagens.

Percebe-se, na citação acima, que os autores corroboram com as ideias de Duval (2011) que a aprendizagem matemática requer a mobilização e articulação entre diferentes registros de representação semiótica. Pode-se acrescentar a essas ideias o trabalho com os registros de representação dinâmicos, conforme indicam Stormowski, Gravina e Lima (2015), pois cada vez mais é importante a inserção de TD, em particular, softwares nas aulas de matemática.

3. METODOLOGIA

Para a realização desta pesquisa optou-se por pressupostos da metodologia de cunho qualitativo, na forma de análise documental. Para Gerhardt e Silveira (2009), a pesquisa qualitativa tem como base o aprofundamento da compreensão do material em estudo, não tendo a representação numérica como foco principal. Segundo Lima Junior et al. (2021, p. 37), a pesquisa qualitativa pode ser entendida como um "instrumento de compreensão detalhada, em profundidade dos fatos que estão sendo investigados".

Também, optou-se pela análise documental, porque segundo Barbosa (2018, p. 41), "[...] publicações científicas, como artigos, livros, anais de eventos etc. São materiais que já receberam alguma abordagem analítica ou problematizadora reconhecida como pertencente ao campo científico. Portanto, a análise de um livro didático, de caderno de aluno, de um documento oficial, por exemplo, não constitui um estudo bibliográfico, mas um estudo documental."

Como já mencionado, a fonte de produção de dados foram coleções de livros didáticos de Matemática do Ensino Médio, aprovadas no PNLD/2021. O Quadro 3 apresenta as coleções de livros didáticos que foram selecionadas para este estudo. O motivo pelo qual foram analisadas quatro coleções e não todas, como mencionado na proposta inicial (TCCI), foi porque essas são as escolhidas por todas as escolas de Ensino Médio do município de Caçapava do Sul, RS.

Quadro 3: Coleções de Livros Didáticos de Matemática do Ensino Médio – PNLD/2021

Coleção	Título Volume	Autor(es)
Conexões – Matemática e suas Tecnologias (C1)	V1 – Grandezas, álgebra e algoritmos	GONÇALVES, R. M. F.; DE OLIVEIRA, D. M.; DE SOUZA, E. F.; DE MORAES, E. N.; DE LEONARDO, F. M.; IKEDA, J.; MOURA, L. O. G.; DE SOUZA, M. J. G.; RIBEIRO, R. S.
	V2 – Funções e aplicações	
	V3 – Estatística e probabilidade	
	V4 – Trigonometria	
	V5 – Geometria plana e espacial	
	V6 – Matrizes e geometria analítica	
Matemática Interligada (C2)	V1 – Funções afim, quadrática, exponencial e logarítmica	GOIS, V. H. S.; DOS ANJOS, D. R. K; TAVARES, E. H. G.; DA SILVA, E. B.; BONI, K. T.; ANDRADE, T. M.
	V2 – Trigonometria, fenômenos periódicos e programação	
	V3 – Grandezas, **sequências** e Matemática financeira	
	V4 – Matrizes, sistemas lineares e Geometria analítica	
	V5 – Estatística, análise combinatória e Probabilidade	
	V6 - Geometria espacial e plana	
Quadrante - Matemática e suas Tecnologias (C3)	V1 – Funções	PRESTES, D. B.; CHAVANTE, E. R.
	V2 – Trigonometria e **sequências**	
	V3 – Estatística, probabilidade e Matemática Financeira	
	V4 – Geometria plana e espacial	
	V5 – Sistemas lineares e geometria analítica	
	V6 – Grandezas, medidas e programação	
Diálogo – Matemática e suas Tecnologias (C4)	V1 – Grandezas, medidas e Matemática Financeira	STEIGENBERGER, A. L.; TEIXEIRA, L. A.; DA SILVA, J. C. J.; MANJAVACHI, F. N BARBA, A. N. D.; RAMOS, D. C.
	V2 – Geometria plana	
	V3 – Geometria espacial	
	V4 – Geometria analítica, sistemas e transformações geométricas	
	V5 – Estatística e probabilidade	
	V6 – Funções e progressões	

Fonte: Elaborado pela autora com base no PNLD/2021.

Destaca-se que as coleções foram denominadas de C1, C2, C3 e C4, conforme apresentação no Quadro 3. Além disso, percebe-se que todas as coleções foram organizadas em seis volumes. Os volumes que tratam diretamente da temática desta pesquisa (funções afim e quadrática) são: V2 em C1; V1 em C2; V1 em C3; V6 em C4. É importante mencionar que o conteúdo de sequências numéricas (função de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{R}$) é mencionado explicitamente no V3 em C2 e no V2 em C3, o que pode gerar dados para o estudo, pois, geralmente, ao tratar desse conteúdo os autores de coleções de livros didáticos priorizam as progressões aritméticas (função afim) e geométricas.

Ao analisar o Guia do PNLD/2021 para compreender as características gerais das coleções escolhidas constatou-se que, em todas elas, cada volume é composto pelo Livro do Estudante (LE) e pelo Manual do Professor (MP). O LE é dividido em capítulos que apresentam tópicos relativos aos conteúdos; atividades (resolvidas e propostas); e as seções, estas últimas se diferenciam em cada coleção. C1 apresenta as seguintes seções: “Compreensão de texto”, apresenta textos variados, extraídos de várias mídias, e questões que exploram vários níveis de interpretação e compreensão; “Pesquisa e ação”, trata-se de uma atividade prática de realização em grupo relacionada a algum conteúdo abordado no volume, envolvendo a pesquisa e a elaboração de um produto final, que será compartilhado com a turma ou com a escola; e “Educação Financeira”, aborda atividades que buscam desenvolver o senso crítico e promover atitudes responsáveis e conscientes no planejamento e no uso de recursos financeiros. C2 propõe as seguintes seções: “Acesso Digital”, com sugestões para o(a) professor(a) utilizar recursos digitais; “Saiba Mais”, são apresentados textos e imagens relacionados com outras áreas do conhecimento; e “Conectando Ideias”, que convida os(as) estudantes a fazer a leitura e interpretação de infográficos relacionados a temas diversificados.

Já C3 apresenta as seguintes seções: “Matemática a+”, propõe situações contextualizadas; “Passo a passo”, promove o pensamento computacional; “Verificando a rota”, retoma conceitos gerais desenvolvidos; “Valores em ação” promove reflexão sobre cuidados com a saúde; “Ampliando fronteiras”, apresenta história e aplicações matemáticas; “Matemática em ação”, traz contextos de dentro e de fora da sala de aula; e “Ferramentas”, propõe o uso de tecnologias, em especial, calculadora e softwares). C4 propõe as seguintes seções: “Resolvendo por Etapas”, apresenta uma possibilidade de organizar o pensamento para solucionar problemas; “Acessando tecnologias”, apresenta exemplos e atividades, utilizando softwares, linguagem de programação e outros aplicativos; e “Ampliando seus conhecimentos”, expõe referências complementares e comentadas de livros, vídeos, sites e podcasts.

Quanto ao MP, a estrutura é semelhante nas coleções, em outras palavras, a maioria apresenta a estrutura da coleção e as características das seções, bem como busca orientar o(a) professor(a) sobre: seguir/explorar as indicações da BNCC (todas as coleções reproduzem as competências e habilidades previstas para o Ensino Médio); formas de promover o desenvolvimento do pensamento computacional dos(as) estudantes; estratégias de ensino baseadas em Metodologias Ativas e avaliação, que visam estimular o protagonismo do estudante em sala de aula de cada volume.

Após a análise do Guia do PNLD/2021, essas características foram identificadas nas coleções e iniciou-se a busca por situações que envolvessem o estudo das funções afim e quadrática com auxílio de tecnologias digitais. Para tanto, foram utilizados os seguintes descritores: tecnologia digital (tecnologias digitais), software (softwares, ferramentas – C3), aplicativo (aplicativos), função polinomial (funções polinomiais), função polinomial do 1° grau, função polinomial do 2° grau, função afim (funções afins, afim, afins), função quadrática (funções quadráticas, quadrática(s)), visualização (visualiza, visualizar, visualizem, visualizando), variação (variações, variam, variando) e GeoGebra.

Esses descritores foram escolhidos, pois busca-se investigar a presença de tecnologias digitais em coleções de livros didáticos no que tange ao estudo de funções afim e quadrática, como já mencionado, logo, estão inclusos, nessas tecnologias, os softwares (especialmente, o GeoGebra) e aplicativos. Também, foram escolhidos como descritores função afim, função quadrática e polinomial (incluindo de/do 1º e 2º grau) por ser uma pesquisa fundamentada nestas funções, que são um tema de interesse da autora, pois foi base para suas aulas de Regência II. Por último, os descritores visualização e variação foram escolhidos por estarem diretamente relacionados a teoria dos Registros de Representação Semiótica e ao conceito matemático abordado. Sublinha-se que, nos volumes que não tratam diretamente de funções, em particular, afim e quadrática, buscou-se além dos descritores mencionados o termo *função*, pois poderiam ter situações em que as TD são utilizadas para explorar a relação de outros conceitos matemáticos com o conceito de função.

A próxima seção apresenta os dados produzidos por meio da exposição de quadros e suas análises. Destaca-se que, as situações mapeadas são apresentadas no Apêndice A. Neste apêndice, as situações mapeadas são classificadas por coleção, identificando o volume e se pertencem ao corpo do texto (conteúdo apresentado no LE) ou são atividades (resolvida ou proposta). Assim, cada atividade foi codificada da seguinte forma: S representa situação, XX apresenta o número da posição da situação no apêndice, CX representa a coleção, VX representa o volume da coleção, C corpo do texto, A atividade e AR atividade resolvida. Desta forma, o código S1C1V1C indica que se têm a primeira situação mapeada e ela pertence a coleção C1 do primeiro volume e trata-se de uma situação que está no corpo do texto.

4. ANÁLISE DOS DADOS

Após definir os descritores, realizou-se o mapeamento de quantas vezes cada descritor é identificado em cada um dos seis volumes das quatro coleções (Quadro 4).

Ao analisar o Quadro 4, verifica-se que o descritor *software* teve maior índice de ocorrência (ao considerar a soma de todas as coleções e todos os volumes), ao todo 1076 resultados. O segundo descritor com maior ocorrência foi *função quadrática* (793 resultados), seguido de *variação* (740 resultados), *função afim* (731 resultados), *tecnologias digitais* (672 resultados), *aplicativo* (451 resultados), *GeoGebra* (340 resultados), *visualização* (248) e *função polinomial* (104 resultados).

Os descritores com menor índice de ocorrência foram os de *funções polinomiais de 1° e 2° grau*, com os resultados, 52 e 29, respectivamente. Este resultado ocorreu porque apesar de ter função polinomial nas coleções, ao digitar “de/do 1° grau” ou “de/do 2° grau” não apareceram muitos resultados, talvez por erros na ferramenta de pesquisa (o símbolo º é um caractere especial e alguns buscadores não conseguem fazer sua leitura corretamente), o que resultou em diferenças nos resultados ao utilizar os softwares “Adobe Reader” e “Microsoft Edge”, sendo necessário realizar a pesquisa em ambos, a fim de minimizar possíveis inconsistências, em especial, devido ao software “Microsoft Edge”, em seu mecanismo de busca, não reconhecer adequadamente caracteres especiais.

Quadro 4: Descritores mapeados

		Tec. Digitais	Software	Aplicativo	F. Polinomial	F. Pol. 1º grau	F. Pol. 2º grau	F. Afim	F. Quadrática	Visualização	Variação	GeoGebra	**Total**
C1	V1	31	47	22	16	4	3	4	4	-	29	4	**164**
	V2	33	68	20	37	23	1	115	169	6	105	4	**581**
	V3	32	21	13	2	1	1	3	3	8	31	-	**115**
	V4	28	74	17	2	1	1	4	4	4	29	4	**168**
	V5	29	33	12	2	1	1	3	3	8	14	-	**106**
	V6	30	44	18	2	1	1	8	7	1	10	6	**128**
Total C1		*183*	*287*	*102*	*61*	*31*	*8*	*137*	*190*	*27*	*218*	*18*	***1262***
C2	V1	43	39	10	8	4	4	171	150	15	64	40	**548**
	V2	22	31	14	-	-	-	1	1	15	21	44	**149**
	V3	31	26	12	-	-	-	46	34	15	12	33	**209**
	V4	28	38	6	-	-	-	1	4	19	9	66	**171**
	V5	23	23	7	-	-	-	1	2	12	19	5	**92**
	V6	35	35	8	-	-	-	1	2	19	2	33	**135**
Total C2		*182*	*192*	*57*	*8*	*4*	*4*	*221*	*193*	*95*	*127*	*221*	***1304***
C3	V1	43	65	18	13	6	6	160	223	17	87	4	**642**
	V2	34	50	18	4	2	2	37	5	17	29	2	**200**
	V3	34	31	22	4	2	2	3	3	9	27	1	**138**
	V4	41	43	16	4	2	2	3	3	9	19	5	**147**
	V5	39	58	22	4	2	2	4	8	7	19	5	**170**
	V6	45	41	119	4	2	2	3	3	13	77	3	**312**
Total C3		*236*	*288*	*215*	*33*	*16*	*16*	*210*	*245*	*72*	*258*	*20*	***1609***
C4	V1	11	47	31	-	-	-	-	-	15	22	5	**131**
	V2	8	59	7	-	-	-	1	1	10	19	21	**126**
	V3	13	42	9	-	-	-	1	1	7	9	5	**87**
	V4	11	80	14	-	-	-	1	1	10	13	38	**168**
	V5	10	27	7	-	-	-	1	1	7	17	-	**70**
	V6	18	54	9	2	1	1	159	161	5	57	12	**479**
Total C4		*71*	*309*	*77*	*2*	*1*	*1*	*163*	*165*	*54*	*137*	*81*	***1061***
Total		*672*	*1076*	*451*	*104*	*52*	*29*	*731*	*793*	*248*	*740*	*340*	**5236**

Fonte: Elaborado pela autora.

Pode-se, também, afirmar que a maioria dos autores das coleções aborda as funções polinomiais de/do primeiro e segundo grau como função afim e função quadrática, respectivamente, sendo poucas coleções que trabalham essas funções como polinomiais de/do 1° e 2° grau, por isso, há poucos resultados relacionados a funções polinomiais nas coleções 2 e 4. Já nas coleções 1 e 3 tem-se um número significativo de menções a função polinomial de/do 1° e 2° grau, dando destaque para a C1V2 (23 resultados para Função pol. 1° grau e 1 resultado para Função pol. 2° grau) e C3V1 (Função pol. de 1° e 2° grau tiveram 6 resultados cada).

A significativa quantidade de menções ao descritor *software* ocorreu porque os autores utilizaram a palavra de forma geral, seja quando estavam indicando um determinado software (por exemplo, software GeoGebra) ou quando sugeriam o uso de software (neste caso, sem indicar algum em específico), mencionando, muitas vezes, software de geometria dinâmica.

Ao observar o Quadro 4, é possível notar que C3 apresentou o maior quantitativo de descritores (1609). Isto ocorreu em virtude de a coleção utilizar o descritor *ferramenta*, para sugerir o uso de calculadora e/ou algum software, além de mencionar o próprio descritor *software*. Na sequência, as coleções com mais descritores mapeados foram C1(1262), C2 (1213) e C4 (1061).

A partir da análise quantitativa, dos descritores, é possível perceber que, em C1, *software* foi o descritor com maior número de resultados (287), mas a maioria das vezes em que foi identificado estava relacionado a BNCC[13] e as orientações apresentadas no MP. O descritor *tecnologias digitais* aparece 183 vezes dentre os seis volumes da C1 em trechos da BNCC e nas orientações expostas no MP. O descritor *aplicativo* aparece 102 vezes, porém relacionado a BNCC e as orientações expostas no MP, ou ao uso de outros aplicativos que não estão sendo utilizados nesta pesquisa.

O descritor *função polinomial* teve um total de 61 resultados, em sua maioria relacionados a BNCC, no MP, na apresentação do conteúdo (LE) e nas sugestões de respostas das atividades propostas (MP). Os descritores *função polinomial de 1° grau* e *função polinomial de 2° grau* tiveram, respectivamente, 31 e 8 resultados, quando eram citados, tinham relação com a BNCC e apresentação do conteúdo (LE). O descritor *função afim* teve 137 resultados, havendo relação com a BNCC e apresentação do conteúdo (LE). O descritor *função quadrática* teve 190 resultados, relacionados a resolução de exercícios (LE), apresentação do conteúdo (LE), BNCC e na sugestão de cronograma dos capítulos (MP).

[13] É importante mencionar que todas as coleções analisadas reproduzem trechos da BNCC da área da Matemática (objetos de conhecimento, competências, habilidades), principalmente, no MP e todos os descritores ou suas variações estão presentes nesse documento.

O descritor *visualização* tem um total de 27 resultados, relacionado, em sua maioria, como parte do texto explicativo sobre o uso do software (MP) e no enunciado de situações (LE). O descritor *variação* teve 218 resultados, relacionados a BNCC e, principalmente, a taxas de variação de grandezas (LE). O descritor *GeoGebra* teve, apenas, 18 resultados, em especial, por esta coleção não dar preferência a um software específico. Isso pode ser observado na S3C1V1A (Apêndice A). Por fim, destaca-se que os maiores quantitativos dos descritores estão no volume 2, volume destinado a funções.

Na C2, os descritores *função afim* e *GeoGebra* foram os que obtiveram mais resultados (221 cada). Este resultado deve-se a *função afim* ter um capítulo específico no volume 1, o que fez com que ocorram muitos resultados. Além disso, C2 explora, em seu volume 3, o conceito de sequência, por isso, a maioria das 46 vezes que a expressão *função afim* foi identificada tratava de uma progressão aritmética. Já GeoGebra aparece muitas vezes, pois há várias situações que solicitam sua utilização para resolvê-las (LE). O terceiro descritor foi *função quadrática* (193), dando destaque ao volume 1 que teve 150 resultados, pois é o volume destinado ao estudo de funções.

O quarto descritor com mais resultados foi *software* (192), tendo uma distribuição uniforme pelos volumes, pois a maioria dos resultados encontra-se no MP, em particular, na seção de Acesso Digital, que é comum a todos os volumes. O quinto descritor com mais resultados foi *tecnologias digitais (182)*, pois é citado algumas vezes na BNCC, mas tem predominância em textos apresentados no MP. Na sequência, o descritor *variação* apareceu 127 vezes, pois houve muitos resultados relacionados a taxa de variação, variação de inflação, variação de temperatura, entre outros, expostos, principalmente, no LE.

O descritor *visualização* aparece 95 vezes, trazendo relações com formas de visualizar determinado conteúdo ou relacionado a janelas de visualização de softwares (LE). O descritor *aplicativo*, teve um total de 57 resultados, destacando-se o volume 2, destinado ao estudo de trigonometria, fenômenos periódicos e programação, aparecendo como sugestão de uso em situações relacionadas a aplicativos de programação (MP e LE) e na BNCC. Por fim, os descritores *função polinomial, função polinomial do 1º grau e função polinomial do 2° grau*, tiveram, respectivamente, 8, 4 e 4 resultados, sendo relacionados a citações na apresentação do conteúdo (LE) e na BNCC.

Na C3, o descritor *software* teve destaque, com 288 resultados, presente na BNCC, como sugestão de uso em situações (MP e LE) e na seção de resolução de exercícios (LE), em particular, no volume 1 com 65 resultados, destinado a funções. Na sequência, *variação* (258), relacionado a taxa de variação, por exemplo, situações envolvendo variação de temperatura ou de volume (LE). O descritor *função quadrática* teve 245 resultados, sendo 223 no volume 1, destinado a funções, incluindo capítulo específico para tratar do descritor.

