UNIVERSIDADE FEDERAL DO PAMPA

PATRICIA MAIESKI LEAL FRESINGHELI

ESTUDO DE SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO COM MODELAGEM MATEMÁTICA

Itaqui
2024

PATRICIA MAIESKI LEAL FRESINGHELI

ESTUDO DE SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO COM MODELAGEM MATEMÁTICA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Matemática - Licenciatura da Universidade Federal do Pampa, como requisito parcial para obtenção do Título de Licenciada em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Radael de Souza Parolin

Itaqui
2024

Ficha catalográfica elaborada automaticamente com os dados fornecidos
pelo(a) autor(a) através do Módulo de Biblioteca do
Sistema GURI (Gestão Unificada de Recursos Institucionais) .

F885e Fresingheli, Patricia Maieski Leal
Estudo de sólidos de revolução com modelagem matemática / Patricia Maieski Leal Fresingheli.
50 p.

Trabalho de Conclusão de Curso(Graduação)-- Universidade Federal do Pampa, MATEMÁTICA, 2024.
"Orientação: Radael de Souza Parolin".

1. Sólidos de Revolução. 2. Modelagem Matemática. 3. Objeto de Aprendizagem. I. Título.

PATRICIA MAIESKI LEAL FRESINGHELI

ESTUDO DE SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO COM MODELAGEM MATEMÁTICA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Matemática - Licenciatura da Universidade Federal do Pampa, como requisito parcial para obtenção do Título de Licenciada em Matemática.

Trabalho de Conclusão de Curso defendido e aprovado em: 10 de julho de 2024.

Banca examinadora:

Documento assinado digitalmente
RADAEL DE SOUZA PAROLIN
Data: 15/08/2024 16:31:43-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Radael de Souza Parolin
Orientador
UNIPAMPA

Documento assinado digitalmente
ALEX SANDRO GOMES LEAO
Data: 15/08/2024 16:34:57-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Alex Sandro Gomes Leão
UNIPAMPA

Documento assinado digitalmente
WILLIAN DAMIN
Data: 16/08/2024 08:52:51-0300
Verifique em https://validar.iti.gov.br

Prof. Dr. Willian Damin
UNIPAMPA

RESUMO

O trabalho propõe uma sequência de atividades com Modelagem Matemática, com o objetivo de abordar o conteúdo de Sólidos de Revolução para que os alunos consigam perceber que os sólidos estão relacionados ao seu cotidiano, a partir de uma tarefa que é trazer os objetos para a sala de aula e fazer comparações com os sólidos já conhecidos, utilizando-se do Objeto de Aprendizagem que foi elaborado para ajudar na visualização e na verificação de resultados. As aulas foram formuladas para que os estudos ocorram de uma maneira mais participativa em todas as etapas, desde a escolha do objeto até a validação dos resultados, considerando as etapas da modelagem matemática de Almeida (2011).

Palavras-Chave: Sólidos de Revolução; Modelagem Matemática; Objeto de Aprendizagem.

ABSTRACT

The work proposes a sequence of activities with Mathematical Modeling, with the aim of approaching the topic of Solids of Revolution so that students can realize that solids are related to their daily lives, based on a task that is to bring the objects to the classroom and make comparisons with already known solids, using the Learning Object that was designed to help visualize and verify results. The classes were planned so that studies take place in a more participatory manner at all stages, from choosing the object to validating the results, considering the stages of mathematical modeling by Almeida (2011).

Keywords: Solids of Revolution; Mathematical Modeling; Learning Object.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Ao analisarmos o ensino de Matemática em diferentes contextos educacionais, observamos que muitos alunos enfrentam dificuldades em aprender os conteúdos, seja em sistemas de ensino tradicionais, com ênfase em métodos expositivos, ou em abordagens contemporâneas, que incluem métodos ativos de aprendizagem.

Para os professores que ministram esse componente se torna um grande desafio, pois precisam motivar seus alunos a estudar e aprender e, principalmente, necessitam dominar os conhecimentos matemáticos a serem ensinados, as metodologias e os recursos didáticos a serem utilizados no ensino. Porém, para os professores realizarem um bom uso das metodologias e recursos, é necessário que estes tenham "(...) uma boa preparação, no intuito de usá-los com segurança e de forma crítica (...)" (OLIVEIRA, 2013, p. 34).

Nesse contexto, o ensino da Geometria para Fainguelernt (1995, p. 46) "(...) não deve ser reduzido à mera aplicação de fórmulas e de resultados estabelecidos por alguns teoremas, sem a preocupação da descoberta de caminhos para sua demonstração, como também para dedução de suas fórmulas (...)" e para que isso aconteça, o professor precisa dispor de metodologias diferenciadas, que contribuam na interação com os alunos.

Para trabalhar os sólidos de revolução, objetos de interesse dessa pesquisa, os conteúdos podem ser desenvolvidos utilizando a modelagem matemática, por permitir contextualizá-lo por meio de temas transversais e/ou na própria Matemática. Para Biembengut; Hein (2011, p. 29), "(...) na modelação, o professor pode optar por escolher determinados modelos, fazendo a sua recriação em sala de aula, juntamente com os alunos, de acordo com o nível em questão, além de obedecer ao currículo inicialmente proposto (...)", sendo necessário que este desenvolva um bom planejamento das aulas, tornando-as dinâmicas e produtivas, proporcionando aos alunos participarem e entenderem o que está sendo ensinado.

