

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PAMPA

ROBERTA ARAUJO SPIGOLON

**SIMULAÇÃO NUMÉRICA DE UM ESCOAMENTO LIVRE PARALELO A UM PLANO
POROSO**

Alegrete

2024

ROBERTA ARAUJO SPIGOLON

**SIMULAÇÃO NUMÉRICA DE UM ESCOAMENTO LIVRE PARALELO A UM PLANO
POROSO**

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação Stricto sensu em Engenharia da Universidade Federal do Pampa (UNIPAMPA, RS), como requisito parcial para obtenção do grau de Mestra em Engenharia.

Orientador: Prof. César Flaubiano da Cruz
Cristaldo

Alegrete

2024

Ficha catalográfica elaborada automaticamente com os dados fornecidos
pelo(a) autor(a) através do Módulo de Biblioteca do
Sistema GURI (Gestão Unificada de Recursos Institucionais) .

Spigolon, Roberta Araujo

Simulação Numérica de um escoamento livre paralelo a um
plano poroso / Roberta Araujo Spigolon.

46 p.

Dissertação (Mestrado) -- Universidade Federal do Pampa,
MESTRADO EM ENGENHARIA, 2024.

"Orientação: César Flaubiano da Cruz Cristaldo".

1. meio poroso. I. Título.

©2024

Todos os direitos autorais reservados a Roberta Araujo Spigolon. A reprodução de partes ou do todo deste trabalho só poderá ser feita mediante a citação da fonte.

End. Eletr.: robertaaspigolon@gmail.com

ROBERTA ARAUJO SPIGOLON

SIMULAÇÃO NUMÉRICA DE UM ESCOAMENTO LIVRE PARALELO A UM PLANO POROSO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia da Universidade Federal do Pampa, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Engenharia

Dissertação defendida e aprovada em: 08/08/2024

Banca examinadora:

Prof. Dr. Cesar Flaubiano da Cruz Cristaldo
Orientador
(Unipampa)

Prof. Dr. Felipe Denardin Costa
(Unipampa)

Prof. Dr. Mariosane Sabino Donini
UTEC - Universidade Tecnologia do Uruguai



Assinado eletronicamente por **CESAR FLAUBIANO DA CRUZ CRISTALDO, PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR**, em 09/08/2024, às 18:13, conforme horário oficial de Brasília, de acordo com as normativas legais aplicáveis.



Assinado eletronicamente por **Mariovane Sabino Donini, Usuário Externo**, em 12/08/2024, às 15:09, conforme horário oficial de Brasília, de acordo com as normativas legais aplicáveis.



Assinado eletronicamente por **FELIPE DENARDIN COSTA, PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR**, em 18/10/2024, às 09:59, conforme horário oficial de Brasília, de acordo com as normativas legais aplicáveis.



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.unipampa.edu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **1495329** e o código CRC **C2842D8E**.

AGRADECIMENTOS

Agradeço à minha família, pelo apoio dado ao longo desta jornada desafiadora;
Ao meu orientador César, por seu valioso suporte e o vasto conhecimento que compartilhou, tornando possível a realização deste mestrado;
À Banca Examinadora pelo aceite e valiosas contribuições;
À UNIPAMPA, por oferecer a estrutura necessária para a minha formação;
Ao Núcleo de Desenvolvimento Educacional pelo suporte dado;
Ao LFCTA, que proporcionou um ambiente propício para a pesquisa;
À CAPES, pelos recursos concedidos que viabilizaram o desenvolvimento do meu trabalho;

E não posso deixar de expressar minha gratidão a todos os amigos, professores e colegas que não me deixaram desistir;
Meu muito obrigada a todos!

RESUMO

Escoamentos sobre superfícies porosas está presente em muitas situações na engenharia, tais como escoamento superficial em encostas, problemas de drenagem, entre outros. O presente trabalho apresenta um modelo numérico que descreve o escoamento livre sobre uma superfície plana porosa inclinada com o objetivo de analisar o impacto das propriedades da matriz porosa no escoamento. Com o uso do Método de Volumes Finitos, as equações governantes — incluindo conservação de massa, momento e energia são discretizadas e resolvidas para modelar um escoamento bidimensional em regime incompressível. Os resultados colocam em evidência os efeitos do número de Darcy nos perfis de velocidade do escoamento. Observou-se que menor permeabilidade na matriz porosa aumenta a resistência do fluido em escoar, enquanto maior permeabilidade gradualmente reduz seu impacto no escoamento externo. Esta pesquisa contribui para o entendimento do comportamento de escoamentos relevante para aplicações ambientais, como sistemas de águas superficiais e interações com o solo.

Palavras-chave: meio poroso, escoamento, permeabilidade.

ABSTRACT

Fluid flow over porous surfaces is present in many engineering situations, such as surface runoff on slopes, drainage problems, among others. The present work presents a numerical model that describes the free flow over an inclined flat porous surface with the objective of analyzing the impact of the properties of the porous matrix on the flow. Using the Finite Volume Method, the governing equations, including conservation of mass, momentum and energy are discretized and solved to model a two-dimensional flow in the incompressible regime. The results highlight the effects of the Darcy number on flow velocity profiles. It was observed that lower permeability in the porous matrix increases the fluid's resistance to flow, while higher permeability gradually reduces its impact on external flow. This research contributes to the understanding of flow behavior relevant to environmental applications, such as surface water systems and soil interactions.

Keywords: Porous media, flow and permeability.

LISTA DE FIGURAS

| | |
|---|----|
| Figura 1 – Esquema do modelo de domínio único (HAMDAN, 1994) | 16 |
| Figura 2 – Perfil de velocidade para o escoamento em um canal horizontal formado por uma parede inferior permeável ($y=0$) e uma parede superior impermeável ($y=h$). Adaptado (BEAVERS; JOSEPH, 1967). | 17 |
| Figura 3 – Figura esquemática do problema resolvido (com superfície reta) | 20 |
| Figura 4 – Malha bidimensional Método dos volumes finitos. Adaptado (FORTUNA, 2000) | 23 |
| Figura 5 – Escoamento em torno de um cilindro rígido | 25 |
| Figura 6 – Escoamento em torno de um cilindro poroso | 26 |
| Figura 7 – Escoamento em torno de dois cilindros quadrados | 26 |
| Figura 8 – Magnitude da velocidade para escoamento entre placas paralelas ($g = 0$, $\theta = 0^\circ$) | 27 |
| Figura 9 – Perfis de velocidade ao longo das retas $x_1 = -5, 2$, $x_2 = -2, 6$, $x_3 = 2, 6$, $x_4 = 7, 8$, $x_5 = 10, 4$ e $x_6 = 13$ | 28 |
| Figura 10 – Magnitude da velocidade para escoamento entre placas paralelas rígida e porosa para $g = 10$, com placas na horizontal ($\theta = 30^\circ$), $\varepsilon = 0.5$, $Da = 0.01$ | 29 |
| Figura 11 – Perfis de velocidade na direção vertical para $g = 10$ $\varepsilon = 0.5$, $Da = 0.1$.. | 30 |
| Figura 12 – Perfis de velocidade na direção vertical para $g = 10$ $\varepsilon = 0.5$, $Da = 0.5$.. | 30 |
| Figura 13 – Perfis de velocidade na direção vertical para $g = 10$ $\varepsilon = 0.5$, $Da = 10$... | 31 |
| Figura 14 – Perfis de velocidade na direção vertical para $g = 10$ $\varepsilon = 0.5$, $Da = 100$.. | 31 |
| Figura 15 – Magnitude da velocidade para escoamento livre sobre superfície porosa para $g = 10$, com placas na horizontal ($\theta = 0^\circ$), $\varepsilon = 0.5$, $Da = 0.01$ e $Fr = 0.01$ | 32 |
| Figura 16 – Perfis de velocidade na direção vertical para $g = 10$ $\varepsilon = 0.5$, $Da = 0.01$ e $Fr = 0.01$ | 33 |
| Figura 17 – Sistema usado para dedução das equações de conservação (MALISKA, 2004). | 37 |

LISTA DE SIGLAS

| | |
|-------------------|---|
| <i>UNIPAMPA</i> | Universidade Federal do Pampa |
| <i>CAPES</i> | Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior |
| <i>LFCTA</i> | Laboratório de Fluidodinâmica Computacional e Turbulência Atmosférica |
| <i>CFD</i> | Dinâmica dos fluídos computacional (do inglês <i>Computational Fluid Dynamics</i>) |
| <i>UTEC</i> | Universidade Tecnológica do Uruguai |
| <i>MapBiomass</i> | Mapeamento Anual do Uso e Cobertura da Terra no Brasil |

SUMÁRIO

| | |
|--|-----------|
| RESUMO | 4 |
| 1 INTRODUÇÃO | 9 |
| 1.1 OBJETIVO | 10 |
| 1.2 Objetivos Específicos | 10 |
| 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA | 11 |
| 2.1 Lei de Darcy | 13 |
| 2.1.1 Extensão de Forchheimer | 14 |
| 2.1.2 Extensão de Brinkman | 15 |
| 2.2 Tratamento da interface (Escoamento livre-Material poroso) | 15 |
| 2.2.1 Modelagem de domínio único entre escoamento livre e meio poroso | 16 |
| 2.2.1.1 Modelagem da região de transição | 17 |
| 3 METODOLOGIA | 20 |
| 3.1 Formulação Matemática | 20 |
| 3.1.1 Condições de contorno | 22 |
| 3.2 Integração de equações | 22 |
| 3.2.1 Verificação Código numérico | 25 |
| 4 RESULTADOS | 27 |
| 4.0.1 Influência do número de Darcy com efeito da gravidade | 28 |
| 4.1 Escoamento livre sobre superfície porosa | 32 |
| 5 CONCLUSÃO | 34 |
| REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS | 35 |
| Anexo A – | 37 |
| A.1 Aspectos Matemáticos das Equações de Conservação | 37 |
| A.1.1 Equações de Navier-Stokes | 37 |
| A.1.2 Conservação de Massa | 37 |
| A.1.3 Conservação da Quantidade de Movimento (Segunda Lei de Newton) | 39 |
| A.1.4 Conservação de Energia (Primeira Lei da Termodinâmica) | 41 |
| A.2 Condução unidimensional transiente | 41 |
| A.3 Refinamento de malha | 42 |
| A.3.1 Funções de refinamento unidimensional | 42 |
| A.4 A Equação de movimento de Poiseuille | 44 |

1 INTRODUÇÃO

Modelos de simplificados de escoamento sobre superfícies planas e porosas têm aplicações importantes em processos naturais, que surgem em diferentes escalas de comprimento, como a película fluida da córnea no olho e, no outro extremo, escoamentos de lama sobre encostas ou mantos de gelo continentais (CRASTER; MATAR, 2009). Em grandes escalas podemos prever características como velocidade, pressão, extensão de desvio e até mesmo temperatura de tais escoamentos para fins geofísicos e de engenharia, assim, modelos analíticos simplificados e numéricos tem sido desenvolvidos ao longo dos anos (CIVAN, 2011).

O escoamento superficial através de encostas ocorre muitas vezes em consequência de desastres naturais causados por chuvas intensas e eventos climáticos extremos, como vivenciado no ano de 2024 no estado do Rio Grande do Sul. Os prejuízos sociais e materiais gerados por esses eventos contribuem para que a desigualdade social se agrave, sem falar das vidas que são perdidas. Portanto, é necessário que seja estudado a convecção em escoamentos livres e em meios porosos, bem como as formas como os escoamentos atingem a superfície e a magnitude da velocidade com que adentram o meio.

No estudo de um escoamento sobre um plano poroso, o efeito da permeabilidade e porosidade sob o mesmo são investigados, sendo um problema relevante para aplicações ambientais, por exemplo em conexão com sistemas de água superficial, fluxo de água subterrânea através de fraturas e escoamento superficial por meio de encostas (PASCAL, 1999). Desta forma, os objetivos têm sido direcionados para o cálculo da taxa de escoamento através de meios porosos, utilizando formulações como a Lei de Darcy, modificadas para a parte porosa, e a formulação de Navier-Stokes na região do escoamento livre. Entretanto, nesse tipo de modelagem, na transição abrupta do escoamento livre para o meio poroso, existe uma região de transição que sofre influência das duas regiões, e esta necessita garantir resultados precisos e realistas. No presente trabalho é utilizada a aproximação conhecida como "One Domain Approach" que será discutido neste trabalho. Na revisão bibliográfica sera apresentada os modelos mais elemntar "Lai de Darcy" e suas extensões, tais como, a de Forchheimer e Brinkman (FORCHHEIMER, 1901) (BRINKMAN, 1949).

Por fim, este trabalho concentra-se na hidrodinâmica do escoamento acoplado de um fluido livre sobre meio poroso, sendo um sistema heterogêneo composto por uma matriz sólida com seus vazios preenchidos por fluido, podendo ser tratado como um contínuo ao considerar adequadamente o papel de cada fase no transporte por esse sistema (KAVIANY, 2012).

Logo, um esquema CFD (*Computational Fluid Dynamics*) foi implementado em FORTRAN, empregando o Método de Volumes Finitos para simular e calcular as soluções numéricas que representam o escoamento, explorando assim os desafios associados à modelagem de transições abruptas entre fluxo livre e meio poroso a fim de contribuir para

o avanço no entendimento e na simulação desses sistemas complexos.

1.1 OBJETIVO

Este trabalho tem como objetivo o estudo de um escoamento bidimensional sobre uma placa plana porosa inclinada. O modelo adotado é composto pelas equações de conservação para um escoamento no regime incompressível, onde o acoplamento do campo de pressão e velocidade é realizado pelo método de compressibilidade artificial, no qual a massa específica é substituída artificialmente pela pressão no termo transiente de conservação da massa e um coeficiente de compressibilidade é utilizado. Para a discretização das equações é empregado o Método de Volumes Finitos.

