

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO PAMPA**

**AMANDA MARTINS DE LIMA**

**ANÁLISE METODOLÓGICA E NUMÉRICA DO COMPORTAMENTO DE  
COLUNAS DE CONCRETO ARMADO SOB EFEITOS DE COMPRESSÃO AXIAL**

**Alegrete**

**2024**

**AMANDA MARTINS DE LIMA**

**ANÁLISE METODOLÓGICA E NUMÉRICA DO COMPORTAMENTO DE  
COLUNAS DE CONCRETO ARMADO SOB EFEITOS DE COMPRESSÃO AXIAL**

Trabalho de Conclusão de Curso  
apresentado ao Curso de Engenharia Civil  
da Universidade Federal do Pampa, como  
requisito parcial para obtenção do Título  
de Bacharel em Engenharia Civil.

Orientador: Luis Eduardo Kostaschi

**Alegrete  
2024**

**AMANDA MARTINS DE LIMA**

**ANÁLISE METODOLÓGICA E NUMÉRICA DO COMPORTAMENTO DE COLUNAS DE CONCRETO ARMADO SOB EFEITOS DE COMPRESSÃO AXIAL**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Engenharia Civil da Universidade Federal do Pampa, como requisito parcial para obtenção do Título de Bacharel em Engenharia Civil.

Trabalho de Conclusão de Curso defendido e aprovado em: 04 de dezembro de 2023.

Banca examinadora:

Prof. Dr. LUIS EDUARDO KOSTESKI - UNIPAMPA -  
Orientador

Prof. Dr. ALISSON SIMONETTI MILANI - UNIPAMPA  
Prof. Dr. LEANDRO FERREIRA FRIEDRICH -

UNIPAMPA



Assinado eletronicamente por **LUIS EDUARDO KOSTESKI, PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR**, em 09/12/2024, às 10:35, conforme horário oficial de Brasília, de acordo com as normativas legais aplicáveis.



Assinado eletronicamente por **LEANDRO FERREIRA FRIEDRICH, PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR**, em 09/12/2024, às 11:02, conforme horário oficial de Brasília, de acordo com as normativas legais aplicáveis.



Assinado eletronicamente por **ALISSON SIMONETTI MILANI, PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR**, em 12/12/2024, às 17:29, conforme horário oficial de Brasília, de acordo com as normativas legais aplicáveis.



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site [https://sei.unipampa.edu.br/sei/controlador\\_externo.php?acao=documento\\_conferir&id\\_orgao\\_acesso\\_externo=0](https://sei.unipampa.edu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0), informando o código verificador **1619354** e o código CRC **180FFDE3**.

Dedico este trabalho a minha avó Eloina  
(*in memoriam*), que foi a mulher mais forte  
que já conheci e me fez ser a mulher forte  
que sou hoje.

## **Agradecimento**

Agradeço primeiramente a Deus por ter me dado saúde e a oportunidade de ter ingressado em uma universidade federal, e também por ter me dado condições financeiras para conseguir me sustentar.

A minha família que me deu força e apoio incondicional para seguir até o fim deste ciclo.

Ao professor Luis Eduardo Kostas por ter me dado a oportunidade de ingressar na iniciação científica, como também ter aceitado ser meu orientador.

Aos meus amigos, colegas, e a todas as pessoas que contribuíram de uma forma ou outra para que eu chegasse até aqui.

“Dizem que tudo o que buscamos, também nos busca e, se ficamos quietos, o que buscamos nos encontrará. É algo que leva muito tempo esperando por nós. Enquanto não chega, nada faças. Descansa. Já tu verás o que acontece enquanto isto”.

Clarissa Pinkola Estés

## Resumo

Este trabalho apresenta uma análise comparativa e numérica do comportamento de colunas de concreto armado submetidas à compressão axial, utilizando o Método dos Elementos Discretos Formados por Barras (LDEM). A pesquisa tem como objetivo principal avaliar a capacidade de resistência e os efeitos de instabilidade, como flambagem, em colunas sob diferentes condições de carga. Para isso, foram realizadas simulações numéricas com variações de propriedades geométricas, tipos de carregamento e armaduras, utilizando o software Abaqus/CAE para modelagem e análise. O estudo destaca a importância dos efeitos de segunda ordem em colunas esbeltas, que combinam cargas axiais e momentos fletores, levando em conta a não linearidade geométrica e material. As simulações também consideraram o impacto de cargas excêntricas e perturbações na malha, permitindo a análise de fenômenos críticos que podem comprometer a estabilidade estrutural. Além disso, os resultados numéricos foram comparados com dados experimentais e normas técnicas, como a NBR 6118, para validação do modelo. Os resultados indicaram que o LDEM é eficiente para prever o comportamento das colunas, fornecendo estimativas precisas da resistência máxima, deformações e modos de falha. Observou-se que colunas com armaduras bem dimensionadas possuem maior capacidade de suportar cargas críticas e evitar deformações permanentes. As simulações mostraram ainda que perturbações geométricas e cargas excêntricas aumentam a propensão à flambagem, especialmente em colunas muito esbeltas. Concluindo que o método numérico aplicado é uma ferramenta valiosa para complementar ensaios experimentais, proporcionando insights detalhados sobre o desempenho estrutural. O trabalho contribui para o aprimoramento de projetos de engenharia civil, reforçando a importância de considerar fatores como esbeltez, excentricidade de cargas e propriedades do material na análise e dimensionamento de colunas de concreto armado.

Palavras-chave: Concreto armado, Compressão axial, Flambagem, Colunas esbeltas, Método dos Elementos Discretos Formados por Barras.

## **Abstract**

This paper presents a comparative and numerical analysis of the behavior of reinforced concrete columns subjected to axial compression, using the Discrete Bar Element Method (LDEM). The main objective of the research is to evaluate the resistance capacity and instability effects, such as buckling, of columns under different load conditions. To this end, numerical simulations were carried out with variations in geometric properties, types of loading and reinforcement, using Abaqus/CAE software for modeling and analysis. The study highlights the importance of second-order effects in slender columns, which combine axial loads and bending moments, taking into account geometric and material nonlinearity. The simulations also considered the impact of eccentric loads and disturbances in the mesh, allowing the analysis of critical phenomena that can compromise structural stability. In addition, the numerical results were compared with experimental data and technical standards, such as NBR 6118, to validate the model. The results indicated that LDEM is efficient at predicting the behavior of columns, providing accurate estimates of maximum resistance, deformations and failure modes. It was observed that columns with well-dimensioned reinforcement have a greater capacity to withstand critical loads and avoid permanent deformations. The simulations also showed that geometric disturbances and eccentric loads increase the propensity to buckling, especially in very slender columns. In conclusion, the numerical method applied is a valuable tool to complement experimental tests, providing detailed insights into structural performance. The work contributes to the improvement of civil engineering projects, reinforcing the importance of considering factors such as slenderness, load eccentricity and material properties in the analysis and design of reinforced concrete columns.

**Keywords:** Reinforced concrete, Axial compression, Buckling, Slender columns, Bar-formed Discrete Element Method.



## Lista de figuras

Figura 1 - Coluna sob efeito de flambagem.	15
Figura 2 - Diagrama de equilíbrio para flambagem de uma estrutura idealizada.	16
Figura 3 - Barra comprimida.	18
Figura 4 - Comportamento linear do material.	18
Figura 5 - Comportamento não linear do material.	19
Figura 6 - Tipos de comprimentos de flambagem para algumas situações de vinculação de apoios.	20
Figura 7 - Determinação do ponto L para cálculo do momento máximo de primeira ordem.	23
Figura 8 - Imperfeições geométricas locais.	24
Figura 9 - Sistema utilizado no LDEM.	28
Figura 10 - a) sólido cúbico com dimensões LLL, b) módulo do LDEM de dimensões LLL.	30
Figura 11 - Lei constitutiva bilinear.	32
Figura 12 - Fluxograma da metodologia utilizada.	37
Figura 13 - Características geométricas da coluna.	38
Figura 14 - a) Malha em uma vista 3D; b) Malha vista a partir da seção transversal da coluna.	40
Figura 15 - Disposição da carga na coluna.	41
Figura 16 - Colunas com diferentes níveis de perturbação.	42
Figura 17 - Disposição das cargas excêntricas.	43
Figura 18 - Armadura do pilar.	44
Figura 19 - Dados da geometria da coluna.	45
Figura 20 - Dados das propriedades da coluna.	46
Figura 21 - Esforços aplicados na coluna.	46
Figura 22 - Critérios de cálculo selecionados.	47
Figura 23 - Resultado diagrama de interação N, Mx, My (FCO).	48
Figura 24 - Diagramas N, M, 1/r (eixo x).	48

Figura 25 - Diagramas N, M, $1/r$ (eixo y).	49
Figura 26 - Gráfico da força pelo tempo da coluna com e sem perturbação.	50
Figura 27 - Gráfico da força pelo deslocamento.	50
Figura 28 - Gráfico da força x deslocamento horizontal.	51
Figura 29 - Gráfico da força versus deslocamento da carga excêntrica para o menor lado.	52
Figura 30 - Gráfico da força versus deslocamento da carga excêntrica para o maior lado.	52
Figura 31 - gráfico da força versus deslocamento máximo com a carga excêntrica para o maior lado.	53
Figura 32 - gráfico da força versus deslocamento máximo com a carga excêntrica para o menor lado.	54

## Lista de símbolos e abreviaturas

P: Força axial aplicada

$P_{cr}$ : Carga crítica de flambagem

$\sigma$ : Tensão

$\varepsilon$ : Deformação específica

E: Módulo de elasticidade

I: Momento de inércia da seção transversal

A: Área da seção transversal

h: Altura da seção transversal

r: Raio de giração

$G_f$ : Energia específica de fratura

$\alpha_b$ : Coeficiente de vinculação do pilar

$L_e$ : Comprimento de flambagem

$\rho$ : Taxa de armadura

$\nu$ : Coeficiente de Poisson

LDEM: Método dos Elementos Discretos Formados por Barras

ELU: Estado Limite Último

NBR: Norma Brasileira Regulamentadora

CAE: Computer-Aided Engineering (Engenharia Assistida por Computador)

FEM: Finite Element Method (Método dos Elementos Finitos)

DEM: Discrete Element Method (Método dos Elementos Discretos)

## Sumário

<b>1 Introdução.....</b>	<b>11</b>
1.1 Objetivos.....	12
1.2 Justificativa.....	13
1.3 Organização do trabalho.....	14
<b>2 Conceitos gerais e revisão de literatura.....</b>	<b>15</b>
2.1 Fundamentos teóricos de compressão axial e flambagem.....	15
2.2 Coluna de concreto armado.....	17
2.3 Método aproximado do pilar-padrão com curvatura real ou acoplado com diagrama momento-curvatura.....	22
2.4 Estabilidade estrutural.....	25
2.5 Fórmula da secante.....	26
2.6 Método dos elementos discretos formado por barras (LDEM).....	27
<b>3 Metodologia.....</b>	<b>37</b>
3.1 Caracterização da coluna.....	37
3.2 Discretização da malha no Abaqus/CAE.....	39
3.3 Caso 1: Carga centrada e sem armadura.....	40
3.4 Caso 2: Carga com excentricidade.....	42
3.5 Caso 3: Coluna com armação e com carga centrada e excêntrica.....	43
<b>4 Análise dos Resultados.....</b>	<b>45</b>
4.1 Verificação do método aproximado do pilar-padrão com curvatura real ou acoplado com diagrama momento-curvatura.....	45
4.2 Análise das simulações numéricas.....	49
<b>5 Conclusão.....</b>	<b>55</b>
<b>6 Referências bibliográficas.....</b>	<b>56</b>

## 1 Introdução

Os pilares têm como principal função suportar carregamentos axiais, sem que sofram mudanças repentinas em sua configuração, são elementos estruturais que sustentam a estrutura e transmitem suas cargas para as fundações. No entanto, à medida que o carregamento é aplicado, a coluna pode ser flambada em vez de permanecer reta, se caso ela não foi projetada para suportar esse tipo de carregamento ela, subitamente, se curvará de maneira acentuada (BEER, 2011).

A flambagem ocorre quando uma coluna está sob ação de uma força que, teoricamente, ela deveria suportar, mas foi planejada de maneira incorreta. No entanto, se a força axial de compressão, que age sobre a seção, for maior que a ação do momento restaurador, o deslocamento lateral aumentará e os ângulos ficarão cada vez maiores até que a estrutura entre em colapso, e com essas condições a estrutura será considerada instável devido a flambagem lateral (GERE; GOODNO, 2011).

O concreto armado, por ser um material composto, depende muito de seus agregados, pelo fato do concreto ser muito resistente à compressão e ter uma maior inércia, porém pouco resistente à tração, o aço da armadura entra na composição para solucionar esta falta. Desta forma o comportamento de uma coluna de concreto armado sob compressão axial depende muito do concreto e da armadura que é utilizada (COSTA, 2021). A flambagem não é muito presente em colunas de concreto armado, pois quando bem dimensionada, pelo fato do concreto conseguir aderir muito bem a armadura, impedir a instabilidade lateral e ter uma maior inércia, porém, em situações extremas como colunas muito esbeltas ou com armadura inadequada, a flambagem ainda ocorre (MELO, 2009).

Contudo os efeitos de cargas axiais em pilares de concreto armado tem uma maior atenção quando se trata de efeitos de segunda ordem. Os efeitos de segunda ordem, em colunas de concreto armado, referem-se a deformações adicionais que ocorrem devido a combinação de cargas axiais e momentos fletores, levando em consideração a não linearidade geométrica da estrutura. Os ensaios de análise à compressão axial são muito importantes para entender o comportamento dos elementos em relação a esse tipo de carga. Os resultados destes ensaios permitem estimar as capacidades de carga, deformação e o modo de falha da coluna, podendo assim confirmar modelos teóricos. Em colunas de concreto armado,

ensaios relacionados às cargas axiais ajudam a analisar efeitos de segunda ordem que podem ocorrer no pilar. Esses efeitos de segunda ordem são referentes a flambagem devido a compressão, efeito local, não sendo considerada a flambagem localizada, que é mais comum em colunas de aço (CARVALHO; PINHEIRO, 2009).

Alguns resultados de ensaios feitos em laboratório são de difícil interpretação e com isso as simulações numéricas entram para solução deste tipo de problema, proporcionando resultados mais refinados. Neste trabalho acadêmico, será usado o método de elementos discretos formados por barras (do inglês LDEM) que é uma técnica de simulação numérica utilizada para modelar o comportamento de sólidos em situações de falha. Este método é utilizado especificamente para simular fenômenos que envolvem grandes deformações, falhas, fraturas e interações entre partículas. Nas simulações, serão analisadas as deformações causadas pela carga axial nas colunas de diferentes propriedades e as resistências suportadas pelas mesmas.

Os resultados obtidos serão comparados com os resultados de ensaios já realizados que estão na literatura como também questões relacionadas a esbeltez e a cargas excêntricas, e seus respectivos efeitos de flambagem na coluna. Para a modelagem das colunas, será utilizado o *software* comercial *Abaqus/CAE* de análise de elementos finitos com a implementação do LDEM.

