UNIVERSIDADE FEDERAL DO PAMPA

MÁRCIO LUIS JANNER

ENTRE FIGURAS E NÚMEROS: UM OLHAR SOBRE A GENERALIZAÇÃO PARA O DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO NOS ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL

Caçapava do Sul, RS
2025

MÁRCIO LUIS JANNER

ENTRE FIGURAS E NÚMEROS: UM OLHAR SOBRE A GENERALIZAÇÃO PARA O DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO NOS ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Pampa, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Maria Arlita da Silveira Soares

Caçapava do Sul, RS
2025

Ficha catalográfica elaborada automaticamente com os dados fornecidos
pelo(a) autor(a) através do Módulo de Biblioteca do
Sistema GURI (Gestão Unificada de Recursos Institucionais).

J34e Janner, Marcio Luis
Entre Figuras e Números: Um Olhar sobre a Generalização para o Desenvolvimento do Pensamento Algébrico nos Anos Finais do Ensino Fundamental / Marcio Luis Janner.
79 p.

Dissertação (Mestrado)-- Universidade Federal do Pampa, MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL, 2025.
"Orientação: Maria Arlita da Silveira Soares".

1. Ensino de Álgebra. 2. Padrões. 3. Sequências Numéricas e Não Numéricas. 4. Generalização Próxima e Distante. 5. Estratégias de Generalização. I. Título.

MÁRCIO LUIS JANNER

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT da Universidade Federal do Pampa, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática.

Dissertação defendida e aprovada em: 17 de setembro de 2025.

Banca examinadora:

____

Maria Arlita da Silveira Soares

Orientador

UNIPAMPA

____

Vitalino Cesca Filho

UNIPAMPA

____

Dienifer Ferner Fernandes

EEEM Embaixador João Baptista Lusardo

Assinado eletronicamente por **VITALINO CESCA FILHO**, **PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR**, em 07/10/2025, às 16:42, conforme horário oficial de Brasília, de acordo com as normativas legais aplicáveis.

Assinado eletronicamente por **DIENIFER FERNER FERNANDES**, **Usuário Externo**, em 10/10/2025, às 12:17, conforme horário oficial de Brasília, de acordo com as normativas legais aplicáveis.

Assinado eletronicamente por **MARIA ARLITA DA SILVEIRA SOARES**, **PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR**, em 19/10/2025, às 23:10, conforme horário oficial de Brasília, de acordo com as normativas legais aplicáveis.

A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.unipampa.edu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **1860260** e o código CRC **0E4EEE6B**.

RESUMO

Este trabalho tem por objetivo caracterizar o desempenho de estudantes do 7º, 8º e 9º ano de uma escola da rede municipal de São Sepé na resolução de atividades envolvendo sequências numéricas e não numéricas quanto à identificação e generalização de padrões. Para tanto, optou-se por seguir uma abordagem qualitativa de cunho descritivo. Os dados foram em três etapas produzidos a partir de diferentes fontes. A primeira etapa trata dos protocolos dos estudantes das três turmas ao responderem quatro atividades envolvendo identificação e generalização de padrões. A segunda etapa versa acerca das discussões produzidas pelo professor/pesquisador e os estudantes das três turmas durante a correção das atividades desenvolvidas na primeira etapa da pesquisa. A terceira etapa trata dos protocolos dos estudantes das três turmas ao responderem três atividades envolvendo identificação e generalização de padrões. A análise dos dados permitiu concluir que os estudantes utilizaram com maior frequência a diferença (recursiva) como estratégia, indicando que a generalização próxima foi a mais mobilizada. As maiores dificuldades foram verificadas na elaboração da generalização distante, em particular, na representação algébrica. Além disso, os estudantes podem ser considerados analíticos, com evolução do seu pensamento algébrico e os momentos de discussão se configuraram como essenciais neste processo de desenvolvimento.

Palavras-chave: Ensino de álgebra. Padrões. Sequências numéricas e não numéricas. Generalização próxima e distante. Estratégias de generalização.

ABSTRACT

This study aims to characterize the performance of 7th, 8th, and 9th grade students at a municipal school in São Sepé in solving activities involving numerical and non-numerical sequences regarding pattern identification and generalization. To this end, a qualitative, descriptive approach was adopted. Data were collected in three stages from different sources. The first stage addresses the protocols of students from the three classes when responding to four activities involving pattern identification and generalization. The second stage addresses the discussions between the teacher/researcher and the students from the three classes during the revision of the activities developed in the first stage of the research. The third stage addresses the protocols of students from the three classes when responding to three activities involving pattern identification and generalization. Data analysis concluded that students most frequently used difference (recursive) as a strategy, indicating that close generalization was the most mobilized. The greatest difficulties were found in developing distant generalization, particularly in algebraic representation. Furthermore, students can be considered analytical, with their algebraic thinking evolving, and moments of discussion are essential in this development process.

Keywords: Teaching algebra. Patterns. Numerical and non-numerical sequences. Near and far generalization. Generalization strategies.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE GRÁFICOS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O interesse por pesquisar sobre o desenvolvimento do pensamento algébrico emergiu das dificuldades enfrentadas, inicialmente, como estudante da 7ª série do extinto 1º grau, no ano de 1993, ao me[1] deparar com expressões algébricas, produtos notáveis, frações algébricas, entre outros. Mesmo que as aulas da professora fossem conduzidas de uma forma clara e lógica, as dificuldades eram evidentes. Uma explicação para essas dificuldades pode ser encontrada no fato de que o conteúdo abordado na 7ª série não tinha nenhuma relação com o trabalhado no ano anterior e priorizava a manipulação de símbolos.

Dessa forma, meu primeiro contato com as letras não foi fácil, pois a Matemática parecia algo indecifrável. Sempre que possível evitava o uso de letras. As aulas de reforço escolar contribuíram na superação de algumas dificuldades, mas com o passar dos anos de escolarização percebi que ficaram algumas lacunas quanto aos conteúdos algébricos.

No Ensino Superior busquei superar essas lacunas e compreender como ensinar, em particular, expressões algébricas de modo que os estudantes não tenham tantas dificuldades. Quanto a compreensão do processo de ensino e aprendizagem de conteúdos algébricos, durante a graduação, posso afirmar que não obtive tanto êxito, visto que a abordagem era mais focada na manipulação simbólica do que no desenvolvimento de formas para pensar como resolver situações que requerem análise de relações quantitativas, identificar padrões, justificar, generalizar, entre outras ações fundamentais do pensamento algébrico. Além disso, as várias representações que podem ser utilizadas para expressar o pensamento algébrico pouco foram exploradas.

As lacunas permaneceram e ao ingressar na carreira docente questionamentos surgiram durante a elaboração e desenvolvimento das aulas acerca de conteúdos algébricos, por exemplo: quais caminhos (teórico-metodológicos) poderiam ser seguidos para auxiliar os estudantes a compreenderem conteúdos algébricos e desenvolverem, em particular, o pensamento algébrico? As regras e propriedades devem ser evidenciadas para que os estudantes tenham êxito na manipulação de símbolos? Os questionamentos conduziram a observar a forma como são desenvolvidas algumas atividades, principalmente, as que envolvem relações entre álgebra e outros campos da Matemática, como a Geometria e a importância de explorar a identificação e

[1] Vários trechos deste capítulo estão escritos em primeira pessoa do singular por apresentar, em vários momentos, aspectos da trajetória acadêmica e profissional do autor.

generalização de padrões desde os anos iniciais, visto que essas ações são destacadas por pesquisadores (Ponte; Matos; Branco, 2009; Lima; Bianchini; Lima, 2023; Barbosa; Vale; Gualandi, 2025) e documentos curriculares oficiais (Brasil, 1998, 2018; NCTM, 2008) como potenciais para o desenvolvimento do pensamento algébrico.

Pesquisadores e documentos curriculares afirmam que o objetivo do ensino de álgebra na Educação Básica é o desenvolvimento do pensamento algébrico. Conforme a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), atual documento normativo para a elaboração dos currículos escolares brasileiros, umas das formas de atingir esse objetivo é propor situações em que "os alunos identifiquem regularidades e padrões de sequências numéricas e não numéricas, estabeleçam leis matemáticas que expressem a relação de interdependência entre grandezas em diferentes contextos" (Brasil, 2018, p. 270) do que enfatizar a manipulação de símbolos.

Essa ideia já era defendida nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) ao mencionarem que

> é mais proveitoso propor situações que levem os alunos a construir noções algébricas pela observação de regularidades em tabelas e gráficos, estabelecendo relações, do que desenvolver o estudo da Álgebra apenas enfatizando as "manipulações" com expressões e equações de uma forma meramente mecânica. (Brasil, 1998, p. 116)

Nesse viés, é importante questionar: o que se entende por pensamento algébrico? Primeiramente, é importante mencionar que muitos pesquisadores têm tentado definir esse tipo de pensamento matemático, mas não há um consenso. Contudo, algumas ideias estão presentes em quase todas as caracterizações desse pensamento, a saber: identificar padrões, generalização, uso de diferentes representações (língua natural, figural, simbólica), compreender o que cada símbolo significa, principalmente, os diferentes significados das letras (incógnita, variável, objeto abstrato).

Nesta pesquisa, o entendimento de pensamento algébrico segue as ideias de Barbosa, Vale e Gualandi (2025, p. 2) ao defini-lo como "uma forma de raciocínio matemático que transcende a mera manipulação de símbolos e equações. Envolve a capacidade de generalizar relações matemáticas, identificar padrões e resolver problemas de maneira abstrata e generalizada". Esses pesquisadores entendem que a identificação de padrões é "um processo fundamental para a compreensão das relações entre quantidades variáveis. [...] O trabalho com padrões e generalização auxilia a estabelecer uma base para o pensamento algébrico" (idem, p. 3).

Cabe questionar, também, o que é padrão matemático? Compreende-se por padrão matemático todo o arranjo de números ou formas em que são detectadas regularidades passíveis de ser continuadas, ou, ainda, como regularidade(s), sequência, motivo, regra e ordem (Vale *et al.*, 2006). Para Vale, Pimentel e Barbosa (2015), o tema padrão é transversal ao currículo matemático e, portanto, permite-nos fazer conexões entre vários campos da Matemática.

Diante desse contexto, esta pesquisa, busca responder a seguinte questão de pesquisa: Quais tipos de generalização e estratégias são mobilizadas por estudantes dos anos finais do Ensino Fundamental de uma escola da rede municipal de São Sepé/RS ao resolverem situações envolvendo sequências numéricas e não numéricas? E tem por objetivo caracterizar o desempenho de estudantes do 7º, 8º e 9º ano de uma escola da rede municipal de São Sepé na resolução de atividades envolvendo sequências numéricas e não numéricas quanto a identificação e generalização de padrões.

Além das vivências e experiências acadêmicas e profissionais, optou-se por essa temática por concordar com Barbosa, Vale e Gualandi (2025, p. 2) ao afirmarem que "uma melhor compreensão da Matemática e o desenvolvimento do pensamento algébrico podem ser alcançados por meio de tarefas que envolvam múltiplas resoluções, promovam a generalização de padrões". Dessa forma, este estudo se justifica pelo desenvolvimento do pensamento algébrico ser um dos objetivos da Matemática da Educação Básica e pela relevância que adquiriu com a publicação da BNCC (Brasil, 2018).

Com relação à estruturação da dissertação, destaca-se que este trabalho está organizado em cinco capítulos. O Capítulo 1, ***Introdução***, já apresentado. O Capítulo 2, ***Referencial Teórico***, apresenta o aporte teórico desta investigação. O Capítulo 3, ***Metodologia***, explicita as opções metodológicas que orienta o desenvolvimento da pesquisa, os participantes da pesquisa e os instrumentos de produção de dados.

O Capítulo 4, ***Resultados e Discussões***, é composto pela análise detalhada das atividades que compõem as três etapas da pesquisa. O Capítulo 5, ***Considerações Finais***, apresenta conclusões sobre a temática investigada, buscando responder à questão de pesquisa proposta, bem como possibilidades de continuação deste estudo. Por último, são apresentadas as referências utilizadas na realização da pesquisa.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

Este capítulo apresenta as bases teóricas desta pesquisa. Primeiramente, destaca o objetivo do ensino da álgebra na Educação Básica, conforme documento que normatiza as propostas curriculares brasileiras, a saber: BNCC (Brasil, 2018). Em seguida, expõe entendimentos acerca do desenvolvimento do pensamento algébrico, tomando como base ideias de pesquisadores internacionais e brasileiros, evidenciando a identificação e generalização de padrões. Por fim, destaca as sequências numéricas e não numéricas e as várias representações matemáticas na aprendizagem matemática, em particular, no desenvolvimento do pensamento algébrico.

2.1 IDENTIFICAÇÃO E GENERALIZAÇÃO DE PADRÕES: AÇÕES ESSENCIAIS PARA O DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO

Conforme mencionado na Introdução deste trabalho, o objetivo do ensino da álgebra na Educação Básica, segundo a BNCC (Brasil, 2018), é o desenvolvimento do pensamento algébrico. Em particular, o objetivo do ensino de álgebra é fazer com que os estudantes identifiquem padrões em sequências numéricas e não numéricas, utilizando esses padrões como base para a formulação de generalizações (Campos; Gualandi, 2023) na língua natural e na representação algébrica, pois "ao trabalharem com padrões, os estudantes são incentivados a continuar o raciocínio para além dos casos particulares, promovendo a construção de regras gerais que podem ser expressas por meio de linguagem algébrica ou aritmética" (Barbosa; Vale; Gualandi, 2025, p. 5). Nesse viés, a BNCC (Brasil, 2018) indica a identificação e a generalização de padrões como estratégias centrais para o desenvolvimento do pensamento algébrico e essas ações devem ser exploradas desde os anos iniciais do Ensino Fundamental.

O desenvolvimento do pensamento algébrico, conforme exposto na Introdução, é foco de vários estudos e está presente em propostas curriculares de diferentes países (Brasil, 1998, 2018; NCTM, 2008). Assim, recorre-se a ideias de alguns pesquisadores para caracterizá-lo e compreender formas de desenvolvê-lo. Para Fiorentini, Miorim e Miguel (1993), o pensamento algébrico pode ser caracterizado da seguinte forma: a) envolve a percepção de regularidades, de aspectos invariantes em contraste com outros que variam; b) abrange tentativas de expressar ou explicitar a estrutura de uma situação-problema; c) implica na generalização.

Kieran (1992, 2004 apud Lima; Bianchini; Lima, 2023) compreende que o pensamento algébrico está relacionado com as estruturas e a utilização de várias representações que proporcionam lidar com situações quantitativas de uma forma relacional. Além disso, implica no desenvolvimento de modos de pensar via atividades para as quais o simbolismo da álgebra pode ser utilizado como ferramenta, mas que não são exclusivas desse campo da Matemática e que podem ser exploradas sem qualquer uso de simbolismo algébrico, a saber: analisar relações entre quantidades, identificar a estrutura, analisar a mudança, generalizar, resolver problemas, justificar, provar e predizer.

Silva e Moreira (2018, p. 260) afirmam que, o "desenvolvimento do pensamento algébrico pode ser entendido, essencialmente, como o desenvolvimento da capacidade de produzir generalizações em matemática. Pensar algebricamente significa saber lidar com valores indeterminados e saber generalizar". Os pesquisadores entendem que todos os estudantes podem aprender a pensar algebricamente desde os anos iniciais. As generalizações são expressas por meio de diferentes representações (desenhos, palavras, gestos) e estas são aprimoradas ao longo dos anos de escolaridade chegando, geralmente, ao uso da linguagem algébrica (Silva; Moreira, 2018). Dessa forma, o domínio da linguagem algébrica não é condição para o desenvolvimento do pensamento algébrico, embora seja uma ferramenta importante na resolução de problemas.

Para Arcavi (2005 apud Lima; Bianchini; Lima, 2023), a construção do sentido para os símbolos, em particular, os algébricos, é essencial no desenvolvimento do pensamento algébrico. Dessa forma, o estudante está pensando algebricamente quando produz significado para os objetos matemáticos e para a linguagem algébrica.

Segundo Ponte, Matos e Branco (2009, p. 10), o pensamento algébrico

> inclui a capacidade de lidar com expressões algébricas, equações, inequações, sistemas de equações e de inequações e funções. Inclui, igualmente, a capacidade de lidar com outras relações e estruturas matemáticas e usá-las na interpretação e resolução de problemas matemáticos ou de outros domínios.

Nessa perspectiva, o ensino da álgebra não pode ser reduzido a manipulação de símbolos, "pelo contrário, aprender Álgebra implica ser capaz de pensar algebricamente numa diversidade de situações, envolvendo relações, regularidades, variação e modelação" (Ponte; Matos; Branco, 2009, p. 10), entre outras ideias matemáticas. Essas ideias são evidenciadas na BNCC (Brasil, 2018) ao afirmar que para o desenvolvimento do pensamento algébrico "é necessário que os alunos identifiquem regularidades e padrões de sequências numéricas e não numéricas, [...] em síntese, essa unidade temática deve enfatizar o desenvolvimento de uma linguagem, o estabelecimento de generalizações (Brasil, 2018, p. 270).

É importante mencionar que não se pode confundir e achar que a álgebra e a aritmética são a mesma linguagem, trocando-se apenas os números pelas letras. Conforme Smole e Diniz (2021), a principal diferença entre esses campos são os objetivos. A aritmética trata de números, operações e de suas propriedades, para a resolução de problemas que exigem uma resposta numérica. A álgebra procura expressar o que é genérico, aquilo que se pode afirmar para vários valores numéricos, independentemente de quais sejam eles exatamente. As pesquisadoras mencionam que a forma mais natural de introdução das letras é pela concepção da álgebra[2] como variação de grandezas. Isso significa que o primeiro conceito de letra deve ser o de variável e não o de incógnita, como é usual no ensino.

Diante dessas ideias, constata-se que a generalização está presente na maioria das tentativas de caracterizar o desenvolvimento do pensamento algébrico, em particular, as generalizações de padrões. Conforme Vale (2013), a generalização de padrões pode ser considerada a base do pensamento algébrico. Corroboram com essa afirmação Ponte, Matos e Branco (2009) e Campos e Gualandi (2023) ao mencionarem que a generalização de padrões é uma das vias mais privilegiadas para desenvolver o pensamento algébrico.

“A generalização é a percepção de que determinada propriedade de determinado objeto não se apresenta como válida apenas para si, mas para uma coleção maior de objetos e entes matemáticos” (Silva; Domingos, 2010 apud Pereira, 2013, p. 79). Nesse viés, a generalização emerge da identificação de características particulares dos objetos que se relacionam por meio de pontos comuns.

Para Campos e Gualandi (2024, p. 227), “generalizar significa continuar o raciocínio para além dos casos particulares, identificar semelhanças e expandir domínios de validade”. Em outras palavras, generalizar diz respeito a analisar casos particulares rumo aos casos gerais”. Kaput (1999 apud Pereira, 2013, p. 80) destaca que:

[2] Para os PCN (Brasil, 1998), as diferentes concepções da álgebra são: *aritmética generalizada* (letras como generalizações do modelo aritmético), *equações* (letras como incógnitas), *funcional* (letras como variáveis para expressar relações e funções) e *estrutural* (letras como símbolo abstrato).

> Um dos aspetos da generalização envolve o exame de diferentes quantidades e descrever as relações entre os casos (as quantidades) para uma situação particular. Desenvolver uma compreensão das condições da variante (termos, variável dependente) e invariante (ordem do termo, variável independente) pode proporcionar significado de símbolos algébricos.

Quanto a generalização de padrões, pode-se afirmar que "envolve o uso de uma estratégia e existem diversas abordagens que permitem aos alunos generalizar" (Campos; Gualandi, 2023, p. 7). Essa generalização implica: "(1) a apreensão de uma regularidade; (2) a generalização dessa regularidade a todos os termos da sequência em questão; e (3) a formação de uma regra direta ou um esquema direto que permita determinar qualquer termo da sequência" (Pereira; Fernandes, 2012, p. 87).

Para exemplificar essa afirmação considere a sequência dos números naturais ímpares (1, 3, 5, 7, 9, ...). Nessa situação, o processo de generalização é iniciado quando se percebe as relações que há entre os termos dessa sequência e o padrão matemático envolvido, isto é, os termos aumentam de dois em dois. A partir disso, inicia-se o processo de análise dessas relações, o que pode estender a expansão do caso particular ao caso geral, isto é, compreender que, sejam lá quais forem os termos representados pelas reticências, a eles sempre será acrescentado 2, o que pode ser expresso por $a_n = 2n - 1$, tal que a_n é um termo qualquer, $n > 0$ e n é a posição do termo na sequência, sendo esta uma possibilidade.

As atividades envolvendo padrões podem apresentar na resolução, conforme Stacey (1989 apud Vale, 2013, p. 70), dois tipos de generalização, a saber: a) *generalização próxima* – refere-se à determinação do termo seguinte, "que pode ser obtido por contagem, desenho ou por recurso a uma tabela, e que normalmente envolve relações recursivas"; e b) *generalização distante*- envolve a identificação do padrão e "exige a compreensão da lei de formação, ou seja, de uma regra geral expressa matematicamente, e requer a procura de relações funcionais".

Os estudantes, geralmente, utilizam uma variedade de estratégias para a construção da relação funcional em que assenta o padrão. O Quadro 1 apresenta algumas estratégias utilizadas por estudantes que participaram dos estudos de diferentes pesquisadores, em particular, Carneiro; Araman e Serrazina (2022); Campos e Gualandi (2023).

Quadro 1 – Estratégias de generalização

Estratégia	Descrição
Contagem	Está relacionada a contagem de elementos de um padrão, obtendo, assim, o termo da sequência solicitado. Essa estratégia está presente, geralmente, em atividades que contemplam *generalização próxima*.
Diferença	Refere-se à utilização de múltiplos da diferença entre o número de elementos de termos consecutivos. Essa estratégia subdivide-se em outras três: múltiplo da diferença sem e com ajuste, e recursiva. A estratégia do múltiplo da diferença sem e com ajuste visa a usar a diferença entre termos consecutivos como fator multiplicativo, ajustando, ou não, o resultado. Já a diferença recursiva diz respeito a continuar a sequência com base na diferença entre termos consecutivos.
Explícita	Busca-se construir uma regra que permita determinar, de imediato, qualquer termo da sequência. Geralmente, envolve reconhecimento de relações numéricas generalizáveis. Esta estratégia está presente em atividades que contemplam a *generalização distante*.
Tentativa e erro	Adivinhar uma regra sem se preocupar com o porquê de ela funcionar. Geralmente, envolve experimentação com várias operações e números dados na atividade.

Fonte: Elaboração própria com base em Stacey (1989 apud Vale, 2013); Carneiro; Araman e Serrazina (2022); Campos e Gualandi (2023).

Além das estratégias mencionadas no Quadro 1, é importante destacar que Rivera e Becker (2008 apud Carneiro; Araman; Serrazina, 2022, p. 87) classificaram as estratégias utilizadas por estudantes em três tipos, a saber: *numérica* – "utiliza apenas estímulos estabelecidos a partir do padrão listando uma sequência de números ou usando uma tabela para derivar a regra a partir daí, procurando relações aritméticas entre os valores das variáveis"; *figurativa* – "se aplica apenas quando se descreve a generalização do padrão utilizando diagramas, sendo a regra totalmente obtida a partir de indícios visuais estabelecidas diretamente a partir da estrutura dos dados, podendo-se recorrer à decomposição das figuras – termos"; e numérica/figurativa - uma combinação das abordagens anteriores".

Há diferentes tipos de padrões matemáticos (repetitivos, numéricos, figurais). Dentre esses padrões evidencia-se os figurais, pois "têm um contributo importante na chegada à generalização, permitindo inclusive gerar regras diferentes, ajudando a: reforçar as conexões entre relações aritméticas e espaciais; atribuir significado às regras formuladas; perceber necessidade de formular e validar conjeturas" (Vale; Barbosa, 2019, p. 408). Essas ideias são corroboradas por Barbosa, Vale e Gualandi (2025, p. 3) ao sublinharem que

> No trabalho com padrões figurativos, os estudantes podem explorar simultaneamente regularidades visuais e numéricas, associando-as entre si, além de formular generalizações e justificar as suas (re)soluções por meio de relações funcionais. (...) a capacidade de alternar entre diferentes formas de representação — visual, numérica e algébrica — promove a flexibilidade no pensamento e auxilia na formulação de generalizações mais robustas e significativas.