O descritor *tecnologias digitais* teve 236 resultados, na maioria das vezes, relacionado a BNCC e no MP, ou como sugestão de resolução de situações (MP) e poucas vezes no enunciado das situações (LE). O descritor *aplicativo* teve 215 resultados, em sua maioria, no volume 6, no MP, principalmente, em textos informativos sobre o uso de tecnologias digitais e softwares em sala de aula. O descritor *função afim* teve 210 resultados, sendo 160 deles no volume 1, dedicado ao estudo de funções, em especial, por este volume possuir capítulo dedicado ao tema, destacando que a maioria das vezes que a expressão *função afim* foi identificada no volume 2, também, refere-se ao estudo de sequências, em particular, progressão aritmética. Já, o descritor *visualização* teve 72 resultados, distribuídos entre os volumes de forma uniforme, relacionados a visualização a partir de softwares ou gráficos (LE), BNCC e MP. O descritor *função polinomial* teve 33 resultados, destacando-se o volume 1 (13 resultados), conforme já mencionado, destinado ao estudo de funções.

O descritor *GeoGebra* teve 20 resultados, um resultado bastante baixo se comparado as demais coleções. Ressalta-se que isso ocorreu porque, nesta coleção, teve-se a adição do descritor *ferramentas* (uma variação do descritor *software* na coleção), logo, implicando em um número reduzido de resultados relacionados a *aplicativo* e *GeoGebra*, pois a coleção apenas indicava a expressão *ferramenta* ao invés de sugerir o uso de um software específico como algumas coleções. Os descritores *função polinomial de 1° e 2° grau* tiveram 16 resultados, tendo sua maioria no volume 1 (6), citadas nas seções específicas de função (LE), no MP e na BNCC.

Na C4 o descritor que teve maior destaque foi *software* (309), em especial, no volume 2, destinado a geometria plana e no volume 6, destinado a funções. Sendo, também, identificado em textos indicando a importância da utilização em sala de aula

(MP), particularmente, na subseção “Acessando Tecnologias”[14], na BNCC e em algumas atividades que sugerem o uso de software (LE). Na sequência, os descritores *função quadrática* (165 resultados) e *função afim* (163 resultados), sendo a sua grande maioria no volume 6, 161 e 159, respectivamente, uma vez que este volume é dedicado ao estudo de funções e possui capítulos específicos destinados ao estudo de cada um dos descritores.

O descritor *variação* teve 137 resultados, 57 no volume 6, relacionado, em especial, a taxa de variação (LE), não estando, especificamente, relacionado a funções afim e quadrática. O descritor *GeoGebra* teve 81 resultados, destacando-se o volume 4 (38 resultados), dedicado ao estudo de geometria analítica, sistemas e transformações geométricas. Sublinha-se que muitas situações utilizam a expressão “software de geometria dinâmica”, não especificando o software. O descritor *aplicativo* teve 77 resultados, sendo 31 no volume 1, destinado a grandezas, medidas e Matemática Financeira, além de ser citado na BNCC e no MP.

O descritor *tecnologias digitais* teve 71 resultados, em especial (18 resultados), no volume 6, destinado a funções, além de ser citado no MP e na BNCC. O descritor *visualização* teve 54 resultados, em particular, no volume 1 (15 resultados), sendo relacionado a visualização gráfica (LE), BNCC e MP. Por último, os descritores *função polinomial, função polinomial do 1° grau e função polinomial do 2° grau* tiveram, respectivamente, 2, 1 e 1 resultados, pois a coleção optou por citar “função afim” ao invés de “função do 1° grau” e “função quadrática” ao invés de “função do 2° grau”.

A análise dos descritores indica que eles estão presentes em todas as coleções. Mas, ao verificar em qual parte dos livros didáticos eles foram identificados, ou seja, BNCC, LE e/ou MP, constata-se que na maioria das vezes descritores como “tecnologias digitais”, “software” e “aplicativo” estavam em trechos da BNCC e no MP. Isso revela que os autores se preocupam em mencionar a importância do uso de tecnologias digitais (em particular, software e aplicativos) no processo de ensino e aprendizagem de Matemática, contudo, isso pouco se faz presente no LE. Essa afirmação fica mais explícita ao analisar os dados expostos no Quadro 5.

O Quadro 5 apresenta o mapeamento realizado, a partir dos descritores, das situações identificadas que envolvem função afim e quadrática e propõem o uso de

[14] Esta subseção apresenta propostas de tarefas cujos contextos permitem desenvolver os conceitos estudados com o auxílio de recursos tecnológicos/tecnologias digitais, oferecendo, desta forma, uma estratégia complementar a que é apresentada no livro do aluno.

softwares como o GeoGebra. Os descritores foram identificados 145 vezes em 52 situações mapeadas (Apêndice A). Ressalta-se que o número de situações difere do total de descritores identificados em função de expressões que se repetem ou de situações que possuem mais de um descritor, por exemplo, em S1C1V1C *software* aparece cinco vezes.

Quadro 5: Descritores nas situações mapeadas

		Tec. Digitais	Software	Aplicativo	F. Polinomial	F. Pol. 1º grau	F. Pol. 2º grau	F. Afim	F. Quadrática	Visualização	Variação	GeoGebra	**Total Descritores**	**Total Situações**
C1	V1	-	10	-	-	-	1	-	-	-	-	1	**12**	
	V2	-	19	-	-	-	-	-	2	-	-	1	**22**	
	V3	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	**-**	
	V4	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	**-**	
	V5	-	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	**1**	
	V6	-	4	-	-	-	-	-	-	-	-	-	**4**	
Total C1		-	*34*	-	-	-	*1*	-	*2*	-	-	*2*	***39***	***18***
C2	V1	-	9	-	-	-	-	14	9	9	2	17	**60**	
	V2	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	**-**	
	V3	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	**-**	
	V4	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	**-**	
	V5	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	**-**	
	V6	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	**-**	
Total C2		-	*9*	-	-	-	-	*14*	*9*	*9*	-	*17*	***60***	***6***
C3	V1	-	14	-	-	-	-	3	4	-	-	-	**21**	
	V2	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	**-**	
	V3	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	**-**	
	V4	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	**-**	
	V5	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	**-**	
	V6	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	**-**	
Total C3		-	*14*	-	-	-	-	*3*	*4*	-	-	-	***21***	***13***
C4	V1	-	-	-	-		-	-	-	-	-	-	**-**	
	V2	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	**-**	
	V3	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	**-**	
	V4	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	**-**	
	V5	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	**-**	
	V6	-	13	-	-	-	-	5	8	-	-	1	**27**	
Total C4		-	*13*	-	-	-	-	*5*	*8*			*1*	***27***	***15***
Total			*70*				*1*	*22*	*23*	*9*		*20*	***145***	

Fonte: Elaborado pela autora.

O descritor *software* foi o mais identificado nas situações mapeadas, 70 ao todo, seguido de *função quadrática* (23), *função afim* (22), *GeoGebra* (20), *visualização* (9) e *função polinomial do 2° grau* (1). Destaca-se que o descritor *software* foi o mais apontado nas situações de três coleções (C1, C3 e C4), visto que, em C2, o descritor mais detectado foi *GeoGebra*.

Em C1 ocorreu o maior número de situações (18 situações), sendo 17 identificadas a partir do descritor *software*. Destaca-se que S8C1V2A foi mapeada, mesmo não apresentando em seu texto nenhum descritor, pois requer que sejam realizados os mesmos procedimentos de S7C1V2A, que solicita o uso de um software para construção de gráficos.

Nessa coleção, a maioria das situações foi localizada no volume 2 (13 situações), seguida dos volumes 1 (3 situações), 5 (1 situação) e 6 (1 situação). Esse resultado indica que a maioria das situações (16 situações) está diretamente relacionada aos volumes que se dedicam ao estudo de função, o que indica que a relação entre os vários campos da Matemática (ou unidades temáticas, conforme sugere a BNCC), ainda, é restrita.

As situações localizadas no corpo do texto (S1C1V1C; S2C1V1C; S4C1V2C; S18C1V6C) caracterizam-se por expor explicações sobre como utilizar o software, ou seja, apresentam as ferramentas que devem ser utilizadas, por exemplo, para traçar o gráfico de uma função quadrática e marcar os zeros da função (S1C1V1C). Já, as situações, localizadas nas atividades (propostas ou resolvidas), em sua maioria, utilizam o software para o traçado dos gráficos das funções, dadas na representação algébrica, e análise dos zeros da função, coordenadas do vértice, estudo do sinal, ou seja, uma análise de pontos específicos. Assim, na maioria das vezes, as situações não exigem a análise do comportamento da função, o que é realizado por meio da identificação das variáveis pertinentes em cada uma das representações do objeto matemático (DUVAL, 2011; SOARES; FERNER; MARIANI, 2018). Nessa perspectiva, o modo como propõe-se a utilização do software conduz o “olhar dos estudantes” apenas para o reconhecimento perceptivo das formas e não para a visualização, conforme destaca Duval (2011; SOARES; FERNER; MARIANI, 2018).

O segundo maior número de situações foi mapeado em C4 (14 situações), sendo que o descritor *software* está presente em 12 situações. Sublinha-se que todas as situações foram localizadas no volume 6 que trata especificamente do estudo de função. Esse resultado revela, assim como em C1, que a relação entre os campos da Matemática, preconizada por documentos oficiais e pesquisas na área, em particular, da Educação Matemática, não se faz presente nesses livros didáticos, no que tange ao estudo de funções.

Ainda em relação a C4, apenas uma situação foi localizada no corpo do texto (S42C4V6C). Nela, o uso do software é sugerido para traçar, em um mesmo plano cartesiano, o gráfico de diferentes funções quadráticas, alternando apenas o valor do coeficiente “a”. Em outras palavras, a situação objetiva que o software contribua na análise da influência do coeficiente “a” na representação gráfica (posição da concavidade e abertura da curva). As outras 13 situações foram localizadas nas atividades (propostas). A maioria (S40C4V6A; S46C4V6A, S47C4V6A, S48C4V6A, S49C4V6A, S51C4V6A, S52C4V6A) indica o uso do software para traçar o gráfico que representa a lei da função, determinada após a análise de como as grandezas/variáveis variam. Nesses casos, entende-se que o software não é utilizado apenas para traçar o gráfico da função cuja lei de formação (representação algébrica) já é dada na atividade, ele é utilizado para auxiliar na resolução da situação, pois contribuiu na identificação de variáveis pertinentes tanto da representação gráfica quanto da representação algébrica (DUVAL, 2011). Além disso, ressalta-se que, conforme Duval (2003), cada representação semiótica evidencia particularidades distintas do objeto matemático, necessárias a resolução de situações-problema.

Na C3 foram mapeadas 13 situações, sendo que o descritor *software* (ferramentas) está presente em todas as situações. Assim como na C4, todas as situações classificadas foram localizadas no volume que trata especificamente do estudo de funções (V1). Ressalta-se que em mais de uma coleção a conexão entre os campos da Matemática não é uma prioridade. Das situações mapeadas apenas uma (S44C4V6A) indica o *GeoGebra* para determinar os valores de máximo e de mínimo e uma (S41C4V6A) relaciona função afim ao uso do software VisualG[15].

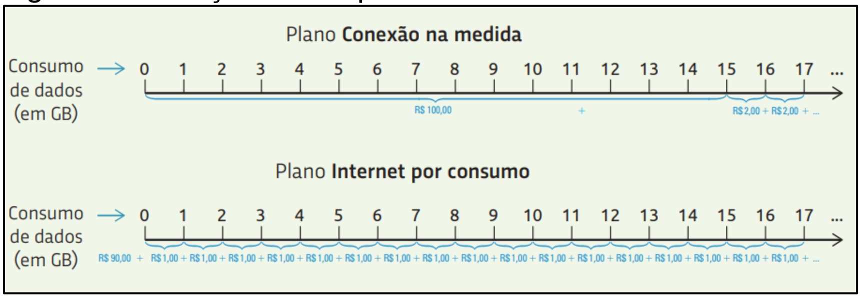
Ainda no que tange a C3, apenas uma situação foi identificada no corpo do texto (S25C3V1C), pelo descritor *software* (ferramenta). A situação envolve a análise de dois planos de internet, um com valor fixo de $R\$\ 100{,}00$ mensais com acréscimo de $R\$\ 2{,}00$ por Gigabyte (GB) utilizado acima do valor contratado, ou o outro que o cliente irá pagar $R\$\ 90{,}00$ por mês mais $R\$\ 1{,}00$ por GB consumido e a partir disso o cliente (aluno) deverá realizar os cálculos para verificar o plano mais vantajoso,

[15] O VisualG é um programa que possibilita a criação, edição, interpretação e execução de algoritmos, muito utilizado para o ensino da lógica de programação, por ser de fácil manipulação.

identificando que esta variação entre as grandezas é descrita por uma função afim.

Os autores sugerem o uso de algum software de “geometria dinâmica” para representar graficamente os planos de acesso à internet. O uso do software pode contribuir na resolução da situação, pois os esquemas construídos para representar o valor pago em função do consumo de dados, conforme Figura 5, pouco contribuem para a análise do plano mais vantajoso, visto que a representação enfatiza apenas uma variável (consumo de dados em GB).

Figura 5: Situação sobre planos de internet



Fonte: Excerto de C3V1.

As outras 12 situações foram identificadas nas atividades (propostas). Na maioria dessas situações, o software (ferramentas) deve ser utilizado para traçar o gráfico de funções cuja lei de formação (representação algébrica) é dada, por exemplo, S26C3V1A. Destaca-se que, dentre essas situações, há aquelas que é necessário verificar pontos de máximo ou mínimo, zeros da função, bem como estudo do sinal. Contudo, é importante mencionar que a identificação de pontos específicos na representação gráfica não garante a compreensão do comportamento da função. Assim como em C1, as situações envolvendo software priorizam mais a percepção do que a visualização (DUVAL, 2011; SOARES; FERNER; MARIANI, 2018).

Na C2 foram localizadas apenas seis situações apesar de esta coleção ter o maior número de descritores identificados (60 resultados). Destaca-se que o descritor *visualização* foi identificado somente nesta coleção (9 resultados), todos no volume 1. Este resultado ocorre em função do uso da palavra visualização fazendo referência as “janelas de visualização” do software GeoGebra. Além disso, o descritor *software* estava presente em cinco situações (S19C2V1C; S20C2V1C; S21C2V1C; S22C2V1C; S24C2V1C), assim, apenas a situação S23C2V1A não foi mapeada a partir desse descritor, mas com os descritores *função quadrática* e *GeoGebra*, com uma citação de cada um. Pode-se perceber que, a maioria das situações está presente no corpo do texto, apenas a S23C2V1A é uma atividade. Em outras palavras, a maioria das situações, identificadas na coleção, está em uma seção intitulada “Acesso Digital”, destinada a apresentar recursos, como softwares e sites, que possibilitam o desenvolvimento de atividades relacionadas aos conteúdos propostos.

Quanto a única atividade identificada (S23C2V1A), verifica-se que a representação algébrica (funções quadráticas) é dada e solicita a construção de gráficos no GeoGebra e após a determinação da imagem de cada função. Assim como nas coleções C1 e C3, pode ocorrer do “olhar dos estudantes” voltar-se mais para perceber as formas do que para a identificação das várias pertinentes das representações.

Importante salientar que, a maioria dos descritores definidos não foi identificado nas coleções, apesar de haver muitas menções aos descritores (Quadros 4 e 5), quando analisados individualmente, em sua grande maioria, encontram-se no MP, em particular, nas seções dedicadas a BNCC, conforme já mencionado, além de situações que apresentam mais de um descritor ou o mesmo descritor repetidas vezes. Ao buscar a relação entre os descritores e os conteúdos “função afim” e “função quadrática” constatou-se apenas 52 situações. Ressalta-se, ainda, que os autores das coleções utilizam muito mais as expressões “função afim” e “função quadrática” em substituição a “função polinomial do 1° grau” e “função polinomial do 2° grau”, respectivamente, o que explica o reduzido número de situações identificadas para os últimos descritores.

O Quadro 6 apresenta a análise das situações em relação aos registros de representação semiótica explorados e os sentidos das conversões priorizados, visto que todas foram classificadas como envolvendo a transformação cognitiva – conversão. É importante ressaltar que, conforme Duval (2003), é a conversão (nos seus mais variados sentidos) que conduz aos mecanismos subjacentes à compreensão em Matemática.

Ao analisar o Quadro 6, pode-se perceber que os registros de representação semiótica explorados foram: RA (Registro Algébrico); RG (Registro Gráfico); RSn (Registro Simbólico Numérico); RLN (Registro da Língua Natural); RGeo (Registro Geométrico); RSn/a (Registro Simbólico Numérico e Algébrico); RT (Registro Tabular). Assim, os registros verbais, por tabelas, algébricos e gráficos, apontados por Bonini, Druck e Barra (2018), para o estudo do conceito de função, estão presentes nas situações mapeadas. No entanto, não foi possível identificar, nessas situações, discussões que destacassem as características, limites e vantagens desses registros, conforme sugerem os pesquisadores supracitados, nem no LE nem no MP.

Quadro 6: Sentidos das conversões nas situações mapeadas

RRS	Código Situação	Total
RA→RG→RSn	S1C1V1C; S3C1V1A; S9C1V2A; S10C1V2AR; S11C1V2AR; S12C1V2A; S14C1V2A; S18C1V6C; S19C2V1C; S23C2V1A; S24C2V1C; S29C3V1A; S32C3V1A; S34C3V1A; S36C3V1A; S37C3V1A; S44C4V6A	17
RLN→RA→RG→RSn	S13C1V2A; S20C2V1C; S25C3V1C; S27C3V1A; S35C3V1A; S39C4V6A; S40C4V6A; S45C4V6A; S46C4V6A; S47C4V6A; S48C4V6A; S49C4V6A; S50C4V6A	13
RA→RG	S2C1V1C; S4C1V2C; S6C1V2A; S16C1V2A; S26C3V1A; S30C3V1A; S38C4V6A; S42C4V6C; S43C4V6A;	9
RGeo→RA→RG	S17C1V5A; S33C3V1A; S51C4V6A; S52C4V6A;	4
RA→RG→RSn/a	S5C1V2A; S15C1V2A	2
RT→RG→RA	S7C1V2A; S8C1V2A	2
RA→RT→RG	S21C2V1C; S28C3V1A	2
RSn→RG→RSn	S22C2V1C	1
RLN→RA→RT→RG	S31C3V1A	1
RLN→RA→**LP**[16]	S41C4V6A	1

Fonte: Elaborado pela autora.

Em relação aos sentidos das conversões priorizados, constata-se que a maioria das situações mapeadas exige a conversão RA→RG→RSn (17 situações). Além dessas 17 situações, há duas que envolvem sentido semelhante, ou seja, as situações que requerem a conversão RA→RG→RSn/a. Nessas duas situações (S5C1V2A; S15C1V2A), as respostas exigidas envolvem registros numéricos e algébricos (em particular, inequações). Também, destacam-se pelo número de situações identificadas os seguintes sentidos das conversões: RLN→RA→RG→RSn (13 situações), RA→RG (9 situações), RGeo→RA→RG (4 situações).

Sublinha-se que o sentido da conversão RA→RG está presente em mais 45 situações, sendo o RG elaborado pelo software em todas as situações e o RA é dado no enunciado da maioria delas (S1C1V1C; S2C1V1C; S3C1V1A; S4C1V2C; S5C1V2A; S6C1V2; S9C1V2A; S10C1V2AR; S11C1V2AR; S12C1V2A; S14C1V2A; S15C1V2A; S16C1V2A; S18C1V6C; S19C2V1C; S20C2V1C; S23C2V1A; S24C2V1C; S26C3V1A; S29C3V1A; S30C3V1A; S32C3V1A; S34C3V1A; S35C3V1A; S36C3V1A; S37C3V1A; S38C4V6A; S39C4V6A; S42C4V6C; S43C4V6A; S44C4V6A; S45C4V6A; S50C4V6A). Esse resultado corrobora com Stormowski, Gravina e Lima (2015) ao mencionarem que, geralmente, os livros

[16] LP: Linguagem de Programação.

didáticos destacam o processo de obtenção do gráfico a partir da representação algébrica.