## **1.1 Objetivos**

O objetivo geral e específico deste trabalho são apresentados no decorrer, nos itens 1.1.1 e 1.1.2, respectivamente.

### **1.1.1 Objetivo Geral**

O objetivo geral deste trabalho é analisar se as simulações realizadas com o LDEM conseguem alcançar os resultados calculados de acordo com a teoria sobre flambagem e se a coluna escolhida atende aos requisitos de dimensionamento.

### **1.1.2 Objetivos Específicos**

- Simular uma coluna comprimida de concreto reforçado com barras de aço usando o método de elementos discretos formado por barras (do inglês LDEM) no ambiente *Abaqus/CAE*;
- Analisar se a coluna simulada atende aos requisitos de dimensionamento como também os valores calculados de acordo com a teoria;
- Mostrar as reações da coluna com diferentes tipos de cargas excêntricas e comparando os resultados com os esperados pela literatura;
- Observar os modos de falha das estruturas analisadas.

## 1.2 Justificativa

Os ensaios de análise da compressão axial são indispensáveis para entender o comportamento dos elementos estruturais sob ação destas cargas específicas, como é o caso que ocorre em colunas. Com estes ensaios é possível obter dados essenciais sobre a capacidade de carga, a deformação e o modo de falha dos modelos estruturais em questão, podendo ser validado exemplos encontrados na literatura acadêmica. Este tipo de compreensão torna possível que colunas, componentes críticos em muitas construções, obedeçam aos requisitos de segurança ou desempenho. Porém, a interpretação de alguns resultados obtidos em laboratório pode ser difícil, excepcionalmente quando as condições experimentais são complexas ou os resultados são inconsistentes.

Para tratar destas dificuldades, as simulações numéricas, como realizadas pelo método de elementos discretos formados por barras (LDEM), desempenham um importante papel. Este método é muito eficaz na simulação de fenômenos que envolvem grandes deformações, falhas, fraturas e interações entre partículas, oferecendo uma grande solução para analisar comportamentos que são de difícil reprodução e interpretação experimental. Nas simulações propostas neste trabalho acadêmico, serão analisadas as deformações causadas por cargas axiais em colunas de concreto armado e suas respectivas resistências características. Essa perspectiva complementa ensaios laboratoriais e também esclarece detalhes sobre a resposta estrutural das colunas, contribuindo e aprimorando modelos teóricos aplicados em projetos de engenharia civil.

A modelagem e análise da coluna é feita em *softwares* como o *Abaqus/CAE* que possui uma grande aplicação de análise de elementos finitos. Com o auxílio do

*software* é possível fazer a implementação do método de elementos discretos formados por barras (LDEM), o que possibilita a modelagem precisa da coluna, tendo uma grande precisão na simulação do elemento estrutural. Os benefícios do desenvolvimento de metodologias de análise estrutural por meio de simulações numéricas mostram a importância da utilização das mesmas em solução de problemas reais relacionados à segurança estrutural.

### **1.3 Organização do trabalho**

O trabalho é composto por 6 capítulos. O primeiro capítulo é formado pela introdução, os objetivos gerais e específicos, e a justificativa da pesquisa. O capítulo dois mostra a revisão de literatura, onde são apresentados os fundamentos teóricos sobre a flambagem e os efeitos causados nas colunas de concreto armado.

No capítulo três é abordada a metodologia a ser utilizada na análise numérica realizada com o auxílio do *software abaqus/CAE* detalhando a modelagem e a concepção geral para o método de elementos discretos formados por barras (do inglês LDEM), sendo feitos os ensaios de compressão axial nos diferentes tipos de colunas. No capítulo quatro é apresentado os resultados obtidos nas simulações numéricas e as respectivas análises feitas dos resultados esperados com os obtidos. No quinto capítulo é feita as conclusões desta pesquisa e possíveis sugestões de trabalhos futuros. E no sexto e último capítulo, são mostradas as referências bibliográficas utilizadas para a realização deste trabalho acadêmico.



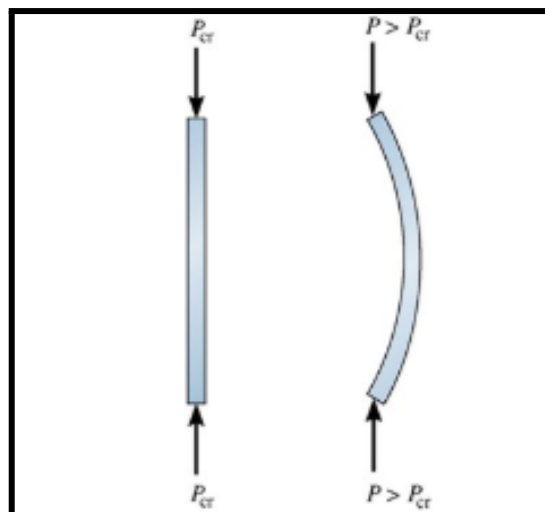
## 2 Conceitos gerais e revisão de literatura

Esta seção apresenta a revisão bibliográfica onde abrange sobre os conceitos a serem mostrados sobre a compressão axial e seus efeitos, como também uma análise sobre a influência de cargas excêntricas aplicadas axialmente. Inicialmente, serão discutidos os fundamentos teóricos sobre compressão e flambagem, que são essenciais para a avaliação da resistência e estabilidade das colunas. Em seguida, serão explorados os resultados esperados, incluindo a determinação da resistência máxima e a carga crítica de flambagem, com enfoque nas variações provocadas pela presença ou ausência de excentricidade.

### 2.1 Fundamentos teóricos de compressão axial e flambagem

Componentes estruturais submetidos apenas à tração ou compressão são chamados de membros carregados axialmente. Barras sólidas com eixos longitudinais retos são do tipo mais comum, embora cabos e molas também suportam cargas axiais (GERE; GOODNO, 2011). Colunas esbeltas sujeitas a compressão estão dependentes da ocorrência de um comportamento mecânico conhecido como flambagem. Durante o tempo em que a carga sobre esse elemento é relativamente modesta, a coluna fica submetida a uma tensão de compressão e conseqüentemente a uma deformação axial, como mostrado na Figura 1.

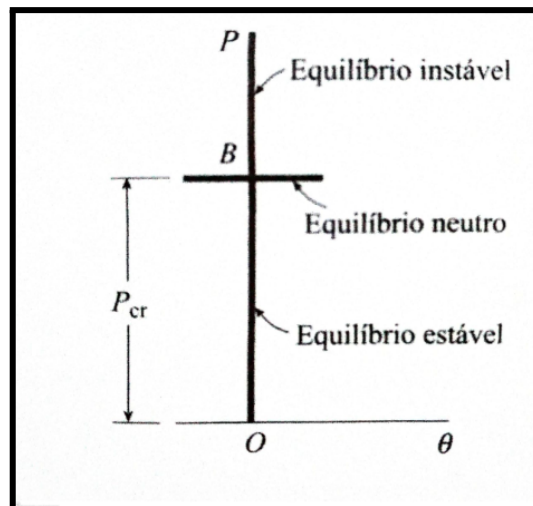
Figura 1 - Coluna sob efeito de flambagem.



Fonte: Resistência dos Materiais (Hibbeler, 2010, p.477).

A estrutura está em equilíbrio quando é perfeitamente reta e o ângulo ( $\theta$ ) é igual a zero, desta maneira o carregamento axial ( $P$ ) é menor que o carregamento crítico ( $P_{cr}$ ) e com isso a estrutura está em equilíbrio. Da mesma maneira, quando o carregamento axial é maior que o carregamento crítico a estrutura ainda está em equilíbrio pois está em compressão direta, porém, este equilíbrio é instável e qualquer distúrbio fará a estrutura flambar, como mostrado na imagem anterior. No carregamento crítico a estrutura está em equilíbrio mesmo quando o ponto de equilíbrio neutro (ponto B) é deslocado lateralmente por uma pequena distância, conforme a Figura 2.

Figura 2 - Diagrama de equilíbrio para flambagem de uma estrutura idealizada.



Fonte: Mecânica dos Materiais (GERE; GOODNO, 2011, p.466)

Com isso, a flambagem é uma falha caracterizada pela instabilidade estrutural em consideração ao carregamento axial imposto à coluna. Antes da mesma ocorrer, o carregamento não produz nenhuma tensão que ultrapasse os limites de resistência do material e em uma análise linear para a obtenção das tensões críticas às deformações deverão respeitar a teoria da elasticidade e a linearidade entre a deformação e o carregamento.

A resposta estrutural é o deslocamento que surge na estrutura, e quando escrito junto com o carregamento é configurado como uma solução fundamental (SPEROTTO, 2017). Esta solução fundamental antes da flambagem deve ser linear, assim os deslocamentos observados devem ser somente em função de tais

deformações. A energia mínima potencial é determinada pela teoria da elasticidade com a energia da estrutura antes da flambagem.

Em um pilar, o principal elemento geométrico que determina a resistência à flambagem é o momento de inércia definido pela seção transversal à força de compressão axial. O momento de inércia atua de forma linear na parte da estrutura, apresentando um valor positivo em uma das extremidades e um valor negativo na outra, resultando em um efeito responsável pela curvatura e tensão distribuídas linearmente na seção.

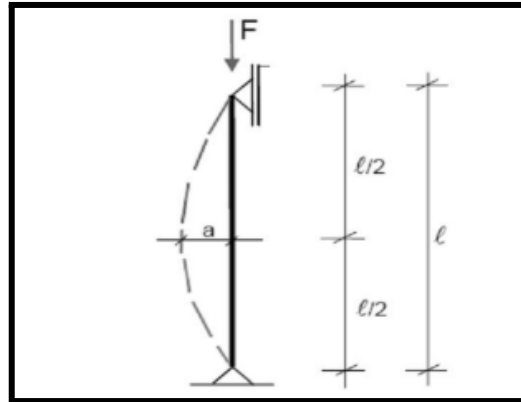
## **2.2 Coluna de concreto armado**

Em um primeiro momento, os pilares de concreto armado são submetidos predominantemente a esforços de compressão. Esses esforços iniciais são considerados com linearidade física e geométrica, assumindo que as deformações geradas não influenciam na distribuição de tensões em uma análise primária. Este estágio é conhecido como efeito de 1ª ordem e é estudado com a composição geométrica das peças indeformadas.

Com a ação desses esforços de compressão nos pilares, que possuem certa esbeltez, surge o fenômeno de flambagem, que tende a flexionar longitudinalmente a peça comprimida, alterando o estado inicial de tensões. A flambagem gera momentos e tensões relevantes de flexão, que não eram considerados na fase inicial e que devem ser incorporados aos efeitos de primeira ordem. A partir disso, surge um segundo momento de cálculo conhecido como efeitos de 2ª ordem. Esses efeitos consideram a não linearidade geométrica que são os deslocamentos gerados na estrutura, e a não linearidade física que é a relação não linear entre tensão e deformação do material.

Na análise não linear, é considerado o comportamento não linear do material e com isso toda a geometria da estrutura, como também a armadura, precisam ser conhecidas para que a análise possa ser feita, pois a resposta do pilar depende muito de como a armadura do mesmo foi feita. É necessário que seja garantido que as condições de equilíbrio, de compatibilidade e de ductilidade sejam satisfeitas. Ainda é possível analisar de forma não linear para verificações do estado limite último e verificações do estado limite de serviço, de acordo com o item 14.5.5 da NBR 6118 (2023).

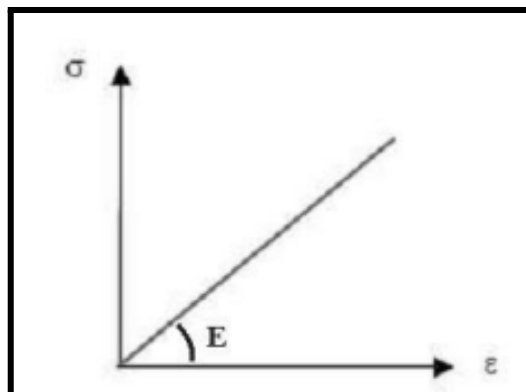
Figura 3 - Barra comprimida.



Fonte: Adaptado de Borges, 1999.

Em uma análise linear pode-se observar um equilíbrio entre a tensão e a deformação do material, onde, admite-se um comportamento elástico sendo conhecido como Lei de Hooke. No regime elástico, os materiais retornam a sua forma original quando a força aplicada é removida, este comportamento é linear, o que significa que a relação entre tensão e deformação é uma linha reta conforme a figura a seguir.

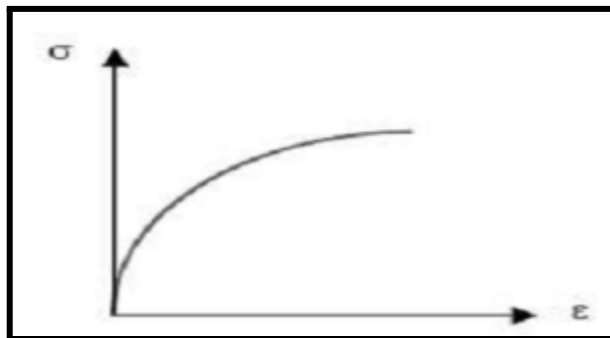
Figura 4 - Comportamento linear do material.



Fonte: Adaptado de Borges, 1999.

Por outro lado, o concreto armado se comporta de maneira diferente, a relação entre tensão e deformação não é linear e isso significa que ao contrário dos materiais que obedecem a Lei de Hooke, ou seja, o concreto não exibe uma relação direta e proporcional entre a força aplicada e a deformação resultante como mostrado na Figura 5.

Figura 5 - Comportamento não linear do material.



Fonte: Adaptado de Borges, 1999.

Os pilares centrais estão mais sujeitos a forças axiais de compressão, teoricamente, pois seus momentos fletores são de menor intensidade comparado com as cargas verticais em que é submetido. A determinação das forças que agem em uma estrutura, usando a modelagem em forma de pórtico tridimensional, como é feito atualmente nos projetos estruturais de edifícios com o uso de *softwares*, mostra que os pilares estão sujeitos a flexão composta oblíqua. Isso significa que eles estão submetidos a uma combinação de força vertical (força normal) e momentos fletores em ambos os eixos do plano (x e y). Portanto, para os pilares intermediários, não é correto assumir que estão apenas sujeitos a forças axiais verticais.