1.2 Objetivos Específicos

- Calcular perfis de velocidade ao longo do escoamento;
- Verificar a influência da permeabilidade e porosidade no escoamento.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

O estudo do escoamento livre laminar em placas é um tema de interesse permanente na engenharia devido a inúmeras aplicações, tais como, em equipamentos hidráulicos, térmicos, escoamento ao longo de canais, escoamento através de encostas, etc. Sendo este último de muita relevância devido aos frequentes desastres naturais devido às mudanças climáticas. Na agricultura, a importância do escoamento através de meios porosos se dá nos processos de irrigação, sendo necessário entender os processo de drenagem do solo para evitar que seus campos inundem ou para controlar a erosão em torno dos sistemas de irrigação, pois um bom conhecimento destes significa minimizar custos com energia elétrica, maximizar a eficiência do uso da água e manter favoráveis as condições de umidade do solo e de fotossíntese das plantas (BASTOS ANDRADE, 2005) .

De acordo com um recente levantamento realizado pelo Projeto MapBiomass, entre os anos de 1985 e 2022, o Brasil apresentou 123 mil hectares de áreas urbanas em regiões suscetíveis a inundações e deslizamentos, dentre outros desastres climáticos. Os dados mostram uma situação preocupante, onde as ocupações precárias e com maior vulnerabilidade a eventos extremos, crescem rapidamente, destacando a complexidade e a dependência entre mudanças climáticas, atividades humanas e a estabilidade de encostas, ressaltando a importância de medidas de mitigação, adaptação e projetos de engenharia de forma a evitar ou minimizar os efeitos desses eventos (MAPBIOMASS, 2023).

Com o objetivo de analisar a interação entre o fluido e superfície porosa, uma modelagem teórica é realizada a partir das equações de Navier-Stokes e suas versões de equações simplificadas de camada limite. Na região porosa e permeável, faz-se necessária a aplicação da Lei de Darcy e suas extensões. A dificuldade deste problema envolvendo escoamento livre e matriz porosa permeável está na adequada especificação das condições de contorno entre as interface líquido-matriz porosa. Neste sentido, diferentes estudos são propostos para obter apropriadas condições de contorno nesta interface (líquido-poros). As modelagens mais simples recorrem a extensões de modelos clássicos, tais como o fluxo de Couette ou fluxo de Poiseuille, com uma modelagem de interface juntamente com um sistema acoplado contendo um escoamento livre sobre superfícies porosas (MCDONALD; PRITCHARD; LEYLEGIAN, 2006).

As configurações de sistemas acoplados são úteis para diferentes aplicações, como biológicas e técnicas, interação entre água superficial e água subterrânea, processos de filtração e transporte de agentes terapêuticos em vasos sanguíneos e tecidos.

Na literatura encontramos diferentes modelagens para escoamento em superfícies porosas que dependem do regime do escoamento e da aplicação de interesse. No caso mais geral, as equações de Navier-Stokes são usadas para descrever o escoamento na região de livre e a lei de Darcy multicomponente é aplicada no meio poroso (DISCACCIATI; QUARTERONI et al., 2009; EGGENWEILER; RYBAK, 2020). Portanto, neste capítulo

faremos uma revisão geral de alguns modelos de escoamentos em torno de matriz porosa permeável bem como o tratamento da condição de contorno entre as duas fases.

Meios porosos, apresentam uma estrutura composta por uma matriz sólida que contém espaços vazios interligados, conhecidos como poros. Essa matriz pode ser definida como meio poroso e é comumente encontrada na natureza, como arenito, calcário, pão de centeio, madeira e pulmão humano bem como dispositivos envolvendo placas porosas que são amplamente encontradas na engenharia, filtros, e materiais porosos sintéticos, etc. A estrutura e a distribuição dos poros dentro do meio poroso definem propriedades, tais como, porosidade, área superficial, permeabilidade, distribuição de tamanho de poros, tortuosidade e interconectividade, que uma vez determinadas, melhor representam o meio quando ocorre uma simulação, sendo possível caracterizar o meio poroso e modelar o comportamento de fluidos no mesmo (NIELD; BEJAN, 2017).

Os princípios do fluxo de calor e fluido através de um meio poroso saturado com algum líquido ou gás devem levar em consideração principalmente duas das propriedades citadas anteriormente, a porosidade e a permeabilidade do meio poroso (OLIVEIRA, 2020).

A interligação entre os espaços vazios (poros) em um meio poroso admite a ideia da propriedade porosidade como sendo um volume livre. Assim, a porosidade de um meio poroso é definida como a medida da fração do meio ocupada pelos vazios. Em função do tipo de meio poroso, a porosidade pode ser baixa ou alta. Por exemplo, metais e certos tipos de rochas vulcânicas exibem porosidades muito baixas, enquanto filtros fibrosos e isolantes térmicos são considerados substâncias altamente porosas (DULLIEN, 2012).

A porosidade, ε , pode ser definida como:

$$\varepsilon = \frac{\text{volume de vazios}}{\text{volume total}} \quad (1)$$

Para matrizes rígidas, a porosidade ε não muda na presença de um gradiente de pressão. Em matrizes deformáveis $\partial\varepsilon/\partial x \neq 0$, a mudança na porosidade depende de propriedades estruturais e elásticas.

Outra propriedade fundamental de um meio poroso, é a permeabilidade, pois esta descreve a facilidade com que o fluido pode mover-se através dos poros do meio, sendo influenciada por vários fatores, incluindo a geometria e o tamanho dos poros, a conectividade entre eles e a viscosidade do fluido. É medida em unidade de comprimento, como darcy (D) ou milidarcy (mD).

A unidade de medida da permeabilidade se deve à Henry Darcy, engenheiro hidráulico francês que desempenhou um papel pioneiro no estudo do fluxo de água em meios porosos. Em 1856, Henry Darcy descreveu no apêndice do seu livro, *Les Fontaines Publiques de la Ville de Dijon*, uma série de experimentos sobre o fluxo descendente de água através de areias filtrantes, conforme será apresentado na seção à seguir.

2.1 Lei de Darcy

Após investigações sobre o fluxo unidirecional em estado estacionário em um meio uniforme, como citado acima, Henry Darcy revelou a proporcionalidade descrita entre a taxa de fluxo e a diferença de pressão aplicada, estabelecendo a Lei de Darcy. Esta lei descreve o fluxo do fluido em um meio poroso e estabelece uma relação entre a velocidade do fluido, a permeabilidade do meio e o gradiente de pressão ao longo de uma distância. Portanto, esta constatação pode ser expressa pela equação à seguir, intitulada Lei de Darcy:

$$\bar{Q} = -\frac{KA(p_b - p_a)}{\mu L} \quad (2)$$

Seja $\bar{Q}[m^3/s]$ o fluxo total, em unidade de volume por tempo, $K[m^2]$ o coeficiente de permeabilidade, expresso em unidade de comprimento ao quadrado, A a área da seção transversal do fluxo, p_a e p_b , pressões de entrada e saída, $\mu[Pa.s]$ a viscosidade dinâmica do fluido, e L o comprimento no qual ocorre o fluxo. O sinal negativo indica que o fluido desloca-se de uma região de alta pressão para uma região de baixa pressão (NIELD; BEJAN, 2017).

A Equação (2) representa uma relação observacional análoga à lei de Fourier na condução de calor. Sendo a Equação de Darcy derivada das equações de Navier-Stokes, a Equação (2) pode ser reescrita como:

$$-\frac{dP}{dx} = \alpha U \quad (3)$$

Onde $\alpha = \mu/K$, e U a vazão volumétrica por área seccional, expressa em comprimento por unidade de tempo (NIELD; BEJAN, 2017).

A Equação (3) estabelece uma relação linear que é característica do fluxo de Stokes (onde a força viscosa domina sobre a força inercial). Neste contexto, o modelo Darcy não é apropriado para escoamentos de líquidos em altas velocidades e para escoamento de gás em velocidades muito baixas ou muito altas.

O uso desta relação exige que a única resistência ao escoamento através do meio poroso seja devido a tensões viscosas induzidas por um fluxo constante isotérmico e laminar de um fluido newtoniano dentro de um meio poroso inerte, rígido e homogêneo.

Ao longo do século passado, houveram inúmeras modificações introduzidas na Lei de Darcy que ampliaram a sua aplicabilidade a processos de transporte mais complexos do que aqueles originalmente considerados por Darcy. A seguir apresentaremos algumas extensões da Lei de Darcy.

2.1.1 Extensão de Forchheimer

Forchheimer introduziu um termo conhecido como termo de arrasto quadrático a fim de considerar efeitos inerciais (macroscópicos) em escoamentos de alta velocidade através de meios porosos. Ele é adicionado à equação de Darcy para capturar as variações não lineares da pressão ao longo do escoamento, permitindo uma descrição mais precisa do escoamento em velocidades elevadas através de meios porosos. Isso significa que os efeitos inerciais são mais bem descritos pelo termo de arrasto quadrático do que pelas derivadas espaciais presentes na equação. Portanto a extensão da Equação (3) formulada por Forchheimer (1901) torna-se

$$-\frac{dP}{dx} = \alpha U + \beta \rho U^2 \quad (4)$$

onde $\beta[m^{-1}]$ é um parâmetro obtido experimentalmente e $\rho[kg/m^3]$ representa a massa específica do fluido.

O número de Reynolds (Re) geralmente é utilizado para classificar o regime do escoamento. Porém temos que tomar um certo cuidado, pois o mesmo tem sido utilizado para designar dupla função, sendo ao mesmo tempo um conceito microscópico e um conceito macroscópico. O número de Reynolds adimensional leva em consideração efeitos inercias a nível microscópico, ou seja, indica quando os efeitos inerciais microscópicos se tornam importantes. A maior dificuldade é que os efeitos inerciais macroscópicos não necessariamente se adaptam a uma dimensão estrutural microscópica, como tamanho de grão ou poro. No passado, as tentativas de usar um número de Reynolds para identificar o início dos efeitos inerciais sempre dependia da escolha de uma escala de comprimento "apropriada"(RUTH; HUIPING, 1990). No nível macroscópico, a equação de Forchheimer, Equação (3), pode ser usada para definir um segundo grupo adimensional. Considerando que a permeabilidade é dependente da velocidade, isso implica que a equação de Forchheimer deve ser escrita na forma:

$$-\frac{dP}{dx} = \frac{\mu}{K_{eff}} U \quad (5)$$

onde

$$\frac{1}{K_e} = \frac{1}{K} \left(1 + \frac{\beta K \rho U}{\mu} \right) \quad (6)$$

Assim um novo adimensional é definido como Número de Forchheimer (Fo):

$$Fo = \frac{\beta K \rho U}{\mu}$$

que indica quando efeitos inerciais microscópicos levam a significantes efeitos macroscópicos, isto é, para $Fo \gg 1$. É interessante comparar a Equação (4) com o Número de

Reynolds na forma $Re = \rho UL/\mu$. Como βK é unidade de comprimento, isso significa que para caracterizar apropriadamente o escoamento em meios porosos, é necessário duas escalas de comprimento: uma escala baseada na estrutura do poro e uma escala baseada em considerações inerciais.

2.1.2 Extensão de Brinkman

Para levar em conta as altas velocidades, o modelo de Brinkman, que é uma extensão do modelo de Darcy, é considerado (BRINKMAN, 1949). As equações de Brinkman geralmente descrevem transições entre o fluxo lento em meios porosos governados pela Lei de Darcy e o fluxo rápido descrito pelas equações de Navier-Stokes.

$$-\frac{dP}{dx} = \alpha U + \beta \rho U^2 + \mu_e \nabla^2 U \quad (7)$$

onde μ_e é o coeficiente de viscosidade efetiva. Este coeficiente inclui efeitos de tensão viscosa macroscópica, sendo um coeficiente do divergente do tensor tensões, podendo assumir diferentes formas. Uma das vantagens da Equação (7) é a obtenção das condições de contorno na matriz porosa por ter uma derivada de segunda ordem.

Em suma, a contabilização dos efeitos inerciais e/ou viscosos podem ser classificados nos quatro grupos a seguir:

1. Quando os efeitos de contorno e inercial são desprezados, o escoamento é descrito pela lei de Darcy.
2. Quando efeitos inerciais são considerados, o escoamento pode ser descrito pelo modelo Darcy-Forchheimer.
3. Quando os efeitos de contorno são contabilizados, através do termo viscoso, o escoamento é governado pela equação de Brinkman.
4. Quando os efeitos de contorno e de inércia são considerados, o escoamento é governado pelo Darcy-Forchheimer-Brinkman.

Existem outras extensões do modelo de Darcy para representar os efeitos citados que não serão tratadas no presente trabalho. Uma descrição mais detalhada desses modelos pode ser encontrada em (HAMDAN, 1994).

2.2 Tratamento da interface (Escoamento livre-Material poroso)

Um meio poroso é dito homogêneo em relação a um determinado volume médio e a um determinado processo quando os coeficientes de transporte efetivo nas equações de transporte médias são independentes da posição, caso contrário é caracterizado como heterogêneo. Desta forma, a maior parte do meio poroso e a maior parte do escoamento livre é homogêneo, exceto na zona de transição que separa os volumes dos dois meios (isto é, a região heterogênea) é a inter-região, que é caracterizada por variações rápidas de propriedades efetivas (por exemplo, porosidade, coeficiente de dispersão térmica, etc.)

Neste contexto, as condições de contorno térmicas e hidrodinâmicas nessas interfaces devem ser especificadas.