A identificação e generalização de padrões podem ser exploradas ao longo da Educação Básica por meio de situações envolvendo sequências numéricas e não numéricas. A BNCC (Brasil, 2018) indica o trabalho com sequências numéricas e não numéricas desde os anos iniciais. Nesse documento, em particular, nos anos finais do Ensino Fundamental, foco desta pesquisa, as sequências numéricas e não numéricas estão presentes nas seguintes habilidades: (EF07MA14) - Classificar sequências em recursivas e não recursivas, reconhecendo que o conceito de recursão está presente não apenas na matemática, mas também nas artes e na literatura; (EF07MA15) - Utilizar a simbologia algébrica para expressar regularidades encontradas em sequências numéricas; (EF07MA16) - Reconhecer se duas expressões algébricas obtidas para descrever a regularidade de uma mesma sequência numérica são ou não equivalentes; (EF08MA10) - Identificar a regularidade de uma sequência numérica ou figural não recursiva e construir um algoritmo por meio de um fluxograma que permita indicar os números ou as figuras seguintes; e (EF08MA11) - Identificar a regularidade de uma sequência numérica recursiva e construir um algoritmo por meio de um fluxograma que permita indicar os números seguintes.

O trabalho com sequências numéricas e não numéricas conduz naturalmente ao estudo de regularidades. Esse trabalho é uma via para promover o pensamento sobre variáveis e funções, pois permite aos estudantes "desenvolver a capacidade de estabelecer generalizações, um aspecto fundamental do raciocínio matemático, e favorece o desenvolvimento da capacidade de fazer representações, quer através de diagramas e esquemas, quer usando a linguagem algébrica" (Pereira; Fernandes, 2012, p. 86). Além disso, Ponte, Matos e Branco (2009) ressaltam que o trabalho com expressões algébricas se faz em simultâneo com o de sequências numéricas e não numéricas e das equações, buscando que estas façam sentido para os estudantes.

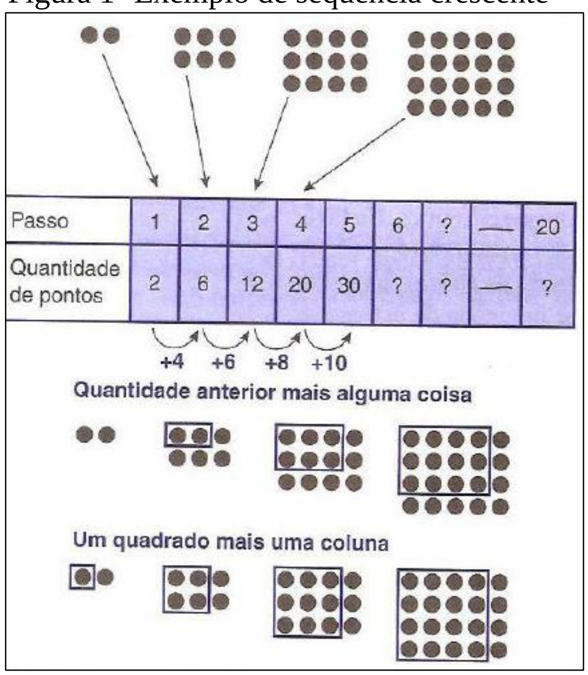
Conforme Silva e Moreira (2018, p. 261), os estudantes, em particular, dos anos finais do Ensino Fundamental, ao trabalharem com atividades apropriadas envolvendo padrões, "seriam levados a encontrar formas cada vez mais compactas e universais de expressar suas ideias ligadas à generalização, até que alcancem um grau de abstração compatível com o uso recorrente da simbologia algébrica padronizada". Na visão dos autores supracitados são exemplos de atividades apropriadas:

> continuar uma dada sequência, representando os termos seguintes aos termos fornecidos; descrever a relação entre cada termo e a sua ordem na sequência; usar a relação entre o

> termo e a sua ordem na sequência para identificar aquele que ocupa uma posição dada e vice-versa (achar a posição – ou possíveis posições - que um dado termo ocupa na sequência); por fim, expressar a relação entre um termo qualquer e sua posição na sequência, em linguagem natural e, dependendo do estágio de aprendizagem, usando a simbologia matemática. (Silva; Moreira, 2018, p. 261)

Um tipo de sequência que pode ser explorado nos anos finais do Ensino Fundamental são as sequências crescentes. Nesse tipo de sequência os estudantes são incentivados a “produzir generalizações de forma a encontrar uma lei de formação para a sequência e, de acordo com a lei de formação encontrada, identificar termos da sequência, em função da sua posição” (Silva; Moreira, 2018, p. 262). Um exemplo de sequência crescente com padrão figural é apresentado na Figura 1.

Figura 1- Exemplo de sequência crescente



Fonte: Van de Walle (2019, p. 300).

A Figura 1 indica diferentes modos de identificar o padrão. O padrão pode ser identificado a partir da organização de uma tabela em busca do reconhecimento de relações numéricas generalizáveis, mobilizando uma *estratégia numérica*, conforme Rivera e Becker (2008 apud Carneiro; Araman; Serrazina, 2022). A identificação do padrão pode vir, também, por meio de uma estratégia figural (Rivera; Becker, 2008 apud Carneiro; Araman; Serrazina, 2022). Uma das possibilidades, ao mobilizar a *estratégia figural*, é constatar que é possível formar um retângulo com a quantidade de círculos correspondente a posição da figura na sequência (n), cuja base é dada por n e a altura é dada por $n-1$, e verificar que a quantidade de círculos fora do retângulo é o dobro da posição da figura na sequência ($2n$). Desse modo, a generalização pode ser expressa por $Q = n(n-1) + 2n$, em que Q representa a quantidade de círculos de qualquer figura da sequência e n é a posição do termo na sequência, $n > 0$.

Outra possibilidade é construir quadrados cujo lado correspondente a posição da figura (n) e verificar que a quantidade de círculos fora do retângulo é exatamente o valor da posição da figura na sequência. Neste caso, a generalização pode ser expressa por $Q = n^2 + n$, tais que Q representa a quantidade de círculos de qualquer figura da sequência e n é a posição do termo na sequência, $n > 0$. Assim, tem-se duas relações diferentes em um padrão figural. Ressalta-se que conforme Vale e Barbosa (2019, p. 400), "tradicionalmente os alunos são mais analíticos, mas há igualmente alunos visuais, mas também constatamos que pensar visualmente, ou procurar ver é passível de ser ensinado". Em outros termos, os estudantes utilizam mais estratégias numéricas do que figurais na identificação e generalização de padrões. Contudo, a proposição de padrões figurais "facilita a formulação de conjeturas e a expressão da generalização, emergentes do raciocínio indutivo, que é acessível a alunos do ensino básico" (Vale; Barbosa, 20219, p. 400).

Destaca-se que a "linguagem algébrica nem sempre é o principal caminho escolhido para a representação de generalizações" (Campos; Gualandi, 2023, p. 6). São exemplos de representações utilizadas para expressar generalizações: língua materna, gestos, esquemas. Os estudantes, inicialmente, utilizam argumentações na língua natural (oral ou escrita) ou gestos para generalizar. Depois "evoluem para uma representação mais formal, à medida que vão construindo outros conceitos matemáticos, para representarem ou expressarem a generalização" (Campos; Gualandi, 2023, p. 6). Nessa perspectiva, é preciso evidenciar que:

> As representações são uma ferramenta imprescindível na resolução de problemas pois permitem apoiar a compreensão matemática, ajudar o aluno a comunicar as suas ideias, clarificar o raciocínio através das conexões que se podem estabelecer e podem ser usadas na aplicação de conceitos matemáticos no mundo real. (Barbosa; Vale, 2022, p. 19)

Nessa perspectiva, o desenvolvimento do pensamento algébrico e a aprendizagem de conteúdos da álgebra requer saber utilizar símbolos de forma significativa. Contudo, esse processo não é fácil nem linear. De acordo com Pereira (2013, p. 78) a maioria dos estudantes apresentam dificuldades quando:

> tentam dar sentido a uma expressão algébrica, ou a uma letra nessa expressão, ou quando atribuem significados (...) às letras na transição da linguagem natural para a algébrica, ou quando tentam escrever simbolicamente uma generalização. Além disso, um aluno ensinado, por exemplo, para responder apenas a questões que evoquem a aplicação de um algoritmo, terá sérias dificuldades quando confrontado com questões que impliquem a compreensão e exploração de um conceito.

Além disso, a introdução da noção de variável, através de diferentes situações e da construção de tabelas, anteriormente ao trabalho direto com as fórmulas da linguagem algébrica, é essencial no desenvolvimento do pensamento algébrico (Silva; Moreira, 2018). Conforme o NCTM (2008), os estudantes deverão começar a entender os diferentes significados e utilizações das variáveis por meio da representação de quantidades numa diversidade de problemas e contextos, em particular, na identificação e generalização de padrões. O Ministério da Educação de Portugal (2007 apud Pereira, 2013, p. 77), onde há vários estudos acerca do desenvolvimento do pensamento algébrico, afirma que o "conceito de variável, pela sua complexidade, justifica que os alunos explorem situações variadas em que surjam letras (nomeadamente, expressões algébricas e equações) e discutam os seus significados".

A BNCC (Brasil, 2018, p. 270) ao tratar da unidade temática da álgebra nos anos finais do Ensino Fundamental indica que, os estudantes devem entender "os diferentes significados das variáveis numéricas em uma expressão, estabelecer uma generalização de uma propriedade, investigar a regularidade de uma sequência numérica, indicar um valor desconhecido em uma sentença algébrica e estabelecer a variação entre duas grandezas".

Diante desse contexto, ressalta-se que o entendimento de pensamento algébrico que orienta esta pesquisa segue as ideias de Barbosa, Vale e Gualandi (2025) ao caracterizá-lo como uma forma de pensar que vai além da mera manipulação de símbolos e equações. Envolve a identificação e generalização de padrões e a resolução de problemas de forma abstrata e generalizada. A seguir são apresentados os aspectos metodológicos desta pesquisa.

3 METODOLOGIA

Este capítulo apresenta as escolhas metodológicas para a realização da investigação, destacando a pesquisa qualitativa, os participantes da pesquisa e a escola onde foram desenvolvidas as atividades. Além disso, expõe as fontes de produção de dados.

3.1 ESCOLHAS METODOLÓGICAS

Este trabalho insere-se no âmbito das pesquisas qualitativas de cunho descritivo, pois pretende descrever características de uma população ou fenômeno, bem como estabelecer relações entre as variáveis envolvidas (Silveira; Córdova, 2009). Neste caso, caracterizar o desempenho de estudantes de três turmas dos anos finais do Ensino Fundamental (7º, 8º e 9º ano) na resolução de atividades envolvendo sequências numéricas e não numéricas quanto a identificação e generalização de padrões. A escola onde foram realizadas as atividades pertence a rede municipal de São Sepé, Rio Grande do Sul, localizada na zona rural desse município. Na ocasião da pesquisa, a escola possuía 9 turmas do Ensino Fundamental, sendo uma turma de cada ano, e pouco mais de 90 estudantes. As salas de aulas têm capacidade para atender em média 25 estudantes. Além do quadro e materiais permanentes (canetas e apagador), a escola disponibiliza de projetor multimidia. Contudo, não possui laboratório de informática, apenas área para realizar atividades agropastoris, visto que é uma escola rural.

As turmas nas quais foram produzidos os dados são compostas por seis estudantes cada. Na primeira etapa da pesquisa, 31/3/2025, foram propostas aos estudantes das três turmas quatro atividades (Quadro 2, 4, 5 e 7). Os estudantes tiveram duas horas para resolverem, individualmente, as atividades. Uma semana depois o professor/pesquisador realizou a correção das atividades[3] com todos os estudantes de cada turma, constituindo a segunda etapa da pesquisa. O intuito dessa etapa foi compreender as estratégias de resolução produzidas, bem como sanar dúvidas, em particular, na identificação e generalização de padrões. Essa aula foi gravada em áudio e as falas do professor/pesquisador e dos estudantes transcritas para auxiliar na caracterização do desempenho das turmas ao resolverem atividades envolvendo sequências numéricas e não numéricas.

[3] Nesta etapa, os estudantes não tiveram acesso as resoluções apresentadas na primeira etapa da pesquisa.

Após dois meses, foram desenvolvidas três atividades (Quadro 9, 10 e 11), que constituíram a terceira etapa da pesquisa, cujos padrões são bem semelhantes aos propostos na primeira etapa. Essas atividades foram propostas com o intuito de verificar avanços e retrocessos dos estudantes, bem como problematizar questões relacionadas ao trabalho com questões relacionadas a álgebra na e para a prática docente. Assim, as fontes de produção de dados desta pesquisa são: os protocolos dos estudantes (as resoluções das atividades propostas) e as discussões que aconteceram na aula de correção das Atividades I, II, III e IV. Essas atividades foram gravadas e, posteriormente, transcritas para compor as fontes de produção de dados da pesquisa. Entende-se que essa aula foi uma oportunidade para o estudante socializar com o professor/pesquisador e com os demais colegas suas resoluções, além de comentarem como (ou o que) pensaram na identificação e generalização dos padrões propostos nas atividades.

Com o objetivo de preservar a confidencialidade dos participantes da pesquisa, as resoluções dos estudantes foram codificadas da seguinte forma: letra E, seguida do número que indica o ano de escolaridade e numeradas de 0 a 5. Por exemplo, E73 representa a resolução de um estudante do 7º ano codificada em quarto lugar. As falas foram codificadas da seguinte forma: P representa a fala do professor/pesquisador e as dos estudantes segue uma estrutura semelhante a utilizada na etapa anterior, ou seja, letra E, seguida do número que indica o ano de escolaridade e numeradas de 0 a 5, após são expostas as primeiras letras do nome, por exemplo, E73Mar. A análise dos dados leva em consideração a *generalização próxima* e a *generalização distante*, bem como as estratégias utilizadas pelos estudantes na resolução das atividades propostas descritas no Quadro 1.

3.2 FONTE DE PRODUÇÃO DE DADOS: ATIVIDADES ENVOLVENDO SEQUÊNCIAS NUMÉRICAS E NÃO NUMÉRICAS

As atividades desenvolvidas tinham por objetivo verificar se os estudantes, ao resolverem situações envolvendo padrões, conseguem reconhecer, descobrir, continuar, completar e generalizar esses padrões. Bem como, identificar se os tipos de generalização (*generalização próxima* e *generalização distante*) envolvidos em atividades de padrões são mobilizados pelos estudantes e as estratégias utilizadas na resolução dessas atividades. Ressalta-se que as atividades envolvem padrões figurais e numéricos, principalmente, em sequências de crescimento, o que promove o "raciocínio indutivo [vai do particular ao geral] e a formulação de expressões generalizadas" (Barbosa; Vale; Gualandi, 2025, p. 5). Além disso, a "exploração de padrões não está restrita à Álgebra formal, mas permeia várias áreas da Matemática" (Barbosa; Vale; Gualandi, 2025, p. 6).

Até o momento da pesquisa, os estudantes do 7º ano já haviam estudado algumas sequências numéricas, principalmente, as que o padrão é dado por múltiplos de um número natural. Os estudantes do 8º ano já tinham estudado algumas sequências numéricas e figurais, evidenciando a classificação das sequências quanto a recursividade, conforme indica material didático adotado pela escola. Já os estudantes do 9º ano estudaram, principalmente, expressões algébricas e algumas sequências numéricas. Além disso, após a primeira etapa da pesquisa, no início do mês de abril de 2025, tiveram contato com algumas situações envolvendo funções.

A Atividade 1 (Quadro 2) apresenta uma sequência não numérica cujo padrão é figural com intuito de verificar se os estudantes conseguem estabelecer relações entre as figuras e suas posições na sequência em busca da generalização (representação em língua natural e/ou algébrica).

Quadro 2 – Atividade 1

1. O Capitão Salamandra desenhou cruzes no papel quadriculado. Analise as figuras e responda as questões abaixo.

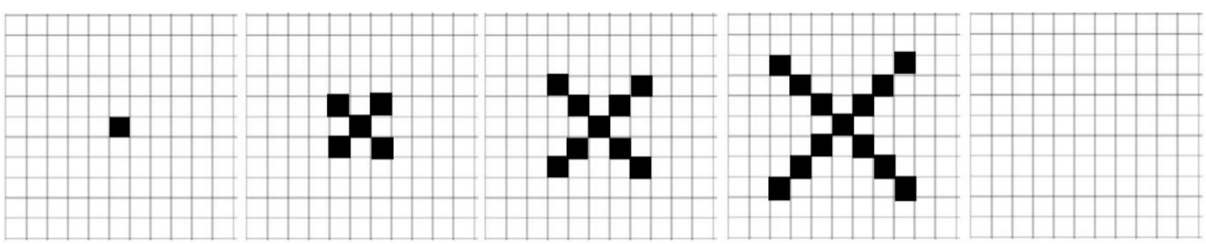


Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4 Figura 5

a) Quantos quadradinhos tem a figura seguinte desta sequência?
b) Quantos quadradinhos tem a 10ª figura desta sequência?
c) Existe uma figura nesta sequência com 41 quadradinhos? Se existir, determine a ordem que ela corresponde.
d) Existe uma figura nesta sequência com 80 quadradinhos? Se existir, determine a ordem que ela corresponde.
e) Escreva uma regra que permite determinar o número total de quadradinhos de qualquer figura desta sequência.
f) Complete a tabela a seguir.

Posição da figura (n)	1	2	3	4	5	6	7	...	n
Quant. de quadrad. (Q)									

g) Escreva uma expressão algébrica que possa traduzir a regra descrita na letra e) e os dados da tabela (letra f).

Fonte: Adaptado do material didático adotado pela escola.

O item a) requer a descoberta do termo seguinte da sequência dada, que pode ser obtido por *contagem* dos quadrinhos que formam a figura ou por desenho. O tipo de generalização envolvido é a *generalização próxima*. No item b) o tipo de generalização envolvido, também, pode ser *generalização próxima*, mas, neste caso, o estudante pode recorrer a relação entre o padrão figural e o numérico por meio de uma tabela, antecipando a resolução do item f), utilizando relações recursivas. Os itens c) e d) exigem a determinação da ordem da figura na sequência (posição na sequência), se possível, o que pode ser obtido por meio de relações recursivas, *generalização próxima*, em particular, no caso dos estudantes que responderam corretamente o item b), ou seja, a 10ª figura terá 37 quadradinhos, verificará que a 11º primeira figura terá 41 quadradinhos (item c)).

Outra maneira de resolver esses itens pode envolver a descoberta do padrão, expressa na língua natural (adiciona 1 ao produto de quatro por posição da figura menos 1) ou na representação algébrica ($Q = 1 + 4(n - 1)$), antecipando a resolução dos itens e), f) e g). O tipo de generalização envolvido, nesta última possibilidade de resposta, é a *generalização distante*. A *generalização distante* é esperada no item e), especialmente, expressa em linguagem natural e nos itens f) e g), neste último, principalmente, expressa na representação algébrica. Além disso, os estudantes podem responder o item d) reconhecendo aspectos do padrão, em outras palavras, constatando que a quantidade de quadradinhos necessários para formar cada figura é dada por um número ímpar, logo, não é possível formar uma figura com 80 quadradinhos.

A tabela apresentada no item f), conforme já mencionado, poderia ser completada antes da resolução dos itens b), c) e d), pois contribui na organização dos dados do problema e na análise do padrão. Concorda-se com Vale (2012, p. 200, grifo nosso) ao afirmar que os estudantes devem ser incentivados a observar as figuras de várias maneiras, registrando essas maneiras em uma tabela. “Há um raciocínio indutivo [vai do particular para o geral] baseado num pensamento visual, fortemente ligado ao modo como os alunos conseguem ver a lei de formação do padrão [...]. Esta componente é fundamental sobretudo para conseguir-se uma *generalização distante*” O Quadro 3 apresenta duas representações tabulares que podem ser organizadas pelos estudantes.

Quadro 3 – Representação tabular Atividade 1

Representação Tabular 1:

Posição da figura (n)	1	2	3	4	5	...	n
Quant. de quadrad. (Q)	1	5	9	13	17	...	?

Representação Tabular 2:

Posição da figura (n)	1	2	3	4	5	...	n
Quant. de quadrad. (Q)	1	1+4	1+4+4	1+4+4+4	1+4+4+4+4	...	$1 + 4(n - 1)$

Fonte: Autoria própria.

A "Representação Tabular 1", possivelmente, será construída com base em relações recursivas, mobilizando a *generalização próxima*. Destaca-se que essa representação pode não contribuir na elaboração da representação algébrica (*generalização distante*), pois não evidencia que o valor a ser multiplicado por quatro refere-se à posição anterior, $n - 1$. Já a "Representação Tabular 2", construída por meio de uma outra forma de visualizar as figuras, pode permitir descobrir uma relação funcional e obter a *generalização distante*. Corroboram com essa afirmação Barbosa, Vale e Gualandi (2025, p. 15) ao afirmarem que esse tipo de representação pode ser considerada "uma resolução visual, na qual as expressões traduzem o modo de ver a formação da sequência, sendo essa a estratégia principal para chegar à solução", em particular, a *generalização distante* expressa na representação algébrica.

A Atividade 2 (Quadro 4) apresenta sequências numéricas com intuito de verificar se os estudantes conseguem identificar o padrão envolvido e o generalizam (representação em língua natural e/ou algébrica). A opção por essa atividade deu-se em função do trabalho realizado desde os anos iniciais com sequências numéricas. Além disso, conforme os Princípios e Normas do NCTM[4], publicados em 2000 e traduzidos pela equipe da Associação de Professores de Matemática (APM) de Portugal em 2008[5], que inspiraram a elaboração de documentos curriculares brasileiros, é importante que os estudantes identifiquem se as sequências numéricas propostas envolvem crescimento aritmético ou geométrico já nos anos finais do Ensino Fundamental.

[4] National Council of Teachers of Mathematics.
[5] A versão utilizada, nesta pesquisa, dos Princípios e Normas para a Matemática Escolar é a elaborada pela APM.

Quadro 4 – Atividade 2

2. Identifique o padrão das sequências a seguir e responda as questões.

a) $10, 50, 90, \ldots$
i) Se o primeiro termo é 10 e pode ser representado por $a_1 = 10$, o segundo termo é 50 e pode ser representado por $a_2 = 50$, o terceiro termo é 90 e pode ser representado por $a_3 = 90$. Determine a_4, a_5 e a_6.
ii) Como podemos determinar o termo da sequência em qualquer posição (a_n)?

b) $56, 48, 40, \ldots$
i) Se o primeiro termo é 56 e pode ser representado por $a_1 = 56$, o segundo termo é 48 e pode ser representado por $a_2 = 48$, o terceiro termo é 40 e pode ser representado por $a_3 = 40$. Determine a_4, a_5 e a_6.
ii) Como podemos determinar o termo da sequência em qualquer posição (a_n)?

c) $3, 9, 27, \ldots$
i) Se o primeiro termo é 3 e pode ser representado por $a_1 = 3$, o segundo termo é 9 e pode ser representado por $a_2 = 9$, o terceiro termo é 27 e pode ser representado por $a_3 = 27$. Determine a_4, a_5 e a_6?
ii) Como podemos determinar o termo da sequência em qualquer posição (a_n)?
d) $2, 6, 18, \ldots$
i) Se o primeiro termo é 2 e pode ser representado por $a_1 = 2$, o segundo termo é 6 e pode ser representado por $a_2 = 6$, o terceiro termo é 18 e pode ser representado por $a_3 = 18$. Determine a_4, a_5 e a_6?
ii) Como podemos determinar o termo da sequência em qualquer posição (a_n)?

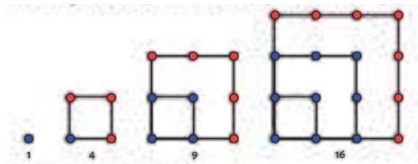
Fonte: Adaptado do material didático adotado pela escola.

O item i) de todas as questões que compõem a Atividade 2 pode ser resolvido a partir da mobilização da *generalização próxima*, visto que dados três termos da sequência numérica solicita-se os próximos três. Já o item ii) requer a mobilização da *generalização distante*, pois solicita a determinação do n-ésimo termo da sequência. Destaca-se que a *generalização distante* pode ser expressa na língua natural, principalmente, pelos estudantes do 7º ano, em função do pouco “contato” com o uso das letras, e na representação algébrica. A função polinomial do 1º grau (função afim), de domínio natural, representa as sequências expostas nos itens a) e b). A função exponencial, de domínio natural, representa as sequências apresentadas no item c) e d). Sublinha-se que os estudantes não precisam ter estudado os tipos de funções associadas aos padrões para resolverem as atividades, pois a introdução da noção de variável pode ser realizada antes do trabalho direto com as fórmulas relacionadas as funções (Silva; Moreira, 2018).