O índice de esbeltez é determinado a partir da razão entre o comprimento de flambagem do pilar e seu raio de giração, o qual depende de sua seção transversal. Desta forma, quanto maior este índice, maior a chance da flambagem acontecer no pilar, ocorrendo no eixo de menor inércia. O raio de giração é determinado pela equação (1), em seguida sendo possível a determinação do índice de esbeltez com a equação (2).

$$i = \sqrt{\frac{I_c}{A_c}} \quad \dots(1)$$

Onde:

$I_c$  = momento de inércia da seção na direção analisada;

$A_c$  = área da seção transversal de concreto.

$$\lambda = \frac{l_e}{i} \quad \dots(2)$$

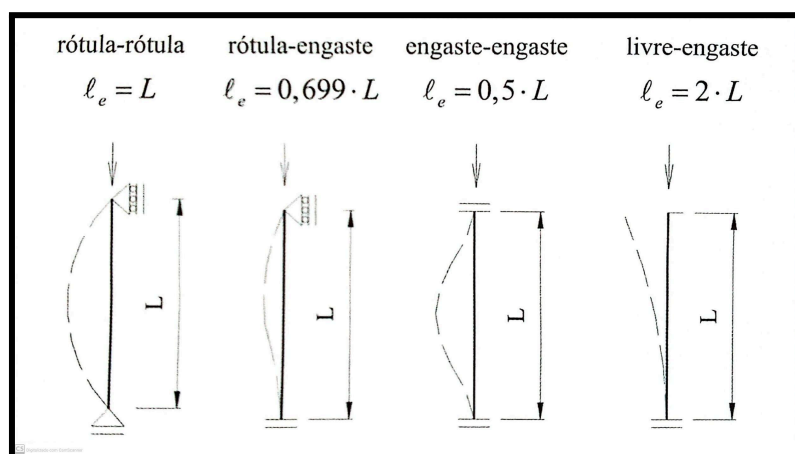
Sendo:

$l_e$  = comprimento de flambagem;

$i$  = raio de giração.

Segundo Carvalho e Pinheiro (2009) há diferentes condições de apoio que influenciam diretamente no comprimento de flambagem como mostrado na figura a seguir:

Figura 6 - Tipos de comprimentos de flambagem para algumas situações de vinculação de apoios.



Fonte: Cálculo e detalhamento de estruturas usuais de concreto armado (Carvalho; Pinheiro, 2009, p.341).

Conforme o item 11.3.3.4.3 da NBR 6118 (2023), o momento mínimo de primeira ordem pode ser obtido pela seguinte equação:

$$M_{1d,min} = N_d \cdot [0,0015 + (0,03 \cdot h)] \quad \dots(3)$$

Onde:

$N_d$  = força normal de cálculo;

$h$  = altura da seção transversal na seção analisada.

O cálculo dos efeitos de segunda ordem podem ser desprezados a partir do momento em que o índice de esbeltez for menor que o índice de esbeltez limite ( $\lambda_1$ ), onde depende de alguns fatores como a excentricidade relativa de primeira ordem, vinculação dos extremos da coluna isolada e a forma do diagrama de momentos de 1ª ordem.

$$\lambda_1 = \frac{25 + [12,5 \cdot (e_1/h)]}{\alpha_b} \quad \dots(4)$$

Onde:

$e_1$  = excentricidade de primeira ordem;

$h$  = altura da seção transversal na direção analisada, em metros;

$\alpha_b$  = coeficiente de vinculação do pilar.

O valor da esbeltez limite deve ser  $90 \leq \lambda_1 \leq 140$  e o valor de  $\alpha_b$  deve ser estabelecido de acordo com alguns critérios, para este caso analisado, foi escolhido o critério de pilares livre-engastado com cargas transversais significativas ao longo da altura, sendo  $0,85 \leq \alpha_b \leq 1$ .

Para a determinação dos efeitos de segunda ordem locais em pilares de concreto armado com  $\lambda \leq 140$ , a NBR 6118 (2023) permite a aplicação do método do pilar-padrão acoplado a diagramas. A não linearidade geométrica é considerada de forma aproximada, supondo que a deformação da barra seja senoidal. O momento total máximo do pilar deve ser calculado pela equação:

$$M_{d,tot} = \alpha_b \cdot M_{1d,A} + N_d \frac{l_e^2}{10r} \geq M_{1d,A} \quad \dots(5)$$

Sendo:

$1/r$  = curvatura da seção crítica.

$$\frac{1}{r} = \frac{0,005}{h \cdot (v+0,5)} \leq \frac{0,005}{h} \quad \dots(6)$$

Onde:

$h$  = altura da seção na direção considerada;

$v$  = força normal adimensional.

$$v = \frac{N_d}{(A_c \cdot f_{cd})} \quad \dots(7)$$

Sendo:

$N_d$  = força normal de cálculo;

$A_c$  = área de concreto bruta;

$f_{cd}$  = resistência de cálculo à compressão do concreto.

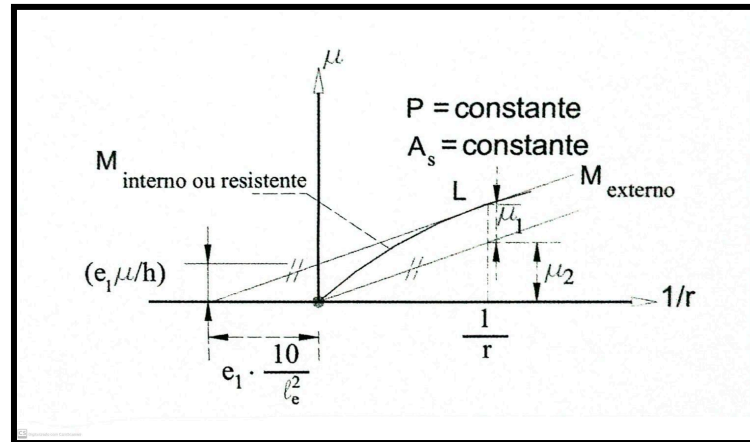
### 2.3 Método aproximado do pilar-padrão com curvatura real ou acoplado com diagrama momento-curvatura

Em pilares esbeltos é, normalmente, empregado o método do pilar padrão com curvatura real onde a metodologia é a mesma do método com curvatura máxima, porém, o ábacos de flexão composta normal e oblíqua no ELU de flexão ou compressão não podem ser usados devido a instabilidade que ocorre para valores de  $\varepsilon_c$  e  $\varepsilon_s$  que não são constantes nos domínios de deformação.

O processo é baseado em uma solução ideal que ocorre quando a curva de ações que, no caso de um pilar-padrão é considerada uma reta, tangencia a curva de esforços internos sem que  $1/r$  seja máximo conforme o esquema da Figura 7.



Figura 7 - Determinação do ponto L para cálculo do momento máximo de primeira ordem.



Fonte: Cálculo e detalhamento de estruturas usuais de concreto armado (Carvalho; Pinheiro, 2009, p.349).

Esse procedimento é descrito por FUSCO (1995), onde fala que o mesmo pode ser sistematizado criando um ábaco em função do momento de primeira ordem, força normal, taxa de armadura e comprimento de flambagem. Assim conhecidos o valor da força normal ( $P$ ), o comprimento de flambagem ( $l_e$ ) e o momento de primeira ordem através de  $\mu_1$ , pode-se, com a distribuição de aço em duas faces e os cobrimentos indicados, entrar no ábaco e encontrar a taxa de armadura ( $\omega$ ) necessária para a respectiva carga a ser aplicada. A curvatura em si não é máxima pois não é usado os domínios de deformação e com isso o efeito de segunda ordem já está embutido no gráfico.

Nas situações de flexão composta oblíqua poderia ser feita a partir de gráficos de curvatura em duas direções com correções da ação, porém FUSCO (1995) cita que na teoria os diagramas das curvaturas podem ser feitos, mas o trabalho material para o mesmo tende a ser impeditivo, com isso, há exceção para o uso de programas computacionais, a instabilidade na flexão composta oblíqua requer o uso do método geral.

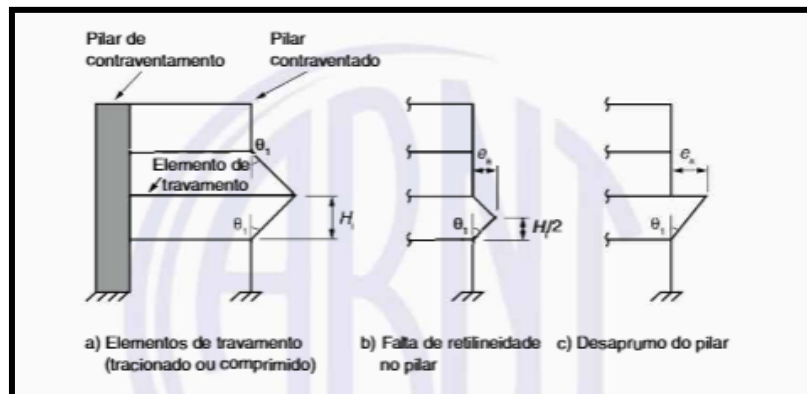
### 2.3.1 Excentricidade da carga axial

Uma força normal atuando em um pilar de seção retangular pode estar aplicada no seu centro geométrico (compressão centrada ou simples), a certa distância desse centro e sobre um dos eixos de simetria (flexão composta) e um ponto qualquer da seção (flexão oblíqua) (CARVALHO; PINHEIRO, 2009). Essas

distâncias são chamadas de excentricidades que devem ser conhecidas para o dimensionamento de pilares e podem ser causadas de diversas maneiras por fatores diferentes.

A excentricidade de cargas axiais em pilares de concreto armado ocorre quando a linha de ação da força aplicada não coincide com o eixo geométrico do elemento, gerando momentos fletores adicionais que alteram o comportamento estrutural. Esse fenômeno pode ser causado por imperfeições geométricas, erros de construção, movimentos laterais ou distribuições assimétricas de carga. Como resultado, há um aumento das tensões na seção transversal, maior propensão à fissuração e um risco elevado de instabilidade por flambagem, especialmente em pilares esbeltos. Para atenuar esses efeitos, as normas técnicas, como a ABNT NBR 6118, recomendam considerar excentricidades mínimas no dimensionamento para projetar armaduras que garantam segurança e ductilidade.

Figura 8 - Imperfeições geométricas locais.



Fonte: ABNT NBR 6118:2024.

A NBR 6118:2024 parte do começo em que de uma maneira genérica as construções de concreto são geometricamente imperfeitas, onde trata das imperfeições geométricas dos eixos das peças da estrutura descarregada que devem ser consideradas nas verificações de estado limite último de estruturas reticuladas. Muitas dessas imperfeições podem ser cobertas apenas pelos coeficientes de ponderação, mas as imperfeições dos eixos das peças, não (CARVALHO; PINHEIRO, 2009).

A excentricidade acidental ( $e_a$ ) pode ocorrer em pilares de qualquer esbeltez em situações como a incerteza na localização da força normal ou desvio do eixo da peça durante sua construção em relação a posição definida em projeto, e deve ser adicionada a excentricidade inicial ( $e_i$ ) quando a haver a mesma.

## 2.4 Estabilidade estrutural

Colunas esbeltas, quando submetidas a restrições de flexo-compressão, passam por uma alteração em sua geometria, o que provoca efeitos de segunda ordem e resulta em uma nova configuração deformada da estrutura. Considerando que a estrutura seja estável, ela seria capaz de suportar esses efeitos de segunda ordem, porém, se a mesma não suportar tais efeitos é considerada uma estrutura instável. Nesse cenário de instabilidade, ocorre o aumento dos deslocamentos, elevando os esforços aplicados, fazendo com que a estrutura entre em colapso.

Nas estruturas de concreto armado, o estado limite último de instabilidade ocorre quando existem elementos submetidos a flexo-compressão cuja a capacidade da resistência aumenta em menor proporção que a solicitada. De acordo com a NBR 6118 (2024), isso acontece sempre que o carregamento se intensifica, resultando no aumento das deformações.

Para a determinação da capacidade de carga das colunas esbeltas, devem ser considerados, no concreto armado, a influência de excentricidades não intencionais de cargas, como também o comportamento não elástico do concreto e o crescimento não linear das deformações por flexão. Em um modelo de coluna engastada na base e livre na extremidade superior, para uma carga  $P$ , é definida a equação diferencial elástica, equação 8.

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = - P(\delta - y) \quad \dots(8)$$

Onde:

$E$  = Módulo de elasticidade;

$I$  = Momento de inércia da seção;

$P$  = Força axial aplicada;

$\delta$  = Deslocamento horizontal;

$y$  = Deflexão da coluna medida;

$\frac{d^2y}{dx^2}$  = derivada segunda da deflexão  $y$  em relação à variável  $x$ .

Desta forma foi determinada uma equação geral para o problema proposto na equação anterior, onde é levado em consideração o comprimento de flambagem, como é visto a seguir:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L_e^2} \quad \dots(9)$$

Sendo:

$P_{cr}$  = carga crítica;

$L_e$  = comprimento de flambagem.

Os pontos críticos são aqueles onde uma trajetória de equilíbrio alcança um valor extremo ou onde trajetórias diferentes de equilíbrio se intersectam. Para casos em que a equação diferencial da curva que descreve a elástica da coluna não é conhecida ou é muito complicada, existem outros métodos como o de Rayleigh-Ritz, que é um método energético que utiliza a mínima energia potencial total que é um ótima ferramenta para resolver problemas da mecânica estrutural.

## 2.5 Fórmula da secante

Observando que a força  $P$  aplicada a uma coluna nunca é perfeitamente centrada, e chamando de  $e$  a excentricidade da força, isto é, a distância entre a linha de ação de  $P$  e o eixo da coluna, substitui-se a força excêntrica dada por uma força centrada  $P$  e um momento  $M_a$ . À medida que aumenta a força excêntrica, tanto o momento  $M_a$  quanto a força axial  $P$  também aumenta, e ambos farão a coluna flexionar ainda mais. Visto dessa maneira, o problema de flambagem não é uma questão de determinar por quanto tempo a coluna pode permanecer reta e estável sob uma força cada vez maior, mas sim quanto se pode permitir que a coluna

desloque sob uma força cada vez maior, sem que a tensão admissível seja ultrapassada e sem que a deflexão  $y_{m\acute{a}x}$  se torne excessiva.

Tendo em vista essas relações sobre a teoria da f3rmula da secante, foi usado para o c3lculo do deslocamento m3ximo a seguinte f3rmula:

$$y_{m\acute{a}x} = e \left[ \sec \left( \sqrt{\frac{P}{EI}} L_e \right) - 1 \right] \quad \dots(10)$$

Onde:

$e$  = excentricidade da carga  $P$ ;

$P$  = carga vertical aplicada;

$E$  = m3dulo de elasticidade;

$I$  = in3rcia do eixo;

$L_e$  = comprimento de flambagem.

## 2.6 M3todo dos elementos discretos formado por barras (LDEM)

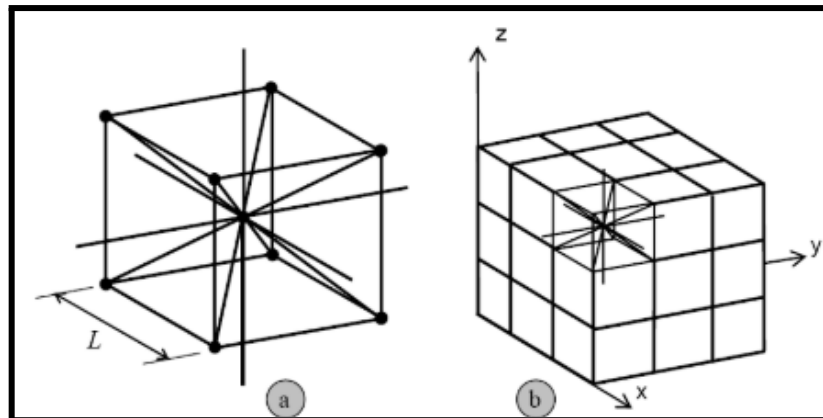
O m3todo dos elementos discretos formados por barras (LDEM) tem como objetivo representar o cont3nuo por interm3dio de um arranjo espacial de barras com as massas concentradas em seus n3s.