Do ponto de vista macroscópico, existem duas abordagens para tratar modelagem do problema: A primeira é a abordagem de domínio único em que todo o sistema, ou seja, o meio poroso, fluido e inter-região, é considerado como um meio contínuo. A segunda é a abordagem de dois domínios, onde o sistema é composto por dois domínios homogêneos, o inter-região sendo substituída por uma superfície discreta que divide as duas regiões (AGUILAR-MADERA et al., 2011).

2.2.1 Modelagem de domínio único entre escoamento livre e meio poroso

A abordagem de domínio único, conhecido como "One Domain Approach", (Figura 1) geralmente envolve a solução das equações de Brinkman em todo o domínio. Este modelo resulta de uma superposição das equações de Stokes e da Lei de Darcy, exigindo a introdução de uma viscosidade efetiva no interior do meio poroso. Não há necessidade de especificar condições de contorno entre a região de escoamento livre e o meio poroso, uma vez que a velocidade e a continuidade das tensões são automaticamente satisfeitas. A transição entre as duas regiões é alcançada especificando a variação espacial contínua de propriedades físicas, como permeabilidade e porosidade dentro de uma zona de transição ou admitindo uma variação descontínua nesta região de interface.

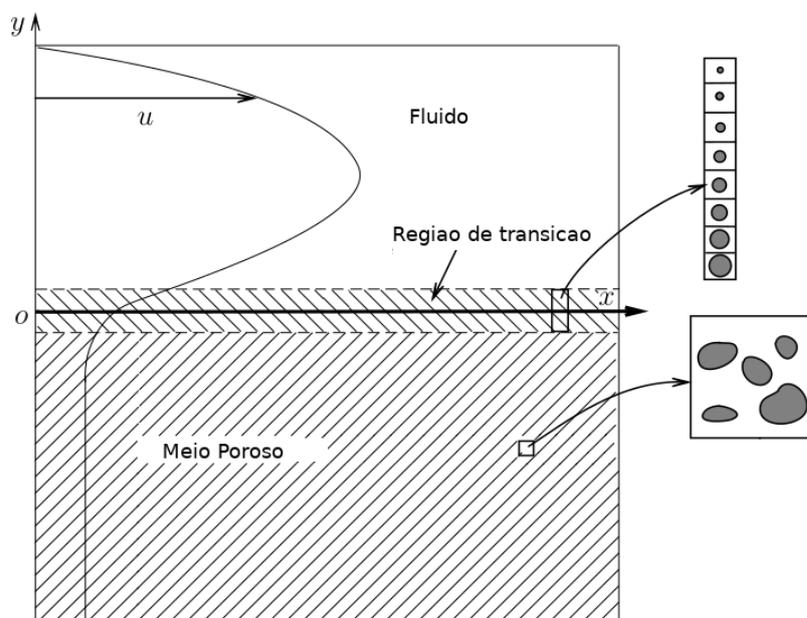


Figura 1 – Esquema do modelo de domínio único (HAMDAN, 1994)

Conforme mostrado na Figura 1 a variação espacial das propriedades (porosidade, permeabilidade e viscosidade efetiva) é realizada de forma gradativa.

2.2.1.1 Modelagem da região de transição

Um dos primeiros modelos para a representação do perfil de velocidade na região foi descrito por (JOSEPH; TAO, 1966), onde a camada limite é substituída por um perfil de velocidade proporcional ao gradiente de velocidade no exterior da camada limite. Posteriormente o modelo é generalizado para superfície esférica (BEAVERS; JOSEPH, 1967).

Alguns modelos analíticos descrevem a região de transição satisfazendo as equações de Navier-Stokes no escoamento livre e algum conjunto empírico ou semi-empírico de equações (tipicamente a Lei de Darcy) na matriz porosa juntamente com condições de contorno apropriadas na interface das duas regiões. Um modelo simples é o escoamento de Poiseuille bidimensional de um bloco permeável saturado de fluido apresentado na Equação (8) com objetivo de inferir sobre a velocidade na interface (BEAVERS; JOSEPH, 1967). Neste modelo, as equações de Navier-Stokes são satisfeitas no fluido livre, a Lei de Darcy é satisfeita no interior do material permeável, mas não necessariamente na região próxima da interface de contorno. Os resultados deste experimento mostram que os efeitos de cisalhamento viscoso aparecem dentro no material poroso em uma região de camada limite, produzindo um distribuição de velocidade semelhante à Figura 2.

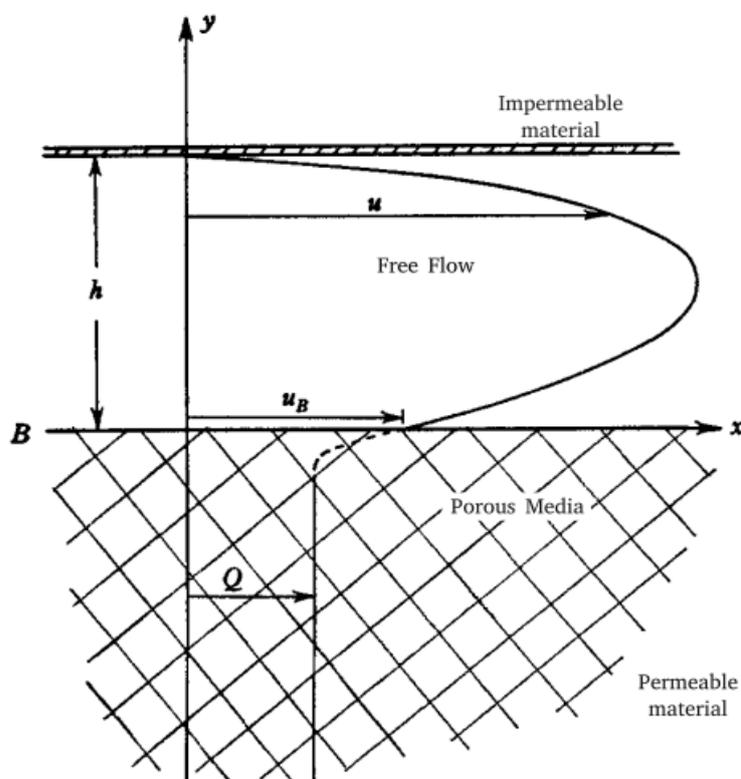


Figura 2 – Perfil de velocidade para o escoamento em um canal horizontal formado por uma parede inferior permeável ($y=0$) e uma parede superior impermeável ($y=h$). Adaptado (BEAVERS; JOSEPH, 1967).

À seguir, o perfil de velocidade na região de transição entre a corrente livre e a região porosa será determinado a partir do modelo simplificado de Poiseuille, onde o efeito

da camada limite é substituído por um perfil de velocidade proporcional ao gradiente de velocidade no exterior da camada, conforme a Figura 2 proposta por BEAVERS; JOSEPH (1967).

Para o movimento de Poiseuille, temos a seguinte Equação:

$$\frac{d^2u}{dy^2} = \frac{1}{\mu} \frac{dP}{dx} \quad (8)$$

com as condições de contorno $u = 0$ em $y = h$

e

$$\left. \frac{du}{dy} \right|_{y \rightarrow 0^+} = \frac{\alpha}{\sqrt{k}} (u_B - Q) \quad (9)$$

em $y = 0$, onde k é a permeabilidade do meio poroso e \sqrt{k} é a escala de comprimento característico da matriz porosa, com α sendo um número adimensional que depende dos parâmetros do material que caracterizam a estrutura do material permeável dentro da camada limite.

A integração da Equação (8), juntamente com as condições, de contorno fornece o perfil de velocidade

$$u = u_B \left(1 + \frac{\alpha}{\sqrt{k}} y\right) + \frac{1}{2\mu} (y^2 + 2\alpha y \sqrt{k}) \frac{dP}{dx} \quad (10)$$

onde a velocidade de deslizamento u_B é dada por:

$$u_B = -\frac{k}{2\mu} \left(\frac{\sigma^2 + 2\alpha\sigma}{1 + \alpha\sigma} \right) \frac{dP}{dx} \quad (11)$$

com $\sigma = h/\sqrt{k}$.

A taxa de fluxo de massa por unidade de largura através do canal é então:

$$M = -\frac{\rho h^3}{12\mu} \frac{dP}{dx} - \frac{\rho h^3}{4\mu\sigma} \left(\frac{\sigma + 2\alpha}{1 + \alpha\sigma} \right) \frac{dP}{dx}. \quad (12)$$

Segue-se que o aumento fracionário na taxa de fluxo de massa através do canal com uma parede inferior permeável em relação ao que seria se a parede fosse impermeável é:

$$\Phi = \frac{3(\sigma + 2\alpha)}{\sigma(1 + \alpha\sigma)}. \quad (13)$$

A quantidade Φ assume o valor 3 quando $\sigma = \sqrt{2}$, independentemente de α . Isso ocorre quando a velocidade na parede permeável do canal é igual ao valor de Darcy dentro do material permeável, e o perfil de velocidade no canal possui um gradiente nulo na parede permeável. Na maioria das aplicações, h será consideravelmente maior do que $\sqrt{(2k)}$. Portanto, é provável que, para valores de σ próximos a $\sqrt{2}$, o tamanho médio dos

poros individuais dentro do material seja pelo menos igual à altura do canal, e a suposição de escoamento retilíneo no canal se torna inválida.

3 METODOLOGIA

3.1 Formulação Matemática

Considerando um escoamento sobre uma placa porosa com inclinação θ , conforme a Figura 3, diferentes configurações foram exploradas no presente trabalho, como um escoamento forçado com velocidade imposta na posição $x = 0$. A altura da coluna de água é $h \gg 1$, ou seja, não foi considerada uma película fina de fluido, pois com esta condição, na prática, ocorre uma instabilidade na superfície do fluido que resulta em uma onda como mostra a linha pontilhada na Figura 3. Assim, o objetivo do trabalho é analisar a influência da matriz porosa no escoamento sob diferentes propriedades da matriz.

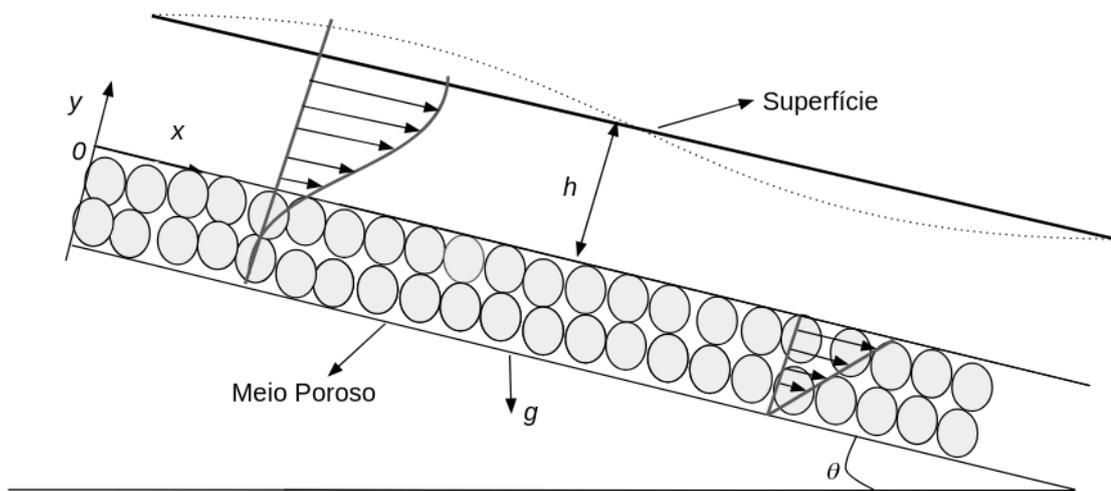


Figura 3 – Figura esquemática do problema resolvido (com superfície reta)

Neste capítulo serão discretizadas as formulações matemáticas utilizadas para modelar um regime de escoamento bidimensional de um fluido incompressível e viscoso sobre uma placa porosa inclinada. KUNDU; COHEN; HU (2002) enfatizam que as formulações são imprescindíveis para descrever matematicamente o comportamento de um fluido em movimento e, para definir um escoamento, é necessário utilizar as equações de Navier-Stokes.

As equações de Navier-Stokes foram trabalhadas considerando os problemas simultâneos de transporte de massa, momento e energia associados a matrizes porosas, fluidos nos poros e espécies. Em outras palavras, foram utilizadas leis elementares da Mecânica, Conservação da massa, Quantidade de Movimento e Conservação de Energia, discretizadas no Anexo A, que podem ser estabelecidas para modelagem de qualquer fenômeno físico (CIVAN, 2011). A formulação matemática será apresentada através das equações governantes na forma adimensional, definidas como:

$$x = \frac{\bar{x}}{d}, \quad y = \frac{\bar{y}}{d}, \quad u = \frac{\bar{u}}{u_0}, \quad v = \frac{\bar{v}}{u_0}, \quad p = \frac{\bar{p}}{\rho u_0^2}, \quad t = \frac{\bar{t}}{t_c}, \quad T = \frac{\bar{T}}{T_p} \quad (14)$$

onde \bar{x} e \bar{y} são coordenadas espaciais, e suas respectivas componentes de velocidade \bar{u} e \bar{v} , u_0 é a velocidade da injeção do fluido no domínio, t_c é o tempo característico, d é o comprimento característico, p é a pressão e T , a temperatura.

A velocidade do fluido no meio poroso v está relacionada com a velocidade do fluido fora da matriz porosa dada pela relação de Dupuit-Forchheimer, $v = \varepsilon V$, onde ε é a porosidade e V é a velocidade na região de fluido livre (NIELD et al., 2017), ou seja, para o fluido livre $\varepsilon = 1$ e $v = V$.