A Atividade 3 (Quadro 5) expõe uma sequência não numérica cujo padrão é figural com objetivo de constatar se os estudantes estabelecem relações entre a quantidade de pontos e sua posição na sequência e generalizam o padrão (representação em língua natural e/ou algébrica). A escolha dessa atividade justifica-se por envolver números quadrados perfeitos, geralmente, abordados nos anos iniciais no estudo da operação de multiplicação.

Quadro 5 – Atividade 3

3. A figura a seguir mostra um exemplo de sequência com números figurados, ou seja, associado a imagens. No caso, temos a sequência de números quadrangulares.



a) Quantos pontos tem a figura seguinte desta sequência?
b) Quantos pontos tem a 12ª figura desta sequência?
c) Existe uma figura nesta sequência com 100 pontos? Se existir, determine a ordem que ela corresponde.
d) Existe uma figura nesta sequência com 120 pontos? Se existir, determine a ordem que ela corresponde.
e) Escreva uma regra que permite determinar o número total de pontos de qualquer figura desta sequência.
f) Com base nessa sequência de figuras, responda:

Posição da figura (n)	1	2	3	4	5	...	n
Quant. de pontos (P)							

g) Escreva uma expressão algébrica que possa traduzir a regra descrita na letra e) e os dados da tabela (letra f).

Fonte: Adaptado do material didático adotado pela escola.

Assim como na Atividade 1, os itens a) e b) estão relacionados a *generalização próxima*. Os itens c) e d) podem envolver *generalização próxima* se relações recursivas forem utilizadas, o que demanda muito tempo na resolução, ou *generalização distante* se a descoberta do padrão for obtida e expressa na língua natural (o número de pontos da figura é um número quadrado perfeito; relação com a área do quadrado de lado n; o número de pontos da figura é o produto de um número natural por ele mesmo) e/ou na representação algébrica ($P = n^2$), antecipando a resolução dos itens e), f) e g). O Quadro 6 expõe duas representações tabulares que os estudantes podem organizar.

Quadro 6 – Representação tabular Atividade 3

Representação Tabular 1:

Posição da figura (n)	1	2	3	4	5	...	n
Quant. de pontos (P)	1	4	9	16	25	...	?

Representação Tabular 2:

Posição da figura (n)	1	2	3	4	5	...	n
Quant. de pontos (P)	1×1	2×2	3×3	4×4	5×5	...	$n \times n = n^2$

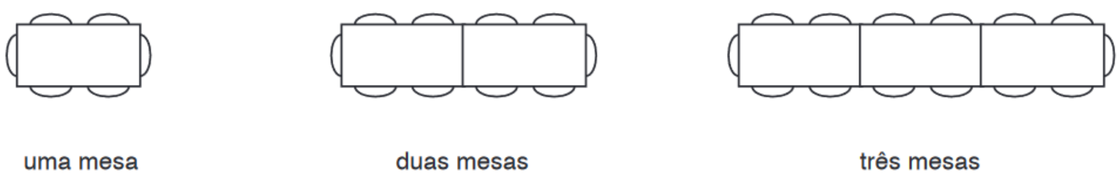
Fonte: Autoria própria.

A "Representação Tabular 1", possivelmente, será construída com base na contagem dos pontos de cada figura ou em relações recursivas, mobilizando a *generalização próxima*. Já a "Representação Tabular 2", será construída por meio de uma outra forma de visualizar as figuras, relação com a área do quadrado ou com o produto de um número natural por ele mesmo, mobilizando a *generalização distante*.

A Atividade 4 (Quadro 7) apresenta uma sequência não numérica cujo padrão é figural com intuito de verificar se os estudantes conseguem estabelecer relações entre a quantidade de cadeiras e a quantidade de mesas (corresponde a posição da figura na sequência) e generalizar esse padrão (representação em língua natural e/ou algébrica).

Quadro 7 – Atividade 4

4. Uma nova sala de aula foi inaugurada, para estudo e exercícios em grupo. A sala de aula tem mesas para seis estudantes. Quando as mesas são colocadas juntas, numa única fila de mesas, elas podem ser usadas pelo número de estudantes mostrado na figura abaixo.



a) Quantas cadeiras tem a figura seguinte desta sequência?
b) Quantas cadeiras tem a 10ª figura desta sequência?
c) Existe uma figura nesta sequência com 82 cadeiras? Se existir, determine a ordem que ela corresponde.
d) Existe uma figura nesta sequência com 120 cadeiras? Se existir, determine a ordem que ela corresponde.
e) Escreva uma regra que permite determinar o número total de cadeiras de qualquer figura desta sequência.
f) Complete a tabela.

Posição da figura ou número de mesas (n)	1	2	3	4	5	6	7	...	n
Quant. de cadeiras (Q)									

g) Escreva uma expressão algébrica que possa traduzir a regra descrita na letra e) e os dados da tabela (letra f).

Fonte: Adaptado da Olimpíada Brasileira de Informática, Fase 1, Nível 1, de 2015.

Assim como na Atividade 1 e na 3, os itens a) e b) da Atividade 4 estão relacionados a *generalização próxima*. Os itens c) e d) podem envolver *generalização próxima* se relações recursivas forem utilizadas ou *generalização distante* se a descoberta do padrão for obtida e expressa em linguagem natural (múltiplos de quatro mais dois) e/ou na representação algébrica

($Q = 4n + 2$), antecipando a resolução dos itens e), f) e g). Além disso, os estudantes podem responder os itens c) e d) reconhecendo aspectos do padrão, isto é, constatando que para determinar a quantidade de mesas basta subtrair dois da quantidade de cadeiras e verificar se o número é múltiplo de quatro. O Quadro 8 apresenta duas representações tabulares que estudantes podem organizar.

Quadro 8 – Representação tabular Atividade 4

Representação Tabular 1:

Posição da figura ou número de mesas (n)	1	2	3	4	5	...	n
Quant. de cadeiras (Q)	6	10	14	18	22	...	?

Representação Tabular 2:

Posição da figura ou número de mesas (n)	1	2	3	4	5	...	n
Quant. de cadeiras (Q)	$4 \times 1 + 2$	$4 \times 2 + 2$	$4 \times 3 + 2$	$4 \times 4 + 2$	$4 \times 5 + 2$	...	$4 \times n + 2$

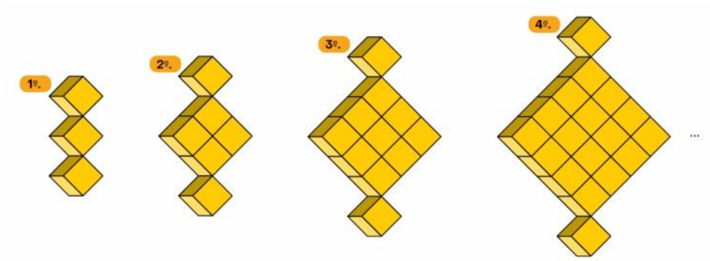
Fonte: Autoria própria.

A “Representação Tabular 1”, possivelmente, será construída com base em relações recursivas, mobilizando a *generalização próxima*. Já a “Representação Tabular 2”, será construída por meio de uma outra forma de visualizar as figuras, em cada mesa podem ser colocadas quatro cadeiras mais duas nos cantos, mobilizando a *generalização distante*.

A Atividade 5 (Quadro 9), desenvolvida na terceira etapa, expõe uma sequência não numérica cujo padrão é figural com objetivo de averiguar se os estudantes estabelecem relações entre a quantidade de cubos e suas posições na sequência e generalizam o padrão (representação em língua natural e/ou algébrica). Além disso, busca-se comparar o desempenho dos estudantes em relação a Atividade 3, desenvolvida no primeiro momento da pesquisa, visto que o padrão figural é bem semelhante, bem como verificar se outras estratégias são mobilizadas na resolução, estratégias estas influenciadas pela aula de revisão (segunda etapa da pesquisa).

Quadro 9 – Atividade 5

As figuras em sequência apresentadas a seguir são formadas por cubos. Observe a sequência de figuras abaixo e responda as questões a seguir.



a) Quantos cubos tem a figura seguinte desta sequência?
b) Complete a tabela abaixo:

Posição da figura (n)	1	2	3	4	5	6	7	...	n
Quant. de cubos (Q)									

c) Quantos cubos tem a 10ª figura desta sequência?
d) Existe uma figura nesta sequência com 84 cubos? Se existir, determine a ordem que ela corresponde. Justifique sua resposta.
e) Existe uma figura nesta sequência com 146 cubos? Se existir, determine a ordem que ela corresponde. Justifique sua resposta.
f) Escreva uma regra que permite determinar o número total de cubos de qualquer figura desta sequência.
g) Escreva uma expressão algébrica que possa traduzir a regra descrita na letra f) e os dados da tabela (letra b).

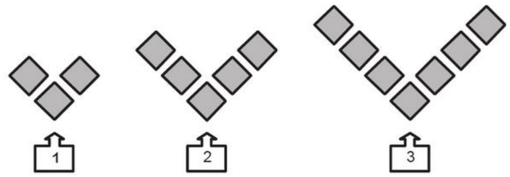
Fonte: Adaptado do material didático adotado pela escola.

É importante registrar que a representação tabular mudou de posição nas atividades desenvolvidas na terceira etapa da pesquisa, porque os protocolos dos estudantes e as gravações da aula de correção das atividades indicaram que alguns estudantes completaram os dados da tabela antes de responder os primeiros itens. Além disso, espera que a elaboração da representação tabular auxilie na *generalização distante*.

A Atividade 6 (Quadro 10) apresenta uma sequência não numérica cujo padrão é figural com intuito de constatar se os estudantes conseguem estabelecer relações entre a quantidade de quadrados e suas posições na sequência em busca da generalização (representação em língua natural e/ou algébrica). Além disso, busca-se comparar o desempenho dos estudantes em relação as atividades 1 e 4, desenvolvidas no primeiro momento da pesquisa, visto que o padrão figural é bem semelhante. Também, busca-se verificar, assim como na Atividade 5, se outras estratégias são mobilizadas na resolução, estratégias estas influenciadas pela aula de revisão (segunda etapa da pesquisa).

Quadro 10 – Atividade 6

Observe a sequência de figuras abaixo e responda as questões a seguir.



a) Quantos quadrados tem a figura seguinte desta sequência?
b) Complete a tabela abaixo:

Posição da figura (n)	1	2	3	4	5	6	7	...	n
Quant. de quadrados (Q)									

c) Quantos quadrados tem a 11ª figura desta sequência?
d) Existe uma figura nesta sequência com 34 quadrados? Se existir, determine a ordem que ela corresponde.
e) Existe uma figura nesta sequência com 43 quadrados? Se existir, determine a ordem que ela corresponde.
f) Escreva uma regra que permite determinar o número total de quadrados de qualquer figura desta sequência.
g) Escreva uma expressão algébrica que possa traduzir a regra descrita na letra f) e os dados da tabela (letra b).

Fonte: Adaptado de Ponte, Matos e Branco (2009).

A Atividade 7 (Quadro 11) exibe duas sequências numéricas com intuito de constatar se os estudantes identificam o padrão envolvido e o generalizam (representação em língua natural e/ou algébrica). Além disso, busca-se comparar o desempenho dos estudantes em relação a Atividade 2, desenvolvida no primeiro momento da pesquisa. Também, busca-se verificar, assim como na Atividade 5 e na Atividade 6, se outras estratégias são mobilizadas na resolução, estratégias estas influenciadas pela aula de revisão (segunda etapa da pesquisa).

Quadro 11 – Atividade 7

Identifique o padrão das sequências a seguir e responda as questões.
a) $6, 11, 16, \ldots$
i) Se o primeiro termo é 6 e pode ser representado por $a_1 = 6$, o segundo termo é 11 e pode ser representado por $a_2 = 11$, o terceiro termo é 16 e pode ser representado por $a_3 = 16$. Determine a_4 e a_5?
ii) Como podemos determinar o termo da sequência em qualquer posição (a_n)?

b) $2, 4, 8, \ldots$
i) Se o primeiro termo é 2 e pode ser representado por $a_1 = 2$, o segundo termo é 4 e pode ser representado por $a_2 = 4$, o terceiro termo é 8 e pode ser representado por $a_3 = 8$. Determine a_4 e a_5?
ii) Como podemos determinar o termo da sequência em qualquer posição (a_n)?

Fonte: Adaptado do material adotado pela escola.

A seguir são apresentadas as análises produzidas em relação as fontes de produção de dados desta pesquisa.

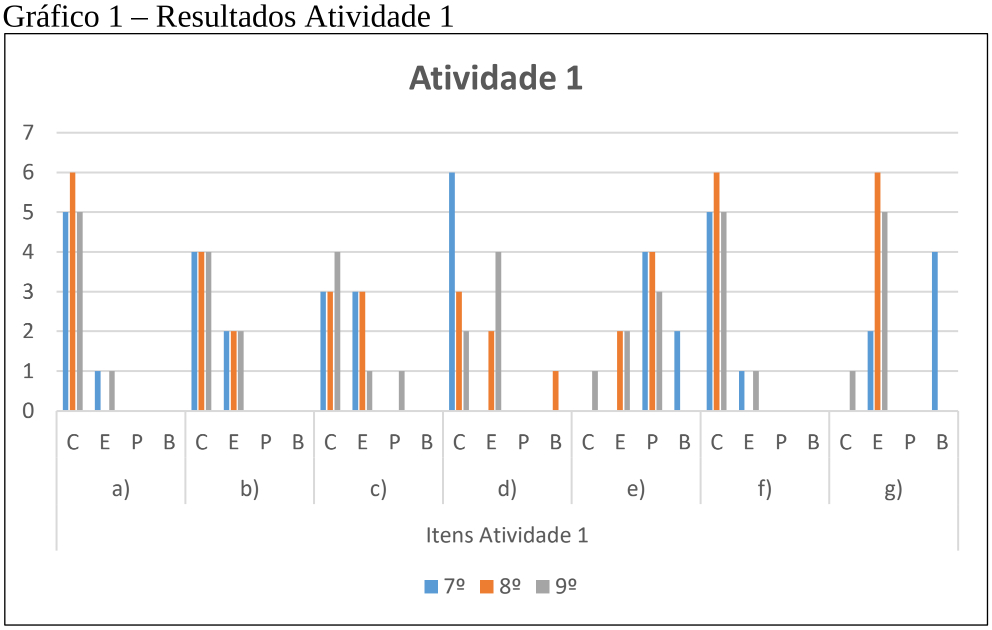
4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Neste capítulo é apresentada a análise das fontes de produção de dados desta pesquisa. Primeiramente, é exposta a análise das resoluções das quatro atividades, propostas na primeira etapa da pesquisa, materializadas nos protocolos dos estudantes. Em seguida, é apresentada a análise das falas do professor/pesquisador e dos estudantes das três turmas durante a aula de correção das atividades propostas na primeira etapa. Por fim, é exposta a análise das resoluções das três atividades, propostas na terceira etapa da pesquisa, materializadas nos protocolos dos estudantes.

4.1 ANÁLISE DA 1ª ETAPA DA PESQUISA: O QUE INDICAM AS RESOLUÇÕES DAS ATIVIDADES PROPOSTAS AOS ESTUDANTES SOBRE GENERALIZAÇÃO DE PADRÕES

Para analisar os protocolos dos estudantes participantes, primeiramente, optou-se por classificar a resolução apresentada em: correta (C), parcialmente correta (P), errada (E) e branco (B) - indicando que não foi exposta nenhuma resposta para a atividade indicada. O Gráfico 1 apresenta os resultados do desempenho dos estudantes ao responderem a Atividade 1.

Gráfico 1 – Resultados Atividade 1

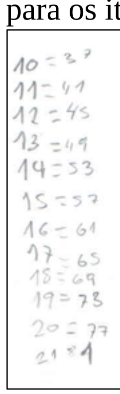


Fonte: Autoria própria.

Nota-se que, no item a) apenas dois alunos (1 – 7º ano; 1 – 9º ano) não conseguiram determinar a quantidade de quadradinhos da próxima figura da sequência, exposta no Quadro 2. Assim, a maioria dos estudantes mobilizou a *generalização próxima* para responder esse item, ou seja, "adicionar 4" a quantidade de quadradinhos da figura anterior. A maioria dos estudantes, também, obteve sucesso no item b). Todos os estudantes que responderam corretamente esse item, também, registraram na tabela (item f) a quantidade de quadradinhos para as posições solicitadas, utilizando relações recursivas. Esse tipo de relação pode ter influenciado no fato de que a última coluna da tabela não foi completada por nenhum estudante, isto é, não conseguiram apresentar uma *generalização distante* (representação algébrica) para a sequência proposta.

Os estudantes que responderam corretamente os itens c) e d) recorreram a recursividade, *generalização próxima*, por meio de uma organização próxima de uma representação tabular (Figura 2). Nas aulas, em particular, na aula de revisão das atividades, é importante incentivar os estudantes a utilizarem a representação tabular para o registro e organização da informação, neste caso, relação entre duas variáveis.

Figura 2 - Protocolo E82 para os itens c) e d) da Atividade 1

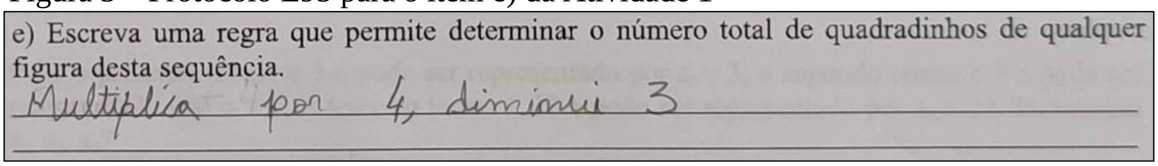


Fonte: Dados da pesquisa.

Sublinha-se que nem todos os estudantes que responderam o item b) corretamente conseguiram êxito no item c). Talvez isso tenha acontecido porque não perceberam que se a 10ª figura é formada por 37 quadradinhos e para determinar a quantidade de quadradinhos da próxima basta "adicionar 4", logo, é a 11ª figura que terá 41 quadradinhos. Além disso, muitos não perceberam que o item d) não poderia ser verdadeiro, pois o número de quadradinhos de cada figura da sequência é ímpar, logo, não há figura com 80 quadradinhos.

Em relação ao item e), as respostas da maioria dos estudantes foram consideradas parcialmente corretas, pois mencionaram “soma 4”, o que permite determinar o número de quadradinhos de uma figura em função da quantidade de quadradinhos da anterior (recursividade), mas não de qualquer figura da sequência (*generalização distante*) como solicitado no enunciado da questão. Apenas a resposta de um estudante do 9º ano foi considerada correta (Figura 3). Destaca-se que o estudante não deixa explícito que o valor a ser multiplicado por 4 corresponde a posição da figura na sequência, mas esse entendimento ficou evidente ao responder o item g) (Figura 4), indicando a mobilização da *generalização distante*.

Figura 3 – Protocolo E95 para o item e) da Atividade 1

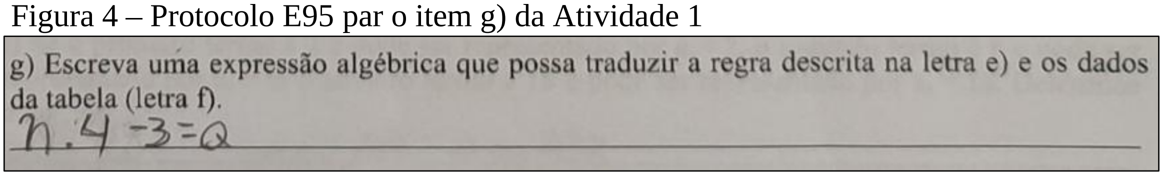

e) Escreva uma regra que permite determinar o número total de quadradinhos de qualquer figura desta sequência.

Multiplica por 4, diminui 3

Fonte: Dados da pesquisa.

Quanto ao item f), destaca-se que a tabela de todos os estudantes corresponde a “Representação Tabular I” exposta no Quadro 3. E, como já mencionado, a última coluna não foi preenchida pelos estudantes. Esse resultado pode estar relacionado a maneira como os estudantes observaram as figuras (“aumenta 4 quadradinhos”) e esta forma não contribuiu para “ver” a lei de formação do padrão, conforme ressaltam Vale (2012), Barbosa, Vale e Gualandi (2025). Dessa forma, a representação algébrica que expressa a lei de formação da sequência (item g)) foi apresentada apenas por um estudante (Figura 4). Sublinha-se que, esse item apresentou o maior índice de erros (5 - 8º ano e 5 - 9º ano) e brancos (4 - 7º ano), indicando que os estudantes tem dificuldades quanto a *generalização distante*.

Figura 4 – Protocolo E95 par o item g) da Atividade 1


g) Escreva uma expressão algébrica que possa traduzir a regra descrita na letra e) e os dados da tabela (letra f).

n.4 -3=Q

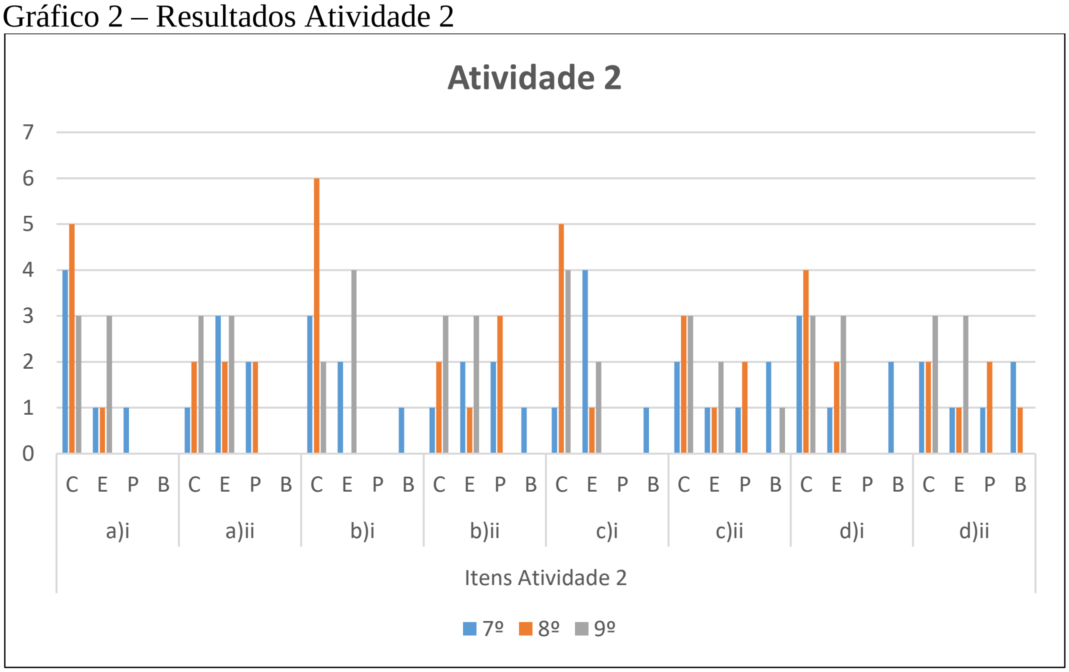
Fonte: Dados da pesquisa.

Ainda em relação ao desempenho dos estudantes na resolução dos itens que compõem a Atividade 1, é preciso mencionar que, no momento de produção dos dados, não foram trabalhadas características da função afim, em particular, taxa de variação constante, pois conforme já mencionado entende-se que não é necessário (Silva; Moreira, 2018). Além disso, as experiências com o conceito de função de forma implícita reduzem-se a situações envolvendo sequências numéricas, principalmente, sequências cujo padrão é dado por múltiplos de um número (“tabuada”) (Silva; Moreira, 2018).

Esperava-se que os estudantes do 9º ano tivessem um desempenho significativamente superior aos demais, em particular, quanto aos estudantes do 7º ano, visto que já avançaram na escolarização e tiveram oportunidades de explorar situações em que a letra tem função de variável, no entanto, isso não se confirmou nessa atividade. Ressalta-se que, segundo pesquisadores (Silva; Moreira, 2028; Vale, 2013; Barbosa; Vale; Gualandi, 2025) e o NCTM (2008, p. 41), “a compreensão da noção de variável desenvolve-se ao longo de um extenso período de tempo e é importante que se apoie num vasto conjunto de experiências”.

O Gráfico 2 expõe os resultados do desempenho dos estudantes das turmas do 7º, 8º e 9º ano ao realizarem a Atividade 2.