Os m3todos tradicionais, como por exemplo o m3todo dos elementos finitos e de contorno, saem do princ3pio de que o meio 3 cont3nuo e desta forma exigem um esforço maior da simula3o do processo de fratura. Assim a utiliza3o da mec3nica cont3nuo na an3lise de um corpo com falhas, busca m3todos num3ricos mais simples como o m3todo dos elementos discretos, que conseguem representar satisfatoriamente o caminho da fissura. O modelo c3bico apresentado por Nayfeh; Hefzy (1978) mostra o sistema c3bico deste trabalho acad3mico, como na Figura 9, onde:

a) modelo c3bico b3sico;

b) corpo prism3tico gerado.

Figura 9 - Sistema utilizado no LDEM.



Fonte: Adaptado de Kostaski (2012, p.37).

O comportamento dinâmico do meio contínuo partindo da concentração de massa em nós é uma característica positiva do método, levantando a possibilidade de utilização de métodos de integração para a fácil solução de problemas dinâmicos. Na situação de um material elástico isotrópico a área transversal do elemento é representada pela equação (11).

$$A_t = \varnothing L^2 \quad \dots(11)$$

Onde:

L = comprimento do lado do módulo cúbico considerado.

Da mesma maneira a área dos elementos da diagonal ( $A_\alpha$ ), sendo:

$$A_\alpha = \frac{2}{\sqrt{3}} \delta \varnothing L^2 \quad \dots(12)$$

Em sólidos isotrópicos tem-se as seguintes equações:

$$\varnothing = \frac{(9 + 8\delta)}{(18 + 24\delta)} \quad \dots(13)$$

$$\delta = 9\nu(4 - 8\nu) \quad \dots(14)$$

Onde:

$\nu$  = coeficiente de Poisson do sólido.

É válido lembrar que para  $\nu = 0,25$  há uma equidade entre o modelo discreto e o contínuo isotrópico. Quando esse valor é diferente de 0,25 surgem diferenças em relação ao corte, porém dentro de um intervalo de  $0,20 < \nu < 0,25$  as diferenças podem ser desconsideradas em termos de cisalhamento, assim para valores que estão fora deste intervalo é necessário a utilização de uma diferente matriz para formação do módulo cúbico de Nayfeh; Hefzy (1978).

As equações (13) e (14) são as responsáveis pela equivalência completa entre o meio contínuo e o elemento discreto de forma que as seções transversais sejam equivalentes por unidade de comprimento das barras.

O sistema de equações resultantes da segunda Lei de Newton em cada nó possui o formato demonstrado na equação (15).

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + F_r^{\rightarrow}(t) - P^{\rightarrow}(T) = 0 \quad \dots(15)$$

Onde:

$\ddot{x}$  e  $\dot{x}$  = vetores de aceleração e velocidade nodais;

M = matriz de massas nodais;

C = matriz de amortecimento;

$F_r^{\rightarrow}(t)$  e  $P^{\rightarrow}(T)$  = vetores das forças nodais internas e externas.

O método dos elementos discretos formados por barras (LDEM) tem uma grande flexibilidade para a modelagem de falhas que podem ser adicionadas como características próprias ou como consequência da nucleação e difusão da trinca. Para a integração da equação (15) no domínio do tempo é utilizado um esquema de integração de diferenças finitas. A estabilidade do esquema de integração é assegurada limitando o incremento de tempo como mostra a equação (16) a seguir:

$$\Delta t \leq 0,6 \frac{L}{C_p} \quad \dots(16)$$

Onde:

$C_p$  = velocidade de propagação das ondas longitudinais.

Sendo:

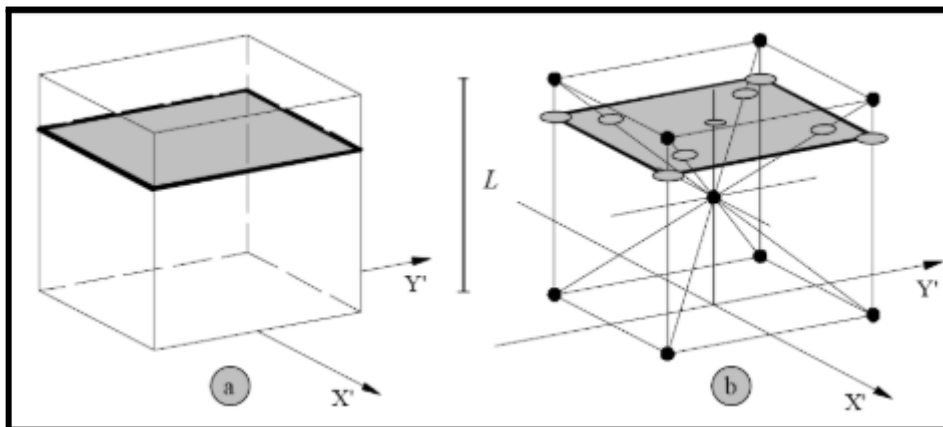
$$C_p = \frac{\sqrt{E}}{\sqrt{\rho}} \quad \dots(17)$$

A convergência de soluções foi verificada, por Dalguer (2001), utilizando o LDEM tanto em problemas de estabilidade elástica quanto de elasticidade linear.

### 2.6.1 Modelo constitutivo não linear

A energia dissipada da fratura é levada em consideração de modo em que a energia dissipada, na ação da ruptura, seja contínua e similar a sua representação discreta. Desta maneira a fratura de um caso cúbico com as dimensões  $L \times L \times L$  representado na Figura 10.

Figura 10 - a) sólido cúbico com dimensões  $L \times L \times L$ , b) módulo do LDEM de dimensões  $L \times L \times L$ .



Fonte: Adaptado de Kostas (2012, p.39).

A energia dissipada por uma fratura de uma amostra contínua devido a uma ruptura paralela a uma das faces é obtida pela seguinte equação:

$$\Gamma = G_f \Lambda = G_f L^2 \quad \dots(18)$$

Onde:

$\Lambda$  = área de fratura.

Todavia, a energia dissipada quando o módulo do LDEM de dimensões  $L \times L \times L$  é dividido em duas partes levando em conta a contribuição de cinco elementos longitudinais (quatro coincidem com os eixos do módulo e um interno) e quatro elementos diagonais (sendo o comprimento  $L_d = \frac{2}{\sqrt{3}}$ ), Figura 9b. Assim, a energia eliminada pelo módulo do LDEM é descrita da equação (19).



$$\Gamma_{DEM} = G_f(4.0, 25. C_A + C_A + 4. C_A \cdot (\frac{2}{\sqrt{3}})^2) \cdot L^2 \quad \dots(19)$$

Visto que o primeiro termo na soma considera os quatro elementos dos eixos, o elemento longitudinal interno é considerado no segundo termo e a contribuição dos quatro elementos diagonais é considerado no terceiro termo.  $C_a$  é um parâmetro necessário para que possa ser garantida a equivalência entre as equações (18) e (19). A área de fratura correspondente  $A_i^f = (\frac{3}{22}) \cdot L_i^2$ , sendo a equação longitudinal (20) e equação diagonal (21), respectivamente:

$$A_i^f = (\frac{3}{22}) \cdot L^2 \quad \dots(20)$$

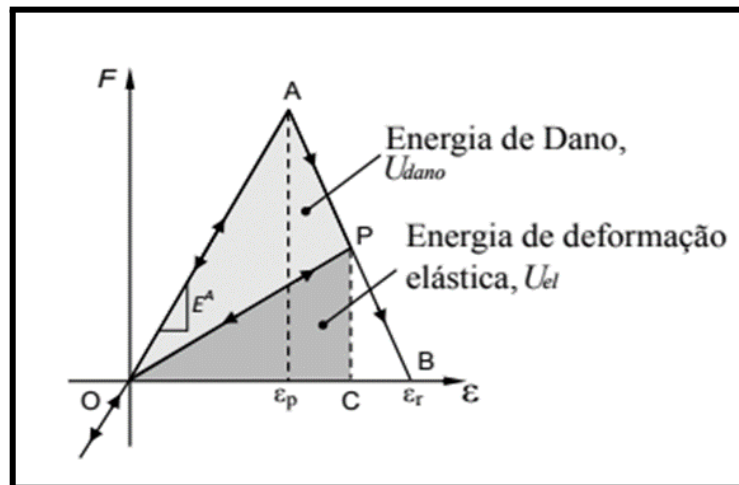
$$A_d^f = (\frac{4}{22}) \cdot L^2 \quad \dots(21)$$

Instantaneamente quando o elemento se rompe, surgem as equações representadas em (20) e (21), nas quais liberam a energia de fratura. Essa energia depende da área de fratura e da equação constitutiva do material.

### 2.5.2 Relação constitutiva bilinear

A lei constitutiva bilinear ou modelo de Hillerborg (1978), que é utilizado para representar o comportamento não linear dos materiais quase frágeis no Método dos Elementos Discretos Formados por Barras (LDEM). Esse modelo considera que o material possui um comportamento linear-elástico até atingir a tensão de escoamento ou ruptura, e após esse ponto, o material apresenta um comportamento plástico com redução da rigidez, conforme a figura a seguir:

Figura 11 - Lei constitutiva bilinear.



Fonte: Adaptado de Kostascki (2012).

O modelo linear de Hillerborg é apresentado pela equação (22), onde  $\varepsilon_p$  e  $\varepsilon_r$  as deformações crítica de limite e de falha, respectivamente:

$$f(\varepsilon) = \begin{cases} EA_i \varepsilon & \text{se } \varepsilon \leq \varepsilon_p \\ EA_i \varepsilon_p \frac{\varepsilon_r - \varepsilon}{\varepsilon_r - \varepsilon_p} & \text{se } \varepsilon_p < \varepsilon \leq \varepsilon_r \\ 0 & \text{se } \varepsilon \geq \varepsilon_r \end{cases} \quad \dots(22)$$

A quantidade mínima de energia necessária para fraturar a região de influência do componente é determinada pela superfície do triângulo OAB, ilustrada na Figura 10. A superfície do triângulo OPC representa a energia necessária para fraturar a região de influência do componente, enquanto a energia dissipada pelo dano é calculada com base na superfície do triângulo OAP. A falha do componente ocorre quando a energia dissipada pelo dano se iguala à energia de fratura. Sob a ação de uma carga de compressão, o material exibe um comportamento elástico linear e sua falha é consequência de uma tensão indireta.

Os parâmetros constitutivos fundamentais no Método dos Elementos Discretos formado por barras (LDEM) são os seguintes: (F) representa a força axial, enquanto ( $\varepsilon$ ) é a deformação específica do componente. A rigidez do componente é calculada multiplicando o módulo de Young (E) pela área da seção transversal (A) do componente. O comprimento da aresta do cubo básico é denotado por L. As áreas

das arestas longitudinais e diagonais são  $A_t$  e  $A_\alpha$ , respectivamente, e seus valores são determinados por meio das equações (11) e (12).

As principais características desse modelo são:

- Comportamento linear-elástico até a tensão de escoamento ou ruptura ( $\sigma_{eq,rupt}$ ): Nessa fase, o material segue a lei de Hooke, com o módulo de elasticidade (E) constante;
- Comportamento plástico após a tensão de escoamento ou ruptura: Após atingir a tensão de escoamento, o material apresenta uma redução gradual da rigidez, representada por um módulo de elasticidade reduzida (E'). Essa redução de rigidez simula o processo de fissuração e dano do material;
- Energia de fratura ( $G_f$ ): A energia de fratura específica é um parâmetro importante nesse modelo, pois representa a energia necessária para propagar uma trinca no material. Essa energia é dissipada durante o processo de fratura.

Esse modelo de lei constitutiva bilinear permite representar de forma simplificada o comportamento não linear de materiais, e é amplamente utilizado no Método dos Elementos Discretos Formados por Barras (LDEM) para simular a ruptura desses materiais. Em resumo, a lei constitutiva bilinear ou modelo de Hillerborg é uma abordagem eficiente para representar o comportamento dos materiais fraturados no LDEM (*Lattice Discrete Element Method*), permitindo simular a degradação do material após atingir a tensão de escoamento ou ruptura.

Neste método, o meio contínuo é discretizado em uma malha de elementos interconectados, formados por barras ligadas nos nós. Cada barra representa um volume elementar do material, possuindo propriedades mecânicas, como rigidez e resistência à tração. Cada barra tem um comportamento linear-elástico até atingir um critério de ruptura, definido por tensão ou deformação limite. Após a ruptura a barra é excluída do modelo, simulando o dano do material.

As barras interagem entre si através da força nos nós, transmitindo as tensões e deformações pelo modelo discreto. O método permite a incorporação da aleatoriedade nas propriedades das barras, simulando a heterogeneidade do material. O dano no material é representado pela ruptura progressiva das barras,

sendo possível acompanhar a evolução do dano através de um mapeamento de dano na estrutura.

O valor da deformação axial onde o elemento perde a capacidade de carga, é conhecido como deformação limite ( $\varepsilon_p$ ), e este valor deve ser encontrado satisfazendo a condição de que quando ocorrer a falha do elemento, a densidade da energia dissipada deve ser igual ao produto da área dissipada do elemento ( $A_i^f$ ), multiplicado pela energia de fratura ( $G_f$ ), dividido pelo comprimento do elemento ( $L_i$ ), conforme a equação a seguir:

$$\int_0^{\varepsilon_r} F(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{G_f A_i^f}{L_i} \quad \dots(23)$$

Se o item escolhido for paralelo ou inclinado, o subíndice  $i$  precisa ser trocado por  $l$  ou  $d$ , respectivamente. A máxima deformação que o elemento atinge antes do início do dano, ponto A da Figura 10, é a deformação crítica de falha ( $\varepsilon_p$ ).