As equações governantes para a conservação de massa, momento, concentração e energia foram expressas pelas seguintes equações:

$$\frac{1}{\beta} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (15)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial (uu)}{\partial x} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial (vu)}{\partial y} = -\varepsilon \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \varepsilon B \Phi_x + \frac{\varepsilon}{Fr^2} \sin(\theta), \quad (16)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial (uv)}{\partial x} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial (vv)}{\partial y} = -\varepsilon \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \varepsilon B \Phi_y - \frac{\varepsilon}{Fr^2} \cos(\theta) \quad (17)$$

$$\frac{\partial (T)}{\partial t} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial (uT)}{\partial x} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial (vT)}{\partial y} = \frac{1}{RePe} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (18)$$

Na equação da conservação da massa, o termo transiente da massa específica foi substituído artificialmente por um termo de pressão, juntamente com um parâmetro multiplicativo denominado coeficiente de compressibilidade artificial β^{-1} (SIKONEN MM RAHMAN, 2001; CHORIN, 1997). O procedimento numérico foi executado até que a pressão ficasse constante no tempo ($\beta^{-1} \partial p / \partial t \ll 1$). As regiões do meio poroso e do fluido foram definidas pelos parâmetros ε e B como:

$$B = \begin{cases} 0, & \text{na região do escoamento livre} \\ 1, & \text{dentro do meio poroso} \end{cases} \quad (19)$$

A condição $B = 0$ significa que $Da \rightarrow \infty$ na região do fluido e a porosidade é definida como:

$$\varepsilon = \begin{cases} 1, & \text{na região do escoamento livre} \\ 0 < \varepsilon_0 < 1, & \text{dentro do meio poroso} \end{cases} \quad (20)$$

O meio poroso foi modelado pela equação de Darcy-Forchheimer, onde Φ é a resistência interna de arrasto dada por

$$\Phi_x = -\frac{u}{Re.Da} + \frac{c_f}{\sqrt{Da}}u\sqrt{u^2 + v^2}, \quad (21)$$

$$\Phi_y = -\frac{v}{Re.Da} + \frac{c_f}{\sqrt{Da}}v\sqrt{u^2 + v^2}, \quad (22)$$

onde Re é o número de Reynolds do escoamento livre, Da é o número de Darcy definido como $Da = K/d^2$. O parâmetro c_f é uma constante de arrasto na forma adimensional e c_f é o coeficiente de Forchheimer.

3.1.1 Condições de contorno

As condições iniciais e de contorno para as equações foram especificadas como:

Condições iniciais ($\tau = 0$):

$$\begin{aligned} u(0, x, y) = 0, \quad v(0, x, y) = v_i & \text{ na região do escoamento livre} \\ u(0, x, y) = 0, \quad v(0, x, y) = 0 & \text{ dentro do meio poroso} \end{aligned} \quad (23)$$

$$T(0, x, y) = \begin{cases} T_\infty, & \text{fora do meio poroso} \\ T_p, & \text{dentro do meio poroso} \end{cases} \quad (24)$$

onde T_p e T_∞ são as temperaturas no meio poroso no escoamento livre. no presente trabalho vamos considerar temperatura constante em todo domínio, ou seja $T_p = T_\infty$.

A Condição de contorno ($\tau > 0$):

$$u(t, 0, y) = 0, \quad v(t, 0, y) = v_i, \quad \text{contorno esquerdo (entrada do escoamento)}, \quad (25)$$

$$u(t, L, y) = 0, \quad \left. \frac{\partial v}{\partial y} \right|_{(t,L,y)} = 0, \quad \text{contorno direito (saída do escoamento)}, \quad (26)$$

$$u(t, x, h) = 0, \quad \left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{(t,x,h)} = 0, \quad \text{ou} \quad v(t, x, h) = 0, \quad (27)$$

contorno superior (corrente livre ou placa estacionária no contorno superior),

$$u(t, x, -h) = 0, \quad v(t, x, -h) = 0, \quad \text{contorno inferior (interior da matriz porosa)}, \quad (28)$$

na qual v_i é a velocidade de injeção. No presente trabalho, vamos considerar que a temperatura do meio poroso é a mesma do meio ambiente, ou seja, não há troca de calor, portanto as condições de contorno para temperatura são todas especificadas.

3.2 Integração de equações

As equações governantes foram integradas pelo Método de Volumes Finitos (MFV), onde as equações de conservação foram integradas sob o volume de controle indicado na

Figura 4 (FORTUNA, 2000).

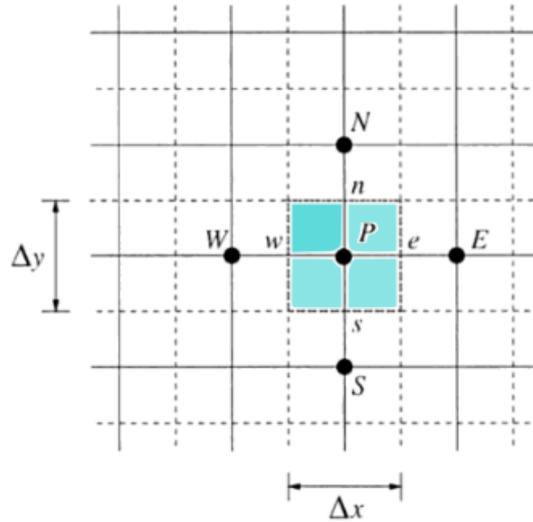


Figura 4 – Malha bidimensional Método dos volumes finitos. Adaptado (FORTUNA, 2000)

Portanto, a equação de continuidade, Equação (15) foi integrada sob o volume de controle da seguinte forma:

$$\frac{1}{\beta \Delta \tau} \int_{\tau}^{\tau+\Delta \tau} \frac{\partial p}{\partial \tau} \Delta \Omega d\tau + \int_s^n \int_w^e \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial x} dx dy + \int_s^n \int_w^e \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial v}{\partial y} dx dy = 0, \quad (29)$$

resultando em

$$\frac{\varepsilon}{\beta} \frac{\Delta \Omega}{\Delta \tau} (p_P^{\nu+1} - p_P^{\nu}) + \Delta y (u_e - u_w) + \Delta x (u_n - u_s) = 0, \quad (30)$$

na qual $\Delta \Omega = \Delta x \Delta y$ é o volume pois $\Delta z = 1$ para simplificação.

Da mesma forma, a equação de Conservação do Momento, Equação (16), foi integrada na direção de x sob o volume de controle

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\beta \Delta \tau} \int_{\tau}^{\tau+\Delta \tau} \frac{\partial u}{\partial \tau} \Delta \Omega d\tau + \int_s^n \int_w^e \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial (uu)}{\partial x} dx dy + \int_s^n \int_w^e \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial (vu)}{\partial y} dx dy = \\ & - \int_s^n \int_w^e \varepsilon \frac{\partial p}{\partial x} dx dy + \int_s^n \int_w^e \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\varepsilon}{Re} \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx dy + \\ & \int_s^n \int_w^e \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\varepsilon}{Re} \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy - \int_s^n \int_w^e \varepsilon B \Phi_x dx dy + \int_s^n \int_w^e \frac{\varepsilon}{Fr^2} g \sin(\theta) dx dy, \end{aligned} \quad (31)$$

resultando em

$$\begin{aligned} \frac{\Delta\Omega}{\Delta\tau}(u_P^{\nu+1} - u_P^\nu) + F_e u_e - F_w u_w + F_n u_n - F_s u_s = -\varepsilon \frac{p_e - p_w}{\Delta x} \Delta\Omega + \\ D_e(u_E - u_P) - D_w(u_P + u_W) + D_n(u_N - u_P) - D_s(u_P + u_S) \\ + \varepsilon B \Phi_x \Delta\Omega + \frac{\varepsilon}{Fr^2} g \cos(\theta) \Delta\Omega \quad (32) \end{aligned}$$

na qual $F_f = A_f u_f / \varepsilon$, $D_f = \varepsilon A_f / (Re \delta x_f)$ e o índice f sendo n, s, e , ou w . Seguindo os mesmos passos, a equação de conservação do momento, Equação (17), foi integrada na direção de y e sob o volume de controle:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta\tau} \int_\tau^{t+\Delta\tau} \frac{\partial v}{\partial \tau} \Delta\Omega d\tau + \int_s^n \int_w^e \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial(uv)}{\partial x} dx dy + \int_s^n \int_w^e \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial(vv)}{\partial y} dx dy = \\ - \int_s^n \int_w^e \varepsilon \frac{\partial p}{\partial y} dx dy + \int_s^n \int_w^e \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\varepsilon}{Re} \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx dy + \\ \int_s^n \int_w^e \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\varepsilon}{Re} \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy - \int_s^n \int_w^e \varepsilon B \Phi_y dx dy + \int_s^n \int_w^e \frac{\varepsilon}{Fr^2} g \sin(\theta) dx dy, \end{aligned}$$

resultando em

$$\begin{aligned} \frac{\Delta\Omega}{\Delta\tau}(v_P^{\nu+1} - v_P^\nu) + F_e v_e - F_w v_w + F_n v_n - F_s v_s = -\varepsilon \frac{p_n - p_s}{\Delta y} \Delta\Omega + \\ D_e(v_E - v_P) - D_w(v_P + v_W) + D_n(v_N - v_P) - D_s(v_P + v_S) \\ + \varepsilon B \Phi_y \Delta\Omega + \frac{\varepsilon}{Fr^2} g \sin(\theta) \Delta\Omega \quad (33) \end{aligned}$$

na qual $F_f = A_f v_f / \varepsilon$, $D_f = \varepsilon A_f / (Re \delta y_f)$ e o índice f sendo n, s, e, w .

A conservação da concentração foi integrada:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta\tau} \int_\tau^{t+\Delta\tau} \frac{\partial T}{\partial \tau} \Delta\Omega d\tau + \int_s^n \int_w^e \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial(uT)}{\partial x} dx dy + \int_s^n \int_w^e \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial(vT)}{\partial y} dx dy = \\ \int_s^n \int_w^e \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{RePe} \frac{\partial T}{\partial x} \right) dx dy + \int_s^n \int_w^e \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{RePe} \frac{\partial T}{\partial y} \right) dx dy \quad (34) \end{aligned}$$

resultando em

$$\begin{aligned} \frac{\Delta\Omega}{\Delta\tau}(T_P^{\nu+1} - T_P^\nu) + F_e T_e - F_w T_w + F_n T_n - F_s T_s = \\ D_e(T_E - T_P) - D_w(T_P + T_W) + D_n(T_N - T_P) - D_s(T_P + T_S) \quad (35) \end{aligned}$$

onde $F_f = A_f v_f / \varepsilon$ e $D_f = A_f / (ReSc \delta x_f)$.

Após a integração das Equações pelo Método de Volumes finitos, um esparso sis-

tema linear foi gerado, conforme indicado pelas Equações (30), (32), (33) e (35). Para calcular os fluxos nas faces dos volumes de controle foi utilizado o esquema QUICK (*Quadratic Upstream Interpolation for Convective Kinematics*) que é um esquema Upwind de alta ordem que considera três pontos ponderados por interpolação quadrática para calcular os valores de face do volume.

3.2.1 Verificação Código numérico

O presente trabalho é a extensão de trabalhos anteriores, onde o código escrito em FORTRAN reproduz o escoamento em torno de um cilindro rígido iniciado por (DONINI, 2021). Neste caso, o escoamento contorna o obstáculo formando a conhecida esteira de Von Karman a jusante do objeto, ou seja, reproduz um padrão repetitivo de vórtices rodopiantes, como apresentado na Figura 5.

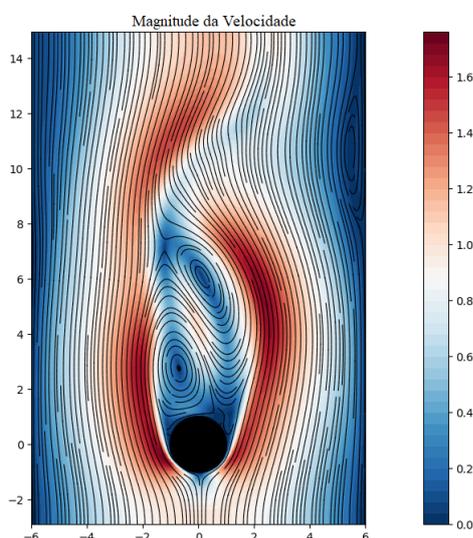


Figura 5 – Escoamento em torno de um cilindro rígido
(DONINI, 2021)

Posteriormente, o cilindro foi transformado em um material poroso e as condições de contorno entre a matriz porosa e o escoamento livre foram tratadas pelo método One Domain Approach, ou seja, as Equações (15) a (18) foram resolvidas conforme as condições 19 e 20, sem a necessidade de especificar as referidas condições de contorno.

A Figura 6 mostra o escoamento em torno de um cilindro poroso com permeabilidade alta. Pode-se observar a ocorrência de recirculação a jusante do cilindro, que ocorre devido aos efeitos viscosos do escoamento.

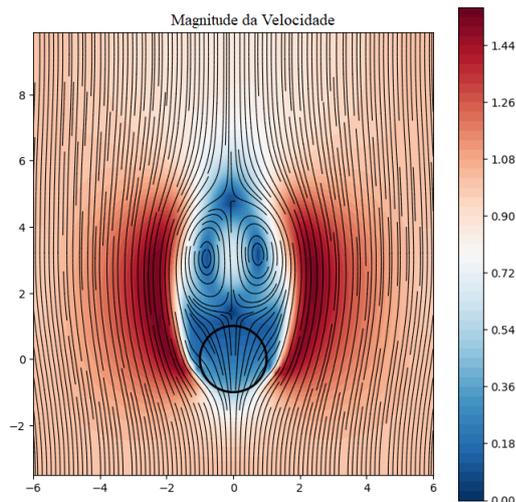


Figura 6 – Escoamento em torno de um cilindro poroso
(OLIVEIRA, 2020)

Na Figura 7 tem-se o escoamento em torno de dois cilindros quadrados alinhados. Neste caso percebe-se a influência do segundo cilindro no escoamento, que em baixas velocidades não forma uma zona de recirculação.