Das 17 situações que envolvem a conversão RA→RG→RSn, oito foram identificadas na C1; cinco na C3; três na C2; e uma na C4. A atividade (S34C3V1A), reproduzida na Figura 6, exemplifica as situações que envolvem a conversão RA→RG→RSn. Nessas situações, o RA é dado no enunciado, o RG é elaborado pelo software e o RSn é construído pelo estudante a partir da análise dos registros anteriores (ou apenas de um deles) para determinar os seguintes elementos: domínio da função; imagem da função; zeros da função; estudo do sinal; coordenadas do vértice (máximo e mínimo); $f(n)$, entre outros.

Figura 6: Atividade envolvendo RA→RG→RSn

39. Ferramentas Esboce o gráfico das funções quadráticas e determine para quais valores de $x \in \mathbb{R}$ elas são positivas, iguais a zero ou negativas.

a) $f(x) = x^2 + 6x + 5$ c) $h(x) = 5x^2 + 2x + 1$

b) $g(x) = -x^2 + x + 2$ d) $p(x) = -3x^2 + 6x - 3$

Resposta na **Resolução das tarefas** nas **Orientações para o professor**.

Fonte: Excerto de C3V1.

A maioria das situações, que envolvem a conversão RLN→RA→RG→RSn, foi identificada na C4 (8 situações, das quais 5 o RA é determinado pelo estudante), seguida da C3 (3 situações, das quais 2 o RA é determinado pelo estudante), C1 (1 situação, o RA é determinado pelo estudante) e C2 (1 situação, RA é dado). A atividade (S49C4V6A), apresentada na Figura 7, exemplifica as situações classificadas como RLN→RA→RG→RSn, em que o RA é determinado pelo estudante.

Figura 7: Atividade envolvendo RLN→RA→RG→RSn

19 José vai cercar uma região retangular de seu sítio para criar carneiros. Ele tem um rolo de arame com 240 m e deseja construir a cerca com quatro fios. Sabendo que ele vai aproveitar uma cerca já existente na propriedade, determine, com o auxílio de um *software* de Geometria dinâmica, qual deve ser a largura *a* e o comprimento *c* para que ele consiga uma área máxima de pastagem para sua criação.

Fonte: Excerto de C4V6.

Ainda sobre as situações classificadas como RLN→RA→RG→RSn, nelas tem-se duas possibilidades quanto aos registros: a) RLN enuncia o que precisa ser determinado; RA é dado no enunciado, RG é elaborado pelo software e o RSn é construído pelo estudante, a partir da análise dos registros anteriores (ou apenas um deles), para determinar os seguintes elementos: valores a serem pagos, máximo ou mínimo da função; b) RLN além de enunciar o que precisa ser determinado, expõe dados necessários para a resolução do problema; RA é elaborado pelo estudante, RG é elaborado pelo software e o RSn é construído pelo estudante a partir da análise dos registros anteriores (ou apenas de um deles) para resolver o problema.

Das nove situações que envolvem a conversão RA→RG, a maioria foi identificada em C1 (4 situações), seguida de C4 (3 situações) e C3 (2 situações). A atividade (S26C3V1A), reproduzida na Figura 8, exemplifica as situações envolvendo esse sentido da conversão. Nessas situações, o RA é dado no enunciado e o RG é elaborado pelo software. A análise das variáveis visuais pertinentes de cada representação fica a cargo do estudante, pois a situação não solicita de forma explícita essa análise e nem exige a descrição do comportamento da função. Além disso, em S26C3V1A não há nenhuma informação chamando atenção para o fato de que o domínio das funções expostas nas letras c) e d) não é o conjunto dos números reais, por isso, será necessário impor condições ao solicitar que o software produza os gráficos.

Figura 8: Atividade envolvendo RA→RG

14. Ferramentas Faça um esboço do gráfico de cada função a seguir.

Resposta na **Resolução das tarefas** nas **Orientações para o professor.**

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que $f(x) = 3x^2$.

b) $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*_+$, tal que $g(x) = 2^x$.

c) $h: [1, 5] \to \mathbb{R}$, tal que $h(x) = x - 2$.

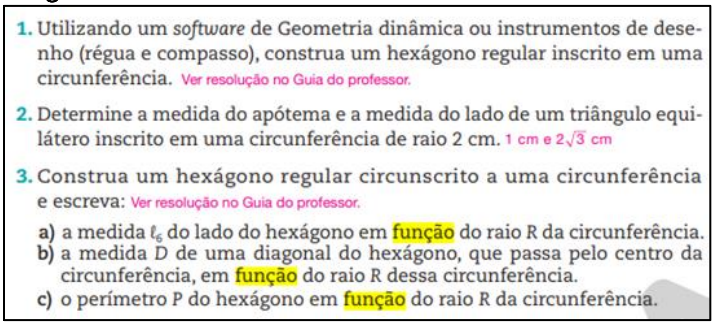
d) $p: \{0, 1, 2, 3, 4\} \to \mathbb{R}$, tal que $p(x) = 2x - 2$.

Fonte: Excerto de C3V1.

Também, foram destacadas as quatro situações que envolvem a conversão do RGeo→RA→RG, das quais duas foram identificadas em C4 e as outras duas em C1 e C3 (uma em cada coleção). A atividade (S17C1V5A), exposta na Figura 9, exemplifica as situações que envolvem esse sentido da conversão. Essas situações exploram relações entre conceitos geométricos e algébricos (em particular, função).

Nelas, o RGeo é elaborado pelo software (S17C1V5A), ou é dado no enunciado da situação (S33C3V1A), ou a figura geométrica é apenas mencionada (S51C4V6A; S52C4V6A), nestes dois últimos casos apenas o RG é elaborado pelo software. Já o RA é elaborado pelo estudante e o RG é elaborado pelo software em todas as situações.

Figura 9: Atividade envolvendo RGeo→RA→RG



1. Utilizando um *software* de Geometria dinâmica ou instrumentos de desenho (régua e compasso), construa um hexágono regular inscrito em uma circunferência. Ver resolução no Guia do professor.
2. Determine a medida do apótema e a medida do lado de um triângulo equilátero inscrito em uma circunferência de raio 2 cm. 1 cm e $2\sqrt{3}$ cm
3. Construa um hexágono regular circunscrito a uma circunferência e escreva: Ver resolução no Guia do professor.
   a) a medida ℓ_6 do lado do hexágono em função do raio R da circunferência.
   b) a medida D de uma diagonal do hexágono, que passa pelo centro da circunferência, em função do raio R dessa circunferência.
   c) o perímetro P do hexágono em função do raio R da circunferência.

Fonte: Excerto de C1V5.

Ainda, em relação aos sentidos das conversões, é importante mencionar que as situações que exploram o RT (S7C1V2A; S8C1V2A; S21C2V1C; S28C3V1A) valorizam a análise pontual. Contudo, a construção de um gráfico a partir dos dados de uma tabela, conforme Duval (2011 apud BRANDT; BÚRIGO, 2022, p. 6), “não considera a conceitualização, pois não privilegia os elementos semiocognitivos presentes em diferentes registros de representação semiótica: a língua natural, a linguagem algébrica e a linguagem gráfica”. Para Duval (2011), a construção de gráficos deve privilegiar o que ele chama de análise qualitativa global. “Essa análise exige a discriminação das unidades significativas do registro de representação que serão submetidas a variações, que por sua vez provocam modificações nas unidades significativas do registro correspondente” (BRANDT; BÚRIGO, 2022, p. 7). Ao utilizar softwares na construção de gráficos, entende-se que a análise qualitativa global pode ser privilegiada se as noções de translação e simetria forem exploradas, evidenciando o dinamismo de representações e relação funcional, peculiaridades dos registros dinâmicos (GRAVINA, 2015; STORMOWSKI; GRAVINA; LIMA, 2015).

A situação S41C4V6A é a única das mapeadas que envolve um software de linguagem de programação (VisualG) para explorar função afim. Nessa situação, o aluno deve considerar uma função afim (f), em seguida escrever um programa no Visual G que possibilite determinar $f(x)$, dada a lei de formação da função e o valor de x. A presença de softwares de programação nos livros didáticos de Matemática é uma tendência, visto que a BNCC indica que o desenvolvimento do Pensamento Computacional, também, é um dos objetivos da área da Matemática (BRASIL, 2018). Assim, espera-se ter mais situações envolvendo softwares de programação no estudo de funções afim e quadrática. Talvez, isso não tenha acontecido devido aos descritores utilizados. Em outras palavras, nem todos os autores de livros didáticos utilizam o termo “software” para tratar de ambientes de programação.

A análise dos dados, presentes nos quadros 5 e 6, permite afirmar que as situações mapeadas nas coleções de livros didáticos, em sua maioria, não se diferenciam daquelas habitualmente tratadas no ambiente papel e lápis, pois o software é utilizado para plotar o gráfico, a partir da representação algébrica, dada no enunciado da situação, após determinar elementos específicos como: domínio, imagem, zeros, máximo, mínimo, entre outros. Assim, as TD (em particular, software) estão sendo utilizadas mais para proporcionar praticidade e rapidez na construção de gráficos do que como uma ferramenta para pensar, representar, comunicar e argumentar, conforme defendem Bittar (2011), Borba, Silva, Gadanidis (2014), Basso e Notare (2015), Brasil (2018). Essa afirmação fica mais explícita ao analisar os dados apresentados no Quadro 7, no que tange as peculiaridades dos registros dinâmicos.

Quadro 7: Peculiaridades dos registros dinâmicos

Registros Dinâmicos	Código Situação	Total
Dinamismo de representações	S2C1V1C; S4C1V2C; S6C1V2A; S22C2V1C; S30C3V1A	5
Relação Funcional	S6C1V2A; S30C3V1A; S32C3V1A	3
Estabilidade da construção	S17C1V5A; S33C3V1A; S51C4V6A; S52C4V6A	4

Fonte: Elaborado pela autora.

No Quadro 7 é possível observar que o maior número de situações está relacionado ao *dinamismo de representações* (5 situações), seguido de *estabilidade da construção* (4 situações) e *relação funcional* (3 situações). Pode-se notar que são poucos os resultados relacionados às peculiaridades dos registros dinâmicos quando comparados ao total de situações mapeadas (52). Além disso, o maior número de situações, relacionadas às peculiaridades dos registros dinâmicos, foi identificado em C1 (4 situações), seguida de C3 (3 situações), C4 (2 situações), C2 (1 situação). Destaca-se que, as situações S6C1V2A e S30C3V1A são as únicas classificadas em duas peculiaridades dos registros dinâmicos, ou seja, *dinamismo de representações* e *relação funcional*. A Figura 10 reproduz a situação S6C1V2A. Essa situação solicita a conversão da representação algébrica para a gráfica (RA→RG) e é uma das poucas situações que requerem a análise das características comuns das funções dadas, sugerindo o uso de um software para a etapa de construção dos gráficos. Destaca-se que as características comuns, sugeridas pelos autores no MP, estão relacionadas aos pontos de intersecção com os eixos, assim, não exploram simetria.

Figura 10: Situação envolvendo translação e simetria

10. Faça um esboço dos gráficos das funções afins dadas em cada item, em um mesmo plano cartesiano. Em seguida, analise o que essas funções têm em comum.

Se você quiser, utilize um *software* de construção de gráficos. Ver resolução no Guia do professor.

a) $y_1 = 3x - 2$, $y_2 = 3x - 1$ e $y_3 = 3x$

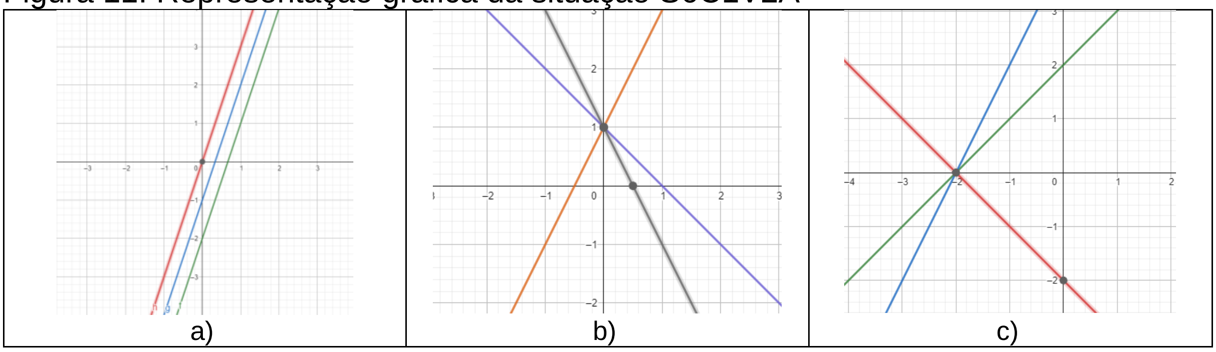
b) $y_1 = 2x + 1$, $y_2 = -x + 1$ e $y_3 = -2x + 1$

c) $y_1 = x + 2$, $y_2 = 2x + 4$ e $y_3 = -x - 2$

Fonte: Excerto de C1V2.

Ao analisar os gráficos da alternativa a) é possível evidenciar uma translação vertical (*dinamismo de representações*). Em outras palavras, o estudante poderá perceber que, o que está mudando de uma função para a outra é o valor de “b”, fazendo com que isso gere uma translação das retas (Figura 11a). Se o estudante não perceber essa característica é importante que o professor chame atenção, uma vez que a noção de translação, como já mencionado, permite a compreensão do RG, pois possibilita a identificação de variáveis visuais pertinentes no RA e no RG. Na alternativa b) é possível verificar três características: mesmo valor de intersecção com o eixo das ordenadas; simetria, em relação ao eixo das ordenadas, entre as funções y_1 e y_3 (*relação funcional*) (Figura 11b); e, variação do valor de “a” (inclinação da reta). Por fim, na alternativa c) é possível identificar, em especial, simetria, em relação ao eixo das abscissas, entre as funções y_1 e y_3 (*relação funcional*) (Figura 11c).

Figura 11: Representação gráfica da situação S6C1V2A



Fonte: Elaborada pela autora.

No que tange ao *dinamismo de representações*, representado neste estudo pela translação, constata-se que apenas C1 explorou essa noção no estudo das duas funções aqui analisadas (afim e quadrática), visto que S4C1V2C e S6C1V2A tratam desse conceito ao explorar a variação do coeficiente "b" da função afim e S2C1V1C aborda a translação vertical, ocasionada pela variação de "a" na representação algébrica, $y = x^2 + a$, e a translação horizontal ocasionada pela variação de "a" na representação algébrica, $y = (x + a)^2$. Mas, apenas uma dessas situações foi classificada como atividade (S6C1V2A, Figura 10).

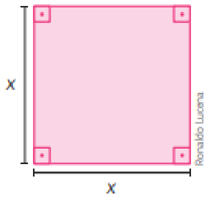
Ainda em relação ao *dinamismo de representações*, C2 (S22C2V1C) e C3 (S30C3V1) só exploraram a noção de translação na função afim. Esses resultados indicam que a forma canônica da função quadrática, que permite explorar a noção de translação, não foi explorada por C2, C3 e C4. C1 explora de forma implícita, ou seja, não faz referência a essa representação. Ressalta-se novamente que, no estudo de funções, deve-se explorar a noção de translação para que o estudante consiga transitar entre as representações algébrica e gráfica, realizando uma análise qualitativa global, conforme indica Duval (2011).

Quanto a *relação funcional*, aqui representada pela noção de simetria, verifica-se que essa noção não faz parte das sugestões de respostas expostas no MP das coleções C1 e C3. Uma interpretação para esse fato pode estar relacionada a forma como os autores propõem o uso do software, ou seja, para facilitar a construção do gráfico, conduzindo o “olhar dos estudantes” apenas para o reconhecimento perceptivo das formas e não para a visualização (DUVAL, 2011), conforme já mencionado.

As quatro situações classificadas como *estabilidade da construção* envolvem relações entre geometria e funções, conforme já mencionado na análise dos sentidos das conversões. Assim, é importante enfatizar que essas situações apresentam indícios de *estabilidade da construção*, pois para tal é preciso que o RGeo seja elaborado no software e a partir dele seja construído o RG, sem a necessidade do RA, conforme indicam Stormowski, Gravina e Lima (2015). Nesta perspectiva, o RA é elaborado a partir da análise do RGeo e do RG (ou apenas de um deles). Enfatiza-se que, a conversão do RG→RA, também, é importante para a aprendizagem do conceito de função. Contudo, praticamente não foi observada nas situações mapeadas, pois o RA é na maioria das vezes dado no enunciado. Sublinha-se que, o caminho sugerido pelos pesquisadores supracitados não fica explícito, por exemplo, na situação S33C3V1A, exposta na Figura 12. Isso porque não se sabe em qual momento o software (ferramentas) deverá ser utilizado.

Figura 12: Situação envolvendo relação entre geometria e função

21. Ferramentas Observe a região quadrada a seguir.



a) Escreva as leis de formação das funções $A(x)$ e $P(x)$ que determinam, respectivamente, a área e o perímetro dessa região. $A(x) = x^2$; $P(x) = 4x$

b) Considerando as leis de formação do item anterior e que $A: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ e $P: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, qual dessas funções tem a variável dependente diretamente proporcional ao quadrado da variável independente? $A(x) = x^2$

c) Esboce o gráfico de $A(x)$ e de $P(x)$ no mesmo plano cartesiano. Resposta na **Resolução das tarefas** nas **Orientações para o professor**.

d) Para quais valores de x, $A(x)$ é:
- menor do que $P(x)$? $0 < x < 4$
- maior do que $P(x)$? $x > 4$
- igual a $P(x)$? $x = 4$

e) A lei de formação de cada uma das funções obtidas $A(x)$ e $P(x)$ corresponde à lei de formação de qual função: quadrática ou afim?
$A(x)$: função quadrática; $P(x)$: função afim

Fonte: Excerto de C3V1.

Verifica-se que essa situação (Figura 12) propõe praticamente as mesmas discussões que a apresentada na Figura 4, mas pode não explorar as potencialidades do software, pois esta ferramenta pode ser utilizada apenas para esboçar os gráficos que representam a variação da área do quadrado em função do lado e do perímetro do quadrado em função do lado, a partir das representações algébricas e não do RGeo, conforme indicam Stormowski, Gravina e Lima (2015).

Diante desse contexto, pode-se afirmar que a visualização não é privilegiada pelas coleções e nem as peculiaridades dos registros dinâmicos. Além disso, as situações são bem semelhantes às propostas para resolução com lápis e papel, o que contraria as indicações dos pesquisadores Borba, Silva e Gadanidis (2014); Basso e Notare (2015); Gravina (2015); Stormowski, Gravina e Lima (2015), que defendem que as TD são ferramentas essenciais no processo de ensino e aprendizagem de Matemática, mas podem confirmar as afirmações de Bittar (2011); Basso e Notare (2015); Stormowski, Gravina e Lima (2015); Stalin e Gravina (2016), ou seja, as TD e suas potencialidades ainda são pouco exploradas em sala de aula.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Ao realizar a análise das quatro coleções quanto aos conceitos relacionados ao uso de TD no ensino de funções, especificamente, função afim e função quadrática, foi possível verificar que, os descritores estão presentes em todas as coleções, destacando-se *software*, *função quadrática* e *variação*, pois estes foram os que apareceram mais vezes nas coleções. Pôde-se perceber que, os descritores, em geral, apesar de aparecerem muitas vezes, foram citados na maioria das vezes em trechos da BNCC e no MP. Assim, constatou-se que há uma preocupação, da parte dos autores das coleções, em enfatizar a importância do uso de TD no processo de ensino e aprendizagem de Matemática, porém, essa preocupação não é verificada no LE, pois há poucas atividades que sugerem o uso de TD (em particular, *softwares e aplicativos*) para resolver as situações-problema, se comparado com a quantidade de atividades que não sugerem o uso de TD para sua resolução. Sublinha-se que, as TD sugeridas no MP e identificadas no LE foram: softwares de construção de gráfico e software de geometria dinâmica, sem especificar qual e quando especificados indicaram GeoGebra, Calc, VisualG.