Gráfico 2 – Resultados Atividade 2



Fonte: Autoria própria.

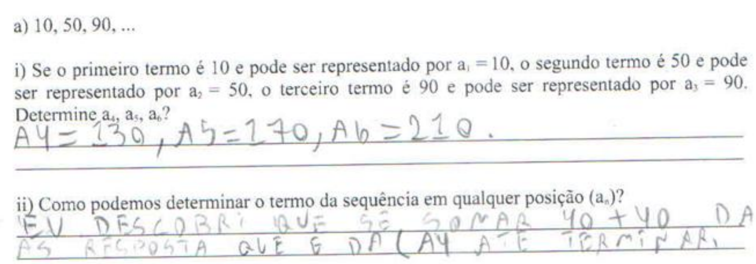
Os dados do Gráfico 2 indicam que os estudantes tiveram melhor desempenho na resolução dos itens i) de todas as questões que compõem a Atividade 2. Esses itens poderiam ser resolvidos através da mobilização da *generalização próxima*, pois solicita-se os próximos três termos da sequência numérica. Os estudantes do 8º ano tiveram um desempenho melhor, nesses itens, do que os demais. Uma interpretação para esse resultado pode estar no fato de que no ano anterior tiveram algumas experiências com sequências numéricas e figurais, principalmente, a classificação dessas sequências quanto a recursividade.

Além disso, o desempenho da maioria dos estudantes é menor nos itens c)i e d)i, nos quais foram apresentadas sequências cuja lei de formação refere-se a função exponencial (em particular, a progressão geométrica). Esperava-se que os estudantes relacionassem essas questões com a operação de potenciação, já trabalhada em anos anteriores, no entanto, muitos, principalmente, os estudantes do 7º ano no item c)i não conseguiram relacionar essas ideias matemáticas.

No que tange ao item ii) em todas as questões que compõem a Atividade 2, constata-se que em nenhuma turma atingiu-se mais que 50% de respostas corretas. O melhor desempenho é dos estudantes do 9º ano, contudo, isso não aconteceu no item i). Uma explicação para esse resultado pode estar relacionada as experiências anteriores com expressões algébricas, sequências numéricas, principalmente, as que o padrão é dado por múltiplos de um número natural. Além disso, as respostas para o item ii) foram apresentadas na língua natural pela maioria dos estudantes, evidenciando relações de recorrência, *generalização próxima*, como pode-se observar na Figura 5.

Figura 5 – Protocolo de E74 e E83 para itens da Atividade 2

Resolução do E74 para o item a)ii da Atividade 2


a) 10, 50, 90, ...

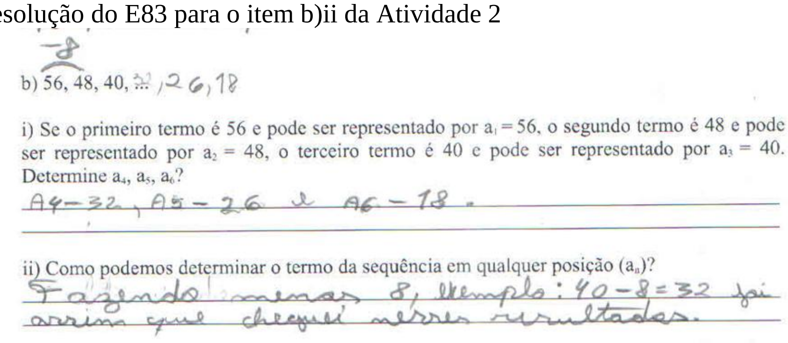
i) Se o primeiro termo é 10 e pode ser representado por $a_1 = 10$, o segundo termo é 50 e pode ser representado por $a_2 = 50$, o terceiro termo é 90 e pode ser representado por $a_3 = 90$. Determine a_4, a_5, a_6?

A4 = 130, A5 = 170, A6 = 210.

ii) Como podemos determinar o termo da sequência em qualquer posição (a_n)?

EU DESCOBRI QUE SE SOMAR 40 + 40 DA AS RESPOSTA QUE É DA (A4 ATÉ TERMINAR).

Resolução do E83 para o item b)ii da Atividade 2


b) 56, 48, 40, ..., 26, 18

i) Se o primeiro termo é 56 e pode ser representado por $a_1 = 56$, o segundo termo é 48 e pode ser representado por $a_2 = 48$, o terceiro termo é 40 e pode ser representado por $a_3 = 40$. Determine a_4, a_5, a_6?

A4 – 32, A5 – 26 e A6 – 18.

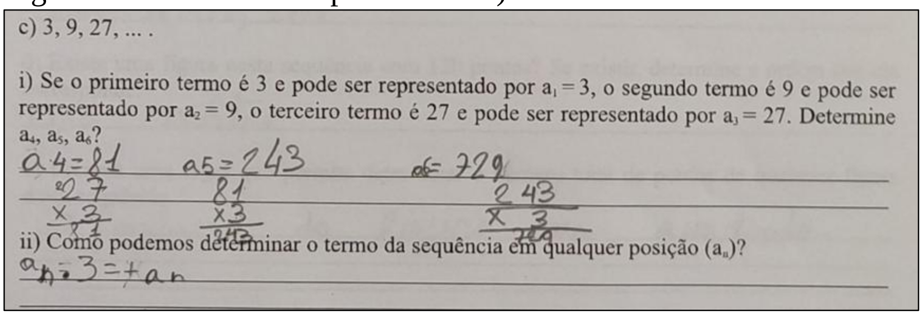
ii) Como podemos determinar o termo da sequência em qualquer posição (a_n)?

Fazendo menos 8, exemplo: 40 – 8 = 32 foi assim que cheguei nesses resultados.

Fonte: Dados da pesquisa.

Destaca-se que E74 ao responder o item ii) menciona "*somar 40 (...) até terminar*", esta última expressão ("até terminar") revela que é preciso explorar mais nas aulas o significado de sequência infinita. Ainda em relação a representação utilizada na resolução do item ii), assim como no item g) da Atividade 1, apenas E95 tentou apresentar uma solução na representação algébrica (Figura 6).

Figura 6 - Protocolo E95 para o item c)ii da Atividade 2


c) 3, 9, 27, ...

i) Se o primeiro termo é 3 e pode ser representado por $a_1 = 3$, o segundo termo é 9 e pode ser representado por $a_2 = 9$, o terceiro termo é 27 e pode ser representado por $a_3 = 27$. Determine a_4, a_5, a_6?

a4=81 a5=243 a6=729

27 ×3 81 | 81 ×3 243 | 243 ×3 729

ii) Como podemos determinar o termo da sequência em qualquer posição (a_n)?

an.3=+an

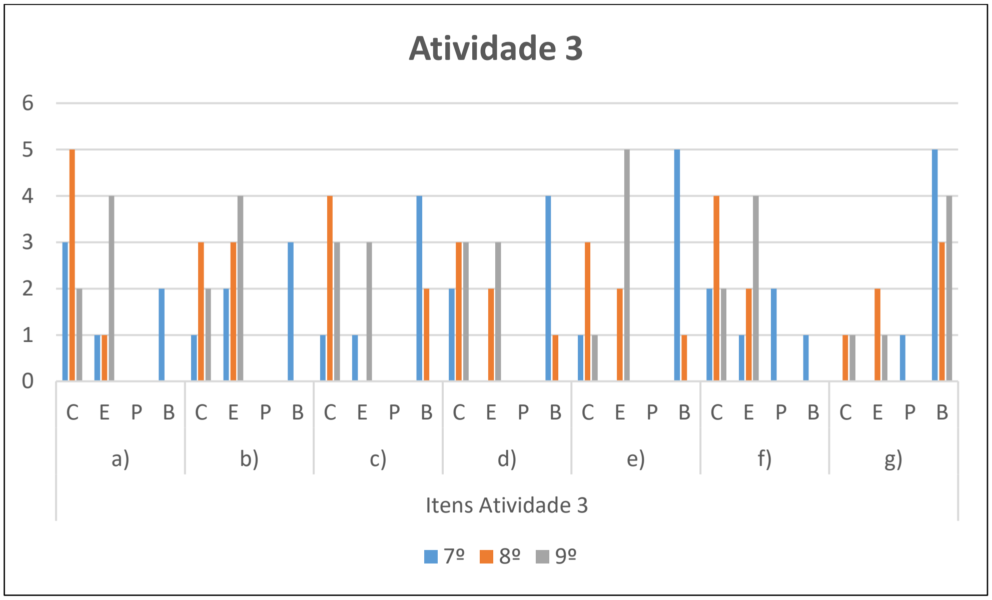
Fonte: Dados da pesquisa.

A resolução elaborada por E95 (Figura 6) mostra a tentativa de apresentar uma representação algébrica para a questão por meio da recursividade, *generalização distante,* mas há um equívoco na forma de expressar o termo anterior, a_{n-1}. A representação algébrica adequada a situação é: $a_n = 3a_{n-1}$, sendo $a_1 = 3$, para todo $n \in \mathbb{N}^*$. Uma explicação para esses resultados pode estar relacionada a forma como o conceito de sequência vem sendo abordado no Ensino Fundamental, ou seja, relacionado mais as operações numéricas, campo aritmético, do que a ideia de função, campo algébrico (NCTM, 2008; Vale, 2012; Silva; Moreira, 2018).

Considerando que o trabalho com conceito de sequência é uma das formas de desenvolver o pensamento algébrico (Ponte; Matos; Branco, 2009; Brasil, 2018; Barbosa; Vale, 2022; Barbosa; Vale; Gualandi, 2025), torna-se importante que ele seja abordado de modo a relacioná-lo com a variação, ideia matemática fundamental, bem como o estabelecimento de generalizações, conforme indica BNCC (Brasil, 2018) e pesquisadores da área da Educação Matemática (Silva; Moreira, 2028; Vale, 2023; Barbosa; Vale; Gualandi, 2025). Assim como na Atividade 1, os estudantes do 9º ano não apresentaram um desempenho significativamente superior aos demais.

O Gráfico 3 ilustra o desempenho dos estudantes das turmas do 7º, 8º e 9º ano ao responderem aos itens da Atividade 3.

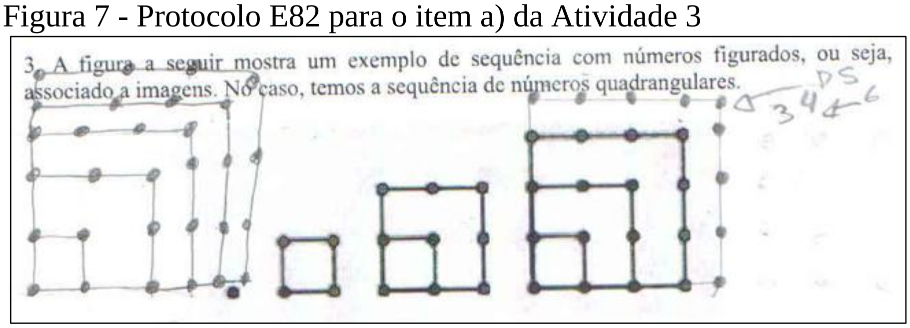
Gráfico 3 – Resultados Atividade 3



Fonte: Autoria própria.

Ao analisar os itens a) e b) (Gráfico 3), constata-se que a maioria dos estudantes conseguiu determinar a quantidade de pontos da próxima figura, mas apenas seis determinaram a quantidade de quadrados da 12ª figura (Quadro 5). Assim, a *generalização próxima* não foi mobilizada pela maioria dos estudantes nesses itens, diferente do resultado da Atividade 1. Talvez isso tenha acontecido porque para determinar a quantidade de pontos das próximas figuras não bastava adicionar um valor constante ao valor do termo anterior como na Atividade 1. Dito de outro modo, precisava identificar o padrão, em particular, para responder o item b), pois não seria fácil desenhar a 12ª figura como fizeram alguns para responder o item a), conforme exemplificado na Figura 7.

Figura 7 - Protocolo E82 para o item a) da Atividade 3



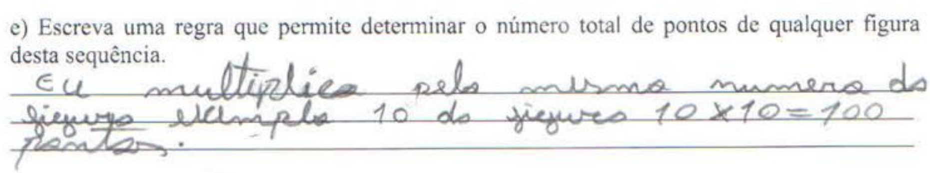
Fonte: Dados da pesquisa.

Quanto aos itens c) e d), percebe-se que o desempenho, também, foi abaixo do obtido na Atividade 1, mesmo se tratando de um padrão que poderia ser identificado pela análise da área do quadrado ou pelo reconhecimento dos números quadrados perfeitos, abordados em anos anteriores. A não compreensão do padrão pela maioria fica explícita quando o item f) é analisado e comparado com o desempenho nesse mesmo item na Atividade 1, pois apenas 8 estudantes completaram a tabela (Atividade 2) de forma correta, sendo que na Atividade 1 foram 16. Salienta-se que na elaboração da regra (língua natural e/ou representação algébrica) que traduz a generalização, a capacidade de identificar o padrão é o primeiro passo (Fiorentini; Miorim; Miguel, 1993; NCTM, 2008; Vale, 2013).

A representação tabular utilizada por todos os estudantes assemelha-se a “Representação Tabular I” exposta no Quadro 6. No entanto, os itens e) e g) dessa atividade foram respondidos de forma correta por mais estudantes do que na Atividade 1. No item e), 5 estudantes apresentaram adequadamente a regra para determinar o número total de quadradinhos de qualquer figura da sequência por meio da língua natural (Figura 8a), sendo que na Atividade 1 apenas um estudante obteve êxito. Já no item g) dois conseguiram generalizar a sequência por meio de uma representação algébrica (Figura 8b).

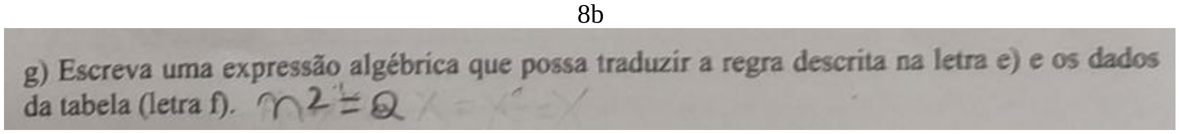
Figura 8 – Resoluções itens e) e g) da Atividade 3

8a


e) Escreva uma regra que permite determinar o número total de pontos de qualquer figura desta sequência.
eu multiplico pelo mesmo numero da figura exemplo 10 da figura 10 x 10 = 100 pontos.

Protocolo E83

8b

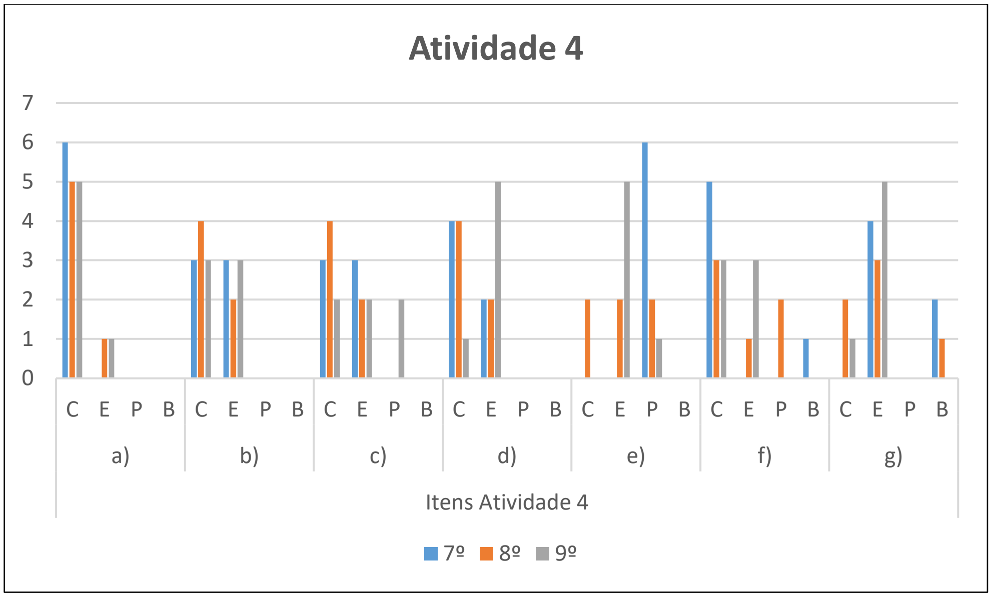

g) Escreva uma expressão algébrica que possa traduzir a regra descrita na letra e) e os dados da tabela (letra f). $n^2 = Q$

Protocolo E95

Fonte: Dados da pesquisa.

O Gráfico 4 apresenta o desempenho dos estudantes das turmas participantes desta pesquisa na Atividade 4.

Gráfico 4 – Resultados Atividade 4



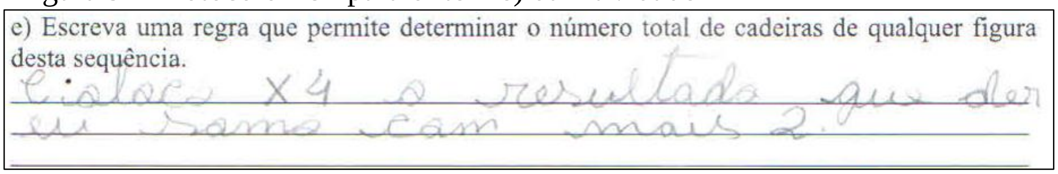
Fonte: Autoria própria.

Os dados do Gráfico 4 indicam que, assim como no item a) da Atividade 1, apenas dois estudantes (1 - 8º ano; 1 – 9º ano) não conseguiram identificar o próximo termo da sequência. Uma explicação para esse resultado pode estar no fato de que para resolver essas atividades basta "adicionar 4" ao valor anterior para determinar o próximo termo da sequência (função afim, progressão aritmética). Além disso, os resultados das atividades anteriores mostram que os estudantes conseguem mobilizar a *generalização próxima* com mais facilidade do que a *generalização distante*, mesmo que esta fosse expressa por meio da representação na língua natural (item e)). Contudo, o desempenho dos estudantes no item b) da Atividade 4 não é o mesmo da Atividade 1, pois neste item 12 dos 18 estudantes obtiveram sucesso e nessa 10 conseguiram determinar o 10º termo da sequência. Mesmo assim, esse resultado confirma o desempenho satisfatório em situações que requerem a mobilização da *generalização próxima*.

Em relação aos itens c) e d), o índice de acertos é menor que na Atividade 1. Uma interpretação para esse resultado pode estar no fato de que não bastava verificar se o valor dado nos itens é par ou ímpar como na Atividade 1, em outros termos, precisava verificar se o valor dado após subtrair dois é múltiplo de 4. Também, percebeu-se nesses itens muitas respostas (sim ou não) sem justificativas, mesmo sendo solicitado a determinação da ordem na sequência dada, se existisse. Ressalta-se a importância de solicitar nesse tipo de questão a justificativa para a resposta, conforme indicam NCTM (2008), Ponte; Matos e Branco (2009), Vale (2013); Barbosa e Vale (2022).

Assim como no item e) da Atividade 1, a maioria das respostas dos estudantes foram consideradas parcialmente corretas, pois mencionaram "soma 4", o que permite determinar o número de cadeiras de uma figura em função da anterior (recursividade), mas não de qualquer figura da sequência (*generalização distante*) como solicitado no enunciado da questão. Assim, apenas dois estudantes obtiveram êxito nessa questão como indica a Figura 9.

Figura 9 – Protocolo E84 para o item e) da Atividade 4


e) Escreva uma regra que permite determinar o número total de cadeiras de qualquer figura desta sequência.

Coloco x4 o resultado que der eu somo com mais 2.

Fonte: Dados da pesquisa.

Quanto ao item f), todos os estudantes que tentaram completar a tabela recorreram a Representação Tabular I (Quadro 8), indicando que utilizaram relações recursivas. Além disso, a última coluna não foi preenchida, assim como nas atividades 1 e 3, revelando que a forma como os estudantes observaram as figuras ("aumenta 4 cadeiras") não contribuiu para "ver" a lei de formação do padrão. Dessa forma, o item g) foi resolvido corretamente por apenas três estudantes (2 – 8º ano; 1 – 9º ano).

Ao analisar os resultados obtidos na primeira etapa desta pesquisa, em particular, a dificuldade que a maioria dos estudantes apresentou na resolução dos itens das atividades que exigiam uma *generalização distante* seja expressa na língua natural seja na representação algébrica, e ao comparar com os apresentados em outras pesquisas com estudantes dos anos finais do Ensino Fundamental, pode-se afirmar que são bem semelhantes. Por exemplo, Pereira e Fernandes (2012, p. 105) analisaram o desempenho de estudantes do 7º ano (em média, com 12 anos de idade) na exploração de problemas de padrão constataram que "quando foi solicitada uma expressão algébrica que traduzisse essa generalização, os alunos manifestaram dificuldades relacionadas com a interpretação da letra utilizada na expressão", Também, verificaram que nas atividades que exigiam relacionar "a ordem do termo (variável independente) com o termo (variável dependente), em algumas tarefas, os alunos revelaram dificuldades em construir simbolicamente essa relação de generalização, talvez por serem confrontados com dois valores desconhecidos (o termo e a respetiva ordem) a variar em simultâneo" (ibidem).

Outro estudo com resultados semelhantes a este quanto a generalização distante é o realizado por Campos e Gualandi (2023). Os pesquisadores investigaram de que forma estudantes do 7º ano generalizam padrões e desenvolvem o pensamento algébrico. Dentre os resultados, destaca-se que a "*generalização próxima* se sobressaiu à distante, mesmo nas tarefas em que era conveniente utilizar a *estratégia distante* devido ao contexto" (p. 13, *grifos nossos*). A seguir são apresentadas as análises das discussões entre professor/pesquisador e estudantes durante a aula de correção das atividades analisadas nesta seção.

4.2 ANÁLISE DA 2ª ETAPA DA PESQUISA: O QUE REVELAM AS FALAS DOS ESTUDANTES E DO PROFESSOR/PESQUISADOR ACERCA DA GENERALIZAÇÃO DE PADRÕES

Durante a correção da Atividade 1 (Quadro 2), primeiramente, o professor/pesquisador incentivou os estudantes a compreenderem de que maneira o número de quadrados aumenta de uma figura para outra (de um termo da sequência para outro). Em todas as turmas, rapidamente, os estudantes responderam que aumentava de quatro em quatro e a maioria utilizou a *contagem* e a *diferença* (recursiva) como estratégias de resolução para responder os itens a) e b), conforme exemplificado no Quadro 12.

Quadro 12 – Diálogos referentes aos itens a) e b) da Atividade 1

(continua)

7º ano	8º ano	9º ano
Item a) E74-Val: Aumentou de 4 em 4 (...) E72-Lur: está aumentando de 4 em 4 (...) Item b) P: Quantos quadradinhos tem a 10ª figura dessa sequência? E74-Val: 37 (...) uma coisa assim... P: 37, por que chegou a essa conclusão? E74-Val: Porque aumenta de 4 em 4, na Figura 5 coloquei mais 4, na Figura 6 coloquei mais 4, na Figura 7 coloquei mais 4, e cheguei ao resultado.	Item a) E83-Gab: Por causa que aqui [apontando para a sequência figural] é 4 quadrados que aumenta. (...) Item b) P: Quantos quadradinhos tem a 10ª figura dessa sequência? E80-Ari: 36. E81-Bru: 37. E83-Gab: 41. (...) P: 41? Vamos ver! Se a gente completar a tabela, ajuda vocês? E82-Fel; E83-Gab: Sim.	Item a) E93-Gui: Porque sempre somava um quadradinho para cada lado [e são quatro lados]. (...) Item a) P: Quantos quadradinhos tem a 10ª figura dessa sequência? E95-Ped: Professor poderia descer um pouco até à tabela (projetada no quadro). E92-Dom: Fica mais fácil [completar a tabela para responder o item b)]. E95-Ped: 36.

Quadro 12 – Diálogos referentes aos itens a) e b) da Atividade 1

(fim)

(...) P: 37, ok. Deu para entender, então? E72-Lur: Sim.	(...)	E93-Gui: Não. E93-Gui; E95-Ped: 37. (...)

Fonte: Dados da pesquisa.