A equação (24) expressa a relação entre a energia específica de fratura  $G_f$  e a deformação crítica de falha, sendo formulada de acordo com a Mecânica da Fratura Linear Elástica.

$$\varepsilon_p = R_f \sqrt{\frac{G_f}{E}} \quad \dots(24)$$

Considerando  $R_f$  como o coeficiente de falha, o qual é afetado pela existência de um defeito inerente de dimensão  $a$ , que é estabelecida previamente e pode ser encarada como característica do material. O parâmetro sem dimensão  $Y$  varia de acordo com a dimensão e o tipo de fissura. O coeficiente de falha é calculado pela equação (25).

$$R_f = \frac{1}{Y\sqrt{a}} \quad \dots(25)$$

Por meio da variação aleatória na energia específica de fratura  $G_f$ , é possível introduzir alguma irregularidade nas propriedades do material. Quando a

deformação limite ( $\varepsilon_r$ ) é alcançada, correspondente ao ponto B da Figura 10, o componente perde sua habilidade de suportar carga. Através do parâmetro  $K_r$ , a deformação limite pode ser relacionada com a deformação crítica de falha. O parâmetro  $K_r$  faz parte da equação (26).

$$\varepsilon_r = K_r \varepsilon_p \quad \dots(26)$$

A equação (27) exhibe um conjunto de conexões que contemplam os parâmetros da quebra, do nível de deformação  $\varepsilon_r$  e o coeficiente  $K_r$ .

$$\frac{G_f A_i^f}{L_i} = \frac{\varepsilon_r \varepsilon_p E A_i}{2} = \frac{K_r \varepsilon_p^2 E A_i}{2} \quad \dots(27)$$

Caso os elementos estejam orientados na longitudinal ou diagonal, o subíndice  $i$  pode ser trocado por  $l$  ou  $d$ , respectivamente. Por intermédio da equação (28), obtém-se o coeficiente  $K_r$ , que depende das propriedades do material e do comprimento do elemento  $L_i$ . Segundo Riera e Rocha (1991), a estabilidade do algoritmo é garantida na condição de  $K_r \geq 1$ . É fundamental definir o comprimento crítico do elemento através da equação (29). Para os elementos longitudinais na equação (30), o coeficiente ( $A_l^f / A_l$ ) é igual a  $3/22 \varphi$ . No caso dos elementos diagonais, o coeficiente ( $A_d^f / A_d$ ) é equivalente a  $3/11 \varphi$ . Em um caso particular de um contínuo isotrópico com coeficiente  $\nu = 0,25$ , as funções serão  $\delta = 1,125$  e  $\varphi = 0,4$ , resultando em ( $A_l^f / A_l$ )  $\approx 0,34$ .

Por questões de praticidade, é utilizado um único valor de comprimento crítico do elemento tanto nos elementos longitudinais quanto nos diagonais. Assim, há um valor máximo do comprimento do elemento que mantém a estabilidade da RCE, dado que os parâmetros na definição da RCE dependem exclusivamente das propriedades do material, da discretização ou de ambos simultaneamente. O DEM emprega a lei de dano escalar para descrever o comportamento uniaxial dos elementos, sendo que o modelo completo abrange o dano anisotrópico, devido à orientação dos elementos em diferentes direções espaciais.

$$K_r = \left( \frac{G_f}{E \varepsilon_p^2} \right) \left( \frac{A_i^f}{A_i} \right) \left( \frac{2}{L_i} \right) \quad \dots(28)$$

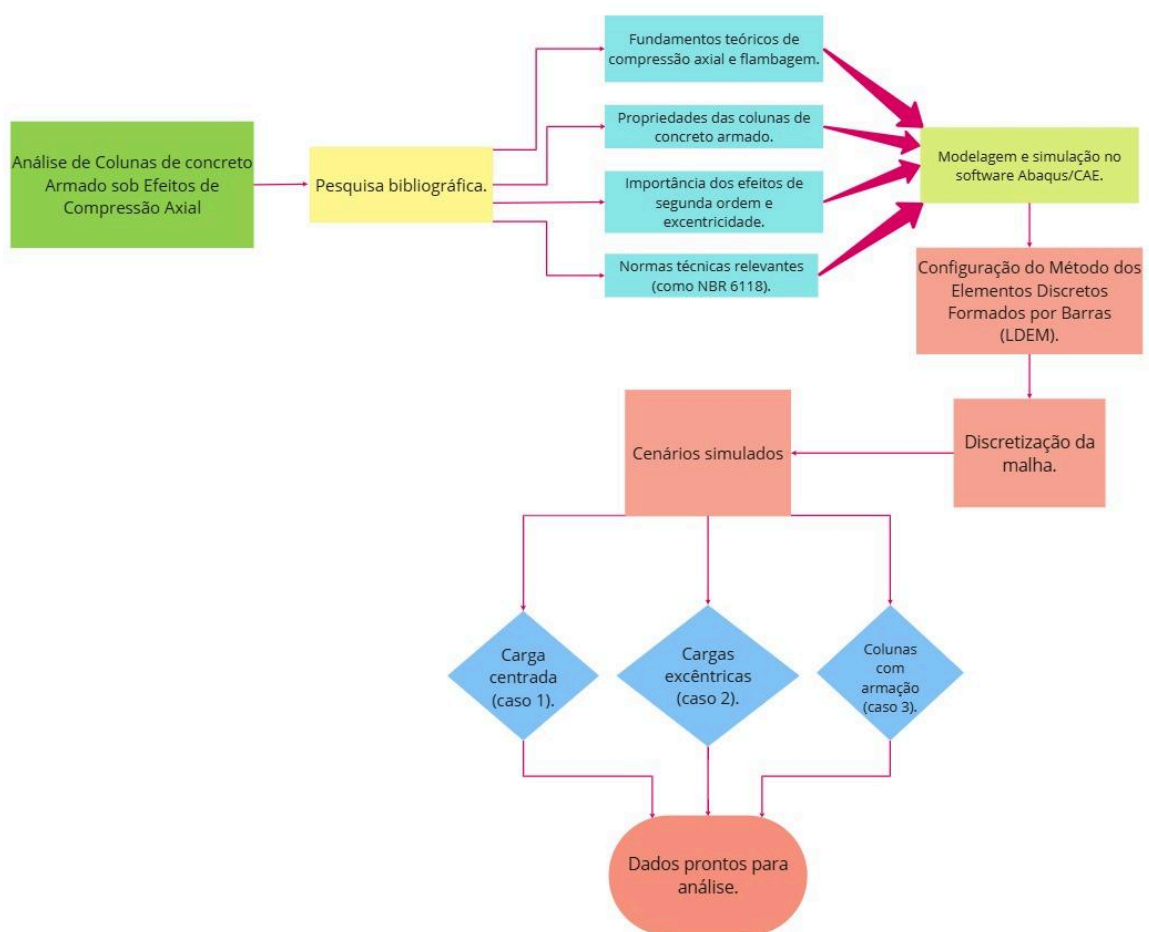
$$L_{cr} = 2 \left( \frac{G_f}{E \varepsilon_p^2} \right) \left( \frac{A_i^f}{A_i} \right) \quad \dots(29)$$

$$K_r = \frac{L_{cr}}{L_i} \geq 1 \rightarrow L_i \leq L_{cr} \quad \dots(30)$$

### 3 Metodologia

Este capítulo abrange a metodologia, que propõe-se apresentar as simulações numéricas feitas nas colunas com e sem armadura. Foram divididos em três casos diferentes para poder validar a simulação no material do concreto como o material composto que seria o concreto armado. Na Figura 12 pode-se observar o fluxograma para melhor entendimento.

Figura 12 - Fluxograma da metodologia utilizada.



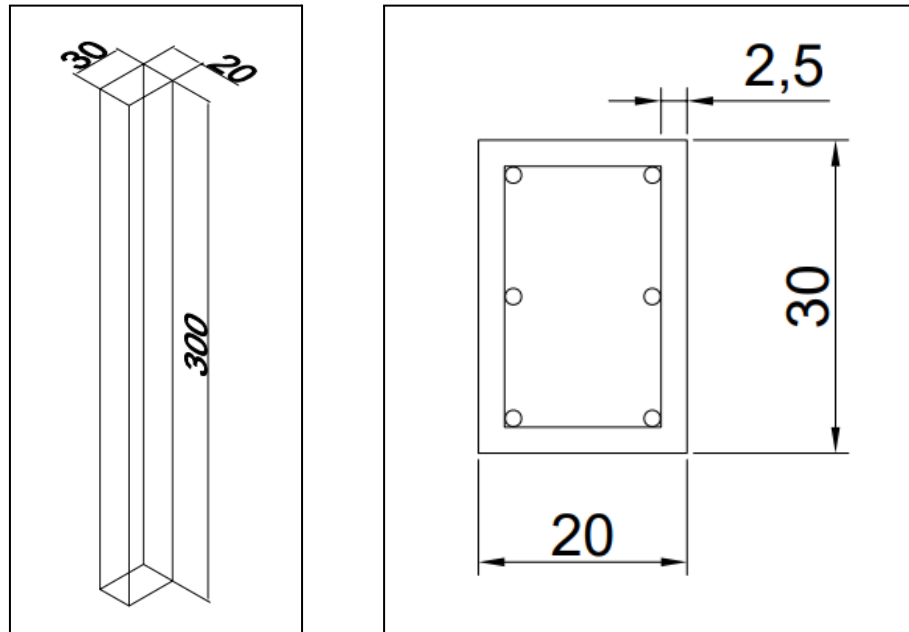
Fonte: Autoria própria.

#### 3.1 Caracterização da coluna

Em consequência da necessidade de um modelo com o comportamento não linear geométrico e efeitos de flambagem, foi pensado em uma coluna de 3 metros de altura e uma seção transversal de 0,30 m X 0,20 m, tendo um área transversal de

$0,06 \text{ m}^2$ , momento de inércia de  $4,5 \times 10^{-4} \text{ m}^4$  em x e  $2 \times 10^{-4} \text{ m}^4$  em y. Pelo fato de o pilar ser considerado do tipo livre-engastado, seu comprimento de flambagem ( $L_e$ ) é de 6 metros considerando que  $L_e = 2L$ . A armadura do pilar é composta por uma armadura de 16mm de diâmetro com estribos de 6,3mm. A seguir a Figura 13 apresenta as características geométricas da coluna em centímetros.

Figura 13 - Características geométricas da coluna.



Fonte: Autoria própria.

Após o cálculo do índice de esbeltez, que foi de  $\lambda_x = 103,8$  e  $\lambda_y = 69,2$ , é considerada uma coluna muito esbelta pelo fato de um dos eixos ter um índice de esbeltez maior que 90, desta maneira a coluna é caracterizada como uma coluna esbelta ou muito esbelta. Para a concepção da barra foi considerado que a base está completamente restrita de movimentos, como também o topo da coluna está totalmente livre para movimentos e a estrutura está em equilíbrio estável.

O material proposto em que constitui a coluna é o concreto armado, tendo uma resistência característica de 30MPa e o coeficiente de *Poisson* de 0,25. Tendo em vista possíveis comportamentos do material, foram feitas alguma hipóteses:



- Há uma perfeita e ótima aderência entre o concreto e o aço, sendo a deformação específica do aço é a mesma que a deformação do concreto aderente;
- É considerada a não linearidade do material;
- O concreto é homogêneo e isotrópico;
- As áreas da seção transversal da armadura longitudinal de compressão não difere da armadura longitudinal de tração atendendo requisitos como resistência.

Como falado nas seções anteriores, foram calculados alguns parâmetros para a caracterização da coluna e suas propriedades, abaixo a Tabela 1 mostra os respectivos parâmetros.

Tabela 1 - Parâmetros da malha.

Lc	E	Gc	Rfc	Lcr	Kr	$\Delta$ crít.	$\Delta T$	$\delta F$	$\epsilon_p$	Cv(Gf)
m	N/m <sup>2</sup>	N/m	-	-	-	(seg)	(seg)	MN/m <sup>2</sup>	-	%
2,50E-02	3,00E+10	1,50E+02	3,65148	4,869E-02	1,9477	3,72E-06	1,00E-09	8,00	2,67E-04	50

Fonte: Autoria própria.

### 3. 2 Discretização da malha no Abaqus/CAE

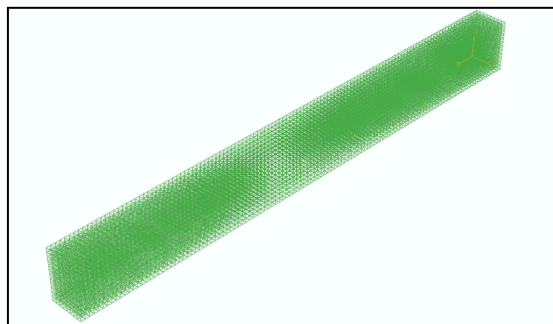
A malha é formada por elementos quadrados de dimensões obtidas após os cálculos citados anteriormente, garantindo assim que a malha forneça todas as condições de contorno necessárias para que o modo de falha seja o mais próximo possível dos resultados obtidos em laboratório. Esse cálculo de elaboração da malha é necessário para que o refinamento dos resultados seja definido, como por exemplo, quanto mais fina for a malha do elemento mais refinado serão seus resultados e assim mais próximo da realidade o ensaio chegaria.

O  $L_c$  representa o tamanho do elemento da malha na simulação. Um menor  $L_c$  indica uma malha mais refinada, o que pode levar a resultados mais precisos, mas também a um aumento no tempo de execução na simulação. O código de discretização do elemento gera uma malha tridimensional para simulação no Abaqus utilizando o Método de Elementos Discretos (DEM), onde as dimensões e propriedades da malha são definidas por parâmetros específicos. A distância entre

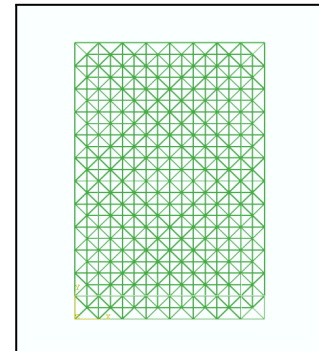
os nós,  $L_c = 0,0025\text{ m}$ , determina o espaçamento uniforme da malha, que contém nós nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ , respectivamente, totalizando 14.157 nós.

Alterações no tamanho da malha podem ser feitas ajustando as dimensões dos cubos que compõem a malha ou refinando  $L_c$ , o que aumenta a resolução, mas eleva o custo computacional. Esse modelo é configurado para simulações dinâmicas explícitas e considera propriedades físicas e geométricas para representar o comportamento do material. A seguir na figura 14 pode ser observado o resultado da malha discretizada.