Foram mapeadas 52 situações a partir dos onze descritores escolhidos, sendo o descritor *software* o que gerou o maior número de situações em todas as coleções. Pode-se destacar que, o maior número de situações foi identificado em C1 (18 situações), seguido de C4 (15 situações), C3 (13 situações) e C2 (06 situações). A maioria das situações estava no volume específico, o que pode ter restringido o número de situações envolvendo "estabilidade de construção", uma das peculiaridades dos registros dinâmicos.

Ainda em relação aos volumes em que foram mapeadas situações envolvendo funções afim e quadrática, sublinha-se que, ocorreram alguns casos de situações em volumes que não tratavam especificamente desses conceitos, por exemplo, S1C1V1C, S2C1V1C e S3C1V1A, mapeadas no volume que trata sobre Grandezas, Álgebra e Algoritmos; S17C1V5A, identificada no volume que trata de Geometria Plana e Espacial e S18C1V6C, mapeada no volume que trata de Matrizes e Geometria Analítica. Percebe-se que todas essas situações pertencem a C1. Entende-se que, identificar situações em outros volumes é positivo, pois mostra que há uma tentativa de conexão entre os conteúdos (conceitos e procedimentos) matemáticos, conforme sugerem a BNCC e pesquisas na área de Educação Matemática, indicando que há maneiras de não trabalhar o conteúdo de forma fragmentada. Além disso, compreende-se que, os autores de coleções de livros didáticos, ao trazerem essas conexões em suas obras, contribuem para que o professor possa realizar as articulações necessárias para que o estudante associe os conteúdos e perceba-os em outros campos da Matemática, bem como utilize TD para resolver as situações-problema propostas, auxiliando assim, em sua aprendizagem.

Quanto ao tipo de situações mapeadas (corpo do texto ou atividade), constatou-se que em C1 foram identificadas quatro situações no corpo do texto, 12 atividades e mais duas atividades resolvidas. Em C2, foram mapeadas cinco situações no corpo do texto e apenas uma atividade. Na C3 foram selecionadas uma situação no corpo do texto e 12 atividades. Já em C4 foram identificadas uma situação no corpo do texto e 14 atividades. Assim, verifica-se que C4 priorizou as atividades e C2 as situações expostas no corpo do texto. A análise dessas situações indica que a visualização, conforme defendida por Duval (2011) e Soares, Ferner e Mariani (2018), não foi privilegiada pelas coleções, sendo apenas sugerido o uso de softwares para facilitar a construção do gráfico, o que enfatiza a percepção das formas. Além disso, não foram percebidas diferenças entre as situações mapeadas e as, geralmente, propostas para resolução com lápis e papel, contrariando sugestões dos pesquisadores Borba, Silva e Gadanidis (2014); Basso e Notare (2015); Gravina (2015); Stormowski, Gravina e Lima (2015). Em outros termos, pode-se afirmar que as situações mapeadas, em geral, foram elaboradas sem potencializarem aos estudantes uma exploração inicial, o que permitiria elaborar e testar conjecturas, seguida da busca pela validade ou não da solução, com base em critérios de argumentação matemática (DUVAL, 2011; BASSO; NOTARE, 2015; SILVA; GADANIDIS, 2014; GIRALDO; CAETANO; MATTOS, 2013). Esse resultado pode indicar porque as TD não são tão utilizadas nas salas de aula, pois há pouquíssimas atividades que realmente instigam os professores e estudantes a utilizá-las na resolução de situações-problema.

No que tange aos sentidos das conversões, constatou-se que a maioria das situações mapeadas exige a conversão RA→RG→RSn (17 situações), sendo o RA dado no enunciado, o RG elaborado pelo software e o RSn construído pelo estudante a partir da análise do(s) registro(s) anterior(es). Destaca-se a conversão RA→RG, pois apesar de ter apenas nove situações identificadas (quatro situações em C1, três situações em C4 e duas situações em C3), envolvendo apenas esses dois registros, está presente em 45 situações, nas quais RG é elaborado pelo software e RA é dado no enunciado. Sublinha-se que, os sentidos das conversões identificados são bem semelhantes aos propostos em atividades que requerem apenas o uso de lápis e papel, nestas últimas verifica-se, adicionalmente, a presença do RT, como registro intermediário entre RA e RG. Além disso, é importante ressaltar que a análise das características, limites e vantagens dos registros, em particular, os registros dinâmicos não foi privilegiada pelos autores das coleções selecionadas.

Em relação às peculiaridades dos registros dinâmicos, verificou-se que há poucas situações que as envolvem se comparado com o número total de situações mapeadas (52) e as situações sem uso de TD, sendo cinco relacionadas ao *dinamismo das representações*, quatro relacionadas a *estabilidade da construção* e três relacionadas a *relação funcional*. Esse resultado evidencia que as situações mapeadas, em geral, não se diferenciam das propostas para serem resolvidas com lápis e papel. Além disso, indica que a análise qualitativa global, defendida por Duval (2011), não é enfatizada, visto que as noções de translação e simetria foram pouco exploradas.

Diante desse contexto, ressalta-se que as coleções devem ser escolhidas minuciosamente pelos docentes, pois há coleções que enfatizam o uso de TD, mas isso é observado, em geral, nos trechos da BNCC e no MP. Contudo, as TD (em particular, softwares e aplicativos) estão cada vez mais presentes no dia a dia dos estudantes. Assim, elas devem estar presentes na sala de aula, em especial, o software GeoGebra, que funciona em qualquer aparelho digital (smartphone, notebook, computador, etc.) de forma gratuita e sem necessidade de uma rede de internet conectada no aparelho utilizado, se tiver o aplicativo instalado, permitindo explorar situações-problema em que ele serve como uma ferramenta para pensar, representar, comunicar e argumentar, ou seja, pensar em matemática de uma maneira diferente.

Por fim, para a análise de livros didáticos, destaca-se a potencialidade da teoria dos Registros de Representação Semiótica, pois por meio dela é possível verificar se as situações propostas potencializam as especificidades exigidas pela aprendizagem matemática, em particular, os diferentes sentidos da conversão e quanto aos registros dinâmicos a visualização e suas peculiaridades.

REFERÊNCIAS

BASSO, M. V. A.; NOTARE, M. R. Pensar-com Tecnologias Digitais de Matemática Dinâmica. **RENOTE:** Revista Novas Tecnologias na Educação, Porto Alegre, v. 13, n. 2, p. 1-10, dez. 2015.

BARBOSA, J. C. Abordagens teóricas e metodológicas na Educação Matemática: aproximações e distanciamentos. In: OLIVEIRA, A. M. P.; ORTIGÃO, M. I. R. Abordagens teóricas e metodológicas nas pesquisas em educação matemática [livro eletrônico]. Brasília: SBEM, 2018.

BITTAR, M. A abordagem instrumental para o estudo da integração da tecnologia na prática pedagógica do professor de matemática. **Educar em Revista**, Curitiba, v. 1, p. 157-171, 2011.

BONINI, A.; DRUCK, I. F.; BARRA, E. S. O. **GT DiAD** – Grupo de Trabalho sobre Direitos à Aprendizagem e ao Desenvolvimento. Curitiba, 2018.

BORBA, M. C; SCUCUGLIA, R. R. S.; GADANIDIS, G. **Fases das tecnologias digitais em Educação Matemática:** sala de aula e internet em movimento. 1a ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2014.

BORGES, P. A.; SOARES, W. M.; SOUZA, A. B. **Habilidades Necessárias Para o Professor de Matemática Durante o Período de Pandemia:** Um Estudo Exploratório-Qualitativo. In: Anais do VIII Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática – SIPEM. Disponível em < http://www.sbembrasil.org.br/files/sipemviii.pdf >. Acessado em: maio de 2022.

BRANDT, C. F.; BÚRIGO, R. Introdução: O ensino das funções a partir de uma análise semiocognitiva. In: MORETTI, M. T.; SABEL, E. (Orgs.). **Gráficos e equações:** abordagem global qualitativa segundo Raymond Duval. Florianópolis: Edição REVEMAT/GPEEM/UFSC, 2022. Disponível em <https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/203982>. Acessado em dezembro de 2022.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, Brasília: MEC/ 2018.

BRASIL. Ministério da Educação. **Guia Digital PNLD 2021:** Matemática e suas tecnologias. Brasília: MEC, 2021.

DUVAL, R. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, S. D. A. (org.). **Aprendizagem em matemática: Registros de representação semiótica**. Campinas, SP: Papirus, 2003.

_________ A Cognitive Analysis of Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics. Educational Studies in Mathematics, vol. 61, p. 103-131, 2006.

_________ **Ver e Ensinar a Matemática de outra Forma:** Entrar no Modo Matemático de Pensar: os Registros de Representações Semióticas. Organização Tania M. M. Campos. Tradução Marlene Alves Dias. 1. ed. São Paulo: PROEM, 2011.

_________ Tradução: Méricles Thadeu Moretti. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. **Revemat**: R. Eletr. de Edu. Matem. Florianópolis, v. 07, n. 2, p. 266-297, 2012.

_________ Entrevista: Raymond Duval e a Teoria dos Registros de Representação Semiótica. FREITAS, J. L. M.; REZENDE, V. (Orgs). **RPEM**, v. 02, n. 03, p. 10-34, 2013.

GERHARDT, T. E.; SILVEIRA, D. T. **Métodos de pesquisa**. Coordenado pela Universidade Aberta do Brasil – UAB/UFRGS e pelo Curso de Graduação Tecnológica – Planejamento e Gestão para o Desenvolvimento Rural da SEAD/UFRGS. – Porto Alegre, 2009.

GIRALDO, V.; MATTOS, F.; CAETANO. P. **Recursos computacionais no ensino da matemática**. Rio de Janeiro: SBM, 2013 (Coleção PROFMAT).

GRAVINA, M. A. O potencial semiótico do GeoGebra na aprendizagem da geometria: uma experiência ilustrativa. **VIDYA**, Santa Maria, v. 35, n. 2, p.237-253, jul./dez. 2015.

LAJOLO, M. **Livro didático:** um (quase) manual de usuário. Em aberto, Brasília, v. 26, n. 69, p. 3-7, 1996.

LIMA JUNIOR, E. B.; DE OLIVEIRA, G. S.; DOS SANTOS, A. C. O.; SCHNEKENBERG, G. F. **Análise documental como percurso metodológico na pesquisa qualitativa.** Cadernos da Fucamp, v.20, n.44, p. 36-51, 2021.

MATHIAS, C. V. SOFTWARES DE GEOMETRIA DINÂMICA: sobre as mudanças do conhecimento tecnológico de um determinado tempo e espaço. **Revista De História Da Educação Matemática**, v.7, p. 1-21, 2021. Disponível em <https://www.histemat.com.br/index.php/HISTEMAT/article/view/436>. Acessado em maio de 2022.

OLIVEIRA, G. P. Sobre tecnologias e Educação Matemática: fluência, convergência e o que isto tem a ver com aquilo. In: OLIVEIRA, G. P. (Org). **Educação Matemática:** epistemologia, didática e tecnologia. São Paulo: Livraria da Física, 2018.

SALIN, E.; GRAVINA, M. A. **Matemática Dinâmica:** o ensino de funções a partir de situações geométricas. In: BÚRIGO, E.; GRAVINA, M. A.; NOTARE, M.; BASSO, M. V. (Org.). A Matemática na Escola - Pesquisas na Sala de Aula. 1ed.Porto Alegre: UFRGS, 2016.

SANTOS, G. L. D.; BARBOSA, J. C. **Um modelo teórico de Matemática para o Ensino do conceito de função a partir de realizações em livros didáticos**. Educação Matemática Pesquisa. São Paulo, v.19, n.2, pp. 315-338, 2017.

SOARES, M. A. S. **Proporcionalidade um conceito formador e unificador da Matemática:** uma análise de materiais que expressam fases do currículo da Educação Básica. Tese (Doutorado em Educação nas Ciências) –Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul, Ijuí, 2016.

SOARES, M. A. S.; FERNER, D. L.; MARIANI, R. C. P. Visualização em produções que exploram software: uma metanálise no campo da geometria. In: SCHEFFER, Nilce Fátima; COMACHIO, E.; CENCI, D. **Tecnologias da informação e comunicação na Educação Matemática:** articulação entre pesquisas, objetos de aprendizagem e representações. Curitiba: CRV, 2018.

STORMOWSKI, V.; GRAVINA, M. A.; LIMA, J. V. Formação de professores de matemática para o uso efetivo de tecnologias em sala de aula. **RENOTE -** Revista Novas Tecnologias na Educação, v. 13, n. 2, p. 1-10, 2015.

WALLE, J. A. V. **Matemática no Ensino Fundamental:** formação de professores e aplicação em sala de aula. 6 ed., Porto Alegre: Artmed, 2009.

APÊNDICE A

C1 - Vol.1 - Conexões Matemática e suas Tecnologias: Grandezas, álgebra e algoritmos | **Cód.**

O exercício resolvido **R10** pode favorecer o desenvolvimento da competência geral **2**, articulada com a competência específica 4 e a habilidade **EM13MAT402** da BNCC, pois os alunos são convidados a refletir e a analisar o trabalho com um *software* de construção de gráficos, exercitando a curiosidade intelectual, elaborando e testando hipóteses a respeito dos diferentes registros matemáticos para uma função polinomial do 2º grau.

Observação

Em muitos *softwares*, há algumas maneiras diferentes para escrever as expressões matemáticas, por exemplo:

- sen $x \to$ sinx
- $\dfrac{x^3+3}{x} \to$ (x^3+3)/x

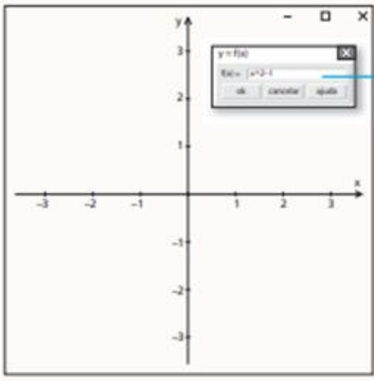
R10. Estudar o sinal das funções:

- $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2 - 1$
- $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = 2^x - 1$

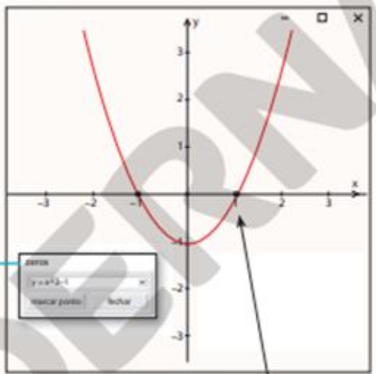
▸ **Resolução**

Podemos estudar o sinal de uma função a partir de seu gráfico. Vamos construir os gráficos das funções f e g utilizando um *software* de construção de gráficos.

Começaremos pela função dada pela lei $f(x) = x^2 - 1$.

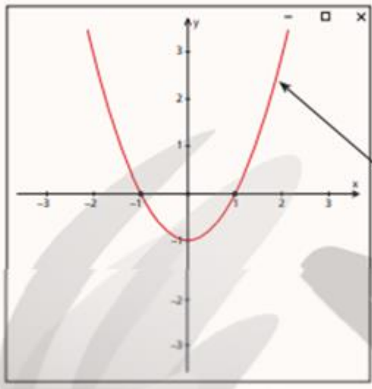


Campo para digitar a lei da função do gráfico a ser construído. Há diferentes maneiras de escrever $x^2 - 1$, por exemplo: x^2−1 ou x*x−1



Selecionando a ferramenta "zeros da função", marcamos os pontos cujas abscissas são os zeros da função.

Construído o gráfico da função *f*, encontramos os zeros da função. A função é nula para $x = -1$ e para $x = 1$.

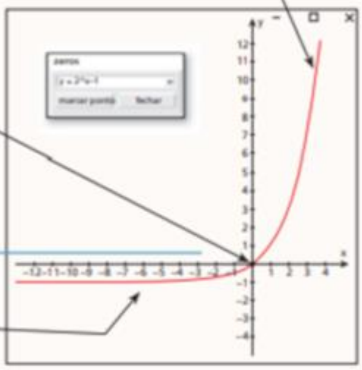


Então, podemos observar que:

- a função *f* é positiva nos intervalos $]-\infty, -1[$ e $]1, +\infty[$;
- a função *f* é negativa no intervalo $]-1, 1[$.

Agora, vamos contruir o gráfico e estudar o sinal da função dada por $g(x) = 2^x - 1$.

Construímos o gráfico da função *g*. A função é crescente em todo o seu domínio.



Encontramos o zero da função *g*. A função é nula para $x = 0$.

Muitas vezes precisamos mudar a escala usada nos eixos ordenados para conseguir observar melhor o gráfico construído.

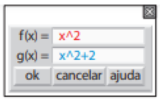
Então, podemos afirmar que:

- a função *g* é positiva no intervalo $]0, +\infty[$;
- a função *g* é negativa no intervalo $]-\infty, 0[$.

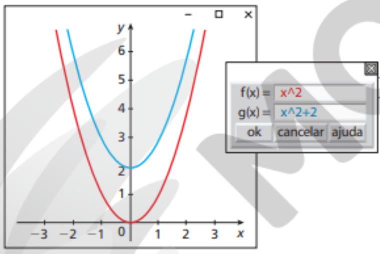
Na internet, há diversos softwares gratuitos ou livres, como o *Desmos* e o *Mathway*. Se achar conveniente, escolher um deles e realizar essa atividade com os alunos. Vale ressaltar que, dependendo do software escolhido, o passo a passo da construção pode mudar, de acordo com as ferramentas disponíveis. Por isso, é importante se familiarizar com o programa antes de usá-lo em sala de aula.

RA→RG→RSn

S1C1V1C (p. 78)



Ao clicar em ok, obtemos o gráfico de g.



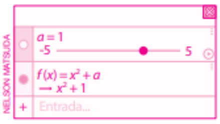
Note que o *software* utiliza cores diferentes para as funções.

Podemos observar que o gráfico de g é uma translação do gráfico de f em duas unidades para cima, na direção vertical.

Explore

Use um *software* de construção de gráficos para construir, em um mesmo plano cartesiano, gráficos da função $y = x^2 + a$. Em outro plano, construa gráficos da função $y = (x + a)^2$. Varie os valores de a. Use valores positivos, negativos e nulo. Depois de verificar as construções feitas, escreva um texto concluindo o que foi observado com a atividade.

Espera-se que o aluno perceba que a variação do parâmetro a em $x^2 + a$ vai transladar a curva na direção vertical e, na expressão $(x + a)^2$, vai transladar o gráfico na direção horizontal.
Em alguns *softwares* como o *GeoGebra* e o *Desmos*, basta inserir a expressão algébrica com o parâmetro para que o *software* disponibilize um controle deslizante do parâmetro e, ao deslizar o controle, o gráfico é automaticamente transladado no plano. Observe o exemplo da função f na figura a seguir.



NELSON MATSUDA

ILUSTRAÇÕES: NELSON MATSUDA

Exercícios propostos

Registre as respostas em seu caderno.

32. O gráfico ao lado representa uma função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Classifique cada sentença em verdadeira ou falsa e justifique as falsas.