Para responder o item b) alguns alunos de todas as turmas tentaram adivinhar a resposta, o que pode ser classificado quanto a estratégia como *tentativa e erro*. No 7º e 8º ano, o professor/pesquisador solicitou que justificassem as respostas dadas. E74-Val utilizou relações recursivas para justificar sua resposta e esta foi aceita pelo professor/pesquisador e pela turma. Já no 8º ano, o professor/pesquisador sugeriu que os estudantes completassem a tabela apresentada no item f). Para responderem corretamente à questão, os estudantes utilizaram relações recursivas. No 9º ano o uso da tabela foi sugerido por E95-Ped e todos concordaram que ajudaria a responder aos itens propostos na Atividade I.

A representação tabular, também, foi utilizada para responder aos itens c) e d). O uso dessa representação foi observado em alguns protocolos dos estudantes na primeira etapa da pesquisa e incentivado pelo professor/pesquisador na aula de correção. Os diálogos entre o professor/pesquisador e os estudantes de cada turma são expostos no Quadro 13.

Quadro 13 – Diálogos referentes aos itens c) e d) da Atividade 1

(continua)

7º ano	8º ano	9º ano
Item c) P: Existe uma figura com 41 quadradinhos? E74-Val: Sim. E72-Lur: Sim. P: Qual a figura é? E72-Lur: É a figura 11. P: A figura 11? E72-Lur: É a figura 11. P: Perfeito. Então, porque é a figura 11 que tem 41 quadradinhos? E74-Val: Professor, (...) fui colocando os pontinhos na figura, um, dois, (...) E72-Lur: Eu fiz tudo de cabeça. P: Tá certo. Eu queria que você me ajudasse a responder a letra d. Item d) P: Existe uma figura com 80 quadradinhos?	Item c) P: Existe uma figura com 41 quadradinhos? E83-Gab: Sim. E81-Bru: Sim. P: Sem a tabela? E83-Gab: Não, sem a tabela, não. Mas a tabela para se basear ali. (...) Item d) P: Existe uma figura com 80 quadradinhos? E83-Gab: Não, porque nenhum termina com 0. P: Nenhum termina com 0? E83-Gab: Não termina com 0. P: O que mais dá para verificar na tabela? [identificar padrões] E85-Vil: São todos ímpares. E83-Gab: São ímpares.	Item c) P: Existe uma figura, nessa sequência, com 41 quadradinhos. Se existir, determine a ordem. E95-Ped: Existe. E93-Gui: A décima primeira. E95-Ped: A décima primeira. (...) Item d) P: Existe uma figura, nessa sequência, com 80 quadradinhos. Se existir, determine a ordem que ela corresponde. E95-Ped: Não. E93-Gui: Não existe. P: Por que não existe? E93-Gui: Porque não tem nenhum número que tenha um 0 na sequência. (...)

Quadro 13 – Diálogos referentes aos itens c) e d) da Atividade 1

(fim)

E74-Val; E72-Lur; E70-Car: Não, não. P: Por que? E74-Val: Porque lá vai terminar com oitenta e dois. E72-Lur: Porque sempre vai sobrar um na resposta, porque aumenta de 4. (...)	(...)	

Fonte: Dados da pesquisa.

Ao observarem os dados da tabela os estudantes responderam ao item c) sem dificuldades, utilizando a *diferença* (recursiva) como estratégia. E74-Val comenta que na atividade individual foi colocando pontinhos na figura, isto é, buscou verificar se alguma figura teria 41 quadradinhos por meio da representação figural, utilizando a *contagem* como estratégia. Quanto ao item d), alguns estudantes do 8º e 9º ano justificaram que não há uma figura com 80 quadradinhos porque os valores da tabela não terminam em zero e outros disseram que os números são todos ímpares. A estratégia utilizada pela maioria para responder esse item foi a *diferença* (recursiva).

Destaca-se que E72-Lur tentou justificar sua resposta com base na representação figural, mesmo que a forma como se expressou não evidencie essa afirmação. A expressão "*vai sobrar um*" indica que há um quadradinho no centro de cada figura que precisa ser acrescentado aos múltiplos de quatro. É importante mencionar que, ao analisar os protocolos dos estudantes não ficou evidente a estratégia utilizada pela maioria, pois poucos deixaram registrado como chegaram as respostas, entre estes poucos destaca-se a resolução de E82-Fel (Figura 2).

Na resolução das atividades realizadas individualmente, os itens e) e g) foram os que tiveram o menor índice de acertos, pois evidenciam a *generalização distante*. Com base nesse resultado, o professor/pesquisador questionou mais os estudantes e dedicou mais tempo para a correção desses itens. Os diálogos entre o professor/pesquisador e os estudantes de cada turma em busca da resolução desses itens são apresentados no Quadro 14.

Quadro 14 – Diálogos referentes aos itens e), f) e g) da Atividade 1

7º ano	8º ano	9º ano
Item e) e g) P: Escreva uma regra que permite determinar o número total de quadradinhos de qualquer figura. E75-Vin: A tabuada do 4. E74-Val: Tabuada! De 4 em 4. E75-Vin: A tabuada do 4 acrescenta mais 1. E70-Car: Tá certo, professor? E75-Vin: Claro! Ó, se tirar 1, vira tabuada do 4! P: Tá, 4 em 4, mais um. Então, você vai pegar o múltiplo do 4 e mais um. É isso que vocês estão me dizendo? (...) P: O que significa aquele "n" (na última coluna da tabela)? E72-Lur: É o valor indefinido que tem que encontrar. P: É a figura n? É isso que você está querendo dizer? Como é que eu vou escrever uma fórmula para qualquer uma das figuras. [quantidade de quadrados] P: Será tabuada do 4 mais 1 vai ajudar? Vamos ver. Se a primeira figura é 1, 4 vezes 1 mais 1. Então, a resposta aqui teria que ser 5, certo? E74-Val; E70-Car: Sim. P: Então eu tenho que pensar que alguma coisa tem que dar, de repente, um valor. 0, é isso? Então esse 4 mais 1 tem que ser 4 vezes 0 mais 1. 4 vezes 1 mais 1, então, é 5. 4 vezes 2 mais 1, o que dá? E74-Val; E72-Lur: Dá 9. (...) P: Estão entendendo? Então, como é que eu escrevo essa expressão? 4 que multiplica qualquer número? (...) P: Então, 4 vezes n mais 1. Isso aqui é uma expressão algébrica. E essa expressão vai responder a letra g? (...) E70-Car: Eu coloquei somando mais 4. E74-Val: Somando de 4 mais 4. E72-Lur: Somando de 4 em 4.	Item e) E83-Gab: Estão aumentando de 4 em 4. P: Aumentando de 4 em 4. E por que estão aumentando de 4 em 4? E83-Gab: Porque vai um quadradinho em cada ponta. Em cada ponta, em cada braço, vai aumentando de 4 em 4. E83-Gab: São 4 braços, aí vai aumentando de 4 em 4. (...) Item f) e g) P: Qual a expressão algébrica? Vamos pensar um pouco. Como é que a gente poderia associar a ideia de que tem 4 braços e a cada figura acrescenta um quadrado em cada braço, mas a Figura 1 é formada por 1 quadrado? E80-Ari: Sempre tem um no meio. E83-Gab: Na 2ª figura eu enxerguei assim: 2 vezes 4 dá 8; 8 eu tiro 3; que fica cinco. P: Faço 4 vezes 2 menos 3. É isso? E83-Gab: É. (...) P: Como é que seria escrever essa expressão baseada nessa combinação? O que muda? E80-Ari: 1, 2, 3 muda a figura. E83-Gab: Sim. P: O 4 está "parado", fixo? E83-Gab: O 3 também. O menos 3 está fixo. E80-Ari: O que muda é o resultado. P: Qual resultado? E83-Gab: O número do meio. P: O que eu teria que colocar para aquela coluna n? Vocês já têm condição de responder ou não? E83-Gab: Colocar o n no lugar do número. P: Para a figura n, você colocaria 4 vezes o quê? E83-Gab: Quatro vezes n (...) P: Menos (...) E83-Gab: menos 3, igual a... P: Então, $4n$ menos 3. Essa é a expressão.	Item e) e g) E95-Ped: Por exemplo, 4 vezes 2, 8, tira 3, 5. 4 vezes 3, 12, tira 3, 9. 4 vezes 4, 16, tira 3, 13. P: Então, para n, o que a gente consegue construir? E95-Ped: 4 vezes n menos 3. Igual a n. (...) P: Vamos escrever de uma outra forma a expressão. Observem a tabela a partir da figura 2. E95-Ped: Figura 2: 4 vezes 1 mais 1; Figura 3: 4 vezes 2 mais 1; Figura 4: 4 vezes 3 mais 1, ah eu entendi, professor! P: Fechou? 4 vezes 1 mais 1. Só que aí o que acontece? Nós temos aqui, agora tem um probleminha. Vocês viram que a tabela, se a gente trocar o número 1, apaga o número 1, coloca o número 2. Número 1, número 2, coloca o 1. Número 3, coloca o 2. Número 4, coloca o 3. Então, trocando o número 4, E95-Ped: sempre pega o antecessor. (...)

Fonte: Dados da pesquisa.

A regra expressa em língua natural, que permite determinar o número total de quadradinhos de qualquer figura da sequência (item e)), elaborada pela maioria dos estudantes recorreu a *diferença* (recursiva) como estratégia, pois destacaram que o número de quadradinhos aumenta de quatro em quatro. Os estudantes do 7º ano mencionaram a tabuada como uma forma de descrever o padrão identificado na sequência, sem evidenciar a relação entre as variáveis envolvidas (posição da figura e quantidade de quadradinhos). Os estudantes do 8º ano recorrem a representação figural na tentativa de escrever uma regra do padrão identificado (em particular, E83-Gab). Já os estudantes do 9º ano, especialmente E95-Ped, recorreram a representação algébrica tanto no item e) quanto g). Ressalta-se que, no início do estudo, os estudantes devem ser incentivados a descrever verbalmente a regularidade dos padrões e depois utilizar variáveis e expressões algébricas para expressar e ampliar padrões, conforme recomendam Brasil (1998, 2018), NCTM (2008) e pesquisadores (Ponte; Matos e Branco, 2009; Vale, 2013; Silva; Moreira, 2018).

Como mencionado na análise da resolução das atividades realizadas individualmente a última coluna da tabela (item f)) não foi completada adequadamente por nenhum estudante, ou seja, não conseguiram utilizar a estratégia *explícita* para apresentar uma *generalização distante* (representação algébrica) do padrão da sequência proposta. Muitos estudantes continuaram a preencher a tabela com valores numéricos como exposto na Figura 10, o que indica falta de compreensão da letra como variável.

Figura 10 – Protocolo E71 para o item f) da Atividade 1

f) Complete a tabela a seguir.

Posição da figura (n)	1	2	3	4	5	6	7	...	n
Quant. de quadradinhos (Q)	1	5	9	13	17	21	25	29	33

Fonte: Dados da pesquisa.

Diante dessas dificuldades, o professor/pesquisador questionou os estudantes, principalmente do 7º e 8º ano, sobre o significado da letra n na tabela (item f)) e como determinar a expressão algébrica que traduz a regra descrita no item e) e os dados dessa tabela. As respostas para o significado da letra n dos estudantes do 7º ano (E72-Lur) revelam que o entendimento ainda está associado a número desconhecido, ou seja, letra como incógnita (Pereira, 2013; Campos; Gualandi, 2023). Uma interpretação para esse resultado pode estar associada ao fato de que as primeiras experiências desses estudantes com o uso de letras deram-se por meio de situações que envolvem converter da língua natural para a representação algébrica expressões do tipo “o triplo de um número, a metade de um número mais um” e equações em que a incógnita é apresentada por uma figura (por exemplo, $* + 5 = 10$).

Como as respostas para a expressão algébrica não surgiram rapidamente no 7º ano, o professor/pesquisador recorreu aos resultados registrados na tabela e incentivou os estudantes a utilizarem a constatação de que os valores “aumentam de quatro em quatro” (*diferença*), afirmando que tem uma relação com a tabuada do quatro, mas precisa de ajustes, pois a primeira figura ($n = 1$) não é formada por quatro quadradinhos e sim por um. Na sequência, o professor/pesquisador questionou se $4n + 1$ é a expressão correta para a situação, mas as respostas dos estudantes do 7º ano continuam dando destaque às relações recursivas (“*somando de 4 em 4*”), indicando dificuldades na elaboração da *generalização distante*. Sublinha-se que conjecturas acerca da representação algébrica são levantadas e testadas pelo professor/pesquisador sem muito envolvimento dos estudantes do 7º ano. Talvez os estudantes não tenham participado da forma esperada, na resolução desse item, porque eles estão começando a usar a ideia de variável, à medida que tentam elaborar uma “fórmula” para representar a quantidade de quadradinhos de qualquer figura (Silva; Moreira, 2018; Pereira, 2013).

No 8º ano, E83-Gab percebeu que o número de quadradinhos da segunda figura pode ser determinado da seguinte forma: “*2 vezes 4 dá 8; 8 eu tiro 3; que fica cinco*”. Em seguida, o professor/pesquisador questionou como seria escrever a expressão algébrica com base na ideia de E83-Gab, bem como o que está mudando na situação e o que é fixo. E83-Gab respondeu que o que muda é a figura (posição da figura), ficando fixo multiplicar por quatro e diminuir três. Assim, E83-Gab recorreu a estratégia do múltiplo da *diferença* com ajuste para determinar a expressão algébrica. Os demais estudantes do 8º ano apenas acompanharam as conjecturas levantadas e testadas por E83-Gab com auxílio do professor/pesquisador.

No 9º ano a expressão algébrica por meio da estratégia da *diferença* com ajuste foi mobilizada rapidamente por E95-Ped, estudante este que foi o único a obter êxito no item g) quando essa atividade foi realizada individualmente (primeira etapa da pesquisa). Com intuito de envolver a turma, o professor/pesquisador questionou se a expressão algébrica poderia ser expressa de outra forma, mas novamente E95-Ped se destaca ao afirmar que precisaria representar o antecessor, ficando $4(n - 1) + 1$.

Ao analisar os diálogos percebe-se que a maioria dos estudantes recorreu a relações numéricas para explicar o padrão observado na sequência figural, relacionando com a tabuada. Esse resultado também foi constatado por Vale e Barbosa (2019). Além disso, muitos apresentaram dificuldades na elaboração de argumentos para justificar as respostas. Conforme o NCTM (2008), ser capaz de explicar o próprio raciocínio, enumerando razões, constitui uma competência extremamente importante no raciocínio formal, capacidade esta que deve ser desenvolvida desde os anos iniciais (Brasil, 1998, 2018). Talvez isso ocorra porque as atividades que são, geralmente, exploradas não solicitam que expliquem como pensaram para responder a situação proposta. A ação de explicitar como pensou para resolver o problema é importante para o desenvolvimento do pensamento algébrico como defendem Ponte, Matos e Branco (2009), Vale (2013), Barbosa e Vale (2022).

Também, é preciso registrar que a relação entre as variáveis envolvidas na atividade (posição da figura, n, e quantidade de quadradinhos, Q) foi pouco explorada na correção. Isso fica explícito quando os estudantes do 8º e 9º ano afirmam que a resposta para o item g) é $4n-3$, ou seja, não igualam a expressão a Q, letra indicada na tabela (item f)) para representar a quantidade de quadradinhos. Considerando que essa foi a primeira atividade proposta tanto na primeira como na segunda etapa da pesquisa, entende-se que os estudantes poderiam ter obtido mais êxito se a sequência figural fosse descrita por um padrão envolvendo diretamente múltiplos de um número.

Além disso, o professor/pesquisador poderia ter explorado a “Representação Tabular II” exposta no Quadro 3, pois evidencia a abordagem visual em detrimento da numérica, auxiliando na compreensão da representação algébrica, $Q=4(n-1)+1$ (Vale, 2013; Barbosa; Vale; Gualandi, 2025). Sublinha-se que a compreensão de que diferentes expressões, para a mesma situação, podem originar os mesmos resultados, por exemplo, $Q=4n-3$ e $Q=4(n-1)+1$, é fundamental para o desenvolvimento do pensamento algébrico (NCTM, 2008; Brasil, 1998; Silva; Moreira, 2018).

A Atividade II (Quadro 4) é composta por quatro questões, que apresentam sequências numéricas, divididas em dois itens. O primeiro item (i) requer a determinação dos três termos seguintes de cada sequência, podendo ser realizada por meio de uma *generalização próxima*. A análise dos protocolos dos estudantes (primeira etapa da pesquisa) revelou que a maioria obteve êxito nesse item e, no momento da correção das atividades, constatou-se que utilizaram a *diferença* (recursiva) como estratégia para determinar o quarto, quinto e sexto termo das sequências apresentadas nas questões a) e b) e a recursividade nas questões c) e d), conforme exemplificado no Quadro 15.

Quadro 15 – Diálogos referentes ao item i) das questões que compõem a Atividade 2

7º ano	8º ano	9º ano
Questão a) E71-JP: (...) aumentando de 40 em 40. E72-Lur: Aumentando de 40 em 40. (...) Questão b) E74-Val: É de menos em menos 8. (...) diminuindo. Acho que, se não me engano, a_4 é 32, na outra é 24, e na outra eu acho que é 13 ... Não, não, não. Pera aí professor, é 16? (...) Questão c) E74-Val: Aí, 3 vezes 3, professor. Sim, 1 vezes 3; 2 vezes 3. Vai dar a tabuada do 3 é isso aí, professor? 3 vezes 4; 3 vezes 27 ou 4 vezes 27? E72-Lur: Três vezes três (em busca do segundo termo) vezes 3 (em busca do terceiro termo). E71-JP: 3 vezes 3 dá 9 [segundo termo da sequência]. (...) Questão d) E74-Val: Professor, é 2x3. Depois, 3x3. E72-Lur: É de 3 em 3 de novo, professor. (...)	Questão a) E80-Ari: Aumenta 40. P: Aumenta 40. Então, a gente consegue responder a_4, que é o quarto termo? E80-Ari; E83-Gab; E82-Fel: 130. P: E o quinto termo? E83-Gab; E82-Fel; E81-Bru:170. (...) Questão b) E83-Gab: Subtraindo o oito. Fui tirando oito. P: Qual é o quarto termo? E80-Ari; E82-Fel: 32. (...) Questão c) E80-Ari: Tem que multiplicar pelo número [refere-se ao primeiro termo]. E83-Gab: Por 3. E80-Ari: É, por 3. P: Três, né? Então agora qual é o quarto termo? 27 vezes três dá quanto? Para chegar aqui. E80-Ari; E82-Fel: 81. (...) Questão d) E82-Fel: Multiplicar por 3? P: Multiplicar por 3? Então, como podemos escrever essa fórmula? Multiplicando por 3? E82-Fel: Sequência de 3 vezes o número. [refere-se ao valor anterior] E83-Gab: Eu fiz o número... O número três vezes o número seguinte. [mas, refere-se ao valor anterior] (...)	Questão a) E95-Ped:a_4, 130. P: 130. E93-Gui: a_5, 170. P: Ok. E95-Ped E a_6, 210. P: Muito bem? Como é que vocês chegaram a essa conclusão? Chegaram ao quarto termo, ao quinto termo, ao sexto termo? E95-Ped: Soma 40 a cada termo. (...) Questão b) E93-Gui; E95-Ped: É 32. P: Qual é o quinto termo? E95-Ped: Quinto? P: Quinto. O quarto termo é 32. E95-Ped: 24. P: O sexto termo? E93-Gui; E95-Ped: 16. P: Uma pergunta. Os valores estão diminuindo ou aumentando? E95-Ped; E93-Gui: Diminuindo. (...) Questão c) E95-Ped: Pegando o número [anterior] da sequência e multiplicando por 3. (...) Questão d) E95-Ped: Eu acho que repete quase a mesma coisa do último, professor. Pega o número da sequência [anterior] e multiplica por 3. (...)

Fonte: Dados da pesquisa.

As falas destacadas no Quadro 15 indicam que o professor/pesquisador interfere pouco na discussão, pois os estudantes elaboraram conjecturas acerca do padrão presente em cada sequência e as testaram com êxito. Contudo, alguns apresentam dificuldades para expressar as conjecturas elaboradas, principalmente, em relação a operação realizada no termo anterior para determinar o próximo termo (E82- Fel; E83-Gab; E95-Ped). Os diálogos corroboram com a afirmação feita ao analisar os protocolos dos estudantes (primeira etapa da pesquisa), ou seja, o trabalho com sequências numéricas tem enfatizado mais as relações numéricas do que a relação entre as variáveis. Em outras palavras, os estudantes se preocuparam mais em saber a operação que deveriam realizar para determinar os próximos termos da sequência do que evidenciar a relação entre as variáveis envolvidas na sequência (posição do termo e valor do termo).

A facilidade encontrada para responder o item i) da Atividade 2 não foi identificada nas duas primeiras etapas da pesquisa para o item ii) que requer a elaboração de uma *generalização distante*. Destaca-se que as resoluções consideradas corretas para esse item na primeira etapa da pesquisa foram apresentadas na língua natural como pode ser observado na Figura 5. Os diálogos referentes ao item ii) da Atividade 2 são apresentados em dois quadros (Quadro 16 e Quadro 17), pois houveram mais discussões do que na correção do item i). O Quadro 16 expõe os diálogos referentes ao item ii) das questões a) e b) que compõem a Atividade 2. É importante registrar que os diálogos entre o professor/pesquisador e os estudantes do 9º ano não são apresentados porque houveram problemas técnicos na gravação do áudio.

Quadro 16 – Diálogos referentes ao item ii) das questões a) e b) que compõem a Atividade 2

(continua)

7º ano	8º ano
Questão a) P: Como podemos determinar o termo da sequência em qualquer posição, a_n? E71-JP: Pulando de 40 em 40. E72-Lur: Somando de 40 em 40 para chegar no resultado. (...) E75-Vin: Tá vendo isso aqui ... É a mesma coisa [refere-se à Atividade 1] 1, 5, 9. [Agora é] 10, 50, 90. (...) E72-Lur: (...) 40 vezes, vezes o n que vai ficar menos 1 +10, ... P: Vamos verificar! E74-Val: O n não é 9, professor? P: O n pode ser qualquer número. (...) P: Se for 1 menos 1? E71-JP: 0. P: 0 vezes 40? E71-JP; E74-Val: 0. P: 0, né? Mais 10. Agora, vamos para o próximo. Se for 2, aqui vai ser 2 menos 1. 2 menos 1 é? E71-JP; E74-Val: 1. P: 40 vezes 1?	Questão a) P: Como é que a gente poderia determinar o a_n? E83-Gab: Sei lá, três vezes n? P: Qual é o primeiro termo? 10, né? Segundo termo? Terceiro termo? O que está acontecendo aqui? E83-Gab: Aumentando de 40 em 40. (...) E80-Ari: É que nem a última tabela que a gente fez [refere-se à Atividade 1]. Aquela outra era multiplicada por 3, não é? Por 4. P: Vira a folha para você olhar a questão (anterior). Olha a tabela da questão (anterior). (...) 1, 5, 9. Aqui é 10, 50, 90. Existe alguma coisa que a gente precisa escrever para isso? Se lá a fórmula era 4 vezes n menos 3, então seria o que [agora]? 40 vezes 1, menos 30, dá 10? 40 vezes 2, quanto é que é 40 vezes 2? E83-Gab; E82-Fel: 80. P: Menos 30. E82-Fel: 50. P: Então, que fórmula entraria aqui? A gente já percebe direitinho. O que muda? Só muda as figuras, os termos. Aqui muda os termos. Primeiro termo, segundo termo, terceiro termo, ...