Figura 14 - a) Malha em uma vista 3D; b) Malha vista a partir da seção transversal da coluna.



a)



b)

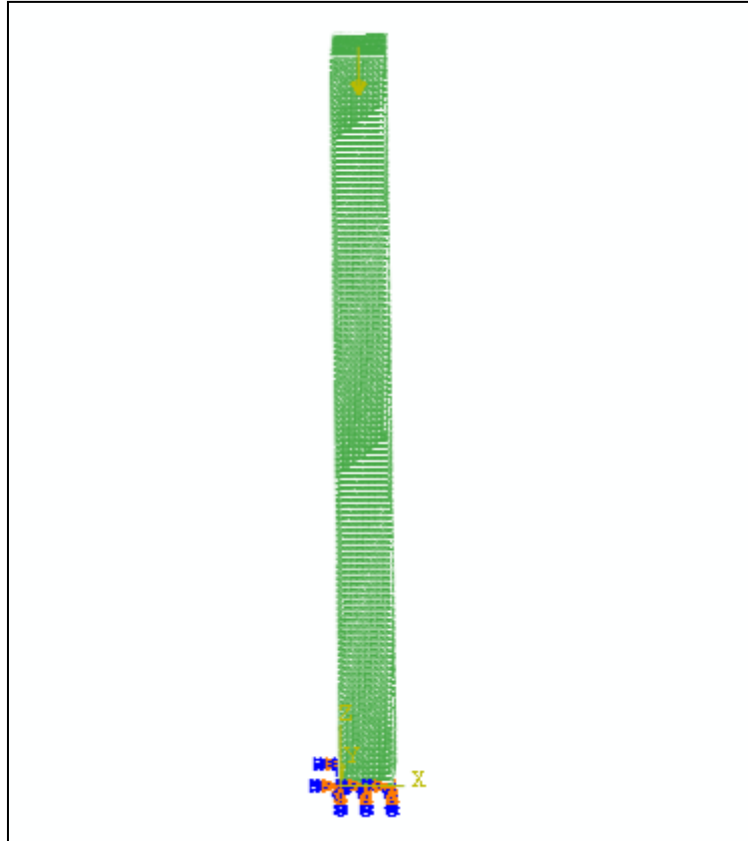
Fonte: Autoria própria.

A discretização do elemento é feita a partir do *software* matemático MATLAB o qual é voltado para situações de cálculo em que envolvem cálculo numérico. No *software* é feito todo o dimensionamento como também a inserção dos materiais em que compõem o elemento estrutural em questão.

### 3. 3 Caso 1: Carga centrada e sem armadura

Para a análise do concreto em suas características elásticas foram realizados testes, em que a malha está sem perturbação. A carga foi centrada e com isso foi feita a análise a partir da sua carga crítica que foi calculada a partir da fórmula de Euler. Na Figura 15 mostra como foi realizada as condições de contorno e o posicionamento da carga na coluna.

Figura 15 - Disposição da carga na coluna.



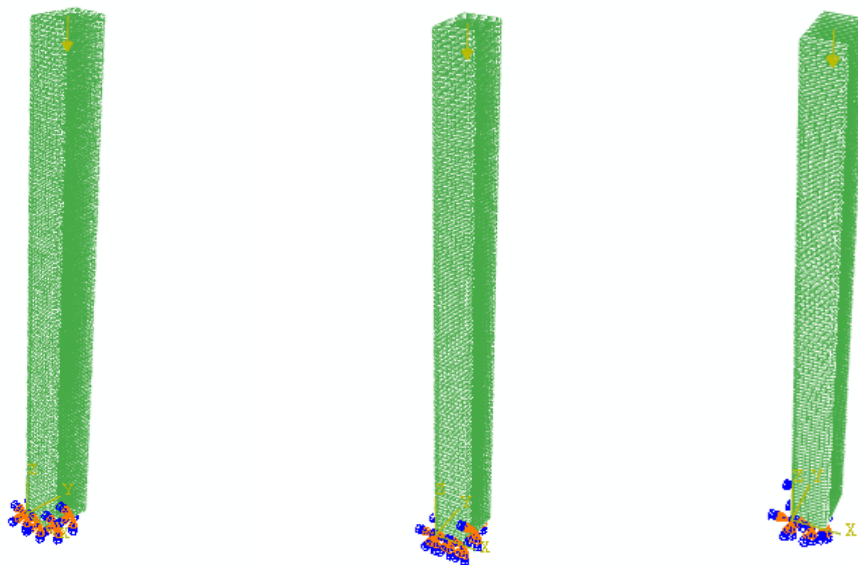
Fonte: Autoria própria.

A discretização da malha incorpora a possibilidade de adicionar perturbações na malha por meio da introdução de aleatoriedade nas propriedades das barras, permitindo a simulação da aleatoriedade de materiais e geometrias. Essa funcionalidade está controlada pelo parâmetro  $C_v$ , que representa o coeficiente de variação associado às propriedades mecânicas das barras. Se  $C_v \geq 0,04$ , a função *randmec* é utilizada para gerar distribuições aleatórias das propriedades mecânicas (como rigidez ou área) das barras em diferentes seções, com base em uma distribuição *Weibull*.

Além disso, a lógica da discretização classifica as barras com base em sua posição na malha, identificando se são de borda, face, diagonais ou internas, o que pode ser usado para atribuir diferentes níveis de perturbação dependendo da localização. Isso é útil para modelar imperfeições estruturais e simular variações reais nas condições do material. No entanto, se o  $C_v$  for menor que 0,04, nenhuma perturbação é aplicada, e a malha permanece uniforme, representando um sistema

idealizado. Foi feita uma análise com diferentes níveis de perturbação, onde foram considerados 10%, 20% e 50% na perturbação da malha, considerando as mesmas propriedades citadas anteriormente com o intuito apenas de considerar possíveis melhorias nos resultados. Na Figura 16 pode ser visto como ficou as condições de contorno e a disposição das cargas nas colunas.

Figura 16 - Colunas com diferentes níveis de perturbação.

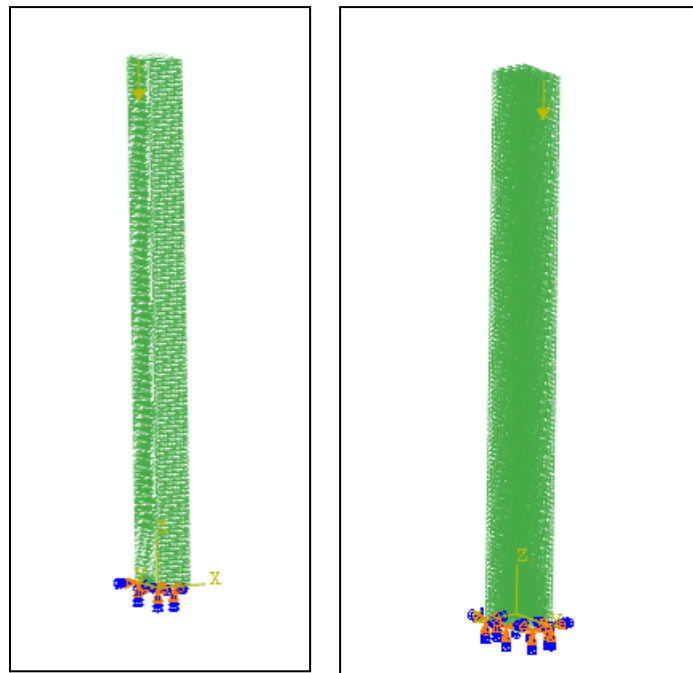


Fonte: Autoria própria.

### 3. 4 Caso 2: Carga com excentricidade

Para o segundo caso de análise do concreto, foi adotado os mesmo parâmetros anteriores, porém, agora foi adicionado cargas excêntricas em cada um dos eixos para testar os valores de esbeltez calculados. A seguir a Figura 17 apresenta as condições de contorno e a disposição das cargas, sendo, uma no menor eixo e outra no maior eixo, denominadas “à esquerda” e “atrás” respectivamente.

Figura 17 - Disposição das cargas excêntricas.



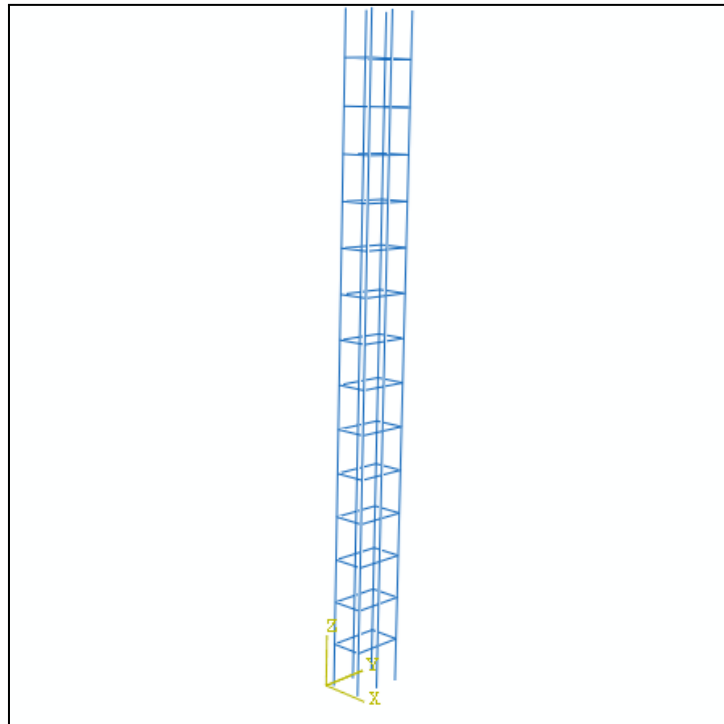
Fonte: Autoria própria.

As cargas foram adicionadas e o pilar foi engastado, assim deixando uma das pontas da coluna livre para que o comprimento de flambagem pudesse ser do tipo livre-engastado, como falado anteriormente.

### 3.5 Caso 3: Coluna com armadura e com carga centrada e excêntrica

Foram feitos os ensaios numéricos de compressão com a coluna e sua respectiva armadura. A armadura foi dimensionada e inserida no Abaqus, tendo suas propriedades adicionadas, como os diâmetros das barras longitudinais e os estribos. A armadura foi completamente “colada” ao concreto usando o comando *Tie* na aba *Interaction* no Abaqus. Na Figura 18 é possível ver como a armadura ficou projetada.

Figura 18 - Armadura do pilar.



Fonte: Autoria própria.

Após a inserção da armadura do pilar foram realizadas as mesmas análises anteriores das colunas sem armaduras. Foram realizados testes com as cargas excêntricas e centradas, analisando as curvas de força pelo deslocamento em relação a força crítica calculada como também a comparação das curvas das cargas excêntricas com o deslocamento máximo calculado a partir da fórmula da secante. Não foram adicionadas perturbações na malha neste caso para que não houvesse alterações nos resultados em comparação autênticas.

## 4 Análise dos Resultados

Neste capítulo é mostrado os dados que foram obtidos a partir das simulações numéricas e comparados com os valores obtidos por cálculo, analisando os fundamentos teóricos relacionados à flambagem de colunas de concreto armado. Em um primeiro foi feita a verificação da coluna, se a mesma atendia aos requisitos de dimensionamento pelo método aproximado do pilar-padrão e, logo em seguida, foi feita a análise dos resultados das simulações.

### 4.1 Verificação do método aproximado do pilar-padrão com curvatura real ou acoplado com diagrama momento-curvatura

Para a verificação do método aproximado do pilar-padrão com curvatura real ou acoplado com diagrama momento curvatura foi utilizado o *software* Pcalc, onde foram colocados os dados de entrada da coluna como dimensões da seção transversal como também os diâmetros das armaduras que compõem o pilar.

Figura 19 - Dados da geometria da coluna.

Entrada de dados: Geometria

Seção  
Tipo: Retangular

Geometria  
Tipo: Pilar em Balanço

Dimensões:  
hx = 20 cm    hy = 30 cm

Comprimento:  
L = 300 cm

Ok    Cancelar

Fonte: Autoria própria.

Figura 20 - Dados das propriedades da coluna.

Entrada de dados: Materiais

**Concreto**  
Diagrama tensão-deformação NBR6118 (2013):

fck= 30 MPa  
γc= 1

$\sigma_c = 0.85 f_{ck} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{\epsilon_c}{\epsilon_{c2}} \right)^n \right]$

Para  $f_{ck} \leq 50$  MPa:  $n=2$   
Para  $f_{ck} \geq 50$  MPa:  $n=1.4 + 23.4 (90 - f_{ck}/100)^5$

**Aço**  
Diagrama tensão-deformação NBR6118 (2013):

f<sub>yk</sub>= 500 MPa  
E<sub>s</sub>= 210 GPa  
γ<sub>s</sub>= 1

Ok Cancelar

Fonte: Autoria própria.

Os coeficientes de majoração foram considerados igual a 1 para fazer com que a coluna obtenha seus esforços últimos, pois esses esforços podem configurar cenários de possíveis flambagens ou cargas muito grandes que podem levar a coluna a sua ruptura.

Figura 21 - Esforços aplicados na coluna.

Entrada de dados: Esforços

Coefficiente de ponderação:  
γ<sub>f</sub>= 1

Unidades: [kN, kN.m]

Combinação	Nsk	Msk,x (Topo)	Msk,x (Base)	Msk,y (Topo)	Msk,y (Base)
1	-600	15	0	10	0

Ok Cancelar

Fonte: Autoria própria.

Optou-se pela realização de uma única combinação com os respectivos esforços apenas com o intuito de validação do método para com a coluna e também



a aprovação do tamanho da bitola das armaduras para o dimensionamento da mesma.

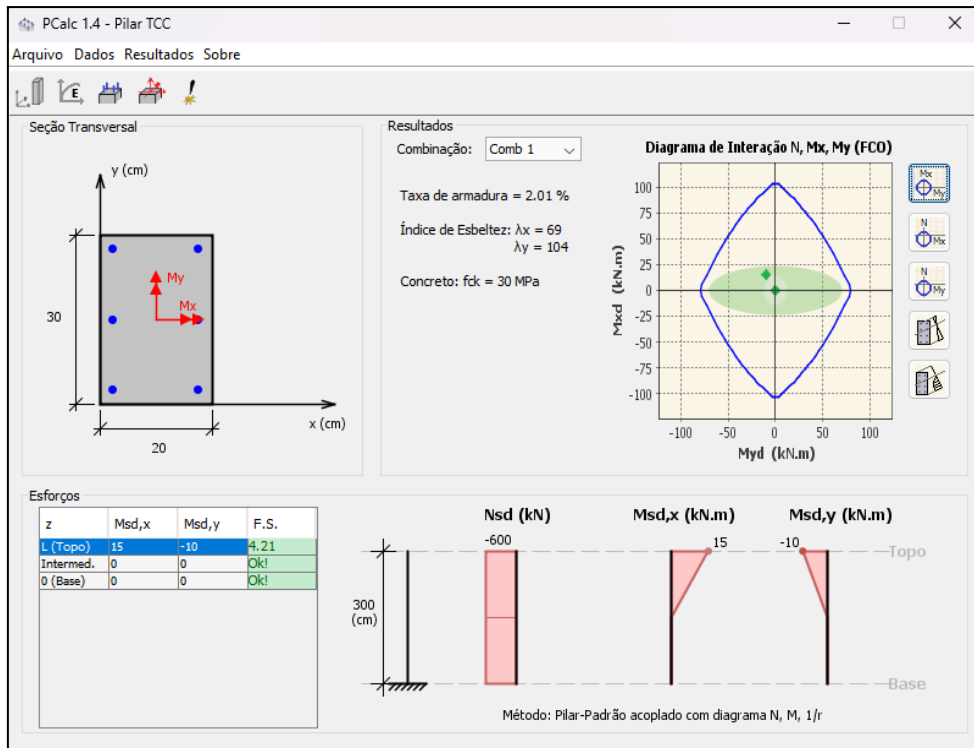
Figura 22 - Critérios de cálculo selecionados.