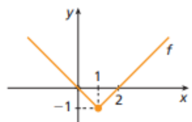
a) $f(0) = 0$ verdadeira

b) A função é crescente no intervalo $[0, +\infty[$.

c) A função é positiva em todo o domínio.

d) O valor mínimo da função é -1. verdadeira

e) $\text{Im}(f) = [-1, +\infty[$ verdadeira



ADILSON SECCO

b) Falsa, pois no intervalo $[0, 1]$ a função é decrescente.
c) Falsa, pois no intervalo $[0, 2]$ a função é negativa ou nula.

79

translação - dinamismo das representações; RA→RG

S2C1V1C (p. 79)

35. Para quais itens abaixo a função dada é positiva em todo o seu domínio? Justifique sua resposta. Se achar conveniente, use um *software* específico para construção de gráficos.

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2 + 1$

b) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 2x - 3$

c) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^3$

d) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 2^x$

e) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 2x + 1$

Itens a e d, pois, para qualquer $x \in \mathbb{R}$, temos $x^2 + 1 > 0$ e $2^x > 0$.

RA→RG→RSn

S3C1V1A (p. 80)

C1 - Vol.2 - Conexões Matemática e suas Tecnologias: Funções e aplicações | **Cód.**

Esse tópico favorece o desenvolvimento da competência específica 5, uma vez que os alunos serão incentivados a estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e software de construção de gráficos, identificando a necessidade ou não de uma demonstração cada vez mais formal na validação das conjecturas.

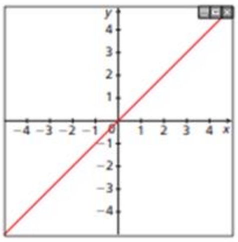
Em alguns softwares como o GeoGebra e o Desmos, basta inserir a expressão algébrica com o parâmetro para que o software disponibilize um controle deslizante do parâmetro e ao deslizar o controle, o gráfico é automaticamente transladado no plano. Observar o exemplo da função f na figura a seguir.

ILUSTRAÇÕES: ADILSON SECCO

Translação do gráfico de uma função afim

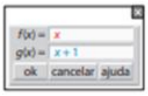
Vamos utilizar um *software* de construção de gráficos para construir o gráfico das funções *f* e *g* de leis $y = x$ e $y = x + 1$, respectivamente.

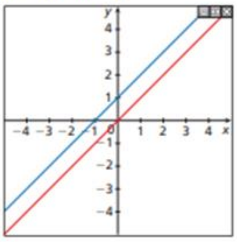
Primeiramente, digitamos "*x*" no campo para digitar a lei da função. E então, obtemos o gráfico de *f*.



No mesmo plano do gráfico da função *f*, vamos construir o gráfico de *g*. Assim, digitamos: "$x + 1$" no campo destinado à expressão de *g*.

Ao clicar em ok, obtemos o gráfico de *g*.





Podemos observar que o gráfico de *g* é uma translação paralela do gráfico de *f* em uma unidade para cima, na direção vertical ou em uma unidade para a esquerda.

Explore

Use um *software* de construção de gráficos para construir, em um mesmo plano cartesiano, gráficos da função $y = ax + b$. Primeiramente, estude os casos em que $b = 0$ (função linear) e *a* é um número real não nulo. Não deixe de utilizar valores negativos e positivos para *a*. Em outro plano, construa gráficos da função $y = ax + b$, com *b* diferente de 0. Mantenha o coeficiente *a* e faça variações com o coeficiente *b*. Depois de verificar as construções feitas, escreva um texto concluindo o que foi observado com a atividade.

translação - dinamismo das representações - RA→RG

S4C1V2C (p. 26,27)

25. Em um mesmo plano cartesiano, utilizando um *software* específico, construa os gráficos das funções *f* e *g* dadas por $f(x) = -x + 1$ e $g(x) = \frac{1}{2}x + 1$.

Ver resolução no Guia do professor.

a) Analise os intervalos do domínio em que $f(x) < g(x)$.

b) Monte a inequação, resolva-a e compare a solução com sua análise dos gráficos. O que você conclui?

RA→RG→RSn/a

S5C1V2A (p. 31)

10. Faça um esboço dos gráficos das funções afins dadas em cada item, em um mesmo plano cartesiano. Em seguida, analise o que essas funções têm em comum.

Se você quiser, utilize um *software* de construção de gráficos. Ver resolução no Guia do professor.

a) $y_1 = 3x - 2$, $y_2 = 3x - 1$ e $y_3 = 3x$

b) $y_1 = 2x + 1$, $y_2 = -x + 1$ e $y_3 = -2x + 1$

c) $y_1 = x + 2$, $y_2 = 2x + 4$ e $y_3 = -x - 2$

a) Translação - dinamismo das representações; e c) Analisar a intersecção com os eixos e a monotonicidade das funções; b) tem simetria em relação ao eixo das ordenadas; tem simetria em relação ao eixo das abscissas; RA→ RG

S6C1V2A (p. 36)

10. Considere uma função $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e alguns valores assumidos por essa função, expressos na tabela a seguir.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$g(x)$	-16	-9	-4	-1	0	-1	-4	-9	-16

a) Analise cada valor de x e o valor correspondente de $g(x)$. Você percebe alguma relação entre esses valores? Você saberia expressar essa relação por meio de uma lei? respostas pessoais

b) Usando um *software* de construção de gráficos, represente cada par da tabela por um ponto no plano cartesiano. Como esses pontos se dispõem em relação ao eixo das ordenadas? Você percebe algum padrão na disposição desses pontos? Ver resolução no Guia do Professor.

c) Você acredita que existe uma parábola que passa por esses pontos? Em caso afirmativo, qual seria o vértice e como seria a concavidade dessa parábola? Espera-se que os alunos percebam que sim. O vértice seria o ponto (0, 0) e a concavidade seria voltada para baixo.

d) Considerando os valores da tabela, a função g poderia ser do 2º grau expressa por uma lei do tipo $g(x) = ax^2$. Encontre a lei da função g nesse caso. $g(x) = -x^2$

e) No *software* de construção de gráficos, no mesmo plano cartesiano que você representou os pontos do item **b**, trace agora o gráfico da função g cuja lei você determinou no item **d**. Comprove se o gráfico passa pelos pontos, ou seja, se a lei determinada realmente pode ser a lei da função g, cujos valores estão expressos na tabela.
Ver resolução no Guia do Professor.

RT→RG→RA

S7C1V2A (p. 45)

11. Resolva novamente os itens do exercício **10** considerando cada uma das tabelas a seguir.
Ver resolução no Guia do Professor.

I)

x	$g(x)$
-3	18
$-\frac{5}{2}$	$\frac{25}{2}$
-2	8
-1	2
$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
1	2
2	8
$\frac{5}{2}$	$\frac{25}{2}$
3	18

II)

x	$g(x)$
-4	8
-3	$\frac{9}{2}$
-2	2
-1	$\frac{1}{2}$
0	0
1	$\frac{1}{2}$
2	2
3	8
3	$\frac{9}{2}$
4	8

RT→ RG→RA

S8C1V2A (p. 45)

21. Estude o sinal das funções quadráticas dadas pelas leis a seguir.

a) $g(x) = 2x^2 + 3x + 7$

b) $h(x) = -x^2 + 2x - 1$

c) $i(x) = -x^2 + 9$

Se quiser, como auxílio, use um *software* de construção de gráficos.

RA→RG→RSn

S9C1V2A (p. 50)

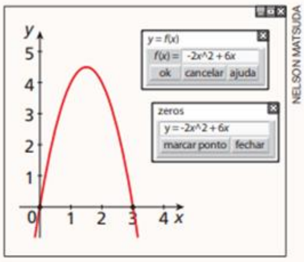
R8. Usando um *software* de construção de gráficos, estudar o sinal da função f dada por $f(x) = -2x^2 + 6x$.

▸ **Resolução**

Vamos construir o gráfico da função utilizando um *software* de construção de gráficos e determinar seus zeros.

Observação

Em alguns *softwares* há variações para escrever as expressões matemáticas. Para escrever $-2x^2 + 6x$, por exemplo, podemos digitar: −2x^2+6x ou −2x*x+6x



Observando o gráfico construído, concluímos que:

$$\begin{cases} f(x) > 0 \text{ para } 0 < x < 3 \\ f(x) = 0 \text{ para } x = 0 \text{ ou } x = 3 \\ f(x) < 0 \text{ para } x < 0 \text{ ou } x > 3 \end{cases}$$

RA→RG→RSn

S10C1V2AR (p. 50)

R12. Determinar o valor máximo ou mínimo da função f dada por $f(x) = \frac{x^2}{4} - 2x - 15$ e escrever seu conjunto imagem.

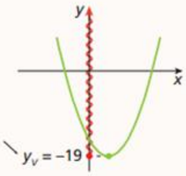
▸ **Resolução**

Como $a > 0$, o gráfico da função f tem a concavidade voltada para cima.

Portanto, a função tem valor mínimo.

$$y_V = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-\left[(-2)^2 - 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot (-15)\right]}{4 \cdot \frac{1}{4}}$$

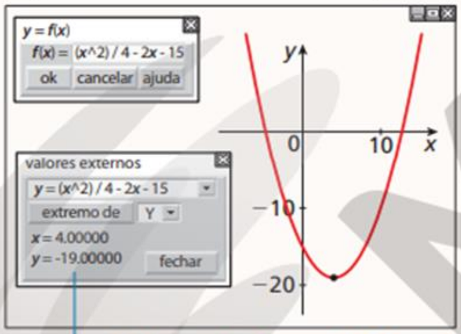
$$y_V = \frac{-(4 + 15)}{1} = -19$$



Logo, −19 é o valor mínimo dessa função e $\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant -19\}$.

Poderíamos resolver esse exercício com o auxílio de um *software* de construção de gráficos. Nesse caso, não seria necessário calcular a ordenada do vértice. Observe:

Construímos o gráfico da função e depois determinamos as coordenadas de seu vértice.



Selecionando a ferramenta "valores extremos", obtemos as coordemadas do ponto extremo, ou seja, do vértice da parábola.

Portanto, o vértice é (4, −19), e como a parábola tem concavidade para cima: $\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant -19\}$.

RA→RG→RSn

S11C1V2AR (p. 54)

---

31. Determine o conjunto imagem das funções quadráticas dadas pelas leis a seguir.

a) $f(x) = x^2 - 5x + 1$

b) $g(x) = -2x^2 + 3x + 7$

c) $h(x) = -3x^2 + 8$

31. a) $\text{Im}(f) = \left\{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant -\frac{21}{4}\right\}$

Se quiser, como auxílio, use um *software* de construção de gráficos.

RA→RG→RSn

S12C1V2A (p. 55)

35. Uma pedra é lançada verticalmente para cima. Um segundo após o lançamento, a pedra atinge 5 metros de altura e começa a descer. A lei que descreve a altura *h*, em metro, em relação ao tempo *t*, em segundo, é do tipo $h(t) = at^2 + bt$, com $a, b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$. Avaliar a conveniência de esclarecer aos alunos a diferença entre o gráfico (parábola) da função e a trajetória descrita pela pedra. a) Determine a lei dessa função. $h(t) = -5t^2 + 10t$ b) Qual é a altura da pedra 2 segundos após o lançamento? 0 m c) Usando um *software* de construção de gráficos, trace o gráfico correspondente a essa situação. Ver resolução no Guia do professor. RLN→RA→RG→RSn	S13C1V2A (p. 55)
46. Resolva o exercício a seguir usando um *software* de construção de gráficos. (Enem) Nos processos industriais, como na indústria de cerâmica, é necessário o uso de fornos capazes de produzir elevadas temperaturas e, em muitas situações, o tempo de elevação dessa temperatura deve ser controlado, para garantir a qualidade do produto final e a economia no processo. Em uma indústria de cerâmica, o forno é programado para elevar a temperatura ao longo do tempo de acordo com a função $T(t) = \begin{cases} \frac{7}{5}t + 20, \text{ para } 0 \leq t < 100 \\ \frac{2}{125}t^2 - \frac{16}{5}t + 320, \text{ para } t \geq 100 \end{cases}$ em que T é o valor da temperatura atingida pelo forno, em graus Celsius, e t é o tempo, em minutos, decorrido desde o instante em que o forno é ligado. Uma peça deve ser colocada nesse forno quando a temperatura for 48 °C e retirada quando a temperatura for 200 °C. O tempo de permanência dessa peça no forno é, em minutos, igual a: alternativa d a) 100 b) 108 c) 128 d) 130 e) 150 RA→RG→RSn	S14C1V2A (p. 59)
48. Em um mesmo plano cartesiano, construa os gráficos das funções *f* e *g* dadas por $f(x) = 2x^2 + 1$ e $g(x) = x^2 + 2x + 1$, se possível usando um *software* de construção de gráficos. Ver resolução no Guia do professor. Em seguida, analise os intervalos do domínio em que $f(x) > g(x)$. Monte a inequação, resolva-a e depois compare a solução com sua análise dos gráficos. RA→RG→RSn/a	S15C1V2A (p. 60)
14. Usando um *software* de construção de gráfico, construa, em um mesmo plano cartesiano, as parábolas correspondentes às funções dadas pelas leis a seguir. a) $y = 5x^2$ b) $y = -5x^2$ c) $y = \frac{1}{4}x^2$ d) $y = -\frac{1}{4}x^2$ • Que relação você observa entre a forma da parábola e o coeficiente de x^2? Ver resolução no Guia do professor. RA→RG Análise da influência do coeficiente "a" na representação gráfica, ou seja, abertura da concavidade e posição (para cima ou para baixo).	S16C1V2A (p. 64)
C1 - Vol.5 - Conexões Matemática e suas Tecnologias: Geometria Plana e Espacial	**Cód.**

1. Utilizando um *software* de Geometria dinâmica ou instrumentos de desenho (régua e compasso), construa um hexágono regular inscrito em uma circunferência. Ver resolução no Guia do professor.

2. Determine a medida do apótema e a medida do lado de um triângulo equilátero inscrito em uma circunferência de raio 2 cm. 1 cm e $2\sqrt{3}$ cm

3. Construa um hexágono regular circunscrito a uma circunferência e escreva: Ver resolução no Guia do professor.

a) a medida ℓ_6 do lado do hexágono em função do raio R da circunferência.

b) a medida D de uma diagonal do hexágono, que passa pelo centro da circunferência, em função do raio R dessa circunferência.

c) o perímetro P do hexágono em função do raio R da circunferência.

RGeo→RA→RG Estabilidade da construção

S17C1V5A (p. 22)

C1 - Vol.6 - Conexões Matemática e suas Tecnologias: Matrizes e Geometria Analítica | **Cód.**

Explore

Use um *software* de construção de gráficos para determinar a solução dos sistemas a seguir. Depois escreva suas observações sobre a solução determinada em cada um dos sistemas.

a) $S_1 = \begin{cases} x + y = 1 \\ 5x + 2y = -1 \end{cases}$

b) $S_2 = \begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases}$

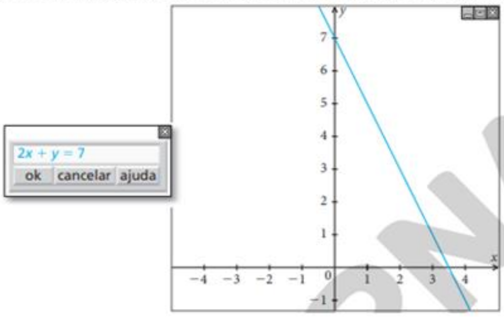
c) $S_3 = \begin{cases} 2x + 2y = 4 \\ 2x + 2y = 6 \end{cases}$

Solução de um sistema usando um *software* de construção de gráficos

O trabalho com *software* de construção de gráficos proposto neste tópico e no boxe **Explore** desta página favorece o desenvolvimento da competência geral **5** da BNCC.

Veja como determinar a solução do sistema do exemplo **a**, da página anterior, em um *software* de construção de gráficos.

1. Digitar a primeira equação do sistema ($2x + y = 7$) no campo de entrada de funções. Depois, clicar em "ok" para que a reta apareça no plano cartesiano.



RA→RG→RSn

S18C1V6C (p. 42)

C2 - Vol.1 - Matemática Interligada: Funções afim, quadrática, exponencial e logarítmica | **Cód.**

Acesso digital

Gráfico de funções no GeoGebra

Neste tópico, vamos construir o gráfico de duas funções e determinar alguns pontos de seu gráfico. Para isso, vamos utilizar o GeoGebra, que é um *software* gratuito de geometria dinâmica.

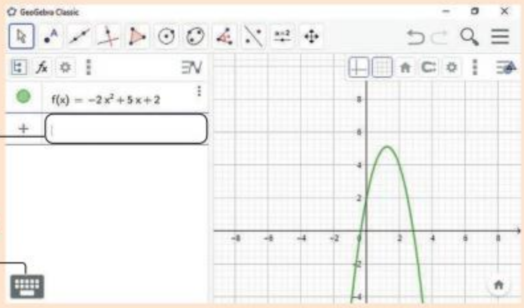
Siga as orientações do professor e o passo a passo a seguir para realizar as construções.

Veja como podemos construir o gráfico de $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = -2x^2 + 5x + 2$ e determinar seus zeros e o ponto de interseção entre seu gráfico e o eixo *y*.

1º Digite no campo **Entrada...** da **Janela de Álgebra**, a lei de formação da função e tecle **Enter**. Nesse caso, $f(x) = -2x \wedge 2 + 5x + 2$. Aparecerá na **Janela de Visualização** o gráfico de *f*.

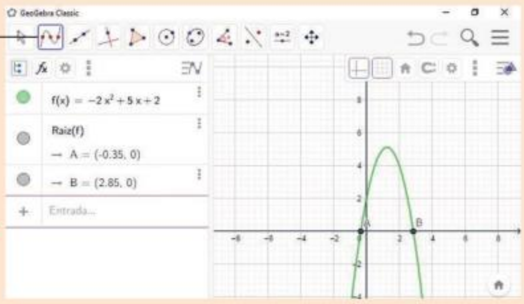
$f(x) = -2x^2 + 5x + 2$

Para digitar um expoente utilize o símbolo "^" do teclado. Quando necessário, é possível utilizar símbolos matemáticos clicando no botão localizado no canto inferior esquerdo.



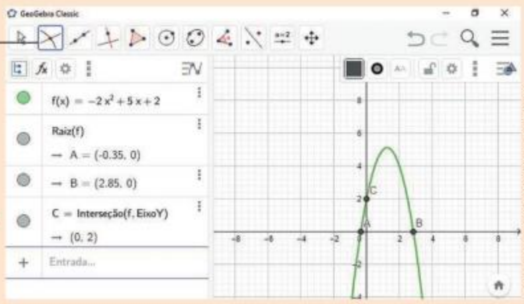
2º Selecione a ferramenta **Raízes** e clique sobre o gráfico da função. Os valores −0.35 e 2.85 são os zeros da função (nomeados raízes).

Em alguns casos, o *software* apresenta valores aproximados. Além disso, ele usa ponto no lugar da vírgula para os números na forma decimal.



3º Selecione a ferramenta **Interseção de Dois Objetos** e clique sobre o gráfico da função e sobre o eixo *y*. O ponto $C(0, 2)$ é o ponto de interseção entre o gráfico e o eixo *y*.

Se algum ponto não aparece na tela, amplie, reduza ou mova a **Janela de Visualização** usando as ferramentas próprias para isso.