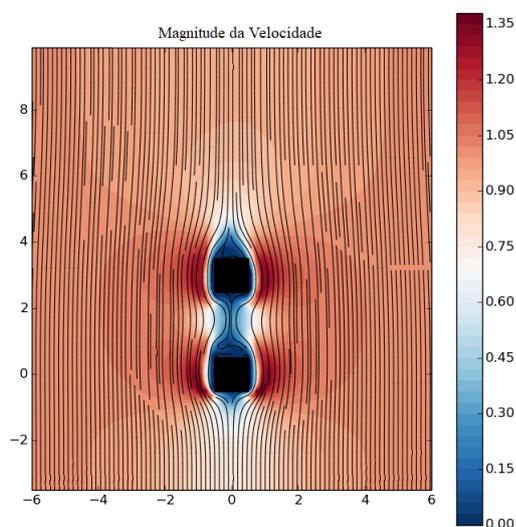


Figura 7 – Escoamento em torno de dois cilindros quadrados
(CHICHINELLI, 2022)

O próximo passo do presente trabalho foi reproduzir o escoamento em torno de uma placa plana porosa inclinada com o efeito da gravidade e por escoamento forçado, conforme esquema da Figura 3. Para isso, foi retirado os cilindros das Figuras 5, 6 e 7 e transformado parte do domínio em matriz porosa, através do ajuste nos parâmetros ϵ e B das Equações (15) a (18), resolvidas impondo as apropriadas condições de contorno descritas anteriormente.

4 RESULTADOS

Inicialmente consideramos o modelo clássico do escoamento entre duas placas paralelas, sem matriz porosa, conforme mostra a Figura (8), onde o perfil de velocidade inicial na entrada em $x = -6$ é dado por um perfil parabólico $v = v_i(1 - (y/L)^2)$, onde $v_i = 1$ é a velocidade máxima entre as duas placas e L a distância entre as duas placas. A condição de não escorregamento nas placas é considerada e o efeito da gravidade é desprezível para as placas horizontais $\theta = 0^\circ$. Os parâmetros adimensionais, tais como Re , Fr , Pe foram assumidos igual a unidade. Em todos os resultados a seguir, as propriedades serão representadas ao longo das retas $x_1 = -5, 2$, $x_2 = -2, 6$, $x_3 = 2, 6$, $x_4 = 7, 8$, $x_5 = 10, 4$ e $x_6 = 13$.

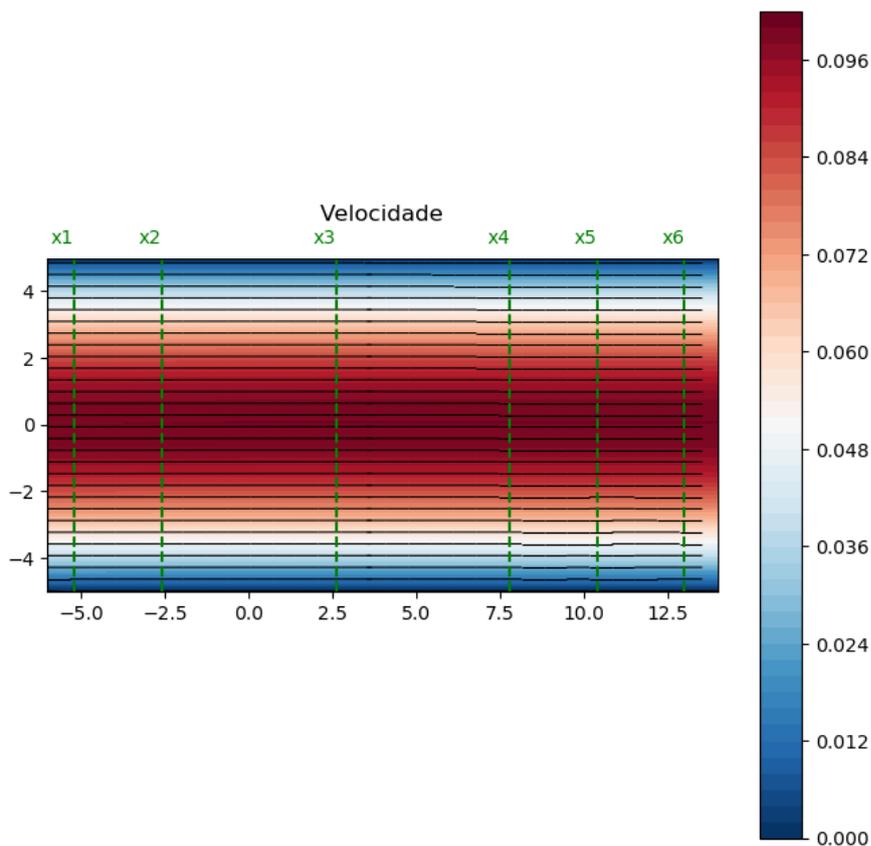


Figura 8 – Magnitude da velocidade para escoamento entre placas paralelas ($g = 0$, $\theta = 0^\circ$)

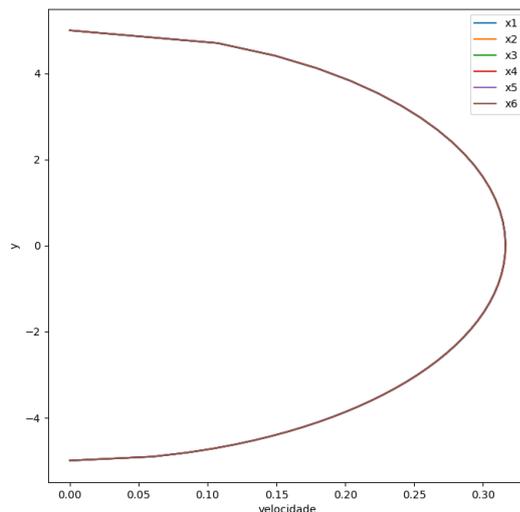


Figura 9 – Perfis de velocidade ao longo das retas $x_1 = -5, 2$, $x_2 = -2, 6$, $x_3 = 2, 6$, $x_4 = 7, 8$, $x_5 = 10, 4$ e $x_6 = 13$

4.0.1 Influência do número de Darcy com efeito da gravidade

O número de Darcy é um parâmetro adimensional que está diretamente relacionado com a permeabilidade de meios porosos, tais como, solos e rochas. Uma alta permeabilidade significa que o fluido pode escoar facilmente através do meio poroso, enquanto uma baixa permeabilidade indica maior resistência ao escoamento. Meios porosos com alta permeabilidade, como areia grossa, têm valores de Darcy relativamente altos, enquanto materiais menos permeáveis, como argila, têm valores baixos. Os casos a seguir foram utilizados para uma placa plana porosa com inclinação de $\theta = 30^\circ$

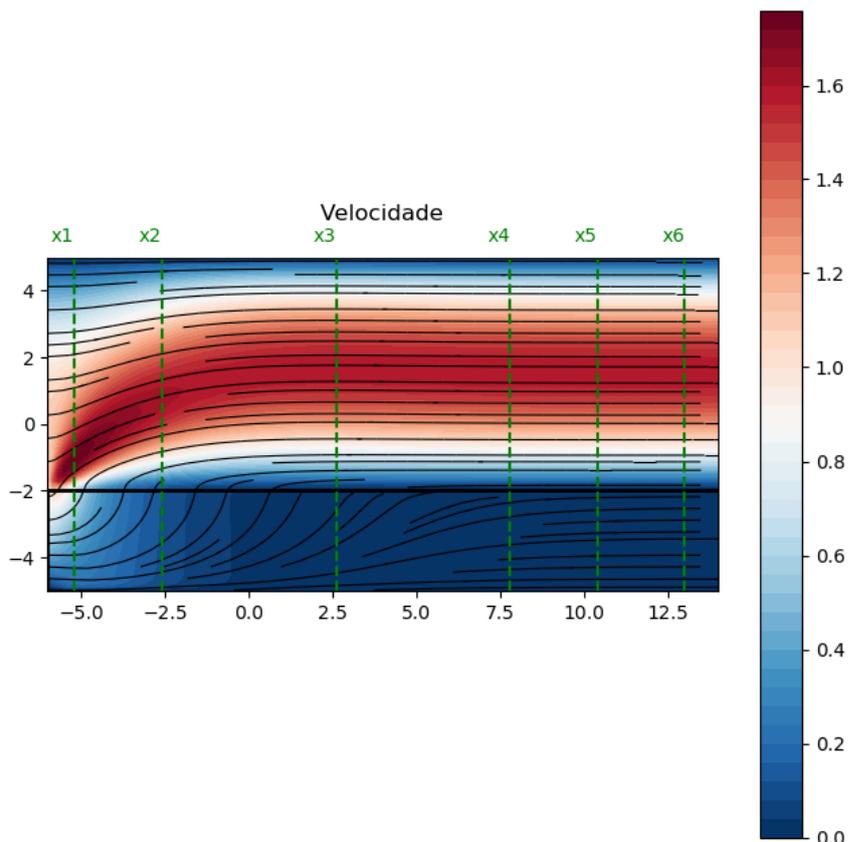


Figura 10 – Magnitude da velocidade para escoamento entre placas paralelas rígida e porosa para $g = 10$, com placas na horizontal ($\theta = 30^\circ$), $\varepsilon = 0.5$, $Da = 0.01$

Os resultados a seguir, Figuras (10) a (14), representam o escoamento entre duas placas, onde a placa superior é rígida com condição de contorno de não escorregamento e placa porosa encontra-se abaixo da linha tracejada em $x \leq -2$. Apresentamos os perfis de velocidade em duas condições, a primeira com os perfis deslocados para permitir uma melhor visualização as evolução do perfil de velocidade ao longo do domínio e na segunda figura os perfis de velocidade são apresentados em suas respectivas escalas naturais.

Observando as Figuras (10) a (14) verifica-se que a evolução dos perfis de velocidade para diferentes valores de Da (permeabilidade). Para baixas permeabilidades verifica-se a resistência do fluido escoar no meio poroso. A medida que a permeabilidade vai aumentando, a influência do meio poroso no escoamento externo é menos acentuada. Observa-se também que a condição completamente desenvolvida vai se formando ao longo no escoamento, para uma região afastada da entrada do escoamento.

A Figura (10) descreve o caso de baixa permeabilidade ($Da = 0,01$). Verifica-se que dentro da matriz porosa o escoamento escoar de forma homogênea até atingir a condição completamente desenvolvida.

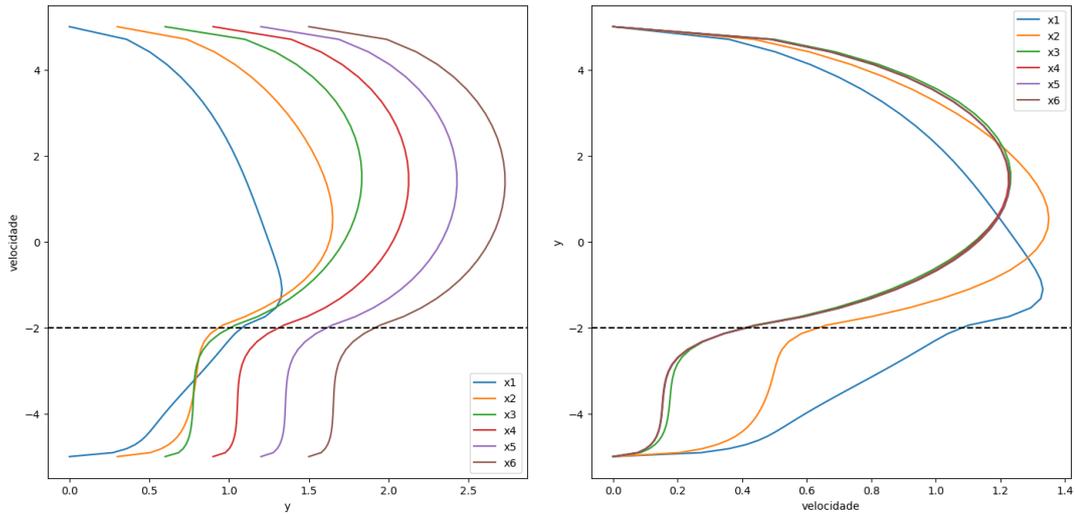


Figura 11 – Perfis de velocidade na direção vertical para $g = 10$ $\varepsilon = 0.5$, $Da = 0.1$

A Figura (11) apresenta o caso para permeabilidade mais alta $Da = 0.1$, neste caso o verifica-se que as forças inerciais tornam-se mais aparente dentro da matriz porosa, como evidenciado também nos resultados Figuras (12) e (13).