Quadro 16 – Diálogos referentes ao item ii) das questões a) e b) que compõem a Atividade 2
(fim)

E74-Val: 40. P: 40 mais 10? E71-JP: 50. P: Fechou? $[a_n = 40(n-1) + 10]$ (...) Questão b) P: Vamos organizar uma tabela. Aí, o que acontece? Tem 56 (a_1)... E74-Val: 48 (a_2), 40 (a_3), 32 (a_4), 24 (a_5), 16 (a_6), 8 (a_7), 0 (a_8), depois é menos. Menos 8 e menos 16. P: Isso. Bem, percebe que até o décimo termo já temos alguma coisa. Como é que a gente descreveria essa fórmula? Começamos com 56, né? (...) E72-Lur: Tá diminuindo de 8 em 8... P: O 8! ok. Esse 8 tá multiplicando a posição. Se eu colocar 8 vezes o 1, que é o primeiro, que número eu tenho que ter aqui na frente pra dar 56? E71-JP: 7? Não! Espera aí. P: Tem um número aqui na frente menos esse 8 que dá 56. (...) E74-Val: 64! (...) E71-JP: a_n é 64 menos 8 “ponto” n. P: Tá, e o que é o ponto? E71-JP: Vezes. P: Ah, então, 64 menos 8 vezes n. É isso? E71-JP: 64 menos 8 vezes n. P: Isso. Entenderam como é que se faz isso? Estão começando a perceber? E71-JP: Sim! P: Não é difícil, mas tem que prestar atenção. Vamos ver o próximo.	E83-Gab: Então, por exemplo, dá para fazer assim 40 vezes 2 menos n igual a... P: Você quer dizer 40 vezes n menos 30? E83-Gab: É isso aí. (...) P: Fechou. Então, é isso. Então, essa é a fórmula (...) para o enésimo termo: 40 vezes n menos 30. (...) Questão b) E83-Gab: Está diminuindo (...) de oito em oito. P: Qual é o primeiro termo aqui? E83-Gab: 56. P: Se tu fizeres menos oito vezes um mais 56, o que vai acontecer? Vai dar para o primeiro termo? 48 é o segundo termo. (...) E83-Gab: 8 vezes 1 dá 8. P: Menos 8. Fica na frente. Menos 8 mais 64. 64 tira 8 fica... E83-Gab; E82-Fel; E84-Gui: 56. P: Fechou? 8 vezes 2. E83-Gab: 8 vezes 2 é 16. E84-Gui: 16. P: 16 desconta 64 dá? E84-Gui; E82-Fel: 48 P: Está fechando? E83-Gab; E82-Fel: Sim. P: Então, para expressar qualquer termo vamos ter o quê? Menos 8 vezes n mais 64. É difícil, né? Ou é fácil? Ninguém pensou nisso aí? E84-Gui: Não. (...)

Fonte: Dados da pesquisa.

Percebe-se que os estudantes do 7º ano, primeiramente, expressaram o padrão identificado em língua natural (“somando de 40 em 40”) e associaram os termos da sequência (10, 50, 90) aos da Atividade 1 (1, 5, 9) com intuito de generalizar (“*40 vezes n ...*”). Em seguida, o professor/pesquisador faz alguns questionamentos e testa algumas possibilidades para auxiliar os estudantes na generalização da sequência exposta na questão a). Nesse momento, os estudantes apenas realizaram as operações sugeridas pelo professor/pesquisador, em outros termos, não elaboraram conjecturas. Assim, a generalização foi apresentada pelo professor sem contribuições significativas dos estudantes. É importante registrar que, na Atividade 1, após o professor apresentar a generalização, $4(n-1)+1$, os estudantes reforçaram o uso da recursividade, exemplificada na fala de E70-Car ao afirmar "*Eu coloquei somando mais 4*".

A recursividade, também, está presente na discussão da questão b) e, novamente, o professor/pesquisador apresenta e testa conjecturas sem a participação efetiva dos estudantes. Ressalta-se que os estudantes tiveram poucas oportunidades de resolver situações-problema em que é necessário utilizar letras como variáveis. Talvez por isso a generalização em língua natural com base na recursividade seja mais fácil para eles (Campos; Gualandi, 2023). Contudo, é importante destacar que a BNCC (Brasil, 2018) indica o estudo de sequências numéricas e não numéricas desde os anos iniciais e com o passar dos anos de escolarização recomenda o uso de uma linguagem cada vez mais formal, entendendo o que cada símbolo significa.

Os estudantes do 8º ano buscaram a representação algébrica desde do início da discussão e relacionaram com a Atividade 1, principalmente, E80-Ari. Essa ação dá indícios de que começaram a compreender a utilidade da variável na resolução da situação-problema (Brasil, 1998; NCTM, 2008). Em seguida, o professor/pesquisador retomou a generalização elaborada na Atividade 1, $4n-3$, e questionou se na questão a) da Atividade 2 a fórmula é dada por $a_n = 40n - 30$. Para tanto, foi substituindo n por 1, 2, ... Os estudantes acompanharam o professor/pesquisador testar os valores na expressão compreendendo a generalização, pois relacionaram com a elaborada na Atividade 1.

Para a determinação do termo geral da questão b), o professor/pesquisador aproveitou que os estudantes identificaram o padrão da sequência, utilizando a *diferença* (recursiva) como estratégia, e sugeriu que buscassem o valor que subtraído de oito resultasse em 56. Após, alguns testes verificaram que o valor é 64, assim, o termo geral da sequência é dado por $a_n = -8n + 64$. Destaca-se que os estudantes do 8º ano tiveram no ano anterior algumas experiências envolvendo sequências numéricas, conforme já mencionado no capítulo anterior.

O termo geral das sequências propostas nas questões c) e d) não é dado por múltiplos de um número natural mais algum valor, mas por potências de um número natural. Conforme já mencionado, nenhum estudante apresentou adequadamente, em seus protocolos (primeira etapa da pesquisa), a representação algébrica do termo geral dessas sequências. O Quadro 17 expõe os diálogos referentes ao item ii) das questões c) e d) que compõem a Atividade 2.

Quadro 17 – Diálogos referentes ao item ii) das questões c) e d) que compõem a Atividade 2

(continua)

7º ano	8º ano
Questão c) E71-JP: 3 vezes 3 dá 9. P: Isso. E70-Car: Sim, nove vezes o três da 27. P: E o 27? Como surge o 27? E71-JP: 9 vezes o 3. E72-Lur: 3 vezes 3 vezes 3. P: Quantas vezes você contou 3? E72-Lur: 3. P: Ah, então, quer dizer que aqui é um 3. Aqui são dois 3. Aqui são três 3. Ok, 1, 2, 3, 4, 5, ... [relacionando com a posição dos termos da sequência]. Então, no próximo vai ser o quê? E71-JP; E74-Val; E72-Lur: 3 vezes 3 vezes 3 vezes 3. [refere-se ao quarto termo] E71-JP: Vai ser cinco 3. [refere-se ao quinto termo] E71-JP: seis 3. [refere-se ao sexto termo] E74-Val: 3; 3; 3; 3; 3; 3. [refere-se ao sexto termo] P: Então, como é que a gente escreve isso aqui? E74-Val: Não sei professor! E71-JP: Como assim? P: Na forma de... E72-Lur: O n? P: Na forma de... E71-JP: Potenciação! P: Potência. Como é que a gente escreve 3 vezes 3 na forma de potência? E71-JP: É um 3 com um 2 em cima? 3 escrito em cima e um 3 abaixo? P: E depois? E70-Car: 3 [na] 4. P: 3 elevado na 4? E71-JP: 3 elevado na 5. E70-Car: 3 elevado na 6. (...) P: Se for n? E74-Val: O infinito, o n. P: Em cima ou embaixo? E72-Lur; E74-Val; E70-Car: Em cima. P: Como é que se diz 3 na potência? E74-Val: n P: Ou expoente, então para n eu vou escrever isso aqui ($a_n = 3^n$). Está entendido? E74-Val: Sim, professor. P: Está difícil? E74-Val; E70-Car: Não. Questão d) P: Como podemos determinar o termo da sequência em qualquer posição? (...) P: Então, 2 vezes alguma coisa. 2 vezes o quê? E74-Val; E71-JP: 3.	Questão c) P: Como podemos determinar o termo da sequência em qualquer posição? E82-Fel: Multiplicar por três? P: Multiplicar por três? Então, como é que tu poderias escrever essa fórmula? Multiplicando por três? E82-Fel: Sequência de 3 vezes o valor... E83-Gab: Eu fiz o número... o número três vezes o número seguinte [anterior]. P: Três vezes o número seguinte? Mas, o número seguinte é esse que eu não sabia. E83-Gab: Não, não, não. Por exemplo, eu fiz o 27 ali, entendeu professor. Eu peguei o 27 e fiz... Fiz... Vezes, vezes 3. E daí? E daí o resultado é o 81? P: Ah, tá. Então, você está dizendo que você fez três vezes o termo anterior. Três vezes o valor do termo anterior para ter o termo seguinte. E83-Gab: Sim. (...) P: Quarto termo...81. E quando for n, como é que a gente escreve isso? (...) E83-Gab: 3 vezes n? P: 3 veze n ou 3 elevado na n? [gravação interrompida] Questão d) P: Qual é a fórmula para determinar o termo em qualquer posição, a_n. Quero uma expressão que quando eu colocar 1 na expressão, tem que dar 2. Quando colocar 2, tem que dar 6. E84-Gui: São pares. P: Todos eles são pares. Ele está multiplicando alguma coisa aqui, ó. E80-Ari: Por número ímpar. Tá multiplicando por 3 que é um número ímpar. (...) P: 2 vezes 3, 6. 2 vezes 3 vezes 3? E80-Ari: 18. P: Ah, então aqui é 1, aqui é 2. Mas não está fechando. Aqui, ó. Então, não pode ser 1, tem que ser 0. (...) P: Pensando que a tabela continua. Aí seria 2 vezes... Quantas vezes o 3? 3 vezes 3? [refere-se a a_4] E83-Gab: 3. P: 3, né? Vezes o fator 3. Na tabela do 5, seria 4 vezes? [refere-se a a_5] (...) P: Então, 2 veze 3 elevado na n menos 1. ($a_n = 2(3)^{n-1}$) (...)

Quadro 17 – Diálogos referentes ao item ii) das questões c) e d) que compõem a Atividade 2

(fim)

P: Tá, 3. Mas, se for n... E74-Val: Tem que colocar n, professor? E71-JP: 2 vezes $3n$. P: Vamos ver se vai funcionar... Se isso aqui for 1, vai ser 2 vezes o 3 vezes 1. Então, vai ser 6 aqui? E71-JP: Sim? E74-Val: Não deu! P: Então, tem alguma coisa que não está funcionando. (...) E71-JP: 2 vezes 3 mais 1? Não. Não dá né ... P: Não. (...)	

Fonte: Dados da pesquisa.

Assim como no item ii) das questões a) e b), os estudantes do 7º ano iniciaram as discussões para o resolver os itens c) e d) identificando o padrão das sequências e o expressaram na língua natural, utilizando relações recursivas como estratégia. Na tentativa de auxiliar os estudantes na *generalização distante*, relacionando com operações conhecidas por eles (potenciação), e no entendimento das variáveis envolvidas na questão, o professor/pesquisador questionou "*Quantas vezes você contou 3?*" para obter o terceiro termo da sequência e os estudantes rapidamente responderam corretamente. Na sequência, o professor/pesquisador comentou "*Ah, então, quer dizer que aqui é um 3. Aqui são dois 3. Aqui são três 3. Ok, 1, 2, 3, 4, 5, 6" e questionou "Então, no próximo vai ser o quê*?" e os estudantes imediatamente utilizaram essa estratégia para afirmar que o três será multiplicado por ele mesmo seis vezes.

Em seguida, o professor/pesquisador questionou como expressar esse padrão, mas os estudantes do 7º ano ainda apresentam dificuldades na elaboração da *generalização distante*, conduzindo o professor/pesquisador a quase dar a resposta "*Na forma de (...) Como é que a gente escreve 3 vezes 3 na forma de potência?*". Percebe-se que o uso da letra (n) na questão ainda não faz sentido para a maioria desses estudantes. Isso pode ser observado no diálogo para a resolução do item ii) da questão d) quando o estudante questionou "*Tem que colocar n, professor?*".

Os estudantes do 8º ano, também, recorreram a relações recursivas como estratégia para responder o item ii) das questões c) e d) e a dificuldade de expressar essa relação continuou como pode ser verificado no comentário de E83-Gab "*Eu fiz o número... o número três vezes o número seguinte*". Na busca pelo termo geral da sequência (questão c)), o professor/pesquisador questionou "*E quando for n, como é que a gente escreve isso*?" e E83-Gab respondeu "*3 vezes n?*", provavelmente, tomando como referência as generalizações anteriores. Em seguida, o professor/pesquisador fez outro questionamento apontando a solução ("*3 veze n ou 3 elevado na n?*"). A sequência da discussão não foi gravada por problemas técnicos, mas o professor/pesquisador junto com os estudantes testaram as conjecturas anteriores para finalizar a resolução da questão. Na questão d), os estudantes apresentaram algumas conjecturas, mas o professor/pesquisador conduziu a generalização sem a participação efetiva deles.

Ao analisar os diálogos percebe-se que o professor/pesquisador enfatizou a relação entre as variáveis mais do que na correção da Atividade 1. Para isso, em alguns momentos, o professor/pesquisador incentivou o uso da representação tabular como pode-se observar na seguinte fala: "*Pensando que a tabela continua. Aí seria 2 vezes... Quantas vezes o 3? 3 vezes 3?*". A relação com a Atividade 1 para resolver a questão a) foi importante para os estudantes, em particular, do 8º ano, elaborarem estratégias para a resolução de outras situações quando o padrão é constante.

É importante destacar que a generalização das questões b) e c) não eram fáceis, assim, poderiam ter sido explorados padrões em que a *diferença* fosse utilizada como estratégia, mas sem ajustes e a identificação de que os termos da sequência são dados pela potência de um número natural fosse imediata. Contudo, registra-se que os estudantes, durante os anos finais do Ensino Fundamental, deverão analisar situações que apresentem diferentes padrões de variação, a saber: a variação que ocorre a uma taxa constante e taxas de variação que aumentam ou diminuem (Ponte; Matos; Branco, 2009; NCTM, 2008).

A análise dos protocolos dos estudantes (primeira etapa da pesquisa) indica que a maioria dos estudantes não obteve sucesso na resolução dos itens a) e b) da Atividade 3 (Quadro 5). O melhor desempenho foi dos estudantes do 8º ano. Talvez por isso durante a correção desses itens o diálogo foi mais intenso com os estudantes do 7º e do 9º ano, conforme exemplificado no Quadro 18.

Quadro 18 – Diálogos referentes aos itens a) e b) da Atividade 3

7º ano	8º ano	9º ano
Item a) P: Quantos pontos tem cada figura? E74-Val: 1, 4, 9, 16 ... P: Na próxima figura? E74-Val: 21? E72-Lur: oh?? 21! E70-Car: Não! E71-JP: 23? E70-Car: Não! E74-Val: 25. E75-Vin: 26? (...) Item b) P: Quantos pontos tem a 12ª figura? E75-Vin: 50? (...) E74-Val: Eu sei professor, 3 vezes 3, 4 vezes 4, 5 vezes 5, 6 vezes 6, 7 vezes 7, 8 vezes 8, 9 vezes 9... E74-Val; E70-Car: 9 vezes 9, 10 vezes 10, 11 vezes 11, 12 vezes 12... (...)	Item a) P: Quantos pontos tem a figura seguinte nessa sequência? E83-Gab; E81-Bru: 25. (...) Item b) P: Quantos pontos tem na décima segunda figura dessa sequência? E83-Gab: 144. P: Como é que chegou a essa conclusão? (...) E83-Gab: Eu multiplico pelo mesmo número, professor? (...) E81-Bru: 1x1. 2x2. 3x3. 4x4. E assim segue. (...)	Item a) E95-Ped: Professor, por favor, vamos primeiro completar a tabela (item f)). P: Vamos à tabela? Você acha melhor a tabela? E95-Ped: Sim. (...) P: E na 5? A partir de agora, o que nós vamos ver? Temos a figura 1, 2, 3, 4. E93-Gui: Na cinco tem 25. P: 25. Ok. Como chegou a essa conclusão que é 25? E93-Gui: Porque cada lado ali teria 5 pontos, e 5 vezes 5 é 25. E95-Ped: Professor, eu posso supor uma expressão. Elevar ao quadrado? P: O que? E95-Ped: O número do termo. (...) E95-Ped: Número elevado ao quadrado. P: Como representa? E95-Ped: n^2? (...) Item b) P: Quantos pontos tem a 12ª figura dessa sequência? E95-Ped: 144. P: Por que você chegou a esse resultado? E95-Ped: 12 ao quadrado, 12 vezes 12. (...)

Fonte: Dados da pesquisa.

O diálogo entre professor/pesquisador e os estudantes do 7º ano revela que eles tiveram dificuldades na identificação do padrão da sequência figural, provavelmente, porque a *diferença* (recursiva) como estratégia para a resolução do item a) não funcionou. Em seguida, E74-Val e E70-Car explicam corretamente como determinaram a quantidade de pontos da décima segunda figura. No 9º ano, E95-Ped sugeriu completar a tabela (item f)) antes de responder os itens a) e b). Após, assim como nas atividades anteriores, generalizou o padrão rapidamente, o que pode ter inibido a participação dos demais estudantes e, também, os questionamentos do professor/pesquisador.

O desempenho nos itens c) e d) dos estudantes na atividade individual evidencia a dificuldade na identificação do padrão da sequência figural. Essa dificuldade ainda se fez presente durante a correção, principalmente, no 7º ano, conforme exemplificado no Quadro 19.

Quadro 19 – Diálogos referentes aos itens c) e d) da Atividade 3

7º ano	8º ano	9º ano
Item c) P: Existe uma figura nessa sequência com 100 pontos? E71-JP; E74-Val: Não existe... P: Será que não? E74-Val: Não sei, acho que existe... P: Que figura é essa? E74-Val: Ah é 120 vezes 120. P: Não! Como 120 vezes 120 vai dar 100? E74-Val: Ah, ali tem 100, 100 vezes 100? E70-Car: Não, 10 vezes 10... P: 10 vezes 10, muito bem! (...) Item d) P: Existe uma figura com 120 pontinhos? E74-Val: 11x11 E71-JP: Sim P: 11x11 dá quanto? E71-JP: 120! E72-Lur: Não! (...)	Item c) P: Existe uma figura nessa sequência com 100 pontos? Sim ou não? E83-Gab: Sim, não? Sim, existe. P: Que figura é essa? E83-Gab: É a 10ª figura. E81-Bru: Décima. P: Todo mundo chegou a esse consenso que é a 10ª figura. Quem é que não chegou? (...) Item d) P: Existe uma figura nessa sequência com 120 pontos? E80-Ari: Sim. E83-Gab: Não. P: Uns disseram não e outros sim? Por que, sim? E80-Ari: Não dá número par. E83-Gab: Nenhum deles termina com 0. Entendeu? Ali na tabela nenhum deles terminou com 0. (...)	Item c) P: Existe uma figura nessa sequência com 100 pontos? E95-Ped; E93-Gui: Sim. P: Qual seria essa figura? E95-Ped; E93-Gui: A décima. P: Como saberia que tem 100 pontos na 10ª figura? E95-Ped: Porque 10 vezes 10 é 100. P: Ah, certo! Seria 10 ao quadrado. Poderia também se utilizar uma outra operação matemática. Qual é a operação matemática? E93-Gui: Multiplicar? (...) Item d) P: Poderia fazer raiz quadrada de 100. Vamos ver na sequência. Existe uma figura nessa sequência com 120 pontos? E95-Ped: Não. P: Por que, não? E95-Ped: Porque 10 elevado ao quadrado é 100, e 11 elevado ao quadrado é 121.

Fonte: Dados da pesquisa.

As falas dos estudantes (Quadro 19) revelam que a *tentativa e erro* foi utilizada como estratégia pelos estudantes do 7º ano, mesmo que E74-Val e E70-Car tenham identificado o padrão nos itens anteriores. Já os estudantes do 8º e 9º ano responderam rapidamente aos questionamentos do professor/pesquisador com base nos dados da tabela (item f)). Novamente, completar a tabela antes de responder as questões auxiliou os estudantes e permitiu a eles identificarem outros padrões, por exemplo, E83-Gab respondeu que não teria uma figura com 120 pontos, pois na representação tabular não tem nenhum número que termina com zero. É importante registrar que, como alguns estudantes do 9º ano generalizaram a expressão antes de responder os itens c) e d), o professor/pesquisador tentou explorar a resolução das equações $n^2 = 100$ e $n^2 = 121$, mas não obteve retorno dos estudantes, deixando que as respostas fossem dadas por meio da operação de multiplicação.

O Quadro 20 expõe os diálogos entre o professor/pesquisador e os estudantes durante a correção dos itens e) e g) da Atividade 3. Destaca-se que completar os dados da tabela (item f)) foi realizado antes, assim, as falas já foram analisadas.

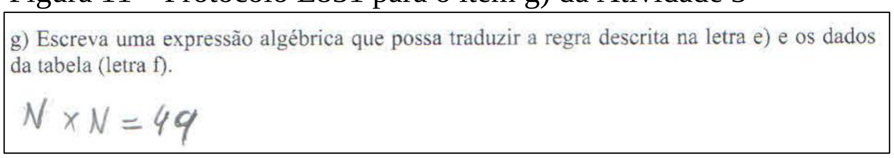
Quadro 20 – Diálogos referentes aos itens e) e g) da Atividade 3

7º ano	8º ano	9º ano
Item e) P: Escreva uma regra que permite determinar o número de pontos para qualquer figura dessa sequência? E74-Val: 5x5, 6x6, 7x7, ... P: O que está dizendo? E74-Val: É para multiplicar. P: Multiplicar o que? E74-Val: Esses números para achar o resultado final. (...) Item g) P: Como seria a expressão? E74-Val: A expressão tem de colocar n, professor? E70-Car: Tem que colocar n, na dois, acho! P: Escreva como fazer? E70-Car: n, dois em cima, eu acho, alguma coisa assim... P: Essa é expressão algébrica? E70-Car: Ah, não sei! P: Como escreveu [E71-JP]? E71-JP: Multiplicando. P: É igual ao número da figura vezes ela? E74-Val: Vezes ela mesma. E71-JP: Fazendo o número da figura vezes ela e descobrindo ... (...) E74-Val: 4x4, 5x5, 6x6, n vezes n. P: Isso! Então, uma figura n seria n vezes n.	Item e) E83-Gab: Eu multipliquei pelo mesmo número da figura. Por exemplo, na figura 10 fiz 10 vezes 10 que é igual a 100. (...) Item g) P: Qual a expressão algébrica, E83-Gab? E83-Gab: Nossa, eu fiz n vezes n igual a 49, mas eu acho que não. P: Então, você fez assim, n vezes n? Então, a expressão algébrica é n vezes n. Ok.	Item e) P: Escreva uma regra que permite determinar o número de pontos de qualquer figura dessa sequência. E95-Ped: Elevar o número ao quadrado. P: Como? E95-Ped: Elevar qualquer número ao quadrado. (...) Item g) P: Escreva uma expressão algébrica que possa traduzir a regra descrita na letra e) e os dados da tabela. O que significa essa expressão algébrica? A gente já escreveu? E93-Gui: Sim, n elevado ao quadrado? (...)

Fonte: Dados da pesquisa.

As respostas para o item e) mostram que os estudantes do 7º e 8º ano recorrem a exemplos numéricos para explicitar, na língua natural, o padrão identificado na sequência figural. Já E95-Ped expressou a regra solicitada sem dificuldades. Esse resultado indica que a expressão do pensamento algébrico pode ser refinada com ao longo dos anos de escolaridade, mas, para isso, é preciso incentivar que os estudantes descrevam de forma oral ou escrita como resolveram as questões (Brasil, 1998; NCTM, 2008; Silva; Moreira, 2018). Quanto ao item g), que na atividade individual (primeira etapa da pesquisa) obteve apenas dois acertos, percebe-se que os estudantes do 7º ano mencionam a necessidade de utilizar a letra (n) e propõem duas formas de expressar a generalização, a saber: a) n e dois em cima, proposta por E70-Car, ou seja, n^2; b) n vezes n, indicada por E74-Val, isto é, $n \times n$. Observa-se que as expressões propostas pelos estudantes não apresentaram a igualdade esperada, ou seja, $Q = n^2$. Isso indica que é preciso explorar mais a relação entre as variáveis envolvida na atividade, bem como o significado das letras na expressão algébrica (Pereira, 2013; Campos; Gualandi, 2023). A fala de E83-Gab, sobre sua resposta na avaliação individual (Figura 11), corrobora com essa afirmação quando menciona que: "*Nossa, eu fiz n vezes n igual a 49, mas eu acho que não*".

Figura 11 – Protocolo E831 para o item g) da Atividade 3


g) Escreva uma expressão algébrica que possa traduzir a regra descrita na letra e) e os dados da tabela (letra f).

N × N = 49

Fonte: Dados da pesquisa.

A representação algébrica apresentada pelo estudante (Figura 11) indica que é preciso explorar mais situações como essa de modo que compreendam que "a letra percorre diferentes valores dentro de um determinado domínio numérico, provocando, desta forma, variações nos valores de uma expressão algébrica que depende dela" (Silva; Moreira, 2018, p. 259). Além disso, a noção de igualdade também deverá ser desenvolvida, em outros termos, os estudantes precisam compreender que o sinal de igualdade não apenas indica uma operação a ser realizada, mas expressa uma relação, uma equivalência (Brasil, 1998; NCTM, 2008; Ponte; Matos; Branco, 2009).