The image shows a dialog box titled "2ª Ordem local" with a close button (X) in the top right corner. The dialog is divided into two main sections. The first section, "Consideração dos efeitos locais de 2ª ordem:", contains three radio button options: "Sempre calcular os efeitos locais de 2ª Ordem", "Calcular efeitos locais de 2ª Ordem somente se o índice de esbelteza for maior que o valor limite  $\lambda_1$ ", and "Não calcular os efeitos locais de 2ª Ordem". The second option is selected. The second section, "Método de cálculo para 2ª Ordem", contains five radio button options: "Pilar-Padrão com curvatura aproximada", "Pilar-Padrão com rigidez  $\kappa$  aproximada", "Pilar-Padrão acoplado com diagrama N, M,  $1/r$ ", "Método Geral acoplado com diagrama N, M,  $1/r$ ", and "Método Geral acoplado com diagrama N, Mx, My,  $1/r$  (considera as direções acopladas)". The third option is selected. Below these options is a checked checkbox with the text "Para pilares biapoiados, limitar o menor valor absoluto entre os momentos no topo e na base em menos a metade do maior valor ( $M_b \leq -0.5M_a$ )". At the bottom of the dialog, there is a text field labeled "Parcela de  $\gamma_f$  que considera as aproximações de projeto:  $\gamma_f =$ " with the value "1.1" entered. At the very bottom are "Ok" and "Cancelar" buttons.

Fonte: Autoria própria.

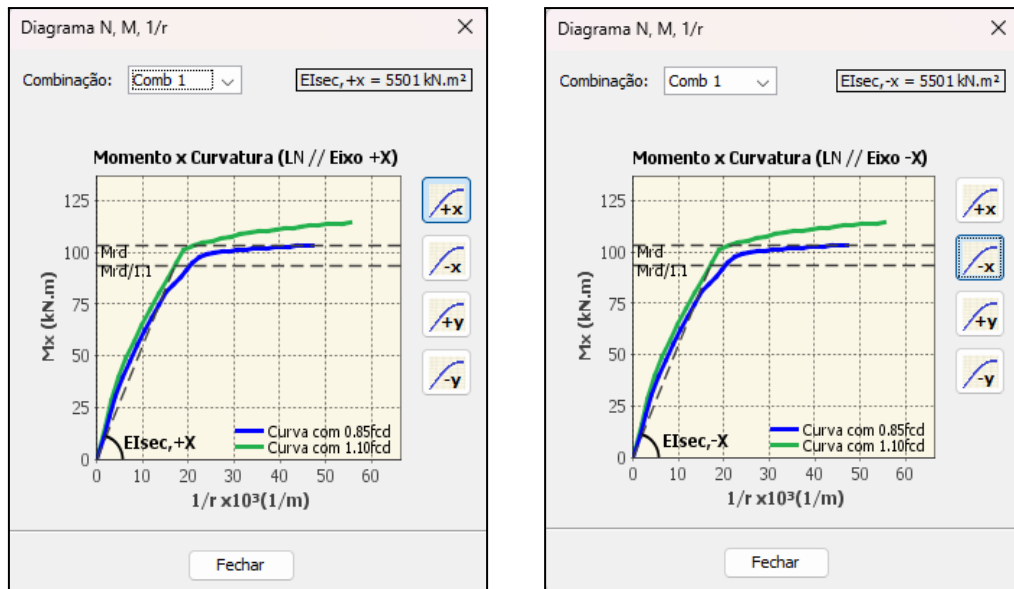
Segundo Carvalho e Pinheiro (2009) o método aproximado do pilar-padrão com curvatura real pode ser empregado para pilares esbeltos, como é o caso, e sua metodologia é igual ao método do pilar-padrão com curvatura máxima, porém, os ábacos de flexão composta ou oblíqua no ELU de flexão ou compressão não podem ser usados devido a instabilidade nos valores de deformação.

Figura 23 - Resultado diagrama de interação N, Mx, My (FCO).



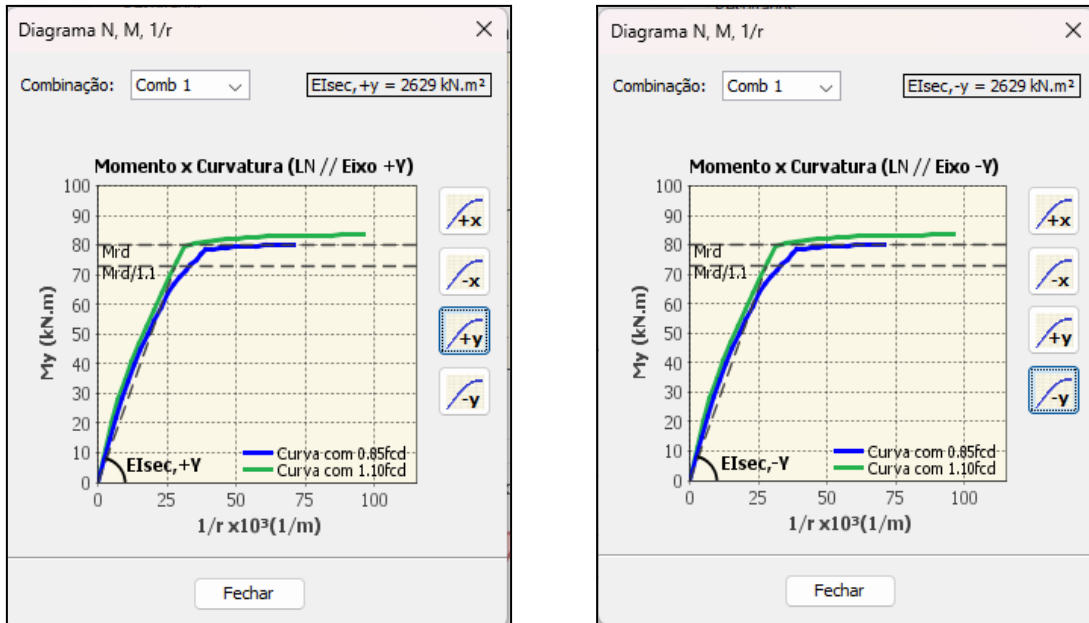
Fonte: Autoria própria.

Figura 24 - Diagramas N, M, 1/r (eixo x).



Fonte: Autoria própria.

Figura 25 - Diagramas N, M, 1/r (eixo y).



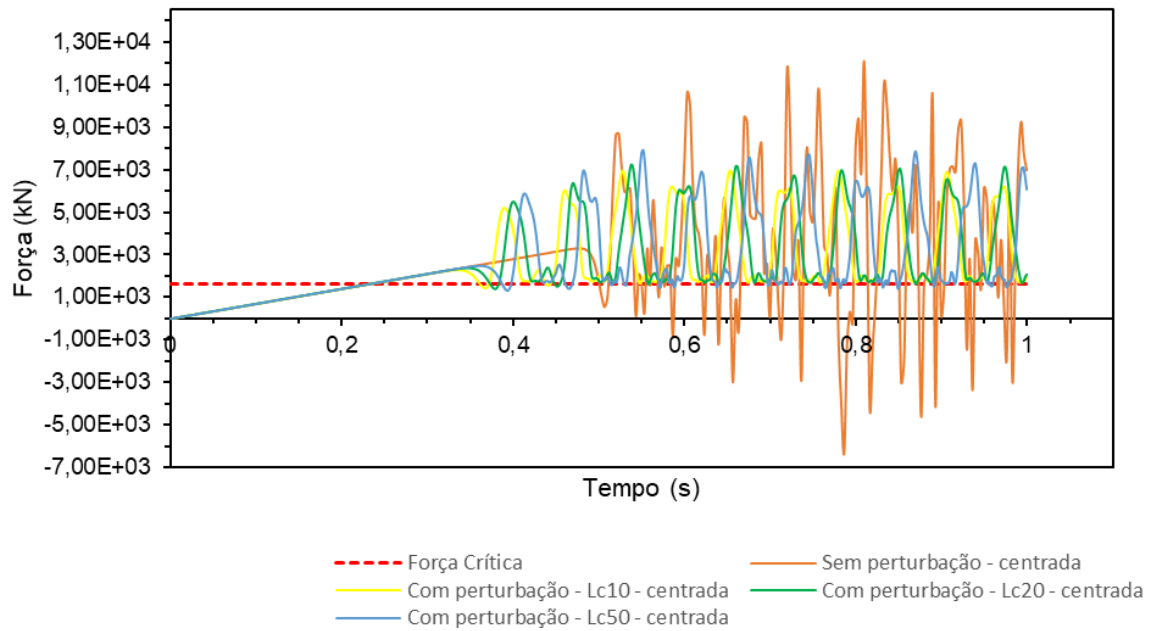
Fonte: Autoria própria.

## 4.2 Análise das simulações numéricas

### 4.2.1 Caso 1

Foi feita a análise das colunas em seu comportamento elástico e em um primeiro momento foi considerada apenas a carga axial vertical e centrada, também foi feita a análise da malha com os diferentes níveis de perturbação como descrito anteriormente e assim foi comparado os gráficos da força pelo tempo e da força pelo deslocamento como mostra a figura 26.

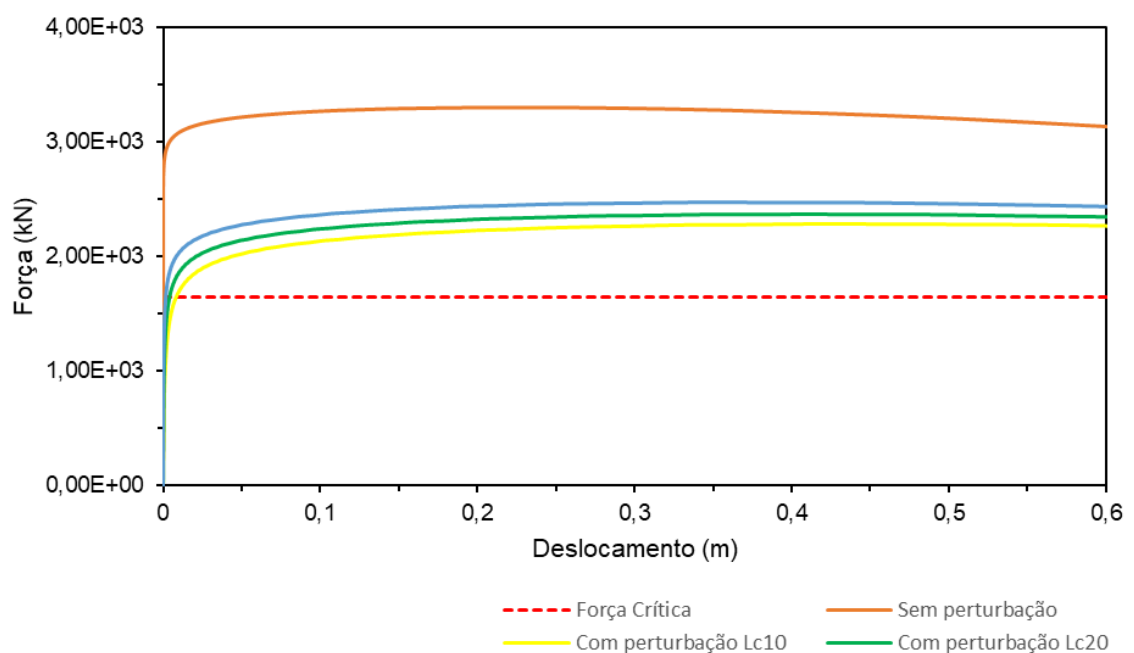
Figura 26 - Gráfico da força pelo tempo da coluna com e sem perturbação.



Fonte: Autoria própria.

Também foi feita a análise entre o gráfico da curva da força pelo deslocamento de cada uma das colunas, com e sem perturbação. Para um melhor entendimento visual foi considerado o início do processo de deslocamento da coluna, como mostrado na figura 27.

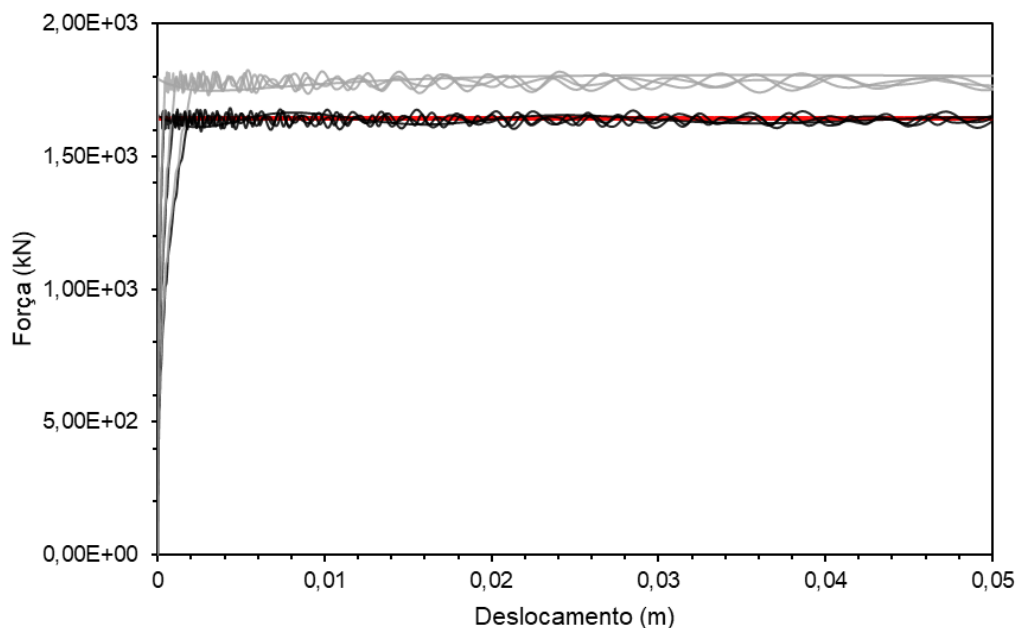
Figura 27 - Gráfico da força pelo deslocamento.



Fonte: Autoria própria.

Para uma melhor resposta da coluna para a flambagem, foi adicionada uma força horizontal bem pequena para que a coluna conseguisse voltar a sua posição inicial, fazendo um movimento de ida e volta quando atingisse a deformação. Foram analisados os comportamentos acima da carga crítica e tangentes ao valor de 1644,93 KN. Foi feita a análise dos gráficos da força versus deslocamento horizontal, nos mesmos parâmetros citados anteriormente, onde, um atinge a força crítica e outro ultrapassa a mesma como observado na figura 28.

Figura 28 - Gráfico da força x deslocamento horizontal.



Fonte: Autoria própria.