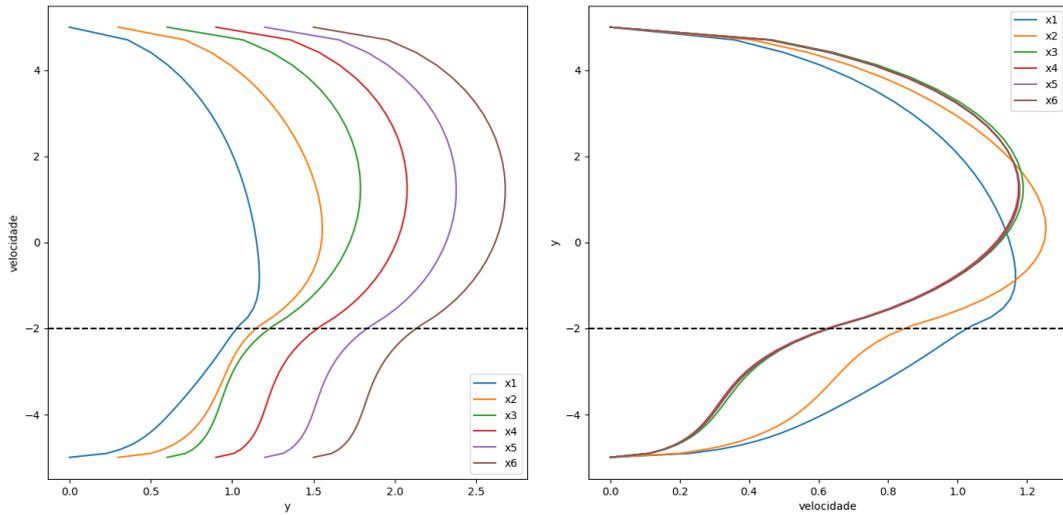


Figura 12 – Perfis de velocidade na direção vertical para $g = 10$ $\varepsilon = 0.5$, $Da = 0.5$

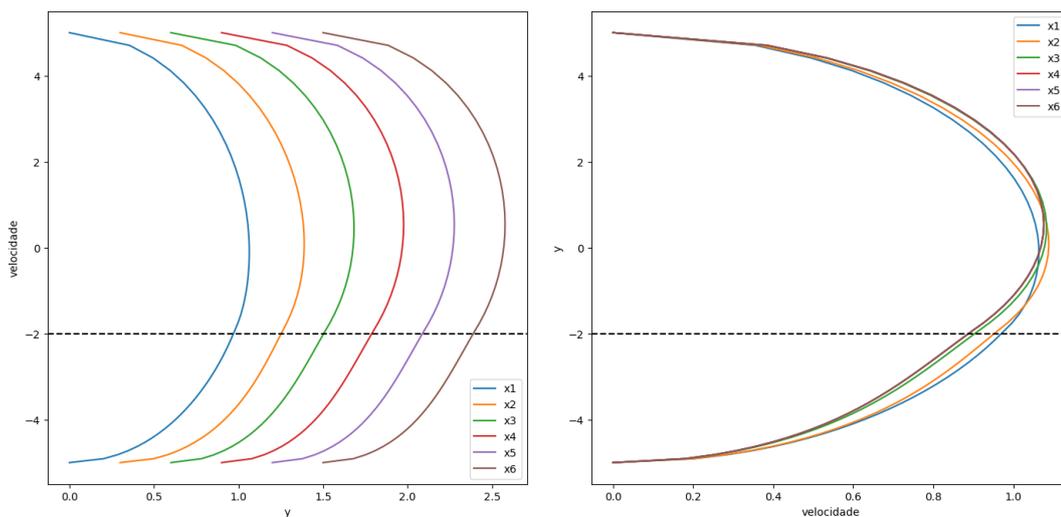


Figura 13 – Perfis de velocidade na direção vertical para $g = 10$ $\varepsilon = 0.5$, $Da = 10$

A Figura (13) apresenta o caso para uma matriz porosa de alta permeabilidade, neste caso o resultado se aproxima da condição sem matriz porosa apresentada na Figura (9)

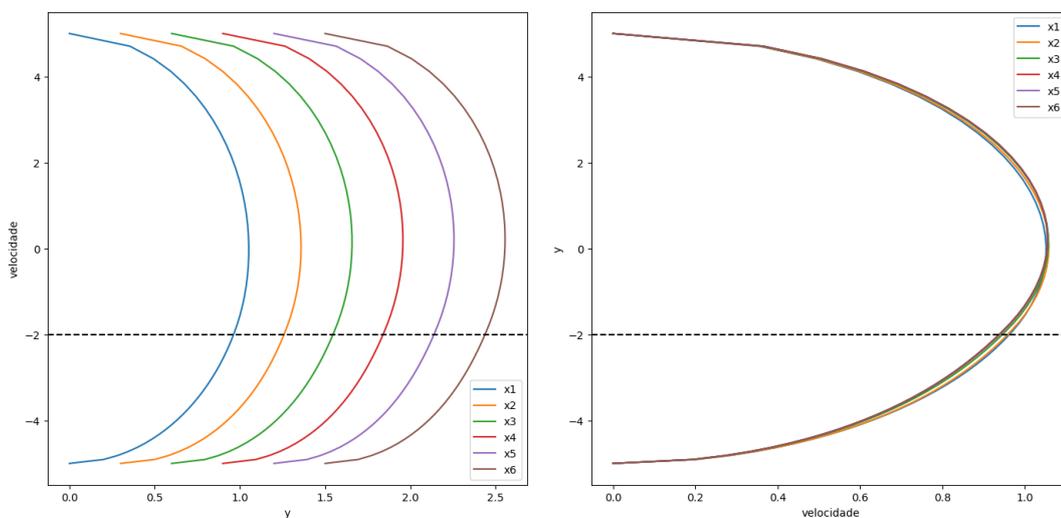


Figura 14 – Perfis de velocidade na direção vertical para $g = 10$ $\varepsilon = 0.5$, $Da = 100$

A ocorrência de instabilidade em uma lâmina líquida sobre uma superfície porosa é um processo largamente estudado na literatura, que envolve a interação entre o escoamento e as propriedades da superfície porosa. Essa instabilidade pode ser influenciada por diversos fatores, no presente caso podemos citar o ponto de inflexão no perfil de velocidade que ocorre na interface do escoamento livre e meio poroso. Essas instabilidades são mais suscetíveis em meio poroso com baixa permeabilidade. Essas instabilidades são associadas a pequenas escalas e detalhes finos, muitas vezes requerem esquemas de discretização de alta ordem para serem capturadas adequadamente nas simulações numéricas.

4.1 Escoamento livre sobre superfície porosa

A seguir, apresentamos o escoamento livre sobre a superfície porosa, neste caso muda-se a condição de contorno na parte superior do domínio para fluxo nulo na direção vertical. A condição de contorno na entrada é o perfil parabólico do caso anterior. A placa está com inclinação de $\theta = 30^\circ$

À medida que o fluido infiltra na superfície porosa, pode ocorrer uma redistribuição da pressão dentro do meio poroso. Isso pode afetar a velocidade do escoamento na parte interna e externa do meio poroso, bem como a direção do fluxo. Em alguns casos, a acumulação de pressão pode levar a fluxos ascendentes ou ressurgências como mostrado na Figura (15). Neste caso utilizamos número de Froude baixo ($Fr = 0.01$), nesta condição os efeitos gravitacionais são potencializados em relação os efeitos inerciais, resultando numa região de recirculação dentro do domínio.

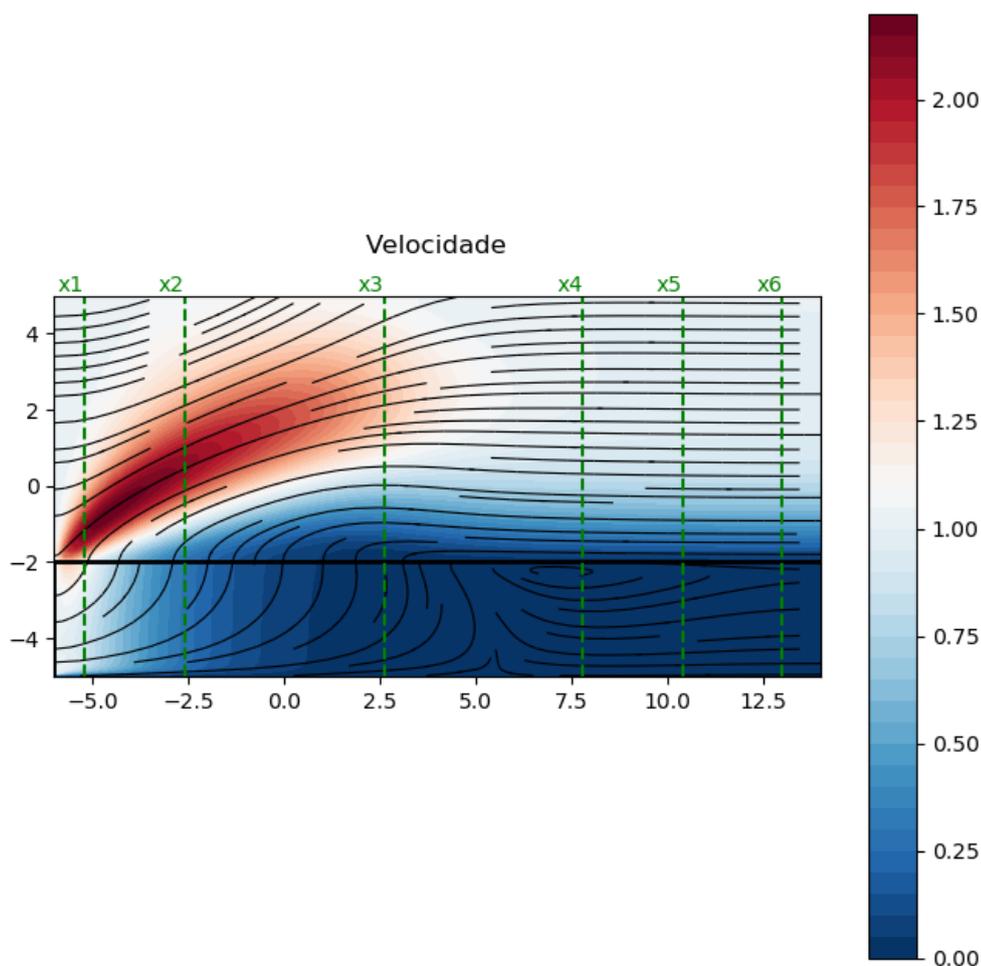


Figura 15 – Magnitude da velocidade para escoamento livre sobre superfície porosa para $g = 10$, com placas na horizontal ($\theta = 0^\circ$), $\varepsilon = 0.5$, $Da = 0.01$ e $Fr = 0.01$

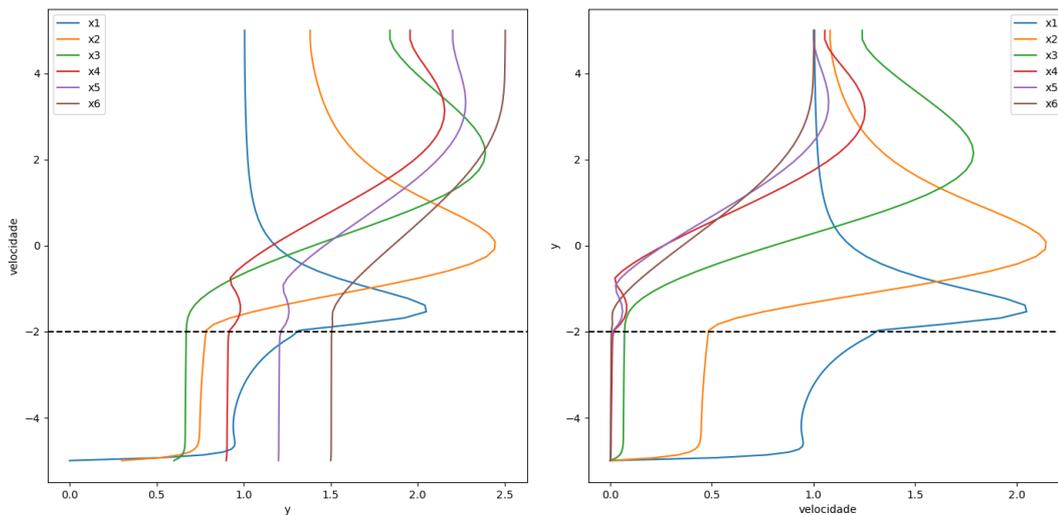


Figura 16 – Perfis de velocidade na direção vertical para $g = 10$, $\varepsilon = 0.5$, $Da = 0.01$ e $Fr = 0.01$

A Figura (16) é possível verificar o efeito da recirculação próximo da superfície da matriz porosa. Na condição de $Fr \leq 1$, o escoamento é subcrítico, o que significa que a velocidade do fluido é menor que a velocidade de propagação de ondas gravitacionais. Isso implica que as ondas de superfície podem se mover tanto a favor quanto contra o fluxo.

5 CONCLUSÃO

O presente trabalho apresentou o escoamento sobre uma superfície porosa em diferentes configurações, entre duas placas (uma porosa e outra não porosa) e escoamento livre sobre placa porosa. O parâmetro utilizado para a análise do escoamento foi o número de Darcy. Este parâmetro é crucial para o design e análise de sistemas de drenagem, projetos de construção civil, extração de petróleo e gás e recuperação de águas subterrâneas. Compreender a permeabilidade e o fluxo de fluidos ajuda a prever e controlar a movimentação de água e outros fluidos em ambientes naturais e artificiais. O presente modelo apresentou uma visão fundamental sobre como o meio poroso influencia no escoamento. A principal vantagem do presente modelo é a modelagem One Domain Approach que permite obter a solução do problema sem a necessidade de modelar a condição de contorno na interface entre o escoamento livre e meio poroso. Porém esta abordagem é limitada para baixo número de Reynolds. No entanto, para os casos específicos de baixo Reynolds, os resultados mostraram que a permeabilidade da matriz porosa tem grande influência no comportamento do escoamento, principalmente na região de transição entre meio poroso e meio livre. Estudar as propriedades do escoamento na interface, é de suma importância, pois é nesta região que ocorrem os principais problemas de escoamento em encostas de morros, pois a instabilidade de uma lâmina de fluido nesta interface pode trazer sérios danos ao solo. Como trabalhos futuros, pretende-se implementar no código numérico as condições de contorno na interface do meio poroso, permitindo que escoamentos com maiores velocidades possam ser reproduzidos. Além disso, o estudo de transferência de calor entre meio poroso e o fluido podem ser adicionados na análise.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AGUILAR-MADERA, C. G. et al. One-domain approach for heat transfer between a porous medium and a fluid. **International Journal of Heat and Mass Transfer**, v. 54, n. 9, p. 2089–2099, 2011.