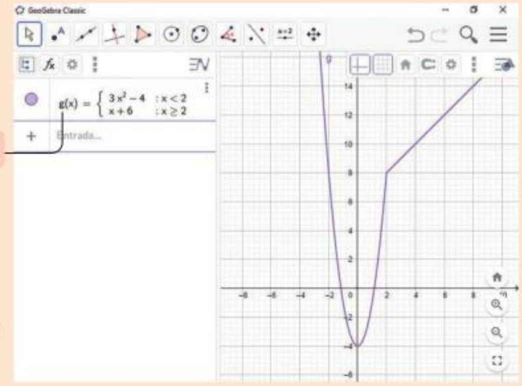


S19C2V1C (p. 50 e 51)

Agora, veja como podemos construir o gráfico da função $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = \begin{cases} 3x^2 - 4, \text{ se } x < 2 \\ x + 6, \text{ se } x \geq 2 \end{cases}$ e determinar alguns pontos de seu gráfico.

1º Digite no campo **Entrada...** da **Janela de Álgebra**, a seguinte expressão e tecle **Enter**:

$g(x) = \text{Se}(x < 2{,}3x\text{^}2 - 4{,}\text{Se}(x >= 2{,}x + 6))$



Na **Janela de Visualização** vai aparecer a representação do gráfico de g.

Se preciso, amplie, reduza ou mova a **Janela de Visualização** para visualizar as duas partes do gráfico.

Observação

Ao digitar a expressão que representa a função, note que aparece duas vezes o termo condicional **Se**. Isso ocorre devido às diferentes condições atribuídas ao valor de x.

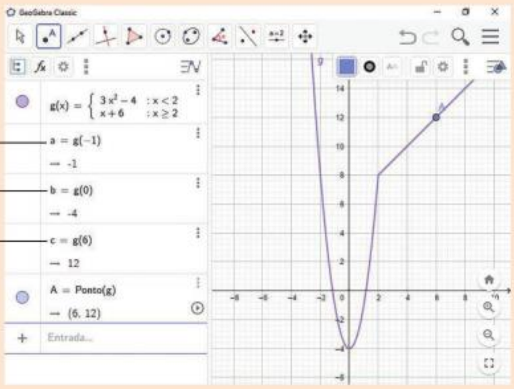
Se(<Condição>,<Então>,<Senão>)

2º Para determinar alguns pontos desse gráfico, digamos $g(-1)$, $g(0)$ e $g(6)$, digite dessa maneira no campo **Entrada...** da **Janela de Álgebra** e tecle **Enter**. Nesse caso, o programa vai exibir:

$a = g(-1) = -1$

$b = g(0) = -4$

$c = g(6) = 12$



Imagens: Reprodução/Geogebra/Markus Hohenwarter

a Utilizando o GeoGebra, construa o gráfico da função $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $h(x) = 3x^2 + 5x - 1$ e determine os zeros dessa função e o ponto de interseção entre seu gráfico e o eixo y. Veja na Assessoria pedagógica o gráfico dessa função.
Zeros da função h: $(-1.85, 0)$ e $(0.18, 0)$. Ponto de interseção com o eixo x: $(0, -1)$

b Qual deve ser a expressão a ser digitada no campo **Entrada...** do GeoGebra para obter o gráfico da função função $m: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $m(x) = \begin{cases} -x + 1, \text{ se } x < 1 \\ 1, \text{ se } 1 \leq x \leq 2 \\ x, \text{ se } x > 2 \end{cases}$? $m(x) = \text{Se}(x < 1, -x + 1, \text{Se}(1 <= x <= 2{,}1, \text{Se}(x > 2{,}x)))$

c Utilizando o GeoGebra, construa o gráfico do item **a** da tarefa **14** da página **48**.
Veja as respostas nas Orientações sobre os capítulos na Assessoria pedagógica.
Se achar necessário, oriente os alunos a construir o gráfico das funções dos outros itens, utilizando o GeoGebra.

RA→RG→RSn

Saiba mais

Descontos incidentes no salário

O valor do salário definido no contrato de trabalho e na carteira de trabalho é chamado salário bruto. No entanto, após diversos descontos e acréscimos discriminados no **holerite**, o valor pago diretamente ao colaborador, chamado salário líquido, pode ser bem diferente.

Normalmente, os valores dos acréscimos e descontos são fixos ou variam dependendo de algum fator. Eles devem estar descritos no holerite, listados nos valores de referência para os cálculos. Alguns exemplos de acréscimos ao salário bruto são horas extras, comissões, gratificações e benefícios. Já para os descontos ao salário bruto, podemos citar **tributos**, plano de saúde, faltas não justificadas, entre outros fatores.

Dois desses descontos são a contribuição previdenciária para o INSS (Instituto Nacional do Seguro Social) e o IRRF (Imposto sobre a Renda Retido na Fonte).

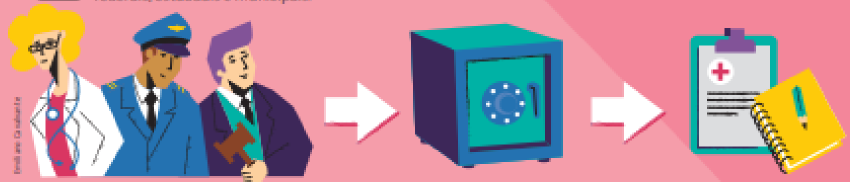
INSS A contribuição previdenciária é um seguro social público que oferece proteção contra riscos econômicos, como a perda de renda devido a desemprego, acidentes ou velhice, por exemplo.

A contribuição é calculada diretamente a partir do salário bruto do trabalhador. Assim, quanto maior o salário, maior a porcentagem da contribuição, até certo limite chamado teto.

O valor é pago ao INSS, órgão responsável pelas aposentadorias e outros benefícios.

Os benefícios são pagos de maneira proporcional aos valores que o trabalhador contribuiu, e os requisitos para recebê-los são definidos por lei.

IRRF O IRRF é um tributo destinado a custear a manutenção de serviços públicos federais, estaduais e municipais.



Esse tributo é calculado a partir do salário bruto após o desconto do INSS e de outras deduções. Trabalhadores que recebem até certo valor são isentos da cobrança do tributo, e o valor aumenta conforme a capacidade de contribuição.

O valor é pago à Receita Federal, órgão que administra a cobrança dos tributos federais e atua no combate à **sonegação** e outros crimes.

O dinheiro arrecadado é destinado a diversas necessidades do país, como saúde, educação, programas sociais, obras de desenvolvimento, entre outras.

S20C2V1C (p. 54 e 55)

Em ambos os tributos apresentados, o valor da **alíquota** varia conforme o salário bruto, que é dividido em intervalos chamados de faixas do salário. Sobre cada faixa, são aplicadas alíquotas diferentes, que aumentam quanto maior a faixa.

Em março de 2020, a contribuição ao INSS passou a ser calculada por meio de alíquotas progressivas, ou seja, a alíquota é aplicada somente sobre uma faixa correspondente do salário. Assim, o percentual descontado sobre o salário total, chamado alíquota efetiva, pode variar em uma mesma faixa de salários.

Considerando x o salário em reais, podemos determinar a contribuição previdenciária, descontada no holerite por meio da função f, dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 0{,}075 \cdot x, \text{ se } 0 < x \leq 1045 \\ 78{,}38 + 0{,}09 \cdot (x - 1045), \text{ se } 1045 < x \leq 2\,089{,}6 \\ 172{,}39 + 0{,}12 \cdot (x - 2\,089{,}6), \text{ se } 2\,089{,}6 < x \leq 3\,134{,}4 \\ 297{,}77 + 0{,}14 \cdot (x - 3\,134{,}4), \text{ se } 3\,134{,}4 < x \leq 6\,101{,}06 \\ 713{,}10, \text{ se } x > 6\,101{,}06 \end{cases}$$

Alíquota: percentual utilizado para calcular o valor de determinado tributo

Holerite: documento que registra a remuneração de um funcionário. Também pode ser chamado de contracheque

Sonegação: falta do pagamento, de maneira proposital ou fraudulenta, de algum imposto

Tributos são prestações compulsórias previstas em lei para manutenção e desenvolvimento do Estado. O imposto é um dos tipos de tributos existentes no Brasil

Observação

Na página **51**, apresentamos uma maneira de construir o gráfico que representa funções definidas por mais de uma sentença utilizando um *software* de geometria dinâmica.

Note que a função não é definida para valores de x menores ou iguais a zero, pois são referentes aos salários. Além disso, o valor passa a ser fixo para salários acima de R$ 6 101,06, que corresponde ao teto salarial. Desse modo, mesmo que alguém receba um salário maior do que esse valor, sua contribuição e benefícios serão definidos com base no valor do teto vigente.

O cálculo do IRRF sobre os salários referentes ao mês de março de 2020 também é calculado por meio de alíquotas progressivas. Considerando x o valor base do salário após o desconto da contribuição previdenciária e outras deduções em reais, podemos determinar o valor do desconto do IRRF por meio da função g, dada por:

$$g(x) = \begin{cases} 0, \text{ se } 0 < x \leq 1903{,}98 \\ 0{,}075 \cdot x - 142{,}8, \text{ se } 1903{,}98 < x \leq 2\,826{,}65 \\ 0{,}15 \cdot x - 354{,}8, \text{ se } 2\,826{,}65 < x \leq 3\,751{,}05 \\ 0{,}225 \cdot x - 636{,}13, \text{ se } 3\,751{,}05 < x \leq 4\,664{,}68 \\ 0{,}275 \cdot x - 869{,}36, \text{ se } x > 4\,664{,}68 \end{cases}$$

a) Possível resposta: não houve variações bruscas nos valores das contribuições com as mudanças de faixa

a) Calcule o desconto referente à contribuição previdenciária para salários próximos aos limites em cada uma das faixas. O que é possível observar sobre o aumento da contribuição para esses valores?

b) Calcule a alíquota efetiva do desconto efetuado em março de 2020 para uma pessoa cujo valor base para o cálculo do IRRF foi R$ 3 000,00.

aproximadamente 3,2%

c) $D(f) = \mathbb{R}^*_+$, $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid 0 < y \leq 713{,}10\}$, $D(g) = \mathbb{R}^*_+$ e $Im(g) = \mathbb{R}^*_+$

c) Determine o domínio e o conjunto imagem das funções f e g.

d) Determine o intervalo em que a função g é crescente, decrescente ou constante.

constante: $]0, 1903{,}98]$; crescente: $]1903{,}98; +\infty[$

e) Utilizando o GeoGebra, construa os gráficos das funções f e g. Veja as resposta nas Orientações sobre os capítulos na Assessoria pedagógica

RLN→RA→RG→RSn

Acesso digital

Função afim na planilha eletrônica

Neste tópico, vamos construir o gráfico de uma função afim dados alguns de seus pontos. Para isso, vamos utilizar o Calc, que é um *software* gratuito de planilha eletrônica.

Siga as orientações do professor e o passo a passo a seguir para realizar as construções.

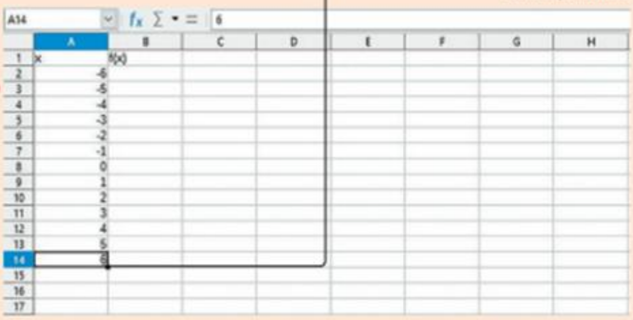
Observação
É importante indicar o que representam os números inseridos em uma planilha. Podemos fazer isso inserindo o rótulo ou a explicação em células próximas.

Vamos construir o gráfico da função afim f cuja lei de formação é $f(x) = 2x - 2$.

1º Primeiro, organize os dados na planilha. Nas células **A1** e **B1** digite x e $f(x)$, respectivamente.

2º Insira os valores para x nas células da coluna A. Para isso, digite -6 na célula **A2**, tecle **Enter**. Depois, selecione novamente a célula **A2** e use a **ferramenta de preenchimento**, arrastando-a até a célula **A14**.

A **ferramenta de preenchimento** completa as células adjacentes copiando ou preenchendo com os valores seguintes, dependendo do conteúdo da célula selecionada. Para utilizar, clique no quadrado no canto inferior direito da célula e arraste sobre as células que se deseja preencher.

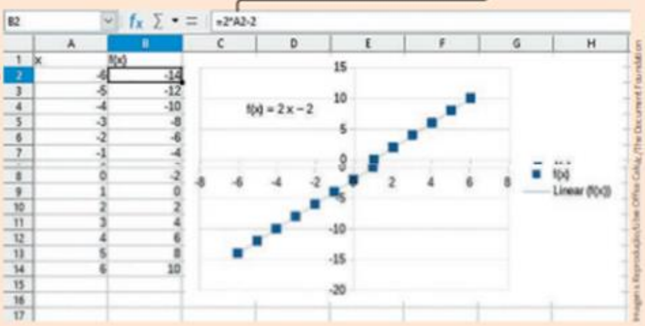


3º Para os valores de $f(x)$, digite **=2*A2-2** na célula **B2** e tecle **Enter**. Em seguida, selecione novamente a célula **B2** e use a **ferramenta de preenchimento** arrastando até a célula **B14**.

4º Selecione as células **A1:B14**, clique em **Inserir gráfico**, selecione o tipo **XY (Dispersão)** com a opção **Somente pontos** e clique em **Concluir**.

5º Clique com o botão direito do *mouse* em um dos pontos gerados e clique em **Inserir linha de tendência**. Selecione o tipo de regressão **Linear**, marque a opção **Mostrar equação** e clique em **OK**.

Mesmo que a função tenha sido construída com valores inteiros, note que ela está definida para todos os valores reais de x entre o menor e o maior valor digitado. No exemplo, temos $D(f) = [-6, 6]$ e $Im(f) = [-14, 10]$.



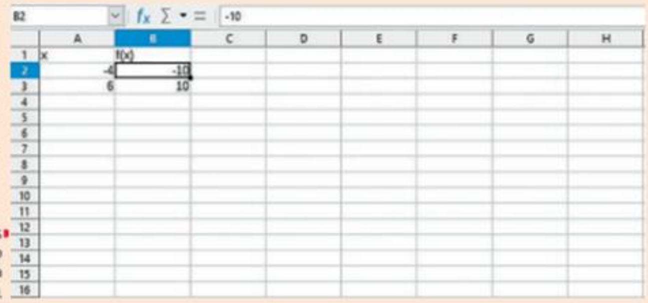
Observação
O tipo de gráfico XY (Dispersão) é útil para representar o comportamento de duas variáveis numéricas e a relação entre elas. A linha de tendência gera a função que melhor se adapta aos pontos inseridos, dependendo do tipo de regressão e do método escolhidos. No exemplo, como os pontos inseridos foram definidos com base em uma função afim, e a regressão escolhida foi do tipo linear, a linha de tendência passa sobre todos os pontos inseridos.

S21C2V1C (p. 66 e 67)

Vimos anteriormente que é possível determinar o gráfico de uma função, conhecendo apenas dois de seus pontos. Agora, veja como podemos determinar a lei de formação da função afim apresentada na página anterior conhecendo dois de seus pontos e, em seguida, determinar o valor de $f(x)$ para dado valor de x em seu domínio.

1º De maneira semelhante à apresentada anteriormente, digite x e $f(x)$ nas células **A1** e **B1**, respectivamente.

2º Digite os valores de x e $f(x)$ do primeiro ponto conhecido nas células **A2** e **B2**. Repita o procedimento para o segundo ponto conhecido nas células **A3** e **B3**.

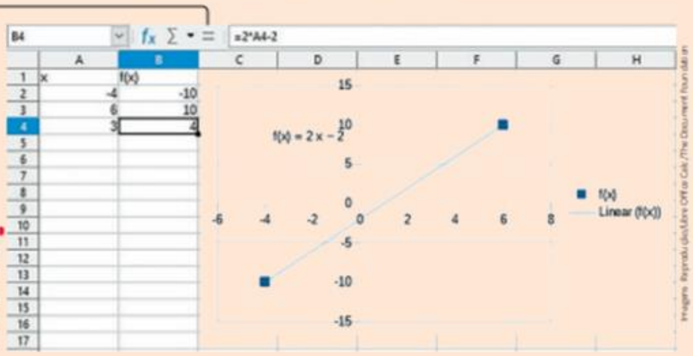


No exemplo, digitamos dois pontos da função apresentada na página anterior: $(-4, -10)$ e $(6, 10)$.

3º Selecione as células **A1:B3**, clique em **Inserir gráfico**, selecione o tipo **XY (Dispersão)** com a opção **Somente pontos** e clique em **Concluir**.

4º Clique com o botão direito do *mouse* em um dos pontos gerados e clique em **Inserir linha de tendência**. Selecione o tipo de regressão **Linear**, marque a opção **Mostrar equação** e clique em **OK**.

5º Para calcular o valor de $f(x)$ dado o valor de x, considere os coeficientes a e b da lei de formação da função afim obtida e digite na célula **B4** a expressão **=a*A4+b**. Assim, para cada valor de x digitado na célula **A4**, será calculado o valor de $f(x)$ na célula **B4**.



No exemplo apresentado, para $f(x) = 2x - 2$, com $a = 2$ e $b = -2$, a expressão a ser digitada na célula B4 seria **=2*A4-2**.

a) Utilizando o Calc, construa o gráfico da função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = 3x - 4$, considerando para x o intervalo $[-5, 5]$. Veja a resposta nas Orientações sobre os capítulos na Assessoria pedagógica.

b) Utilizando o Calc, determine a lei de formação da função afim que contém os pontos $(-4, 3)$ e $(6, 8)$, e calcule $f(2)$ na função obtida. $f(x) = 0{,}5x + 5$; $f(2) = 6$

c) Como você faria para determinar, utilizando o Calc, se uma função afim é linear? Resposta pessoal. Possível resposta: utilizando o Calc, calcularia $f(0)$ e verificaria se $f(0) = 0$.

RA→RT→RG

Acesso digital

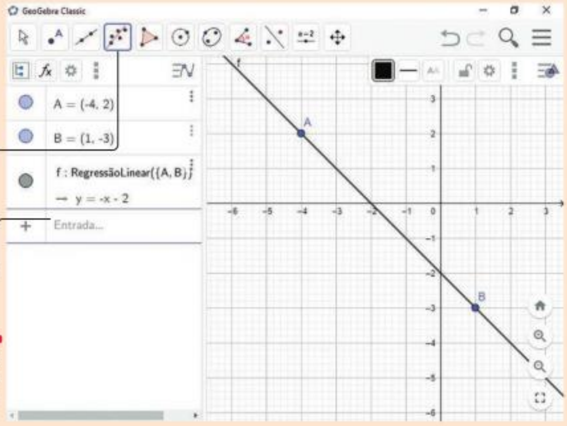
Função afim no GeoGebra

Nas páginas **66** e **67**, vimos como construir o gráfico de uma função afim utilizando o Calc. Agora, vamos utilizar o GeoGebra, um *software* de geometria dinâmica para realizar diferentes construções envolvendo funções afim.

Veja como podemos determinar a lei de formação e o gráfico de uma função afim dados dois pontos, determinar as interseções com os eixos ***x*** e ***y*** e calcular o valor da função em alguns pontos.

1º No campo **Entrada**, digite $(-4, 2)$, tecle **Enter** e digite $(1, -3)$, que correspondem a pares ordenados da função cuja lei de formação queremos determinar.

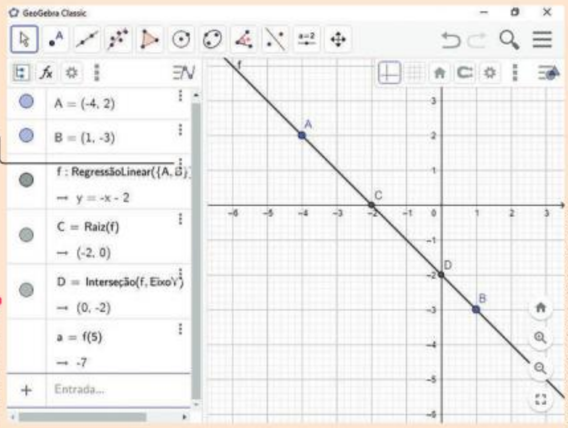
2º Selecione a ferramenta **Reta de Regressão Linear** e clique nos dois pontos construídos. No exemplo, a lei de formação apresentada é $y = -x - 2$.