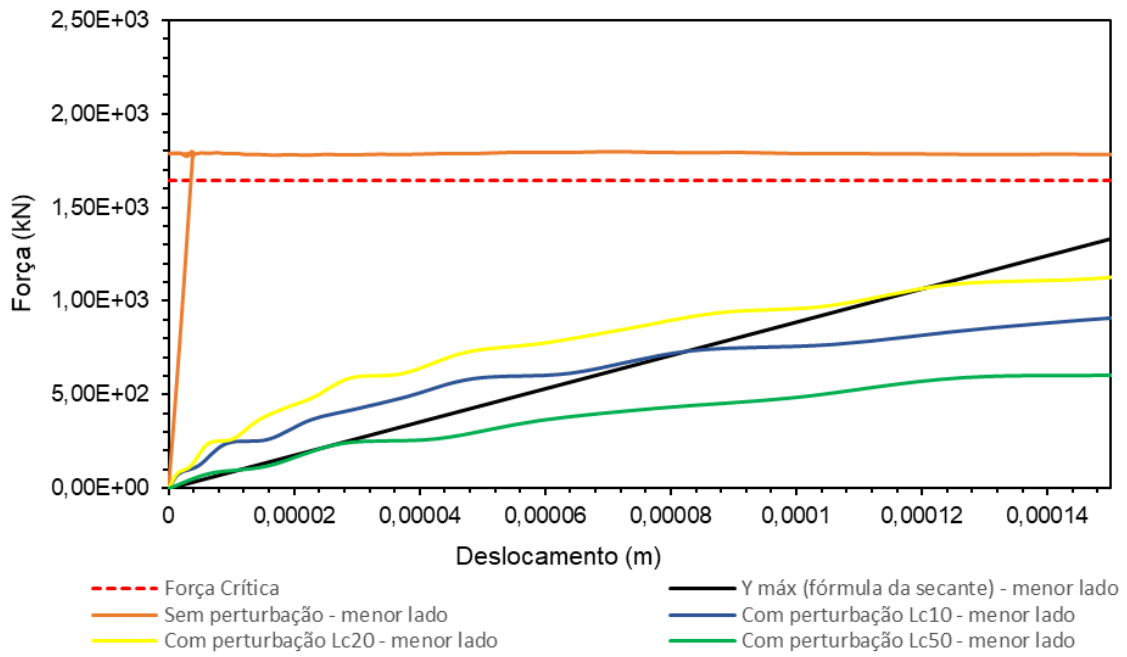
No gráfico a linha vermelha é a força crítica, as linhas em preto são as colunas com um comportamento na tangência da força crítica e as linhas em cinza são as colunas com comportamento com uma força além da força crítica, é notoriamente visto um comportamento bem parecido apesar da coluna ter ou não perturbação.

#### 4.2.2 Caso 2

Para o segundo caso foi feita a análise com os valores obtidos pelo cálculo do deslocamento máximo a partir da fórmula da secante, onde, foi comparado com os valores obtidos nos ensaios numéricos. Foi feita a análise nos dois eixos da coluna, com isso os valores da excentricidade mudam. A figura 29 mostra as curvas da força

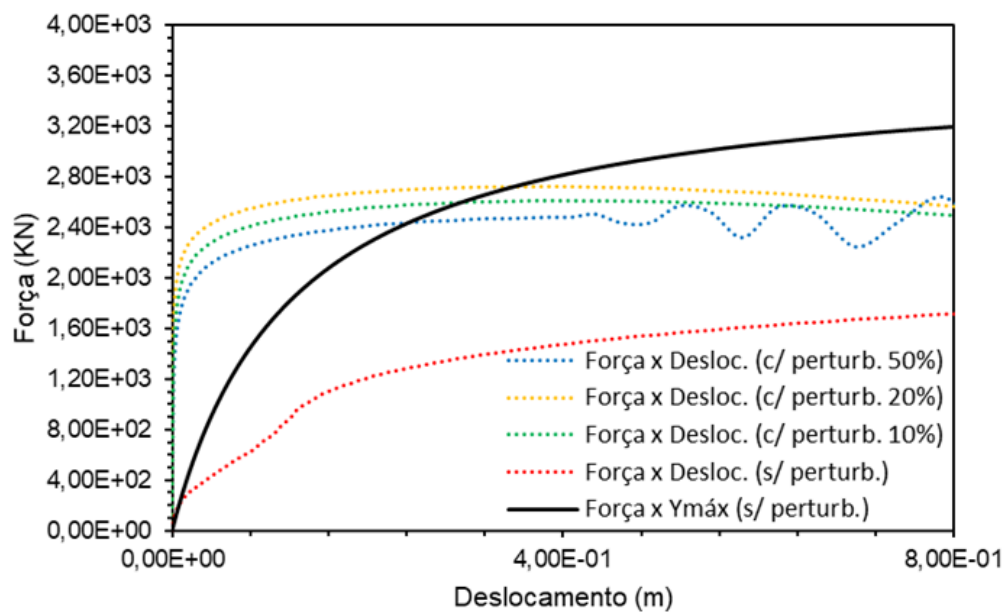
versus deslocamento horizontal considerando a excentricidade no menor lado da coluna.

Figura 29 - Gráfico da força versus deslocamento da carga excêntrica para o menor lado.



Fonte: Autoria própria.

Figura 30 - Gráfico da força versus deslocamento da carga excêntrica para o maior lado.



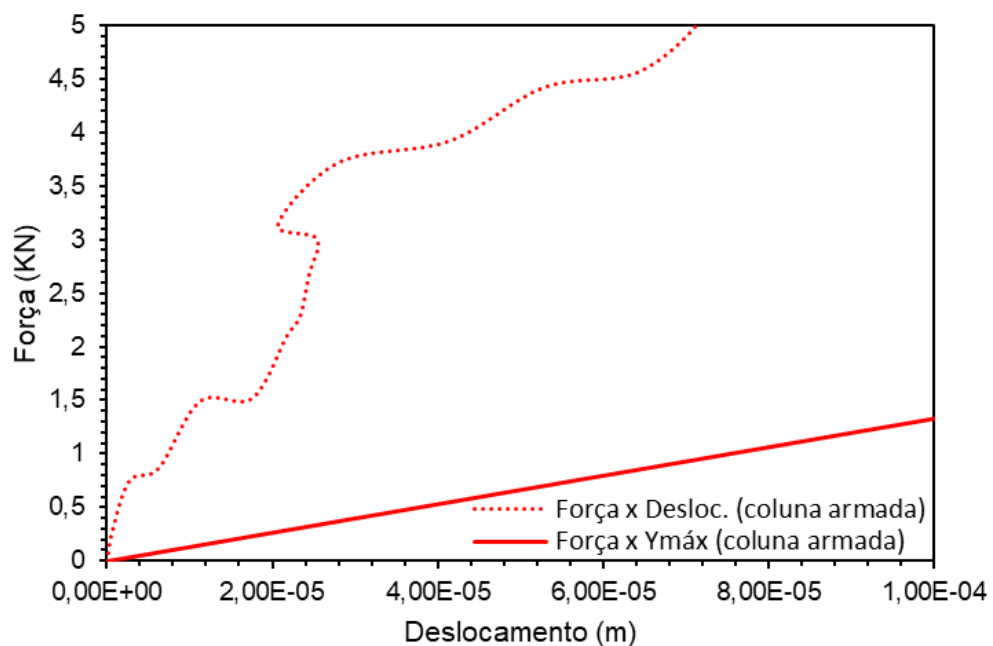
Fonte: Autoria própria.

O gráfico demonstra imperfeições geométricas ou condições iniciais desfavoráveis (Lc10, Lc20, Lc50) reduzem significativamente a resistência da estrutura em comparação com o modelo ideal (linha preta). Para aproximar essas curvas à linha preta, é possível adotar soluções como reduzir, melhorar as propriedades do material, visando aumentar a rigidez e mitigar os efeitos das perturbações.

### 4.2.3 Caso 3

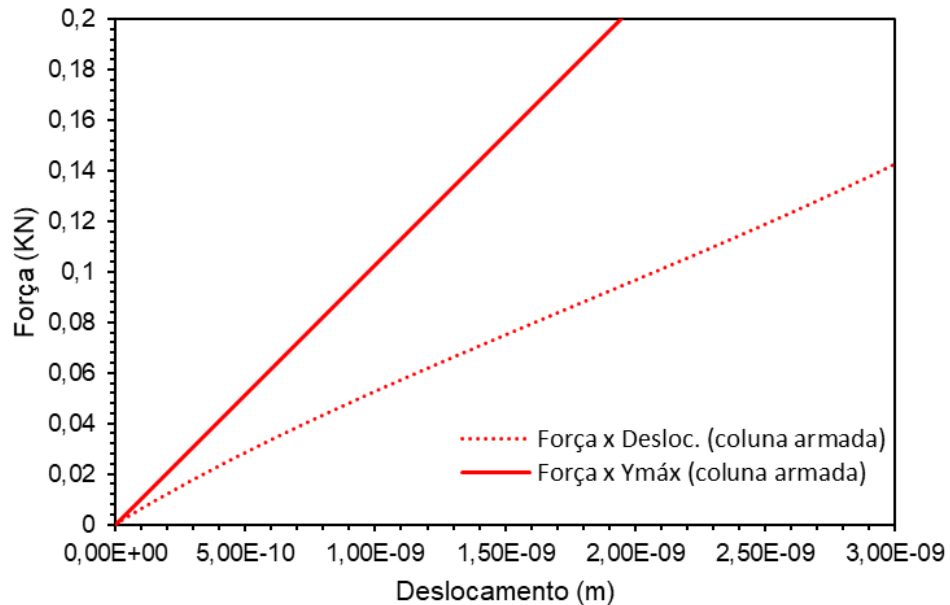
No terceiro caso foi adicionada a armadura a coluna, foi feita a análise do deslocamento máximo pela fórmula da secante comparando os resultados aos deslocamentos encontrados na simulação numérica.

Figura 31 - gráfico da força versus deslocamento máximo com a carga excêntrica para o maior lado.



Fonte: Autoria própria.

Figura 32 - gráfico da força versus deslocamento máximo com a carga excêntrica para o menor lado.



Fonte: Autoria própria.

O gráfico mostra a relação entre força e deslocamento em diferentes excentricidades, mas os resultados apresentados não estão como esperados, pois indicam que a coluna falha no ponto de aplicação do carregamento, sugerindo uma ruptura concentrada. Esse comportamento evidencia um problema relacionado à definição inadequada das condições de contorno no modelo. Para corrigir essa falha e evitar a ruptura localizada, é essencial implementar reforços pontuais na região do carregamento, garantindo uma melhor distribuição das forças e aumentando a estabilidade da estrutura.



## 5 Conclusão

Os resultados obtidos neste trabalho destacam a importância das simulações numéricas no estudo do comportamento de colunas de concreto armado sob compressão axial. As análises conduzidas por meio do Método dos Elementos Discretos Formados por Barras (LDEM) confirmaram a eficiência da metodologia em representar fenômenos complexos, como deformações não lineares e flambagem, contribuindo significativamente para a compreensão do comportamento estrutural. As simulações, complementadas pela comparação com dados normativos, validaram o potencial do modelo em prever a capacidade de carga e os modos de falha de colunas, evidenciando a robustez e aplicabilidade do método para cenários práticos da engenharia civil.

Adicionalmente, a inclusão de perturbações e a análise de cargas excêntricas reforçaram a relevância de considerar as variáveis reais em projetos estruturais. O uso de armaduras demonstrou ser essencial para aumentar a resistência das colunas, confirmando seu papel crucial na segurança estrutural. Este trabalho, portanto, não apenas atende aos objetivos propostos, mas também abre caminhos para futuras investigações que possam expandir as fronteiras da simulação numérica em elementos estruturais, promovendo avanços na área de estabilidade estrutural e segurança em edificações.

Sugestões para trabalhos futuros seriam ampliar as simulações para que atendessem os deslocamentos máximos calculados a partir da fórmula da secante, como também diferentes configurações de apoios.

## 6 Referências bibliográficas

CHIAVERINI, Vicente – Aços e Ferros Fundidos. 7a Edição. 2a Impressão. São Paulo: Editora Associação Brasileira de Metais, 1996.

KOSTESKI, L.E. Aplicação do Método dos Elementos Discretos formado por barras no estudo do colapso de estruturas. 2012. 177 f. Tese (Doutorado) - Curso de Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2012.

NAYFEH, A.H.; HEFZY, M.S. Continuum modeling of three-dimensional truss-like space structures. AIAA Journal, v. 16(8), p. 779-787, 1978.

DALGUER, L.A.; IRIKURA, K.; RIERA, J.D.; CHIU, H.C. The importance of the dynamic source effects on strong ground motion during the 1999 Chi-Chi, Taiwan, earthquake: Brief interpretation of the damage distribution on buildings. Bull. Seismol. Soc. Am., v. 91, p. 1112-1127, 2001.

BRUNO SPEROTTO. Instabilidade em estruturas laminares empregando o método dos elementos discretos. 2017. Dissertação (Mestrado em Programa de Pós Graduação em Engenharia Mecânica) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, . Orientador: Ignacio Iturrioz.

LIMA, A. Verificações da punção e da estabilidade global em edifícios de concreto: desenvolvimento e aplicação de recomendações normativas. 249 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) — Universidade de São Paulo - Escola de Engenharia de São Carlos, São Carlos, SP, 2001.

Fontoura, Nayra Consentino. Influência dos redutores de rigidez na análise da estabilidade global em edificações de dois a quatro pavimentos. 2024. Dissertação (Programa de Pós-graduação *Stricto Sensu* em Engenharia da Universidade Federal do Pampa) - Universidade Federal do Pampa, Orientador: Alisson Simonetti Milani.

OLIVEIRA, Stefani Caroline de; QUARESMA, José Eduardo; DE MARCO, Gerson. Análise de segunda ordem em pilares de concreto armado. Araraquara: UNIARA (Universidade de Araraquara), 2022.

FAKURY, R. H.; SILVA, A. L. R. C.; CALDAS, R. B. Dimensionamento de Elementos Estruturais de Aço e Misto de Aço e Concreto. 1ª Ed. Pearson Education do Brasil. São Paulo, 2016.

GALAMBOS, T. V. Guide to Stability Design Criteria for Metal Structures. 5ª Ed. John Wiley & Sons, inc. New York, 1998.

Mesquita, L. C., Gomes, A. F. F., & Leão, F. S. (2019). Simulação Computacional de Pilares de Aço Submetidos à Compressão Axial. \*Revista Eletrônica de Engenharia Civil, 15\*(2), 205-206.

BORGES, A. C. L. Análise de pilares esbeltos de concreto armado solicitados à flexo-compressão oblíqua. 1999. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, São Carlos, 1999.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS (ABNT). NBR 6118: projeto de estruturas de concreto – procedimento. Rio de Janeiro, 2023.

Carvalho, R. C., Pinheiro, L. M. (2009) Cálculo e Detalhamento de Estruturas Usuais de Concreto Armado: volume 2. São Paulo, 2009: Pini.

FUSCO, P. B. Estruturas de concreto: fundamentos do projeto estrutural. São Paulo: McGraw-Hill, 1976. 298 p.

SOUZA, Régis Marciano de. Análise não linear de uma coluna esbelta em concreto armado usando o Método de Elementos Finitos e P- $\Delta$ . 2018. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Sistemas e Automação) – Universidade Federal de Lavras, Lavras, 2018.