BASTOS ANDRADE, S. **Manejo de irrigação**. [S.l.]: EMBRAPA, 2005. 54 p.

BEAVERS, G. S.; JOSEPH, D. D. Boundary conditions at a naturally permeable wall. **Journal of fluid mechanics**, Cambridge University Press, v. 30, n. 1, p. 197–207, 1967.

BRINKMAN, H. C. A calculation of the viscous force exerted by a flowing fluid on a dense swarm of particle. **Flow, Turbulence and Combustion**, v. 1, p. 27–34, 1949.

CHICHINELLI, S. C. **Solução numérica de um escoamento bidimensional entre placas paralelas com obstáculo**. 2022. Dissertação (Dissertação de Mestrado) — Universidade Federal do Pampa, 2022.

CHORIN, A. J. A Numerical Method for Solving Incompressible Viscous Flow Problems. **Journal of computational physics**, Elsevier, v. 135, n. 2, p. 118–125, 1997.

CIVAN, F. **Porous media transport phenomena**. Hoboken, NJ, United States: John Wiley & Sons, 2011.

CRASTER, R. V.; MATAR, O. K. Dynamics and stability of thin liquid films. **Rev. Mod. Phys.**, American Physical Society, v. 81, p. 1131–1198, Aug 2009. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.81.1131>>.

DISCACCIATI, M.; QUARTERONI, A. et al. Navier-stokes/darcy coupling: modeling, analysis, and numerical approximation. **Rev. Mat. Complut**, v. 22, n. 2, p. 315–426, 2009.

DONINI, M. S. **Tsuji burner as a numerical laboratory to study several aspects of diffusion flame**. 2021. Tese (Tese de Doutorado) — Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, 2021. 130 p.

DULLIEN, F. A. **Porous Media: Fluid Transport and Pore Structure**. Cambridge, Massachusetts: Academic press, 2012.

EGGENWEILER, E.; RYBAK, I. Unsuitability of the beavers–joseph interface condition for filtration problems. **Journal of Fluid Mechanics**, Cambridge University Press, v. 892, p. A10, 2020.

FLETCHER, C. A. J. **Computational Techniques for Fluid Dynamics 2: Specific Techniques for Different Flow Categories**. Berlin, Germany: Springer Science & Business Media, 1991.

FORCHHEIMER, P. Wasserbewegung durch boden. **Zeits. V. deutsch. Ing**, v. 45, p. 1782–1788, 1901.

FORTUNA, A. de O. **Técnicas Computacionais para Dinâmica dos Fluidos Vol. 30**. [S.l.]: Edusp, 2000.

HAMDAN, M. Single-phase flow through porous channels a review of flow models and channel entry conditions. **Applied Mathematics and Computation**, v. 62, n. 2, p. 203–222, 1994. ISSN 0096-3003. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0096300394900833>>.

JOSEPH, D. D.; TAO, L. N. Lubrication of a porous bearing—stokes' solution. **Journal of Applied Mechanics**, v. 33, n. 4, p. 753–760, 1966.

KAVIANY, M. **Principles of Heat Transfer in Porous Media**. New York: Springer Science & Business Media, 2012. (Mechanical Engineering Series). ISBN 9781468404128. Disponível em: <<https://books.google.pt/books?id=pmjSBwAAQBAJ>>.

MALISKA, C. Transferência de calor e mecânica dos fluidos computacional. 2ª. **Edição. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos Editora**, v. 200, 2004.

MAPBIOMAS. **Projeto MapBiomass – Coleção [versão] da Série Anual de Mapas de Cobertura e Uso da Terra do Brasil**. 2023. Acesso em: 16 jul. 2024. Disponível em: <<https://brasil.mapbiomas.org/2023/10/31/cidades-crescem-mais-em-areas-de-risco-a-desastres-climaticos/>>.

MCDONALD, A. T.; PRITCHARD, P.; LEYLEGIAN, J. Introdução á mecânica dos fluidos. **Editora LTC**, v. 5, 2006.

NIELD, D. A.; BEJAN, A. **Convection in Porous Media**. 5. ed. Cham: Springer, 2017. 988 p.

NIELD, D. A. et al. Heat transfer through a porous medium. **Convection in porous media**, Springer, p. 37–55, 2017.

OLIVEIRA, D. P. de. **Fluid Flow Through Porous Media with the One Domain Approach: A Simple Model for Grains Drying**. 2020. Dissertação (Dissertação de Mestrado) — Universidade Federal do Pampa, 2020.

PASCAL, J. P. Linear stability of fluid flow down a porous inclined plane. **Journal of Physics D: Applied Physics**, v. 32, n. 4, p. 417, 1999.

RUTH, D.; HUIPING, M. On the derivation of the forchheimer equation by means of the averaging theorem. **Transp. in Porous Media**, 1990.

SIIKONEN MM RAHMAN, T. An artificial compressibility method for incompressible flows. **Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals**, Taylor & Francis, v. 40, n. 5, p. 391–409, 2001.

Anexo A –

A.1 Aspectos Matemáticos das Equações de Conservação

A.1.1 Equações de Navier-Stokes

As equações de Navier-Stokes moldam o escoamento de fluidos e conforme as propriedades do mesmo podem ser simplificadas a fim de reduzir as dificuldades inerentes à sua solução numérica. As equações expressam matematicamente os princípios físicos através de leis de conservação da massa e quantidade de movimento abordados a seguir (FORTUNA, 2000).

Este anexo apresentará aspectos gerais e a discretização dessas equações para que seja possível compreender posteriormente as simplificações realizadas.

A.1.2 Conservação de Massa

Suponha o sistema mostrado na Figura 17 com instantes t e $t + \Delta t$, com velocidade V_A do elemento área dA e um escoamento com velocidade V (MALISKA, 2004).

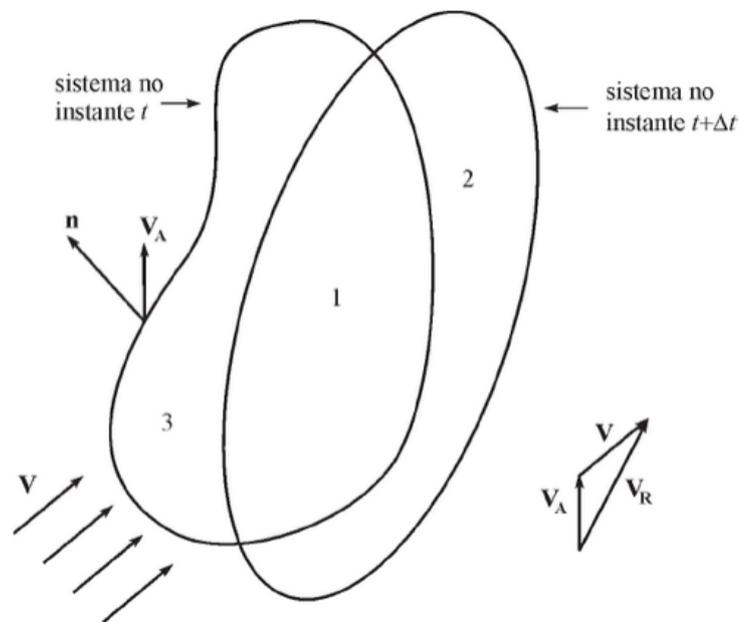


Figura 17 – Sistema usado para dedução das equações de conservação (MALISKA, 2004).

A variação de massa no sistema (Δm) é dada por:

$$[m_1(t + \Delta t) + m_2(t + \Delta t) - m_1(t) - m_3(t)] = \Delta m \quad (36)$$

Onde m_1 , m_2 e m_3 são as massas. Dividindo pela variação no tempo, Δt , tem-se:

$$\frac{m_1(t + \Delta t) - m_1(t)}{\Delta t} \frac{m_2(t + \Delta t)}{\Delta t} = \frac{\Delta m}{\Delta t} \quad (37)$$

Sabendo que m_3 e m_2 , representam, respectivamente, a massa que entra e a massa que sai do volume de controle, podemos reorganizar a equação:

$$\frac{m_3(t)}{\Delta t} - \frac{m_2(t + \Delta t)}{\Delta t} + \frac{\Delta m}{\Delta t} = \frac{\Delta m}{\Delta t} \Big|_{VC} \quad (38)$$

Onde VC é o volume de controle.

A massa é constante no sistema ao longo do tempo, então a equação pode ser escrita da seguinte maneira:

$$m_{entra} - m_{sai} = \frac{\Delta m}{\Delta t} \Big|_{VC} \quad (39)$$

onde m_{entra} e m_{sai} , regiões 2 e 3 da Figura 17, são as massas que entram e saem do volume de controle.

De acordo com (MALISKA, 2004), integrar da forma conservativa a equação diferencial ou realizar o balanço são procedimentos equivalentes. Segundo o autor, obter as equações aproximadas através da integração da equação diferencial é preferível, uma vez que nem todos os balanços são facilmente deduzidos.

Portanto, a fim de calcular toda massa ao redor da superfície por meio de relações matemáticas, utiliza-se a integral com a velocidade relativa \vec{V}_R , responsável pelo fluxo de massa através das fronteiras do volume de controle:

$$- \int_A \rho \vec{V}_R \cdot \vec{n} dA = m_{entra} - m_{sai} \quad (40)$$

Sendo ρ a massa específica, e para o devido ajuste da equação utiliza-se o sinal negativo na integral.

Aplicando o Teorema da Divergência de Gauss para transformar a integral de área em volume, onde ∇ é o símbolo de divergência e V é o de volume na integral (MALISKA, 2004):

$$- \int_A (\rho \vec{V}_R \cdot d\vec{A}) = - \int_V \nabla \cdot (\rho \vec{V}_R) dV \quad (41)$$

Obtém-se a equação da Conservação da massa na forma integral:

$$- \int_V \nabla \cdot (\rho \vec{V}_R) dV = \int_V \frac{d\rho}{dt} dV \quad (42)$$

Empregando novamente o Teorema da Divergência de Gauss, e considerando um volume de controle fixo, encontra-se a forma diferencial da equação de conservação da

massa (MALISKA, 2004)

$$\int_V \left[\frac{d\rho}{dt} + \nabla(\rho \vec{V}_R) \right] dV = 0 \quad (43)$$

$$\frac{d}{dt}\rho + \frac{d}{dx}(\rho u_R) + \frac{d}{dy}(\rho v_R) + \frac{d}{dz}(\rho w_R) = 0 \quad (44)$$

Uma vez que u_R , v_R e w_R são as componentes de velocidade relativa nas direções x, y e z respectivamente.

A.1.3 Conservação da Quantidade de Movimento (Segunda Lei de Newton)

Segundo (MALISKA, 2004), para realizar a dedução da equação da conservação da quantidade de movimento é empregado o mesmo procedimento anterior, de forma que as quantidades de movimento nos instantes t e $t + \Delta t$, expostas na Figura 17, são avaliadas e a diferença entre elas será a variação na quantidade de movimento, expressa pela Equação 45 à seguir:

$$m_1 V_1(t + \Delta t) + m_2 V_2(t + \Delta t) - m_1 V_1(t) - m_3 V_3 = \Delta(mV) \mid_{sist} \quad (45)$$

Dividindo toda a equação por Δt , obtém-se:

$$\frac{(m_1 \vec{V}_1)_{t+\Delta t} - (m_1 \vec{V}_1)_t}{\Delta t} + \frac{(m_2 \vec{V}_2)_{t+\Delta t} - (m_3 \vec{V}_3)_t}{\Delta t} = \frac{\Delta(m\vec{V})}{\Delta t} \sum F \quad (46)$$

Sendo o primeiro termo da equação anterior, a quantidade de movimento que varia dentro do volume de controle, o segundo e terceiro termo, a quantidade que sai e que entra no volume de controle, respectivamente e o quarto termo a quantidade de movimento que varia na unidade de tempo do sistema.