É possível construir o gráfico de uma função cuja lei de formação é conhecida, digitando-a no campo **Entrada** por meio do teclado ou com o auxílio do teclado virtual.

3º Na **Janela de Álgebra**, clique em ⋮ ao lado da função f e clique em **Pontos Especiais**. Os pontos C e D construídos são onde f intersecta os eixos x e y, respectivamente.

4º Digite $f(5)$ no campo **Entrada** para calcular o valor de $f(x)$ quando $x = 5$. Esse cálculo pode ser realizado para outros valores de x no domínio.



Imagens: Reprodução/Geogebra/Markus Hohenwarter

Por mais que $D(f) = \mathbb{R}$, nem todos os valores de $f(x)$ podem ser calculados, pois o *software* possui um limite de casas decimais, e realiza aproximações para números pequenos. É possível alterar a quantidade de casas decimais a serem consideradas nas configurações do *software*.

S22C2V1C (p. 78 e 79)

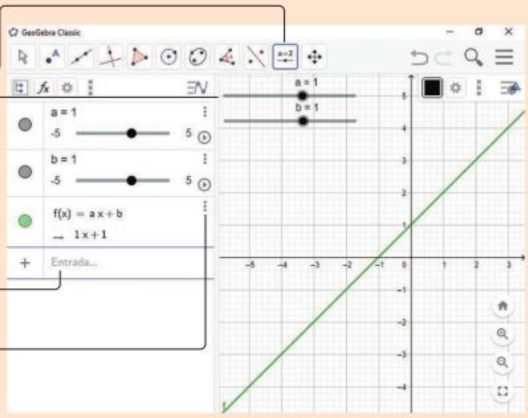
Agora, veja como podemos construir o gráfico de uma função afim variando seus coeficientes e determinar o ângulo entre o gráfico da função e o eixo x.

1º Para o coeficiente a, selecione a ferramenta **Controle Deslizante**, clique em algum lugar da **Janela de Visualização**, selecione o campo **Número** e clique em **OK**.

2º Do mesmo modo, para o coeficiente b, selecione a ferramenta **Controle Deslizante**, clique em algum lugar da **Janela de Visualização**, selecione o campo **Número** e clique em **OK**.

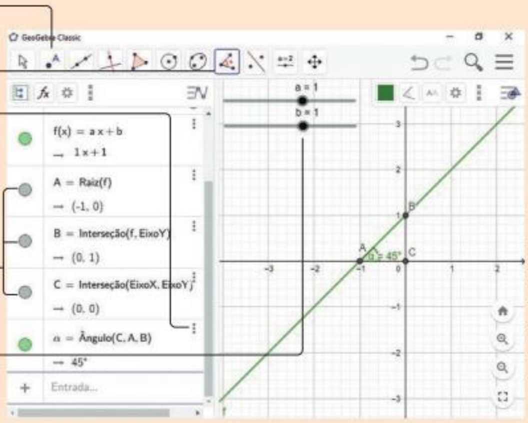
3º Digite **f(x)=a*x+b** no campo **Entrada** e tecle **Enter**.

4º Na **Janela de Álgebra**, clique em ⋮ ao lado da função f e clique em **Pontos Especiais**. Selecione a ferramenta **Ponto** e clique na interseção entre os eixos x e y.



5º Selecione a ferramenta **Ângulo** e clique nos pontos C, A e B, respectivamente. Na **Janela de Álgebra**, clique em ⋮ ao lado do ângulo α, clique em **Configurações**. No campo **Ângulo Entre:** selecione a opção **0° e 180°** e feche a janela de configurações.

Na **Janela de Álgebra**, clique nos **círculos** ao lado dos pontos A, B e C para que eles não apareçam na **Janela de Visualização**.



6º Arraste os **Controles Deslizantes** para os lados, alterando os valores de a e b e obtendo diferentes funções e gráficos.

Observação

O ângulo indicado é o menor ângulo entre o gráfico da função e o eixo x. Assim, para $a > 0$ considere o ângulo α, e para $a < 0$ considere o suplementar de α.

a) Dada uma função determinada por dois pontos quaisquer no GeoGebra, o que é possível dizer sobre o ponto de coordenadas $(0, f(0))$ e os **Pontos Especiais** determinados pelo *software*?

b) Calcule, utilizando o GeoGebra, o valor de $f(2)$, dado que $f(x)$ é uma função afim, $f(-2) = 5$ e $f(4) = -1$. $f(2) = 1$

c) Escolha a lei de formação de uma função afim apresentada neste capítulo e, utilizando o GeoGebra, determine o ângulo entre o eixo x e o gráfico dessa função. Resposta pessoal. Espera-se que os alunos tenham compreendido o passo a passo para realizar esta tarefa.

a) Espera-se que os alunos respondam que o ponto de coordenadas $(0, f(0))$ corresponde à interseção entre o gráfico da função e o eixo y, e o recurso **Pontos Especiais** possibilita visualizar os "principais pontos" do gráfico da função, como a interseção com os eixos x e y.

Translação - Dinamismo das representações; RSn→RG→RSn (coordenadas de pontos)

20. Calcule o valor máximo ou o valor mínimo de cada uma das funções quadráticas definidas em cada item. Em seguida, utilizando os mesmos procedimentos apresentados nas páginas **50** e **51**, construa o gráfico utilizando o GeoGebra e determine o conjunto imagem de cada uma delas.

a) $f(x) = x^2 + 2x + 3$

b) $f(x) = -x^2 + 3x - 5$

c) $f(x) = 2x^2$

d) $f(x) = 3x - 6x^2$

RA→RG→RSn

S23C2V1A (p. 100)

Acesso digital

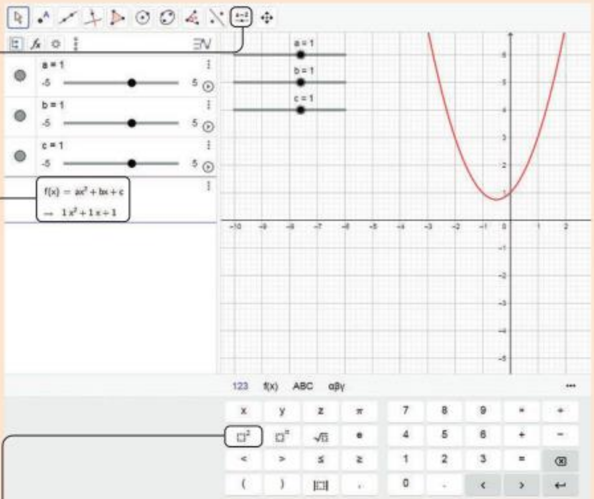
Função quadrática no GeoGebra

Nas páginas **78** e **79**, vimos como construir o gráfico de uma função afim utilizando o GeoGebra. Agora, vamos construir o gráfico de uma função quadrática utilizando esse mesmo *software*.

Siga as orientações do professor e o passo a passo a seguir para realizar as construções.

Veja como podemos construir o gráfico de uma função quadrática variando seus coeficientes e determinar o vértice da parábola e os pontos de interseção com os eixos *x* e *y*.

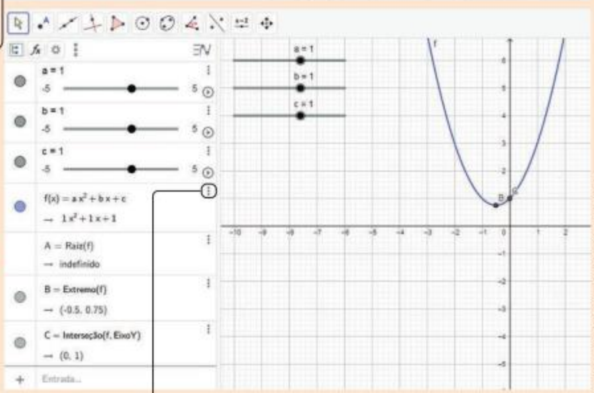
1º Para o coeficiente *a*, selecione a ferramenta **Controle Deslizante**, clique em algum lugar da **Janela de Visualização**, selecione o campo **Número** e clique em **OK**. De maneira semelhante, faça o mesmo procedimento para os coeficientes *b* e *c*.



2º No campo **Entrada**, insira a função *f*, definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$. Para o x^2, podemos digitar **x^2** ou **x*x** no teclado do computador.

Outra possibilidade é utilizar o teclado virtual do GeoGebra, que pode ser acessado clicando no ícone ⌨.

O botão $\square^2$ do teclado virtual é uma maneira de obter x^2.

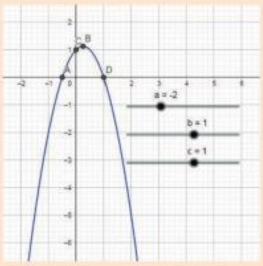


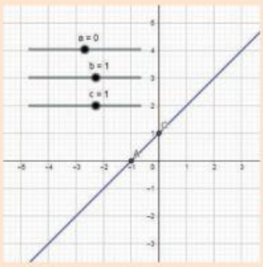
No exemplo ao lado, o gráfico representa uma função quadrática cuja lei de formação é dada por $f(x) = x^2 + x + 1$.

Imagens: Reprodução/Geogebra/Markus Hohenwarter

3º Na **Janela de Álgebra**, clique em ⋮ ao lado da função *f* e clique em **Pontos Especiais**. Como $f(x) = x^2 + x + 1$ não possui zeros reais, o *software* utiliza os pontos *B* para o vértice e *C* para a interseção com o eixo *y*, respectivamente. Assim, as interseções com o eixo *x*, quando existirem, serão os pontos *A* e *D*, como indicado nas imagens do 4º passo.

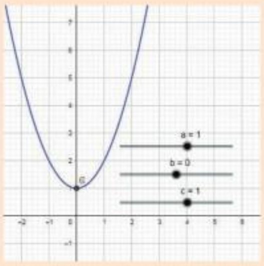
S24C2V1C (p.108 e 109)

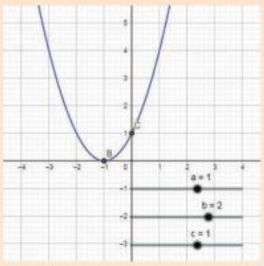




4º Com a ferramenta **Mover**, clique sobre o **Controle Deslizante** do coeficiente *a* e arraste para os lados. Mantenha os coeficientes *b* e *c* fixos enquanto altera o coeficiente *a*.

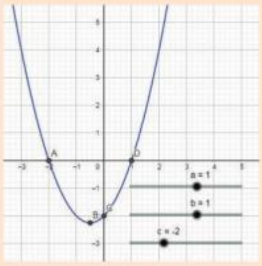
Nos exemplos ao lado, fixamos $b = 1$ e $c = 1$. Note que para $a = 0$ a função não é quadrática.

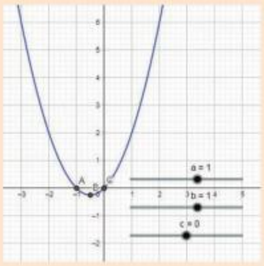




5º Do mesmo modo, com a ferramenta **Mover**, clique sobre o **Controle Deslizante** do coeficiente *b* e arraste para os lados. Mantenha os coeficientes *a* e *c* fixos enquanto altera o coeficiente *b*.

Nos exemplos ao lado, fixamos $a = 1$ e $c = 1$.





6º Com a ferramenta **Mover**, clique sobre o **Controle Deslizante** do coeficiente *c* e arraste para os lados. Mantenha os coeficientes *a* e *b* fixos enquanto altera o coeficiente *c*.

Nos exemplos ao lado, fixamos $a = 1$ e $b = 1$.

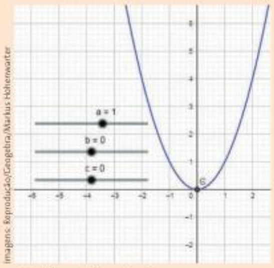


Gráfico da função *f*.

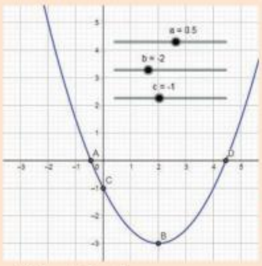


Gráfico da função *g*.

7º Altere os coeficientes *a*, *b* e *c* para obter o gráfico de uma função quadrática cuja lei de formação é conhecida. Além disso, é possível determinar o vértice e as interseções com os eixos dessas funções.

Os exemplos ao lado são os gráficos das funções *f* e *g*, definidas respectivamente por $f(x) = x^2$ e $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x - 1$.

a) É possível determinar os zeros reais, se existirem, de uma função quadrática utilizando o GeoGebra? Onde elas serão exibidas? Sim. Possível resposta: os zeros reais da função quadrática, se existirem, são as abscissas dos pontos de interseção da parábola com o eixo *x*, e os valores são aproximados, dependendo de qual é a função.

b) Escolha uma função quadrática apresentada neste capítulo e, utilizando o GeoGebra, determine a quantidade de zeros reais distintos desta função. Resposta pessoal. Veja uma possível resposta nas Orientações sobre os capítulos na Assessoria pedagógica.

RA→RG→RSn

C3 - Vol.1 - Quadrante: Funções	Cód.

Problema

Uma empresa oferece os seguintes planos de internet móvel a seus clientes:

- **Conexão na medida**: mensalidade de R$ 100,00 para uso de dados até 15 gigabaites (GB) mais R$ 2,00 por gigabaite que exceder o consumo de 15 GB;
- **Internet por consumo**: mensalidade de R$ 90,00 mais R$ 1,00 por gigabaite consumido.

Podemos certamente afirmar que o plano **Internet por consumo** será mais vantajoso, em relação a quantia paga, para quem consome:

a) menos do que 15 GB.
b) mais do que 15 GB.
c) menos do que 20 GB.
d) mais do que 20 GB.
e) entre 10 GB e 20 GB.

Entendendo o problema

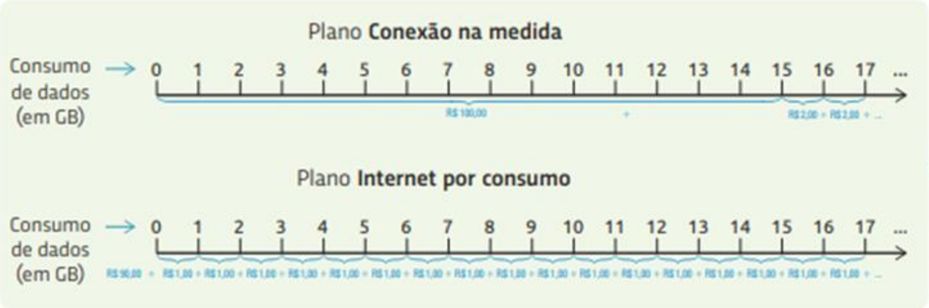
1. Determinamos o que se pede no problema.

Identificar, em relação à quantia paga, para quais valores de consumo de dados, em gigabaites, o plano **Internet por consumo** é mais vantajoso do que o plano **Conexão na medida**.

2. Identificamos as informações e as condições apresentadas para se resolver o problema.

Entre os planos oferecidos, o **Conexão na medida** tem mensalidade de R$ 100,00 para uso de dados até 15 GB mais R$ 2,00 por gigabaite que excede o consumo de 15 GB. Já o plano **Internet por consumo** tem mensalidade de R$ 90,00 mais R$ 1,00 por gigabaite consumido.

3. Se possível, desenhamos um esquema para representar a situação proposta.



Construindo e executando um plano

Informe aos alunos que a seção **Ferramentas** apresenta dicas para a representação gráfica em um *software* de geometria dinâmica.

4. Com base em conhecimentos prévios, avaliamos se já resolvemos um problema parecido e se é possível utilizá-lo para obter a solução do problema apresentado. Além disso, analisamos se há algum recurso ou ferramenta disponível para nos auxiliar no processo de resolução.

Pode-se fazer o uso de uma calculadora para agilizar os cálculos ou usar algum *software* de geometria dinâmica para representar graficamente as situações apresentadas.

RLN→RA→RG→RSn

S25C3V1C (p. 40)

14. Ferramentas \ Faça um esboço do gráfico de cada função a seguir.

Resposta na **Resolução das tarefas** nas **Orientações para o professor.**

a) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que $f(x) = 3x^2$.

b) $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$, tal que $g(x) = 2^x$.

c) $h\colon [1, 5] \to \mathbb{R}$, tal que $h(x) = x - 2$.

d) $p\colon \{0, 1, 2, 3, 4\} \to \mathbb{R}$, tal que $p(x) = 2x - 2$.

RA→RG

S26C3V1A (p. 43)

26. Ferramentas \ Uma costureira produz duas saias de determinado modelo em uma hora e vende por R$ 40,00 cada uma. Considerando que todas as saias produzidas serão vendidas, faça o que se pede.

a) Escreva a lei de formação de duas funções, sendo uma que relacione a quantidade $q(t)$ de saias produzidas em função do tempo de trabalho t, em horas, e outra que relacione a quantia $p(x)$, em reais, arrecadada com as vendas de x saias produzidas. $q(t) = 2t$; $p(x) = 40x$

b) Determine a lei de formação da função composta $p \circ q$, que relaciona a quantia arrecadada e o tempo de trabalho. $(p \circ q)(t) = 80 \cdot t$

c) De acordo com as informações, que quantia a costureira vai arrecadar se ela costurar por 4 horas?
R$ 320,00

RLN→RA→RG→RSn

S27C3V1A (p. 55)

---

tarefas nas **Orientações para o professor.**

1. Ferramentas \ Considere as funções a seguir.

- $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = 2x - 5 - 4x$
- $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $g(x) = x(x-2) - 3$
- $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $h(x) = x^2 - \frac{1}{2}x - x(x-1)$

a) Atribua alguns valores reais a x e construa um quadro para cada função, obtendo os valores correspondentes para $f(x)$, $g(x)$ e $h(x)$.

b) Esboce o gráfico de cada uma das funções.

c) Determine quais funções são afim.
Funções f e h.

d) Classifique as funções indicadas no item anterior em crescente ou decrescente.
f: decrescente; h: crescente

RA→RT→RG

S28C3V1A (p. 60)

---

9. Ferramentas \ Considere a função $f\colon [-3, 8] \to \mathbb{R}$

definida por: $f(x) = \begin{cases} 2x + 4, \text{se } -3 \leqslant x \leqslant 0 \\ 4, \text{se } 0 < x \leqslant 4 \\ 12 - 2x, \text{se } 4 < x \leqslant 8 \end{cases}$

a) Em uma malha quadriculada esboce o gráfico da função f. Resposta na **Resolução das tarefas** nas **Orientações para o professor.**

b) Identifique os pontos nos quais o gráfico da função f intersecta o eixo Ox e o eixo Oy.
Eixo Ox: $(-2, 0)$, $(6, 0)$; eixo Oy: $(0, 4)$.

c) Determine os intervalos do domínio em que a função f é:

- crescente. $[-3, 0[$
- decrescente. $]4, 8]$
- constante. $]0, 4]$

RA→RG→RSn

S29C3V1A (p. 65)

19. **Ferramentas** Dada a função afim $f(x) = 2x + 2$ definida de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, faça o que se pede. Respostas dos itens **a**, **b** e **c** na **Resolução das tarefas** nas **Orientações para o professor**.

a) Esboce o gráfico da função $f(x)$.

b) Determine uma função $g(x)$ que corresponda à função $f(x)$ transladada 2 unidades para baixo e esboce o gráfico da $g(x)$ no mesmo plano cartesiano de $f(x)$.

c) Determine uma função $h(x) = -g(x)$ e esboce o gráfico de $h(x)$ no mesmo plano cartesiano que $f(x)$ e $g(x)$.

d) Quais dos gráficos apresentam funções cujo comportamento é proporcional? Justifique sua resposta. Os gráficos das funções $g(x)$ e $h(x)$. Esses gráficos passam pelo ponto de coordenadas $(0, 0)$, que é a origem do plano cartesiano; esse comportamento representa uma função linear que é o modelo matemático para situações de proporcionalidade.