Ao abordar a Atividade 3, o professor/pesquisador poderia ter incentivado os estudantes a verbalizarem e justificarem a regra geral para determinar o número de pontos de cada figura, relacionando com o modelo geométrico. Em outros termos, a relação com a área do quadrado poderia ter sido explorada com mais ênfase do que as relações numéricas para expressar a relação funcional presente na situação-problema, conforme sugerem Brasil (1998, 2018), NCTM (2008), Ponte, Matos e Branco (2009).

Para finalizar a aula de correção foi explorada a Atividade 4 (Quadro 7). A análise dos protocolos dos estudantes dos itens a) e b) indica um desempenho superior ao da Atividade 3 e próximo da Atividade 1. Esses resultados apontam que os estudantes conseguem elaborar *generalizações próximas* para padrões envolvendo função afim com mais facilidade do que outros (função quadrática, exponencial). O Quadro 21 apresenta os diálogos entre o professor/pesquisador e os estudantes das três turmas na resolução dos itens a) e b) da Atividade 4.

Quadro 21 – Diálogos referentes aos itens a) e b) da Atividade 4

7º ano	8º ano	9º ano
Item a) E74-Val: Aumenta de 4 em 4. E73-Mar: Professor, então ali vai dar 18. [refere-se ao 4º termo] (...) Item b) P: Quantas cadeiras há na 10ª figura dessa sequência? E74-Val: Já não sei mais! E71-JP: 26. E73-Mar: Não, vai dar 24? Não, 48! E74-Val: Ei, só chutando essa gente... (...) P: Presta atenção, uma mesa, vamos tirar as cadeiras da ponta (da cabeceira). Quantas cadeiras tem ali? E70-Car; E74-Val: 4. P: Quatro vezes dez? E70-Car: 40, mais dois, 42. P: Isso aí!	Item a) P: Quantas cadeiras tem a 1ª figura? E83-Gab: Tem 5 cadeiras. P: Tem 5? E83-Gab: Não, não, 6. P: Na próxima figura? [refere-se a Figura 2] E83-Gab:10. P: E na próxima? [refere-se a Figura 3] E83-Gab: 14. P: 14? Então, 6, 10, 14. E83-Gab: Sim. P: E na próxima figura? [refere-se a Figura 4] E83-Gab: 18. Item b) P: 18, certo. Quantas cadeiras tem a 10ª figura? E83-Gab; E82-Fel: 42. P: Aham. Deu para responder sem fazer tabela? E83-Gab: Sem tabela. P: Sem tabela! Ok!	Item a) P: Primeira figura, quantas cadeiras? E95-Ped: Quatro? Seis! E95-Ped: Segunda? E92-Dom: 10. (...) P: Quarta? E95-Ped; E94-Jos; E93-Gui; E91-Dio: 18. P: Ok. (...)

Fonte: Dados da pesquisa.

Ao analisar as falas destacadas no Quadro 21, constata-se que os estudantes identificaram o padrão da sequência figural e por meio da *contagem* e da *diferença* (recursiva) determinaram a quantidade de cadeiras da quarta figura. Em relação a quantidade de cadeiras da décima figura, percebe-se que os estudantes do 7º ano, mesmo identificando o padrão, tiveram mais dificuldades e precisaram da ajuda do professor/pesquisador para chegar no resultado. Já os estudantes do 8º ano, em particular, E83-Gab; E82-Fel responderam rapidamente e, ainda, destacaram que não fizeram uso da tabela (item f)) para chegar na solução. Isso indica que esses estudantes, já no item b), construíram uma regra que permitiu determinar, de imediato, qualquer termo da sequência, isto é, mobilizaram a estratégia *explícita*, contemplando a *generalização distante*. Os estudantes do 9º ano optaram por preencher a tabela (item f)) antes de responder o item b).O desempenho dos estudantes, na atividade individual (primeira etapa da pesquisa), nos itens c) e d), foi inferior aos itens a) e b) e muitos não justificaram suas respostas como mencionado anteriormente. Na aula de correção das atividades o professor/pesquisador precisou insistir nas justificativas (Quadro 22), mesmo com a turma do 8º ano que na resolução do item b) deu indicativos de conseguir elaborar uma *generalização distante*.

Quadro 22 – Diálogos referentes aos itens c) e d) da Atividade 4

7º ano	8º ano	9º ano
Item c) P: Existe uma figura na sequência com 82 cadeiras? E74-Val: Acho que não. E71-JP: Sim. P: Sim, por quê? Que figura é? Quantas mesas é preciso para 82 cadeiras? E71-JP: Mais que 42? E74-Val: 42? P: Quantas mesas vou precisar para usar 82 cadeiras? (...) E74-Val: 10, 20, 30, 40? (...) E74-Val: Não, professor, dá quase 20. E70-Car: Calma aí professor. E73-Mar: 20 mesas professor, 20 mesas! P: Vinte mesas? Vamos ver, 4 vezes 20? E74-Val: 4x20? Dá 80 mais 2, 82! (...) Item d) P: Existe uma figura com 120 cadeiras? E74-Val: Não! E72-Lur: Não existe! P: Não existe, por quê? Porque vai ser assim, 4x30 é 120, mais 2. (...)	Item c) P: Existe uma figura nessa sequência com 82 cadeiras? E83-Gab: Não. P: Por que não? E84-Gui: Sim. E80-Ari: Não. P: Por que sim? E83-Gab: Sim, será a figura de número 20. A 20ª. (...) Item d) P: Existe uma figura na sequência com 120 cadeiras? E84-Gui; E82-Fel: Não. P: Não. Que figura seria essa? Qual, que seria a figura então na sequência? E83-Gab: Trigésima, por aí. P: 4 vezes 30, dá 120 mais 2. Então, teria mais 2 cadeiras. 120 seria a mesa faltando 2 cadeiras. A última mesa faltando 2 cadeiras? (...)	Item c) [responderam o item g) antes] E95-Ped: 4 vezes 20, 80 mais 2, 82, não? P: Isso que eu estava esperando de vocês. Item d) [responderam o item g) antes] P: Existe uma sequência com 120 cadeiras? E95-Ped: Não. P: 4 vezes... E95-Ped: 4 vezes 30. P: Dá quanto? Quatro vezes 30? E95-Ped: 4 vezes 30 dá 60. Não, dá 120. Mas, a questão é que tem mais 2, dá 122, então, não existe.

Fonte: Dados da pesquisa.

As falas dos estudantes apresentadas, no Quadro 22, revelam que os estudantes do 9º ano, em particular, E95-Ped, responderam os itens c) e d) por meio da estratégia *explícita* e os estudantes do 7º ano recorreram a *tentativa e erro* como estratégia. Os questionamentos do professor/pesquisador nas turmas do 8º e 9º ano foram direcionados para a confirmação das respostas elaboradas pelos estudantes ("*Isso que eu estava esperando de vocês*"). Já no 7º ano os questionamentos conduziram as repostas dos estudantes, por exemplo, ao afirmar que "*Não existe, por quê? Porque vai ser assim, 4x30 é 120, mais 2*".

Na atividade individual apenas dois estudantes do 8º ano apresentaram uma resposta adequada para o item e) e três para o item g) da Atividade 4, sendo dois do 8º ano e um do 9º ano. Esse resultado revela a dificuldade dos estudantes na elaboração da *generalização distante*. Dada essa dificuldade o professor/pesquisador, assim como nas atividades anteriores, dedicou mais tempo para as discussões e incentivou os estudantes a elaborarem e testarem conjecturas, conforme exemplificado no Quadro 23.

Quadro 23 – Diálogos referentes aos itens e) e g) da Atividade 4

(continua)

7º ano	8º ano	9º ano
Item e) e f) E71-JP: Somando um número com outro, porque tá pulando de 4 em 4. P: Pula de 4 em 4, alguma coisa aqui te ajuda? Enxerga isso? E71-JP: Sim. P: Como escreve essa expressão? E72-Lur: n mais não sei o que ... E71-JP: Tá somando, pode ajudar também? P: Somando pode, mas... E71-JP: E somando... subtraindo ... não para aí... P: Vamos lá, o 6 não é 4 vezes 1 mais 2? E72-Lur: Sim! P: 4 vezes 2 mesas mais 2? E71-JP: Adição, mais ... E74-Val: Subtração? E71-JP: Multiplicação... P: Tá como a gente poderia escrever? Poderia escrever 4 vezes quantidade de mesas mais 2? (...) P: Como ficaria a tabela? E74-Val: 6, 10,14, ... (...) E74-Val: 18, 22, ... (...) P: E se for n? E70-Car: 38? E74-Val: Dá 4 n... (...)	Item e) P: Escreve uma regra que permite fazer esse cálculo para todas elas. E83-Gab: 2 mais 2 igual a 4, a cada mesa aumentava, mas poderia utilizar a tabuada... (...) P: Tabuada do quatro mais o quê? E83-Gab: Mais 2. 4 vezes 1, 4, mais 2, 6. (...) Item g) E83-Gab: 4 vezes n. P: Aham. E83-Gab: Mais 2, igual a 6. P: Por que 6, aqui? E83-Gab: 4 vezes 1, que dá 4, daí mais 2, então vai dar 6. P: Tá. (...) Vamos supor que quero 10. Então, vai ser 4 vezes 10, 40 mais 2, 42. Por isso, que chega lá na letra c, né? (...) P: Qual a expressão que colocaria ali? E83-Gab: A mesma dali [refere-se a expressão anterior], professor. (...)	Item e) e g) P: O que a gente percebe nessa sequência? E95-Ped: Que aumenta 4. P: Aumenta 4. Vamos pensar numa expressão algébrica, usando a letra n. E95-Ped: Acho que sei, professor. n somado a 4 e no final acrescenta mais 2? P: Será que é n mais 4? Vamos ver. Se n for 4, então, olha só, 1 mais 4, 5 mais 2? E95-Ped: Seis. E91-Dio: Não, sete. P: É sete? (...) E95-Ped: E se somar quatro por mesa? P: Quatro por mesa. Então, o que seria necessário? Como é que a gente faz essa operação? (...) E93-Gui: Cada mesa tem seis cadeiras... P: Vamos olhar a figura. Tem uma coisa que fica fixa. E93-Gui: mantém as cadeiras das pontas. (...) E93-Gui: As duas. Somar mais 2. Era isso que eu queria dizer. Não soube me expressar.

Quadro 23 – Diálogos referentes aos itens e) e g) da Atividade 4

(fim)

P: 4 vezes n mais 2? E74-Val: Sim, professor! Item g) P: $4n + 2$		P: Está chegando próximo da expressão. O que eu vou colocar aqui? E95-Ped: 4, mais 2. E94-Jos: n? E95-Ped: $4n$ mais 2. P: Vamos ver se funciona. 4 vezes uma mesa, mais 2, dá 6. Quatro vezes dois, ... (...)

Fonte: Dados da pesquisa.

As respostas dadas pelos estudantes (Quadro 23) para o item e) mostram que o padrão foi identificado rapidamente pelos estudantes, ou seja, “aumenta quatro cadeiras a cada mesa acrescentada”. Contudo, a escrita de uma regra que permite determinar a quantidade de cadeiras de qualquer figura da sequência dada não foi construída de forma imediata, pois era preciso identificar que nas pontas das mesas sempre eram acrescentadas duas cadeiras. O professor/pesquisador, percebendo que os estudantes do 7º ano tentaram adivinhar qual operação deveria ser feita para obter a quantidade de cadeiras, sugeriu que eles completassem a tabela (item f)). A *diferença* (recursiva) foi utilizada como estratégia para completar a tabela, o que em um primeiro momento não auxiliou os estudantes na elaboração da regra (item e)) e da expressão algébrica (item f)). A fala de E74-Val indica que ele percebeu que os valores da tabela são dados por múltiplos de quatro, mas foi o professor que mencionou que precisaria adicionar dois.

As falas dos estudantes do 8º ano evidenciam as relações numéricas em detrimento da análise figural (abordagem visual), pois recorreram aos resultados das tabuadas para responder as questões. No 9º ano, o professor/pesquisador tentou que os estudantes dessem mais atenção para representação figural na obtenção da expressão algébrica ao mencionar que “*Vamos olhar a figura. Tem uma coisa que fica fixa*”. Em outras palavras, incentivou que os estudantes justificassem as respostas com base na análise da figura e por meio dela chegassem à *generalização distante*. Talvez essa atividade poderia ter sido a primeira proposta e o incentivo a análise figural poderia ter sido maior do que completar a tabela por meio de relações recursivas (Vale, 2012, 2013; Vale; Barbosa, 2019; Barbosa; Vale, 2022; Barbosa, Vale, Gualandi, 2025). “A necessidade de pensar e raciocinar visualmente é muito forte e pode ser uma ferramenta cognitiva muito importante no desenvolvimento de conceitos e processos matemáticos, incluindo a resolução de problemas” (Rivera, 2011 apud Vale; Barbosa, 2019, p. 403).

Vale e Barbosa (2019, p. 413) ao analisarem o desempenho, de um grupo de futuros professores do ensino básico de Portugal, na resolução de uma atividade semelhante a proposta na Atividade 4, constataram que a maioria foi bem nas questões que poderiam ser resolvidas por meio da *generalização próxima*, mas "nem todos foram bem sucedidos na generalização distante". Além disso, perceberam que os futuros professores mudaram de estratégia na transição da *generalização próxima* para a *generalização distante*. Eles iniciaram utilizando a *diferença* (recursiva) e depois recorreram a *tentativa e erro* ou a identificação de uma relação funcional por meio do *reconhecimento de relações numéricas generalizáveis*, como observado nas falas dos estudantes desta pesquisa quando mencionam a tabuada.

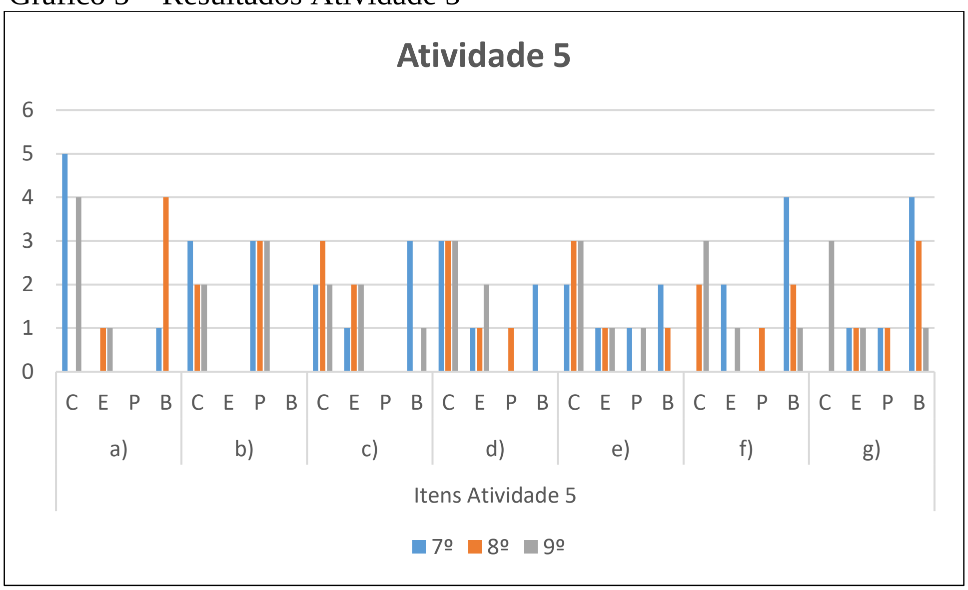
Ao analisar os diálogos produzidos durante a aula de correção das atividades, pode-se afirmar que o foco poderia ser posto, num primeiro momento, na compreensão das relações existentes entre as variáveis envolvidas na situação e depois no uso das letras, conforme indicam Vale (2012, 2013), Silva Moreira (2018), Barbosa, Vale e Gualandi (2025), entre outros pesquisadores. As discussões com os estudantes do 7º e 8º ano deveriam ter priorizado o uso da língua natural para expressar a *generalização distante*. Em outros termos, incentivar os estudantes a elaborarem "formas cada vez mais compactas e universais de expressar suas ideias ligadas à generalização, até que alcancem um grau de abstração compatível com o uso recorrente da simbologia algébrica padronizada" (Silva; Moreira, 2018, p. 261). Contudo, é preciso considerar que os estudantes dos anos finais do Ensino Fundamental "devem modelar uma grande diversidade de situações. Por vezes, usarão o seu modelo para prever o elemento seguinte de um padrão [...] Outras vezes, [...] poderão ser capazes de fazer uma generalização acerca da relação de uma variável com outra" (NCTM, 2008, p. 186).

A *diferença* (recursiva) foi a estratégia mais utilizada pelos estudantes para responder, principalmente, os itens a), b), c), d) e f). Essa estratégia também foi a mais utilizada pelos seis estudantes do 7º ano de uma escola pública do interior do Paraná que participaram da investigação realizada por Carneiro, Araman e Serrazina (2022). Os pesquisadores constataram que os estudantes tinham facilidade em elaborar *generalizações próximas* por meio dessa estratégia, mas dificuldades na construção de *generalização distante*. Conforme Vale e Barbosa (2019), a estratégia *diferença* (recursiva) é muito utilizada por estudantes mais novos e pelos que apresentam mais dificuldades na generalização de padrões. Além disso, essa estratégia "não promove a capacidade de análise da relação funcional entre cada termo e a sua posição, aspeto chave no pensamento algébrico" (Vale; Barbosa, 2019, p. 405). Assim, pode-se afirmar que a recursividade tem predominado como uma das estratégias mais utilizadas pelos estudantes.

4.3 ANÁLISE DA 3ª ETAPA DA PESQUISA: O QUE INDICAM AS RESOLUÇÕES DAS ATIVIDADES PROPOSTAS AOS ESTUDANTES SOBRE GENERALIZAÇÃO DE PADRÕES

Assim como nas atividades que compõem a primeira etapa da pesquisa, as resoluções dos estudantes apresentadas nos protocolos foram classificadas em: correta (C), parcialmente correta (P), errada (E) e branco (B) - indicando que nenhuma resposta foi apresentada. O Gráfico 5 apresenta os resultados do desempenho dos estudantes ao responderem a Atividade 5.

Gráfico 5 – Resultados Atividade 5

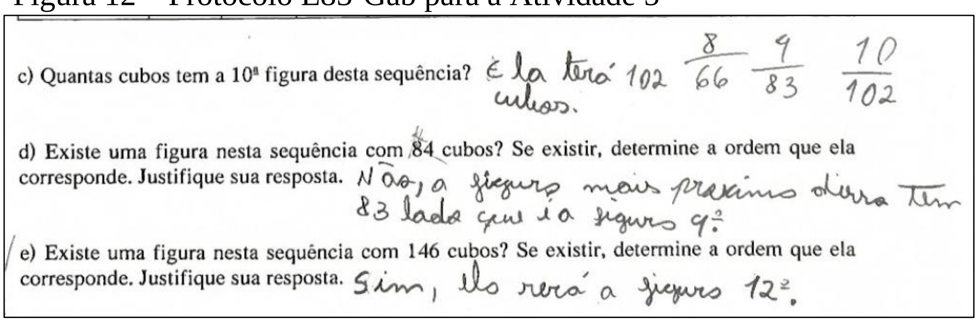


Fonte: Autoria própria.

Ao analisar os dados do Gráfico 5 e comparar com os resultados da Atividade 3 (Gráfico 3), percebe-se que o desempenho dos estudantes do 7º e 9º ano melhorou no item a), contudo, nenhum estudante do 8º ano conseguiu êxito nesse item, sendo que na Atividade 3 foram os que tiveram melhor desempenho. Uma explicação para esse resultado pode estar associada ao fato de que primeiro completaram a tabela (item b)) e esqueceram de responder o item a). Quanto ao item b) que corresponde ao item f) da Atividade 3, pode-se considerar que os estudantes tiveram um desempenho melhor, pois sete completaram corretamente a tabela e nove completaram parcialmente, ou seja, não preencheram alguma coluna de forma correta. Em relação as estratégias utilizadas para responder os itens a) e b), constata-se que recorreram a contagem e a relações recursivas, estratégias essas características da *generalização próxima*. Destaca-se que a última coluna da tabela que corresponde a *generalização distante* foi preenchida por quatro estudantes, o que não aconteceu na primeira etapa da pesquisa.

A quantidade de cubos da 10ª figura (item c)) foi determinada de forma correta por sete estudantes, o que não corresponde a um avanço significativo em relação ao item b) da Atividade 3, no qual seis estudantes acertaram. A maioria dos estudantes optou por continuar os dados da tabela para responder ao item c), como indica a Figura 12. Assim como nos itens anteriores, é possível perceber que a *generalização próxima* predomina na resolução dos estudantes. Quanto aos item d) e e), constata-se que a quantidade de acertos não aumentou em relação aos itens semelhantes da Atividade 3, mas as justificativas apresentadas nessa terceira etapa da pesquisa são mais coerentes que na primeira etapa, o que indica que os estudantes compreenderam que não basta uma resposta binária (sim ou não) é preciso argumentar com base na identificação do padrão. A Figura 12 expõe uma das respostas para os itens d) e c). Nem todos os estudantes que responderam corretamente esses itens conseguiram elaborar uma *generalização distante*, o que indica que a *generalização próxima* foi mobilizada.

Figura 12 – Protocolo E83-Gab para a Atividade 5


c) Quantas cubos tem a 10ª figura desta sequência? Ela terá 102 cubos. 8/66 9/83 10/102

d) Existe uma figura nesta sequência com 84 cubos? Se existir, determine a ordem que ela corresponde. Justifique sua resposta. Não, a figura mais próxima dessa tem 83 lado que é a figura 9ª

e) Existe uma figura nesta sequência com 146 cubos? Se existir, determine a ordem que ela corresponde. Justifique sua resposta. Sim, ela será a figura 12ª.

Fonte: Dados da pesquisa.

Em relação aos itens f) e g) que correspondem a *generalização distante*, pode-se dizer que há uma melhora quanto a Atividade 3, pois no item que requer uma generalização na representação algébrica três estudantes obtiveram êxito e dois apresentaram respostas bem próximas do exigido. A Figura 13 expõe a *generalização distante* elaborada por E97-Jos.

Figura 13 – Protocolo E94-Jos para a Atividade 5

b) Complete a tabela

Posição da figura (n)	1	2	3	4	5	6	7	...	n
Quant. de cubos (Q)	3	6	11	18	27	38	51		m.m+2

+2 +2 +2 +2 +2 +2

Fonte: Dados da pesquisa.

A *generalização distante* dada na representação algébrica ainda gera dúvidas nos estudantes como indica o protocolo de E71-JP (Figura 14). Em outros termos a estratégia *explícita* ainda não é mobilizada por todos os estudantes. Dessa forma, é preciso incentivar mais os estudantes a elaborarem conjecturas e testarem antes de apresentarem uma generalização seja língua natural ou na representação algébrica.

Figura 14 – Protocolo E71-JP para a Atividade 5

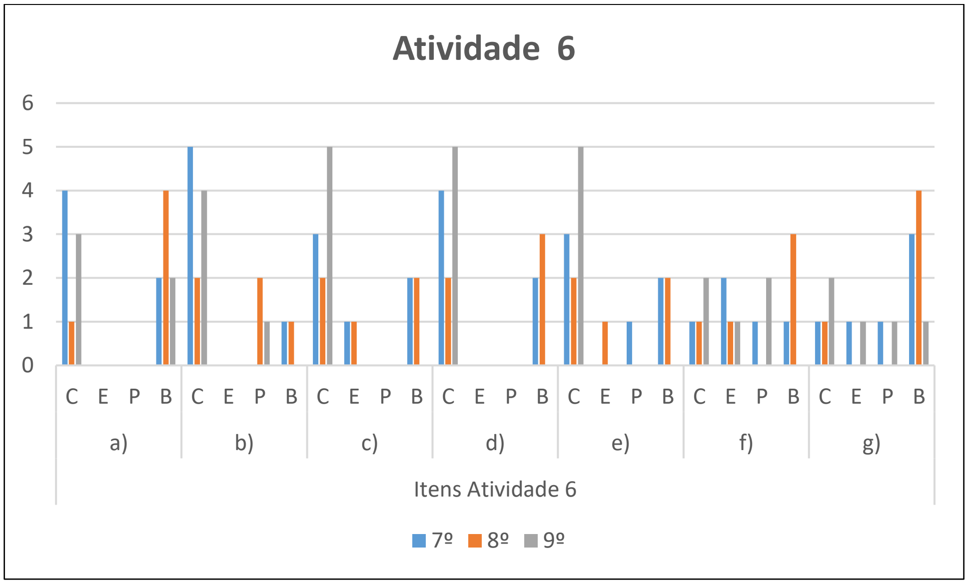
b) Complete a tabela

Posição da figura (n)	1	2	3	4	5	6	7	...	n
Quant. de cubos (Q)	3	6	11	18	27	38	51		NxN=+2

Fonte: Dados da pesquisa.