Como a variação da quantidade de movimento no sistema não é nula e sim o somatório das forças, é empregada a Segunda Lei de Newton para sistemas, que estabelece a força resultante igual à taxa de variação da quantidade de movimento, dada por:

$$\frac{\Delta}{\Delta t}(Q_M) = \frac{\Delta(m\vec{V})}{\Delta t} \sum F \quad (47)$$

A partir da dedução da equação anterior, tem-se a Equação da Quantidade de Movimento para um volume de controle, descrita abaixo, entendendo que o somatório das forças é equivalente a geração de quantidade de movimento (MALISKA, 2004).

$$Q_{M_{entra}} - Q_{M_{sai}} + \sum F = \frac{\Delta Q_M}{\Delta t} \quad (48)$$

Descrita na forma integral, como:

$$- \int \rho \vec{V} (\vec{V}_R \cdot \vec{dA}) + \sum F = \frac{d}{dt} \int (\rho \vec{V}) d_{vl} \quad (49)$$

Novamente, utilizando o teorema da divergência e considerando um volume de controle fixo no tempo e infinitesimal, a forma diferencial é dada por:

$$\frac{\sum \vec{F}}{dV} = \rho \left[\frac{d\vec{V}}{dt} + (\vec{V}_R \cdot \nabla) \vec{V} \right] \quad (50)$$

Como a conservação da massa na equação (A.14) é nula, obtém-se:

$$\frac{\sum \vec{F}}{dV} = \rho \frac{D\vec{V}}{Dt} \quad (51)$$

A equação (A.15) possui três componentes nas direções coordenadas x, y e z, a partir dos quais tem-se as equações a seguir:

$$\frac{\sum \vec{F}_x}{dV} = \rho \left[\frac{du}{dt} + (u_R \frac{du}{dx} + v_R \frac{du}{dy} + (w_R \frac{du}{dz}) \right] \quad (52)$$

$$\frac{\sum \vec{F}_y}{dV} = \rho \left[\frac{dv}{dt} + (u_R \frac{dv}{dx} + v_R \frac{dv}{dy} + (w_R \frac{dv}{dz}) \right] \quad (53)$$

$$\frac{\sum \vec{F}_z}{dV} = \rho \left[\frac{dw}{dt} + (u_R \frac{dw}{dx} + v_R \frac{dw}{dy} + (w_R \frac{dw}{dz}) \right] \quad (54)$$

Através do balanço de força para as três direções coordenadas anteriores, obtém-se a equação do movimento para x, y e z, onde o somatório das forças é determinado por meio do tensor de tensões em cada direção:

$$\frac{d}{dt}(\rho\mu) + \frac{d}{dx}(\rho\mu_R \cdot \mu) + \frac{d}{dy}(\rho\mu_R \cdot \mu) + \frac{d}{dz}(\rho w_R \cdot \mu) = \frac{d}{dx}(\tau_{xx}) + \frac{d}{dy}(\tau_{yx}) + \frac{d}{dz}(\tau_{zx}) + B_x \quad (55)$$

$$\frac{d}{dt}(\rho v) + \frac{d}{dx}(\rho\mu_R \cdot v) + \frac{d}{dy}(\rho u_R \cdot v) + \frac{d}{dz}(\rho w_R \cdot v) = \frac{d}{dx}(\tau_{xy}) + \frac{d}{dy}(\tau_{yy}) + \frac{d}{dz}(\tau_{zy}) + B_y \quad (56)$$

$$\frac{d}{dt}(\rho w) + \frac{d}{dx}(\rho\mu_R \cdot w) + \frac{d}{dy}(\rho u_R \cdot w) + \frac{d}{dz}(\rho w_R \cdot w) = \frac{d}{dx}(\tau_{xz}) = \frac{d}{dx}(\tau_{xz}) + \frac{d}{dy}(\tau_{yz}) + \frac{d}{dz}(\tau_{zz}) + B_z \quad (57)$$

As especificações do tensor tensão criam equações especializadas para cada fluido ou classe de fluido. Para os fluidos newtonianos o tensor tensão é dado por:

$$\tau_{ij} = -P\delta_{ij} + \mu \left(\frac{du_i}{dx_j} + \frac{du_j}{dx_i} \right) + \delta_{ij} \lambda \text{div} V \quad (58)$$

A.1.4 Conservação de Energia (Primeira Lei da Termodinâmica)

Através da Figura 17, analisa-se os instantes de tempo t e $t + \Delta t$. E tem-se as duas equações a seguir:

$$(E_3)_t + (E_1)_t \quad (59)$$

$$(E_1)_{t+\Delta t} + (E_2)_{t+\Delta t} \quad (60)$$

A diferença entre elas representa a variação de energia, como mostra a Equação 61:

$$(E_1)_{t+\Delta t} + (E_2)_{t+\Delta t} - (E_3)_t + (E_1)_t = \Delta E \quad (61)$$

A partir da definição da Primeira Lei da Termodinâmica, a variação de energia em um sistema é a diferença entre o calor que entra e o trabalho que sai (MALISKA, 2004). Logo:

$$\Delta E = Q_{entra} - W_{sai} \quad (62)$$

$$(E_1)_{t+\Delta t} + (E_2)_{t+\Delta t} - (E_3)_t + (E_1)_t = Q_{entra} - W_{sai} \quad (63)$$

Dividindo a equação anterior por Δt :

$$\frac{(E_1)_{t+\Delta t} - (E_1)_t}{\Delta t} + \frac{(E_2)_{t+\Delta t}}{\Delta t} - \frac{(E_3)_t}{\Delta t} = Q_{entra} - W_{sai} \quad (64)$$

Assim obtém-se:

$$E_{entra} - E_{sai} + Q_{entra} - W_{sai} = \frac{\Delta E}{\Delta t} \quad (65)$$

Para encontrar as incógnitas Q e W é necessário transformar a Equação 65 em variáveis do escoamento, como segue:

$$E_{entra} - E_{sai} = - \int_A e(\rho \vec{V}_R \cdot \vec{dA}) \quad (66)$$

$$\frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{d}{dt} \int_V \rho e dV \quad (67)$$

Logo,

$$Q_{entra} - W_{sai} = - \int_A e(\rho \vec{V}_R \cdot \vec{dA}) + \frac{d}{dt} \int_V \rho e dV \quad (68)$$

onde $e = E/m$

A.2 Condução unidimensional transiente

Considerando a equação da condução unidimensional transiente com termo fonte a baixo apresentada:

$$\frac{d}{dt}(\rho T) = \frac{d}{dx} \left(\frac{k}{c_p} \frac{dT}{dx} \right) + S \quad (69)$$

Faz-se necessário utilizar a integração da equação diferencial no volume de controle, ou seja, utilizar o método dos volumes finitos. Este procedimento é preferido porque facilita a generalização do cálculo dos coeficientes quando todos os volumes tiverem as mesmas características. Além disso, a conservação é garantida para todo o domínio.

A integração no tempo e espaço, é definida como:

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_w^e \frac{d}{dt}(\rho T) dx dt = \int_t^{t+\Delta t} \int_w^e \frac{d}{dx} \left(\frac{k}{cp} \frac{dT}{dx} \right) dx dt + \int_t^{t+\Delta t} \int_w^e S dx dt \quad (70)$$

que resulta em

$$\int_w^e (\rho T - \rho^\circ T^\circ) dx = \int_t^{t+\Delta t} \left(\frac{k}{cp} \frac{dT}{dx} \Big|_e - \frac{k}{cp} \frac{dT}{dx} \Big|_w \right) dt + \int_t^{t+\Delta t} (S_p T_p + S_c) \Delta x dt \quad (71)$$

Após a integração demonstrada a cima, e considerando que o termo θ sobrescrito simboliza a escolha de avaliar o fluxo no início, ou no fim do intervalo de tempo; se o fluxo for avaliado em uma posição entre os limites do intervalo, é preciso especificar uma função que dá a variação de temperatura dentro do intervalo e esta é chamada de função de interpolação no tempo, expressa da seguinte forma:

$$M_p T_p - M_p^\circ T_p^\circ = \left[\frac{k}{cp} \frac{dT}{dx} \Big|_e^\theta - \frac{k}{cp} \frac{dT}{dx} \Big|_w^\theta \right] \Delta t + (S_p T_p^\theta + S_c) \Delta x \Delta t \quad (72)$$

Assim, retirando as derivadas a fim de compor um sistema linear, tem-se a Equação Geral:

$$\frac{M_p T_p}{\Delta t} = \frac{k}{cp} \Big|_e \frac{TE^\theta}{\Delta x_e} + \frac{k}{cp} \Big|_w \frac{TW^\theta}{\Delta x_w} + \left[-\frac{k}{cp \Delta x} \Big|_e \right] - \left[\frac{k}{cp \Delta x} \Big|_w \right] T_p^\theta + S_p T_p^\theta + \frac{M_p^\circ T_p^\circ}{\Delta t} + S_c \Delta x \quad (73)$$

Onde:

$$\frac{dT}{dx} \Big|_e^\theta = \frac{(TE^\theta - TP^\theta)}{\Delta x_e} \quad (74)$$

e

$$\frac{dT}{dx} \Big|_w^\theta = \frac{(TP^\theta - TW^\theta)}{\Delta x_w} \quad (75)$$

A.3 Refinamento de malha

A.3.1 Funções de refinamento unidimensional

As funções de refinamento unidimensional são amplamente utilizadas para distribuir pontos ao longo de um domínio, a fim de ajustar a distribuição desses pontos em uma malha numérica e, assim, melhorar a resolução em regiões específicas (FLETCHER,

1991).

É recomendado que sejam definidas variáveis dependentes e independentes. Nesse sentido, é possível expressar uma função de refinamento unidimensional aplicada a uma variável independente por meio da equação (2.35).

$$\eta^* = \frac{\eta - \eta_A}{\eta_E - \eta_A} \quad (76)$$

so η corresponde a posição do ponto em questão e deve respeitar os seguintes parâmetros:

$$0 \leq \eta^* \leq 1 \quad (77)$$

e

$$\eta_A \leq \eta \leq \eta_E \quad (78)$$

De acordo com Roberts (1971) e modificada por Eiseman(1979), tem-se a equação 2.38, onde P e Q são parâmetros de controle dos pontos da malha.

$$s = P\eta^* + (1 - P)\left(1 - \frac{\tanh[Q(1 - \eta^*)]}{\tanh Q}\right) \quad (79)$$

As equações 2.39 e 2.40 utilizam "s" para especificar a distribuição de "x" e "y".

$$\frac{x - x_A}{x_A - x_E} = f(s) \quad (80)$$

$$\frac{y - y_A}{y_A - y_E} = g(s) \quad (81)$$

Uma vez que $f(s)=g(s)=s$, simplifica-se as equações a cima como:

$$x = x_A + s(x_A - x_E) \quad (82)$$

$$y = y_A + s(y_A - y_E) \quad (83)$$

De acordo com os valores de P e Q, os pontos são distribuídos pela malha. Para valores de P maiores que 1, os pontos ficam agrupados à esquerda, ou seja, há maior refinamento. Entretanto, o refinamento pode ser tratado de maneira melhor rearranjando as equações já vistas como:

$$\eta^* = \frac{\eta - \eta_E}{\eta_A - \eta_E} \quad (84)$$

em (2.35)

$$f(s) = g(s) = 1 - s \quad (85)$$

A.4 A Equação de movimento de Poiseuille

A partir das equações de Navier-Stokes deduz-se a Equação de Poiseuille, apresentada na Revisão Bibliográfica e exposta a baixo, com sua solução analítica detalhada:

$$\frac{d^2u}{dy^2} = \frac{1}{\mu} \frac{dP}{dx} \quad (86)$$

com as condições de contorno $u = 0$ em $y = h$, onde μ é a viscosidade do fluido.

Para encontrar a solução analítica da Equação de Poiseuille, realiza-se a primeira integração a fim de isolar o termo u :

$$\int \frac{d^2u}{dy^2} = \frac{1}{\mu} \frac{dP}{dx} \quad (87)$$

$$\frac{du}{dy} = \frac{1}{\mu} \frac{dP}{dx} y + C \quad (88)$$

Com a condição de contorno quando $y=0$, é possível obter a constante C :

$$\left. \frac{du}{dy} \right|_{y=0} = \frac{\alpha}{\sqrt{k}} (u_B - Q) \quad (89)$$

$$\frac{\alpha}{\sqrt{k}} (u_B - Q) = C \quad (90)$$

Onde α é uma quantidade adimensional que depende dos parâmetros do material permeável; k representa a permeabilidade do material; u_B a velocidade em $y = 0$ (região da interface) e Q a velocidade no material poroso.

O termo $\frac{\alpha}{\sqrt{k}}$ tem origem no comprimento da interface, chamado de $L = \frac{\sqrt{k}}{\alpha}$, onde é apresentado como o inverso, sendo $\beta = \frac{\alpha}{\sqrt{k}}$. Sendo assim, o comprimento é dependente apenas das propriedades do fluido e do material poroso.

Com a substituição da constante C na equação, tem-se:

$$\frac{du}{dy} = \frac{1}{\mu} \frac{dP}{dx} y + C \quad (91)$$

$$\frac{du}{dy} = \frac{1}{\mu} \frac{dP}{dx} y + \frac{\alpha}{\sqrt{k}} (u_B - Q) \quad (92)$$

Em seguida, realiza-se a integração pela segunda vez, obtendo-se:

$$\int \frac{du}{dy} = \int \frac{1}{\mu} \frac{dP}{dx} y + \frac{\alpha}{\sqrt{k}} (u_B - Q) \quad (93)$$

$$u = \frac{1}{\mu} \frac{dP}{dx} \frac{y^2}{2} + \frac{\alpha}{\sqrt{k}} (u_B - Q) y + C' \quad (94)$$

A partir da condição de contorno quando $\frac{du}{dy} = 0$, ou seja, na região da matriz porosa, onde a velocidade é constante em y :

$$0 = \frac{\alpha}{\sqrt{k}}(u_B - Q) \quad (95)$$

Pode-se escrever:

$$Q = \frac{\alpha}{\sqrt{k}}u_B \quad (96)$$

Após, foi realizada a substituição $Q = u$ na Equação (A.51):

$$Q = \frac{1}{\mu} \frac{dP}{dx} \frac{y^2}{2} + \frac{\alpha}{\sqrt{k}}(u_B - Q)y + C' \quad (97)$$

$$\frac{\alpha}{\sqrt{k}}u_B = \frac{1}{\mu} \frac{d}{dx} \left(\frac{\sqrt{k}}{\alpha} \right)^2 + \frac{\alpha}{\sqrt{k}}(u_B - Q) \frac{\sqrt{k}}{\alpha} + C' \quad (98)$$

$$C' = \frac{\alpha}{\sqrt{k}}u_B - \frac{1}{\mu} \frac{du}{dP} \frac{k}{\alpha^2} - u_B + Q \quad (99)$$

Portanto

$$u = \frac{1}{\mu} \frac{dP}{dx} \frac{y^2}{2} + \frac{\alpha}{\sqrt{k}}(u_B - \frac{\alpha}{\sqrt{k}}u_B)y + \frac{\alpha}{\sqrt{k}}u_B - \frac{1}{\mu} \frac{du}{dP} \frac{k}{\alpha^2} - u_B + Q \quad (100)$$