Translação, dinamismo das representações e simetria-relação funcional; RA→RG

S30C3V1A (p. 70)

---

33. **Ferramentas** Júlia tem um boleto de R$ 350,00 que vence no dia 12 de março, mas ainda não recebeu o dinheiro para pagá-lo. Talvez ela o tenha em 20 de março, senão só poderá pagá-lo no dia 5 do próximo mês. Sabendo que a taxa de juro simples é 0,7% ao dia, faça o que se pede.

a) Escreva a lei de formação de uma função $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$ que expresse o valor do juro a ser pago em relação à quantidade de dias de atraso. $f(x) = 2{,}45x$

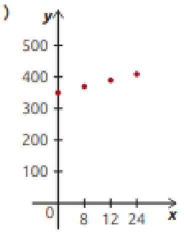
WAYHOME studio/Shutterstock.com/ID/BR

Muitas famílias brasileiras pagam suas contas com atraso. Algumas atitudes podem contribuir na organização financeira da família, como verificar a real necessidade de comprar algo e manter uma reserva para imprevistos.

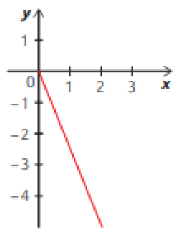
b) Represente em um quadro a quantidade de dias de atraso, quanto Júlia pagaria de juro sem atraso e quanto ela deverá pagar de juro nos dias 20 de março e 5 de abril.

c) Entre os gráficos a seguir, qual deles melhor representa a lei de formação de f? III

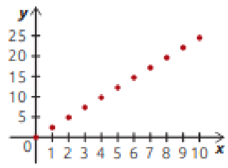
I)



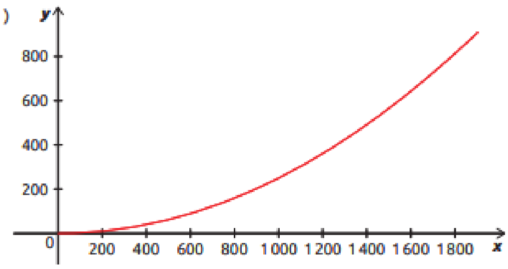
II)



III)



IV)



Ilustrações: Sérgio Lima/ID/BR

b)

Quantidade de dias em atraso	Juro (em reais)
0	0
8	19,60
24	58,80

RLN→RA→RT→RG

S31C3V1A (p. 77)

---

17. **Ferramentas** Esboce o gráfico de cada função quadrática localizando o vértice da parábola e o eixo de simetria e.

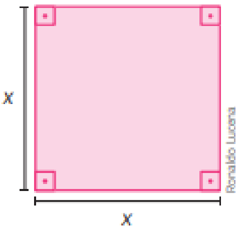
a) $f(x) = -3x^2$
$V(0, 0)$; eixo de simetria: $x = 0$

b) $f(x) = x^2 - 2x + 2$
$V(1, 1)$; eixo de simetria: $x = 1$

Simetria-relação funcional; RA→RG→RSn

S32C3V1A (p. 90)

21. **Ferramentas** Observe a região quadrada a seguir.



a) Escreva as leis de formação das funções $A(x)$ e $P(x)$ que determinam, respectivamente, a área e o perímetro dessa região. $A(x) = x^2$; $P(x) = 4x$

b) Considerando as leis de formação do item anterior e que $A: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ e $P: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, qual dessas funções tem a variável dependente diretamente proporcional ao quadrado da variável independente? $A(x) = x^2$

c) Esboce o gráfico de $A(x)$ e de $P(x)$ no mesmo plano cartesiano. Resposta na **Resolução das tarefas** nas **Orientações para o professor**.

d) Para quais valores de x, $A(x)$ é:

- menor do que $P(x)$? $0 < x < 4$
- maior do que $P(x)$? $x > 4$
- igual a $P(x)$? $x = 4$

e) A lei de formação de cada uma das funções obtidas $A(x)$ e $P(x)$ corresponde à lei de formação de qual função: quadrática ou afim?
$A(x)$: função quadrática; $P(x)$: função afim

Estabilidade da construção (indício); RGeo→RA→RG

S33C3V1A (p. 91)

39. **Ferramentas** Esboce o gráfico das funções quadráticas e determine para quais valores de $x \in \mathbb{R}$ elas são positivas, iguais a zero ou negativas.

a) $f(x) = x^2 + 6x + 5$

b) $g(x) = -x^2 + x + 2$

c) $h(x) = 5x^2 + 2x + 1$

d) $p(x) = -3x^2 + 6x - 3$

Resposta na **Resolução das tarefas** nas **Orientações para o professor**.

RA→RG→RSn

S34C3V1A (p. 100)

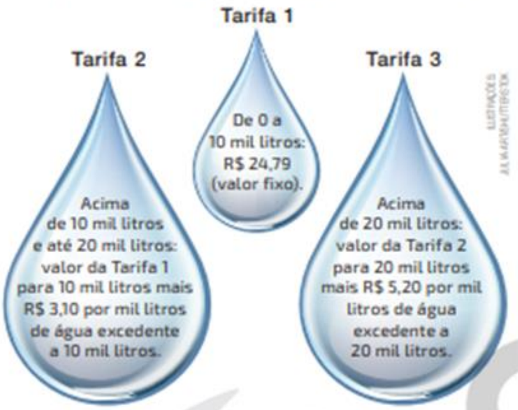
40. **Ferramentas** No lançamento de tiro de meta em um jogo de futebol, a bola chutada pelo goleiro fez a mesma trajetória de uma parábola, descrita pela função $h: [0, 58] \to \mathbb{R}$, dada por $h(x) = -\frac{2}{145}x^2 + \frac{4}{5}x$, em que x é o alcance (horizontal) e $h(x)$, a altura da bola.

Esboce o gráfico da função h e determine a altura máxima atingida pela bola nesse lançamento.
Resposta na **Resolução das tarefas** nas **Orientações para o professor**.

RLN→RA→RG→RSn

S35C3V1A (p. 100)

41. **Ferramentas** \ A função $h: [0, 16] \to \mathbb{R}$, definida por $h(x) = -5x^2 + 80x$, descreve a altura em função do tempo de um projétil lançado do solo, com x em segundos e h em metros. a) A que altura do solo o projétil se encontra 1 s após o lançamento? E 2 s após o lançamento? 75 m; 140 m b) Qual deve ser a altura máxima atingida por esse projétil? 320 m c) Esse projétil deve atingir o solo quanto tempo após o lançamento? Após 16 s. RA→RG→RSn	S36C3V1A (p. 100)
42. **Ferramentas** \ O custo de um dia de trabalho em uma empresa pode ser descrito pela expressão $C(x) = 2x^2 + 8x$, em que $x \in \mathbb{N}$ representa a quantidade de clientes atendidos. O valor recebido em um dia é representado pela expressão $V(x) = 60x$. Sabendo que o lucro é dado por $L(x) = V(x) - C(x)$ e que a partir de certa quantidade de clientes fica inviável o atendimento, devido ao aumento do custo, responda às questões a seguir. a) Para que a empresa tenha lucro máximo em um dia, quantos clientes devem ser atendidos? 13 clientes. b) Qual é a quantidade máxima de clientes que essa empresa pode atender em um dia sem que tenha prejuízo? 26 clientes. RA→RG→RSn	S37C3V1A (p. 101)

C4 - Vol.6 - Diálogo Matemática e suas Tecnologias: Funções e progressões	Cód.
1 Utilizando um *software* de Geometria dinâmica, construa o gráfico da função f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definida por: Respostas na seção **Resolução dos exercícios e problemas** do **Suplemento para o professor**. **a)** $f(x) = x - 3$. **b)** $f(x) = -2x + 5$. **c)** $f(x) = -5x$. **d)** $f(x) = \begin{cases} 2x - 1, \text{ se } x < 1 \\ -2x + 1, \text{ se } x \geqslant 1 \end{cases}$. **e)** $f(x) = \frac{x^2}{4}$. RA→RG	S38C4V6A (p. 36)
2 Para saber como é calculado o valor da fatura de água, Armando fez uma pesquisa no site da companhia de saneamento básico da cidade onde mora. Veja as informações obtidas por ele.  De acordo com as informações obtidas, Armando escreveu a lei de formação de uma função que possibilita calcular o valor da fatura f de acordo com o consumo c, em mil litros. $f(c) = \begin{cases} 24{,}79 \text{ se } 0 \leqslant c \leqslant 10 \\ 24{,}79 + 3{,}10(c - 10) \text{ se } 10 < c \leqslant 20 \\ 55{,}79 + 5{,}20(c - 20) \text{ se } c > 20 \end{cases}$ **a)** Determine, na cidade onde Armando mora, o valor pago pela fatura de água caso uma pessoa consuma: • 12 mil litros de água. R$ 30,99 • 27,3 mil litros de água. R$ 93,75 **b)** Utilizando um *software* de Geometria dinâmica, construa o gráfico da função cuja lei de formação foi escrita por Armando. Respostas na seção **Resolução dos exercícios e problemas** do **Suplemento para o professor**. RLN→RA→RG→RSn	S39C4V6A (p. 36)
4 O gafanhoto-do-deserto é um inseto capaz de comer cerca de 1,5 grama de folhas por dia, um número aparentemente pequeno, mas se considerarmos que algumas nuvens desses gafanhotos podem conter cerca de 50 milhões de indivíduos, a devastação alcança grandes proporções. Fonte de pesquisa: ANIMAIS do deserto II. *Enciclopédia da vida selvagem Larousse*. Rio de Janeiro: Altaya, 1997.  gafanhoto-do-deserto **a)** Escreva a lei de formação de uma função que relacione a quantidade q de gafanhotos com a massa m, em gramas, de folhas que eles são capazes de comer por dia. $m(q) = 1{,}5q$ **b)** Quantas toneladas de folhas uma nuvem com 50 milhões de gafanhotos-do-deserto pode comer em um único dia? 75 t **5** Utilizando um *software* de Geometria dinâmica, construa o gráfico da função cuja lei de formação você escreveu no item **a** da atividade anterior. Respostas na seção **Resolução dos exercícios e problemas** do **Suplemento para o professor**. RLN→RA→RG→RSn	S40C4V6A (p. 46)

Agora é com você! Respostas no **Suplemento para o professor.**

1 Qual informação deve ser inserida pelo usuário quando o programa executar a instrução da linha 7?

2 Considere uma função afim f. Escreva um programa em VisualG que determine $f(x)$, dada a lei de formação da função e o valor de x.

Construção de algoritmo em linguagem de programação - RLN→RA→LP

S41C4V6A (p. 49)

O valor absoluto ou módulo de um número real a, indicado por $|a|$, é definido como o próprio número a, se $a \geq 0$, ou como $-a$, se $a < 0$.

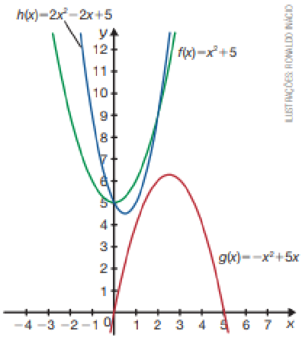
Exemplos:

- $|3| = 3$
- $|-2{,}3| = -(-2{,}3) = 2{,}3$

Analisando o coeficiente a de uma função quadrática, também podemos obter informações a respeito da abertura da parábola. Funções quadráticas que têm coeficiente a com valores absolutos iguais possuem gráficos com aberturas iguais. Aquelas que possuem diferentes valores absolutos do coeficiente a possuem gráficos com aberturas diferentes.

Considere as funções f, g e h representadas no mesmo plano cartesiano.

- Note que, para as funções f e g, o valor absoluto do coeficiente a é o mesmo, ou seja, $|a| = 1$. Nesse caso, os gráficos das funções f e g possuem a mesma abertura.
- Note que, para as funções f e h, por exemplo, o valor absoluto dos coeficientes a são diferentes. Nesse caso, os gráficos das funções f e h possuem aberturas diferentes.



Podemos verificar que, quanto menor for o valor absoluto do coeficiente a de uma função quadrática, maior será a abertura de seu gráfico. A fim de realizar essa verificação, esboce, com o auxílio de um *software* de Geometria dinâmica, o gráfico de diferentes funções quadráticas em um mesmo plano cartesiano.

RA→RG

S42C4V6C (p. 72)

---

4 Considere as funções f, g, h e m dadas por $f(x) = 3x^2 + 2$, $g(x) = 5x^2 + x$, $h(x) = 2x^2$ e $m(x) = -3x^2$.

a) Com o auxílio de um *software* de Geometria dinâmica, esboce o gráfico das funções f, g, h e m.

b) Se uma grandeza y é diretamente proporcional ao quadrado de uma grandeza x $(x \neq 0)$, então existe uma constante k, tal que $\frac{y}{x^2} = k$. Em quais das funções (f, g, h ou m) uma variável é diretamente proporcional ao quadrado da outra? Justifique sua resposta.

RA→RG

S43C4V6A (p. 75)

Agora é com você! Respostas no **Suplemento para o professor.**

1 Com o auxílio do GeoGebra, determine os valores máximos ou mínimos das funções cuja lei de formação é apresentada a seguir.

a) $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$ b) $f(x) = x^2 - 3x + 4$ c) $f(x) = -2x^2 - 20x - 2$

RA→RG→RSn

S44C4V6A (p. 88)

---

13 Em uma metalúrgica, o custo c, em reais, para produzir n peças de metal pode ser calculado por $c(n) = 0{,}04n^2 - 4n + 110$. Com o auxílio de um *software* de Geometria dinâmica, determine para qual quantidade de peças o custo de produção é mínimo. Qual é esse custo mínimo?

50 peças; R$ 10,00

RLN→RA→RG→RSn

S45C4V6A (p. 89)

14 Pedro pretende cercar uma região retangular em sua chácara para criar galinhas. Para isso, ele comprou 80 m de tela e pretende usá-la de modo a obter a maior área possível. Com o auxílio de um *software* de Geometria dinâmica, determine quais devem ser os comprimentos dos lados e a área máxima desse galinheiro. Os lados devem ter 20 m de comprimento; 400 m^2 RLN→RA→RG→RSn	S46C4V6A (p. 89)
16 O lucro (ou prejuízo) L de uma pequena empresa é calculado pela diferença entre a receita R e o custo C. Nessa empresa, a receita e o custo são dados, respectivamente, pelas funções definidas por $R(x) = 180x - x^2$ e $C(x) = 30x + 1\,200$, em reais, em que x representa a quantidade vendida mensalmente de determinados itens. a) Determine a lei de formação da função lucro L. $L(x) = -x^2 + 150x - 1\,200$ b) Com o auxílio de um *software* de Geometria dinâmica, determine: • quantos itens devem ser vendidos nessa empresa para que o lucro seja máximo. 75 itens • o lucro máximo dessa empresa, em reais. R$ 4 425,00 Receita é o valor total que é recebido ou arrecadado. RLN→RA→RG→RSn	S47C4V6A (p. 89)
17 Uma loja de uniformes escolares vende diariamente uma média de 20 calças, por R$ 80,00 cada. Ao realizar uma promoção, o gerente da loja percebeu que, a cada R$ 0,50 que baixava no preço, a venda de calças aumentava em 1 unidade por dia. Com o auxílio de um *software* de Geometria dinâmica, determine qual deve ser o preço de cada calça para que se tenha a maior receita. Qual é o valor dessa receita? R$ 45,00; R$ 4 050,00 RLN→RA→RG→RSn	S48C4V6A (p. 89)

19 José vai cercar uma região retangular de seu sítio para criar carneiros. Ele tem um rolo de arame com 240 m e deseja construir a cerca com quatro fios. Sabendo que ele vai aproveitar uma cerca já existente na propriedade, determine, com o auxílio de um *software* de Geometria dinâmica, qual deve ser a largura *a* e o comprimento *c* para que ele consiga uma área máxima de pastagem para sua criação.

$a = 15$ m e $c = 30$ m

RLN→RA→RG→RSn

S49C4V6A (p. 90)

20 Fernanda e Carol estavam disputando uma partida de golfe em um campo plano. Fernanda realizou uma tacada na qual a bola descreveu uma trajetória representada pela função definida por $f(x) = -\frac{x^2}{100} + \frac{x}{5}$. Em seguida, Carol realizou uma tacada na qual a bola descreveu uma trajetória representada pela função definida por $g(x) = -\frac{x^2}{32} + \frac{x}{2}$. Considerando x a distância horizontal e $f(x)$ e $g(x)$ a altura, em metros, de cada tacada, responda às questões propostas com auxílio de um *software* de Geometria dinâmica.

a) Qual das garotas conseguiu fazer com que a bola alcançasse a maior distância horizontal ao tocar o solo? Qual foi essa distância?
Fernanda; 20 m

b) Qual das garotas conseguiu fazer a bola ir mais alto? Qual foi essa altura? Carol; 2 m

RLN→RA→RG→RSn

S50C4V6A (p. 90)

12 Considere um triângulo equilátero, um quadrado e um hexágono regular com lados medindo x cm de comprimento. $x = \frac{20\sqrt{3}}{3}$

a) Com o auxílio de um *software* de Geometria dinâmica, represente graficamente a área e o perímetro desses polígonos em função do comprimento de seu lado. O que você pode observar? Resposta na seção **Resolução dos exercícios e problemas** do **Suplemento para o professor.**

b) As representações gráficas obtidas por você no item **a** correspondem a funções afins ou quadráticas? perímetros: funções afins; áreas: funções quadráticas

c) Considere um retângulo cujas dimensões são 5 cm e x cm. Para quais valores de x:

- o perímetro do quadrado é maior do que o do retângulo? $x > 5$
- a área da região determinada pelo hexágono é maior do que a área determinada pelo retângulo? $x > \frac{10\sqrt{3}}{9}$
- a área da região determinada pelo triângulo é igual a área determinada pelo retângulo?

Estabilidade da construção (indícios); RGeo→RA→RG

S51C4V6A (p. 99)

13 Desafio

Considere um octógono regular inscrito em uma circunferência cujo comprimento do raio é r. Sabendo que o comprimento do lado e do apótema desse octógono é x cm e $\frac{r\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ cm, respectivamente, e que $x = r\sqrt{2-\sqrt{2}}$, resolva.

13. b) Resposta na seção **Resolução dos exercícios e problemas** do **Suplemento para o professor.**

a) Escreva uma expressão que possibilite calcular:

- o perímetro P do octógono em função do comprimento de seu lado. $P = 8x$
- a área A do octógono em função do comprimento de seu lado. $A = 2x^2\left(1+\sqrt{2}\right)$

b) Com o auxílio de um *software* de Geometria dinâmica, represente graficamente a área e o perímetro desse polígono em função do comprimento de seu lado.

c) As representações gráficas obtidas por você no item **b** correspondem a funções afins ou quadráticas? perímetro: função afim; área: função quadrática.

d) Para quais valores de x a área da região determinada por esse octógono é maior do que a área da região determinada por um retângulo cujas dimensões são 5 cm e 3 cm?

$x > \sqrt{\frac{15\left(\sqrt{2}-1\right)}{2}}$

Estabilidade da construção (indícios); RGeo→RA→RG

S52C4V6A (p. 99)