A expressão algébrica apresentada por E71-JP na última coluna da tabela revela que a relação entre as variáveis envolvidas na sequência figural dada ainda não foi totalmente compreendida, mesmo que o padrão tenha sido identificado. Talvez o sinal de igual utilizado pelo estudante represente que, primeiro, é preciso multiplicar o número da posição da figura (n) por ele mesmo, gerando um resultado, e depois é preciso adicionar dois, gerando o resultado final da operação. Esse tipo de resposta revela ao professor, em particular, ao professor/pesquisador desta investigação, que é preciso explorar mais os significados do sinal de igualdade para além do aspecto processual, isto é, o sinal de igual indica que uma operação deve realizada. Neste caso, é preciso explorar o sinal de igual como aquele utilizado para expressar uma relação funcional (Ponte; Matos; Branco, 2009). O Gráfico 6 apresenta o desempenho dos estudantes das turmas participantes desta pesquisa na Atividade 6.

Gráfico 6 – Resultados Atividade 6



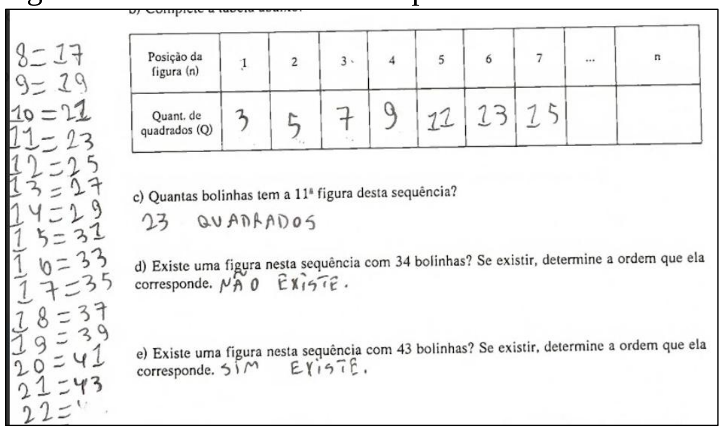
Fonte: Autoria própria.

Os dados do Gráfico 6 indicam que apenas 50% dos estudantes conseguiu determinar o número de quadrados da quarta figura da sequência dada (item a)). Comparando esse resultado com os resultados do item a) das Atividades 1 e 4, percebe-se que o desempenho ficou abaixo do esperado, visto que nesse item das atividades da primeira etapa da pesquisa quase 90% dos estudantes acertou. Uma explicação para esse resultado pode estar no fato de que o tempo para o desenvolvimento das atividades da terceira etapa da pesquisa foi menor que o da primeira etapa. Além disso, muitos estudantes se envolvem mais em atividades avaliativas. As estratégias mobilizadas na resolução foram *contagem* e *diferença* (recursiva). Destaca-se que essas estratégias são as mesmas mobilizadas na primeira e segunda etapa da pesquisa.

A tabela (item b)) foi completada corretamente pela maioria dos estudantes, mas a última coluna (*generalização distante*) continua sendo deixada em branco. A quantidade de quadradinhos da 11ª figura foi determinada com êxito pela maioria dos estudantes, contudo, não há um aumento significativo em relação aos itens semelhantes das Atividades 1 e 4. A maioria dos estudantes, também, obteve êxito nos itens d) e e) e assim como na Atividade 5 conseguiram justificar suas respostas de forma coerente, o que não foi percebido na maioria dos protocolos da Atividades 1 e 4. As estratégias mobilizadas foram *contagem* e *diferença* (recursiva).

A Figura 15 exemplifica a estratégia utilizada por alguns estudantes para responder os itens c), d) e e), ou seja, organizaram uma representação numérica próxima da representação tabular. Sublinha-se que esse tipo de representação já apareceu nos protocolos da primeira etapa da pesquisa e mesmo o professor/pesquisador evidenciando a representação tabular e a relação entre as variáveis o sinal de igual entre posição da figura e quantidade de cubos, ainda, está presente nos registros dos estudantes.

Figura 15 – Protocolo E73-Mar para a Atividade 6


8= 17
9= 19
10 = 21
11= 23
12 = 25
13 = 27
14 = 29
15 = 31
16 = 33
17 = 35
18 = 37
19 = 39
20 = 41
21 = 43
22 =

Posição da figura (n)	1	2	3	4	5	6	7	...	n
Quant. de quadrados (Q)	3	5	7	9	11	13	15		

c) Quantas bolinhas tem a 11ª figura desta sequência?
23 QUADRADOS

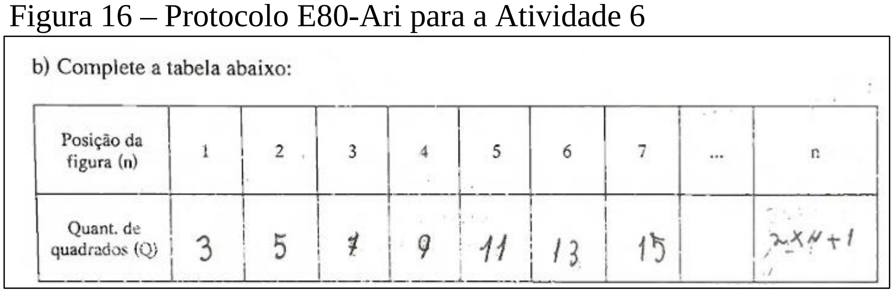
d) Existe uma figura nesta sequência com 34 bolinhas? Se existir, determine a ordem que ela corresponde. NÃO EXISTE.

e) Existe uma figura nesta sequência com 43 bolinhas? Se existir, determine a ordem que ela corresponde. SIM EXISTE.

Fonte: Dados da pesquisa.

Assim, pode-se afirmar que as atividades que poderiam ser resolvidas por meio de uma *generalização próxima* continuam tendo um índice de acertos próximo ao obtido na primeira etapa da pesquisa, mas as que requerem *generalização distante* (item f) e g)) alcançaram melhores resultados, pois quatro estudantes conseguiram apresentar generalizações tanto na língua natural quanto na representação algébrica para a sequência dada na Atividade 6 e a última coluna da tabela (item b)) foi completada por esses quatro estudantes como pode ser observado na Figura 16.

Figura 16 – Protocolo E80-Ari para a Atividade 6

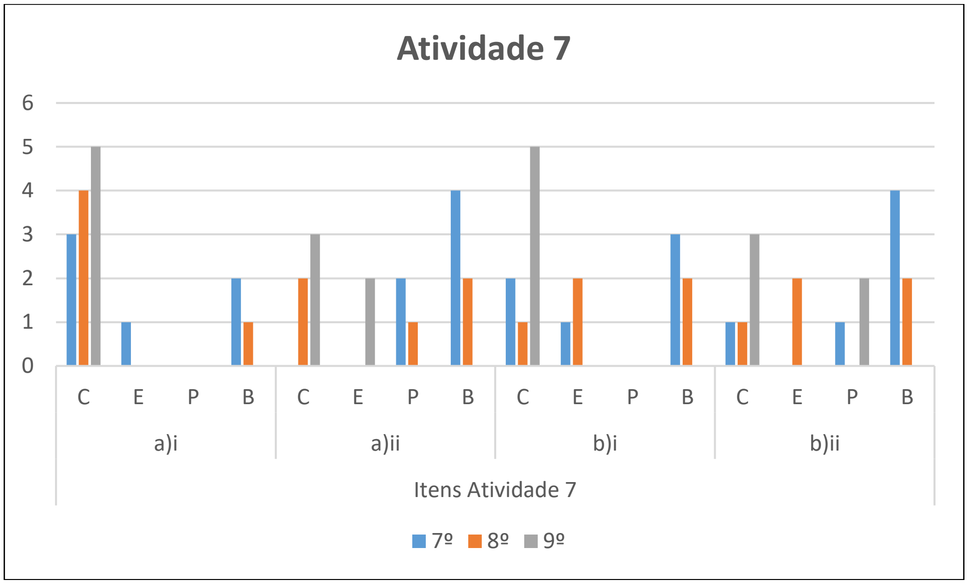

b) Complete a tabela abaixo:

Posição da figura (n)	1	2	3	4	5	6	7	...	n
Quant. de quadrados (Q)	3	5	7	9	11	13	15		2xN+1

Fonte: Dados da pesquisa.

O Gráfico 7 apresenta o desempenho dos estudantes das turmas participantes desta pesquisa na Atividade 7.

Gráfico 7 – Resultados Atividade 7



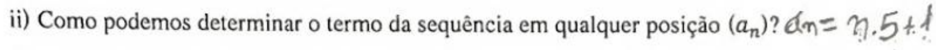
Fonte: Autoria própria.

Assim como na Atividade 2, os estudantes tiveram melhor desempenho na resolução dos itens i) de todas as questões que compõem a Atividade 7. Em outros termos, a maioria dos estudantes obteve êxito na *generalização próxima* em sequências numéricas. As estratégias utilizadas assim como nas atividades anteriores foram *contagem* e *diferença* (recursiva) para a questão a) cujo padrão é dado por uma função afim. Já na questão b), os estudantes que obtivem sucesso no item i) recorreram a operação de potenciação. Os estudantes do 9º ano obtiveram um desempenho melhor, nesses itens, do que os demais. Sublinha-se que nos itens i) da Atividade 2 os estudantes do 8º ano tiveram melhor desempenho.

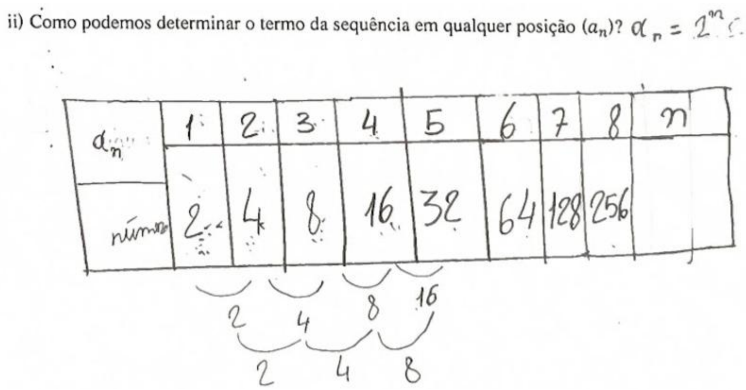
Quanto aos itens ii) da Atividade 7, constata-se que nenhuma turma obteve mais de 50% de acertos, assim como na Atividade 2. A Figura 17 expõe as generalizações produzidas por um dos estudantes do 9º ano para os itens ii) da Atividade 7.

Figura 17 – Protocolo E95- Ped para a Atividade 7

Item ii) questão a) Atividade 7



Item ii) questão b) Atividade 7



Fonte: Dados da pesquisa.

Pode-se observar que a representação algébrica apresentada para o item ii) da questão a) (Figura 17) é coerente com o que é solicitado, contudo, poderia ser refinada, isto é, expressa da seguinte forma: $a_n = 5n + 1$. Além disso, constata-se que para a elaboração da representação algébrica do item ii) da questão b) foi construída uma tabela e a *diferença* (recursiva) foi verificada, mas não foi a estratégia utilizada para generalizar, visto que o padrão aqui envolve uma função exponencia, em particular, progressão geométrica.

Esperava-se que o desempenho dos estudantes na resolução das atividades desta terceira etapa da pesquisa fosse significativamente melhor do que o da primeira etapa da pesquisa, mas isso não aconteceu. Uma explicação para esse resultado pode estar no fato de que as experiências dos estudantes, anteriores as ações desta pesquisa, tenham priorizado as relações numéricas com ênfase na "tabuada" do que a relação entre variáveis. Além disso, as experiências podem ter evidenciado a identificação do padrão do que a generalização seja na língua natural e/ou na representação algébrica. Outro ponto que pode ter influenciado no desempenho dos estudantes é o ensino da álgebra focado na manipulação de símbolos e não no desenvolvimento do pensamento algébrico que não requer no início do trabalho o domínio da linguagem algébrica, mas o entendimento das relações existentes entre objetos em uma dada situação (Silva; Moreira, 2018).

Quanto as ações desenvolvidas nesta pesquisa, pode-se afirmar que uma aula de discussão de atividades envolvendo sequências numéricas e figurais não é suficiente para tratar toda a complexidade envolvida na identificação e generalização de padrões, mas já ponta alguns indicativos do que pode ser feito em prol do desenvolvimento do pensamento algébrico dos estudantes, a saber: priorizar a abordagem visual em detrimento da numérica ao tratar de padrões figurais; enfatizar a relação entre as variáveis envolvidas (posição que o termo ocupa na sequência – variável independente - e termo – variável dependente), em particular, na construção da representação tabular; solicitar que os estudantes apresentem justificativas para as respostas elaboradas, explicando como pensou para resolver a atividade; explorar o uso de uma variedade de estratégias na elaboração de generalizações; e, incentivar o diálogo entre estudantes durante a resolução das atividades. A seguir são apresentadas as considerações finais desta pesquisa.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta pesquisa foi guiada pela seguinte questão: *Quais tipos de generalização e estratégias são mobilizadas por estudantes dos anos finais do Ensino Fundamental de uma escola da rede municipal de São Sepé ao resolverem situações envolvendo sequências numéricas e não numéricas?* E, tinha por objetivo caracterizar o desempenho de estudantes do 7º, 8º e 9º ano de uma escola da rede municipal de São Sepé/RS na resolução de atividades envolvendo sequências numéricas e não numéricas quanto a identificação e generalização de padrões. Para tanto, a produção de dados foi realizada em três etapas.

A primeira etapa envolveu protocolos dos estudantes das três turmas ao responderem quatro atividades acerca da identificação e generalização de padrões. A segunda etapa tratou das discussões produzidas pelo professor/pesquisador e os estudantes das três turmas durante a correção das atividades desenvolvidas na primeira etapa da pesquisa. A terceira etapa envolveu protocolos dos estudantes das três turmas ao responderem três atividades sobre identificação e generalização de padrões, padrões estes semelhantes aos explorados na primeira e segunda etapas da pesquisa. Essas escolhas foram feitas por concordar com Vale e Barbosa (2019, p. 402) ao afirmarem que: “A exploração de padrões constitui assim um meio privilegiado para introduzir a álgebra devido à possibilidade da representação dinâmica das variáveis envolvidas”.

Ao analisar as três etapas da pesquisa, pode-se afirmar que a maioria dos estudantes mobilizou a *generalização próxima* na resolução das atividades, recorrendo a *contagem* e a *diferença* (recursiva) como estratégias, esta última, em particular, nos padrões representados por funções afins. Além disso, *relações recursivas* foram mobilizadas na resolução de atividades que envolviam padrões representados por funções quadráticas e exponencial. A *recursividade*, também, foi mobilizada no item que exigia a elaboração de uma regra em língua natural para determinar qualquer termo das sequências dadas.

A *generalização distante* foi mobilizada por alguns estudantes, logo, a estratégia *explícita* foi utilizada por poucos estudantes, mesmo na aula de revisão das atividades propostas na primeira etapa da pesquisa. Nesta aula, em alguns momentos, sobressaiu a *tentativa e erro* como estratégia mobilizada pelos estudantes que não conseguiam elaborar uma regra que permitia determinar, de imediato, qualquer termo da sequência dada. Assim, pode-se considerar que as maiores dificuldades dos estudantes foram verificadas na elaboração de *generalizações distante*, em particular, na representação algébrica. O poder das representações algébricas para analisar diferentes situações talvez não tenha sido percebida por todos os estudantes.

Diante dessas considerações, pode-se afirmar que os dois tipos de generalizações, propostos por Stacey (1989 apud Vale, 2013), ou seja, *generalização próxima* e *generalização distante*, sendo esta última mobilizada por poucos estudantes, quando a representação algébrica foi solicitada. As estratégias mobilizadas foram: *contagem, diferença* (recursiva), *tentativa e erro*, e *explícita*, sendo que esta última mobilizada por poucos estudantes em todas as etapas da pesquisa. Ainda em relação as estratégias, os estudantes das três turmas podem ser considerados analíticos (verbais), pois na maioria das vezes recorreram a métodos de resolução não visuais, preferindo utilizar processos lógico-verbais por meio de representações numéricas ("tabuada"), mesmo em atividades que seriam facilmente resolvidas através de uma abordagem visual (Vale; Barbosa, 2019), como a Atividade 4. Em outros termos, conforme a classificação proposta por Rivera e Becker (2008 apud Carneiro; Araman; Serrazina, 2022), os estudantes utilizaram estratégias numéricas, pois utilizaram uma tabela para auxiliar na identificação e generalização do padrão, procurando relações aritméticas entre os valores das variáveis na maioria das vezes.

Quanto a *generalização*, percebe-se que o pensamento da maioria estudantes ainda está preso a casos particulares. Em outros termos, a identificação de semelhanças e expansão de domínios de validade ainda precisa evoluir (Campos; Gualandi, 2024). Contudo, o pensamento algébrico dos estudantes está evoluindo, pois utilizam com mais facilidade a língua natural para representar o que pensam do que a linguagem algébrica. Em outras palavras, embora muitos estudantes tenham utilizado a língua materna para expressar a regra que permite determinar qualquer termo das sequências propostas, a maioria não conseguiu expressá-la na representação algébrica. Esse resultado também foi constatado por Archilia (2008) ao analisar o desempenho de estudantes do Ensino Médio na identificação e generalização de padrões, em particular, progressão aritmética. Ressalta-se que,

> a expressão da generalidade não se dá apenas pelo uso da linguagem simbólica algébrica, como também pelas várias maneiras que temos para perceber e expressar o geral [...]. (Aquino, 2008 apud Campos; Gualandi, 2024, p. 244).

Os momentos de discussão entre o professor/pesquisador e os estudantes se configuraram como fundamentais no processo de desenvolvimento do pensamento algébrico. Entende-se que os professores "deverão levar os estudantes a compreenderem a importância das suas observações sobre situações matemáticas e desafiá-los a investigar se algumas observações e conjecturas específicas são generalizáveis" (NCTM, 2008, p. 108).

As atividades propostas evidenciam a identificação e generalização de padrões em busca do desenvolvimento do pensamento algébrico. Contudo, poderiam ter sido propostos padrões de repetição e não apenas padrões de crescimento. O uso da letra como variável num sentido funcional poderia ter sido mais incentivado pelo professor/pesquisador na segunda etapa da pesquisa. Ações essas que podem ser realizadas em outros momentos com as três turmas, em especial, na busca por desenvolver as seguintes habilidades propostas pela BNCC (Brasil, 2018): EF07MA14; EF07MA15; EF07MA16; EF08MA10; EF08MA11, bem como no estudo do conceito de função no 9º ano.

Por fim, entende-se que além das mudanças nas atividades propostas, nesta pesquisa, poderiam ser realizadas alterações nas escolhas metodológicas, por exemplo, elaborar e desenvolver uma sequência de ensino com foco na identificação e generalização de padrões, utilizando para a análise roteiros de observação que evidenciassem as discussões realizadas entre professor/pesquisador e estudantes, principalmente, nos momentos de validação das estratégias utilizadas e respostas elaboradas, bem como no tratamento dos erros. Além disso, poderiam ser realizadas entrevistas com professores e estudantes investigando concepções sobre o papel da álgebra, as diferentes funções das letras, o valor da argumentação, entre outros aspectos relacionados ao ensino e aprendizagem de conteúdos algébricos.

REFERÊNCIAS

ARCHILIA, S. Construção do termo geral da progressão aritmética pela observação e generalização de padrões. Dissertação (Mestrado) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP), São Paulo, 2008.

BARBOSA, A.; VALE, I. As representações: escolhas eficazes na resolução de problemas. **Educação e Matemática**, n. 166, p. 19-24, 2022.

BARBOSA, A.; VALE, I.; GUALANDI, J. H. Dos padrões à generalização: como a criatividade é expressa por futuros professores do Brasil e de Portugal?. **Educação Matemática Debate**, Montes Claros, v. 9, n. 17, p. 1–23, 2025.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática 3° e 4° ciclos. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular: Ensino Fundamental**. Brasília, 2018.

CAMPOS; M. S.; GUALANDI, J. H. A Generalização de Padrões Matemáticos com Estudantes do 7.º ano do Ensino Fundamental. **Educação Matemática em Revista**, [S. l.], v. 28, n. 80, p. 1–15, 2023.

CAMPOS, M. S.; GUALANDI, J. H. A generalização de padrões matemáticos na Educação Básica: uma pesquisa bibliográfica. **Revista Brasileira de Ensino de Ciências e Matemática**, v. 7, n.1, p. 226-254, 2024.

CARNEIRO, L. F. G.; ARAMAN, E. M. O.; SERRAZINA, M. L. Raciocínio Matemático de Alunos do Ensino Fundamental: estratégias de generalização empírica. **Bolema**, Rio Claro, v. 36, n. 74, p. 1193-1214, 2022.

FIORENTINI, D.; MIORIN, M. A.; MIGUEL, A. Contribuição para um Repensar a Educação Algébrica Elementar. **Pro-Posições**, Campinas, v. 4, n. 1, p. 78 - 91, mar. 1993.

LIMA, A. P. A. B.; BIANCHINI, B. L.; LIMA, G. L. O Pensamento Matemático e os diferentes modos de pensar que o constituem. In: BIANCHINI, B. L; LIMA, G. L. (orgs). O Pensamento Matemático e os diferentes modos de pensar que o constituem. São Paulo: Livraria da Física, 2023.

NCTM. **Princípios e Normas para a Matemática Escolar.** Tradução: Magda Melo. Ed. APM, 2008.

PEREIRA, M. S.; FERNANDES, J. A. Estratégias de generalização de padrões de alunos do 7º ano de escolaridade. **UNIÓN - REVISTA IBEROAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA**, v. 8, n. 29, 14 mar. 2012.

PEREIRA, M. S. Estratégias usadas por alunos do 7º ano de escolaridade na exploração de padrões. **Quadrante**, Vol. XXII, nº 1, 2013.

PONTE, J. P.; MATOS, A.; BRANCO, N. **Sequências e Funções**. Materiais de apoio ao professor com tarefas para o 3.º ciclo 7.º ano, 2009.

SILVA, J. P.; MOREIRA, P. C. Produto educacional sobre educação algébrica escolar: pensamento algébrico, linguagem, generalização. **Revista BOEM**, Florianópolis, v. 6, n. 10, p. 255–275, 2018.

SILVEIRA, D.T.; CÓRDOVA, F.P. A pesquisa Científica. In: GERHARDT, T.E.; SILVEIRA, D.T. (org). Métodos de Pesquisa. Porto Alegre: Editora da UFRGS, p. 31- 42, 2009.

SMOLE, K.; DINIZ, M. I. Álgebra para os anos iniciais do Ensino Fundamental: como significar seu desenvolvimento. 2021. Disponível em: <https://mathema.com.br/bncc/algebra-nos-anos-iniciais-do-ef-como-significar-seu-desenvolvimento-com-os-estudantes/> Acessado em: 10 jul. 2025.

VALE, I. *et al*. Os Padrões no Ensino e Aprendizagem da Álgebra. In: VALE, T.; PIMENTEL, A.; BARBOSA, L.; FONSECA, L. CANAVARRO, P. Números e Álgebra. Lisboa: SEM-SPCE, 2006.

VALE; I. As tarefas de padrões na aula de matemática: um desafio para professores e alunos. **Interacções**, n. 20, p. 181-207, 2012.

VALE, I. Padrões em contextos figurativos: um caminho para a generalização em matemática. **Revemat**, Florianópolis, v. 08, n. 2, p. 64-81, 2013.

VALE, I.; BARBOSA, A. Pensamento algébrico: contributo da visualização na construção da generalização. **Educação Matemática Pesquisa Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática**, São Paulo, v. 21, n. 3, 2019.

VALE, I.; PIMENTEL, T.; BARBOSA, A. Ensinar matemática com resolução de problemas. Quadrante, v. 24, n. 2, p. 39-60, 2015.

VAN DE WALLE, John. A. **Matemática no Ensino Fundamental**: formação de professores e aplicação em sala de aula. Tradução: Paulo Henrique Colonese. 6. ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.