Como o ensino da geometria por vezes é deixado em segundo plano ou abordado de forma superficial, seja pela falta de tempo ou por opção do professor em outro conteúdo de mais afinidade, esse cenário tornou-se uma motivação para essa pesquisa, pois acredito que é relevante o desenvolvimento do pensamento geométrico. Ainda, experienciando uma aula no componente de Laboratório de

Ensino de Matemática, onde o professor trouxe uma atividade com massinhas de modelar e pediu para formar sólidos geométricos, consegui visualizar e analisar o sólido com mais facilidade, o que me direcionou à desenvolver uma sequência de ensino com a Modelagem Matemática e o uso de Objetos de Aprendizagem para uma aula dinâmica e produtiva.

Tema:

Sólidos de Revolução a partir da Modelagem Matemática.

Problema:

Como o uso de recursos computacionais e objetos de aprendizagem pode melhorar a visualização e compreensão dos Sólidos de Revolução por meio da Modelagem Matemática?

Objetivo Geral:

Analisar como o ensino dos Sólidos de Revolução pode ser explorado por meio da Modelagem Matemática aliada a recursos computacionais e objetos de aprendizagem em contribuição ao pensamento geométrico dos alunos.

Objetivos Específicos:

- Retomar e ampliar os conhecimentos sobre Sólidos de Revolução;
- Usar recursos computacionais para auxiliar a visualização e compreensão dos Sólidos de Revolução;
- Elaborar atividades que mobilizem a compreensão de Sólidos de Revolução por meio da Modelagem Matemática;
- Criar objetos de aprendizagem que favoreçam a visualização e compreensão dos Sólidos de Revolução.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1 Ensino de Sólidos de Revolução

Pesquisas do ensino de geometria observam que a geometria está sendo pouco abordada no ensino médio (Barbosa (2011), Pavanello (1993), Nadalon e Leivas(2019)). Segundo Kaleffe, Sá e Toledo (2002) os alunos precisam que o professor possua uma metodologia adequada, que possibilite ao aluno o desenvolvimento do pensamento geométrico, permitindo assim que o aluno consiga analisar no seu cotidiano as formas geométricas, com uma aprendizagem mais dinâmica e centrada em sua realidade.

Kaleffe, Sá e Toledo (2002) elaboraram atividades didáticas com materiais manipuláveis, que possibilitaram aos estudantes a oportunidade de observar e analisar as características das figuras geométricas. Ainda, com o objetivo de facilitar a imaginação de sólidos de revolução no cotidiano dos alunos, foi criado o Gerador Manual de Sólidos de Revolução. Este possui um conjunto de bandeiras, com diferentes figuras planas, que ao rotacionar proporciona ao aluno a visualização do sólido de revolução correspondente.

Hoje existem vários *softwares* que possibilitam a visualização tridimensional de sólidos, mas para Kaleffe, Sá e Toledo (2002) o material concreto possibilita o manuseio do sólido de revolução de forma real, que comparado às construções nos *softwares* podem facilitar a compreensão do aluno. Por fim, com o uso do Gerador Manual de sólidos de revolução, as autoras concluíram que existem possibilidades de abordar sólidos de revolução de forma mais dinâmica e com um entendimento mais significativo, abordado de forma mais dinâmica e criativa, Silva e Victer (2017) apresentam materiais didáticos de geometria com Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC).

Por vezes o conteúdo de geometria não é trabalhado ou apresentado aos alunos de forma superficial. Nesse contexto, para essas autoras, um estímulo para desenvolver a geometria espacial de forma mais lúdica é proporcionar ao aluno uma ferramenta que possa manipular e visualizar tanto a geometria plana quanto espacial, além de interagir com o recurso tecnológico que possibilita movimentar as figuras para analisar especificidades nas formas geométricas.

Silva e Victer (2017) utilizam o Geogebra 3D como TIC (International GeoGebra Institute, 2023), pois é uma ferramenta que possibilita a autonomia do aluno na criação de seu sólido geométrico e auxilia na visualização de várias formas geométricas.

É pertinente destacar que o ensino de sólidos de revolução, assim como os demais conteúdos de Geometria, está sendo desenvolvido de maneira insuficiente (SILVA e VICTER, 2017). Silva e Victer (2017) criaram um livreto pensando tanto nos alunos quanto nos professores, pois o professor tem que estar preparado para poder utilizar as TIC de maneira produtiva em suas aulas, tendo em vista os questionamentos dos alunos sobre a tecnologia, que devem ser esclarecidos para um aprendizado significativo.

O livreto possui o passo a passo de como construir os sólidos e poder manipulá-los para ter uma visualização em 3D. No primeiro momento aborda a utilidade de cada botão da barra de ferramentas 3D, mas logo trata sobre a criação de sólidos geométricos e enfatiza que o Geogebra 3D é uma excelente ferramenta para a construção de sólidos de revolução, justificando que o aluno consegue observar o sólido em movimento e possibilita pesquisar os conhecimentos geométricos tridimensionais.

Esse material pode auxiliar o professor que quer preparar a aula de forma mais atrativa, possibilitando ainda maior autonomia do aluno na construção de seus sólidos, com vistas a uma aprendizagem mais significativa.

Cabe destacar que não basta apenas ter o recurso tecnológico e sim saber como usá-lo de maneira efetiva, pois existem professores que não possuem o domínio da tecnologia, mantendo-se com aulas tradicionais e pouco atrativas para o ensino de geometria espacial (PEREIRA *et al*., 2017).

Pereira *et al*. (2017) fizeram um questionário e foi verificado que os estudantes tinham acesso a computadores com conhecimento necessário para usá-los, mas sem o conhecimento específico sobre o *software* Geogebra. Assim foi realizado um mini-curso introdutório, com aula prática no ambiente de matemática dinâmica do *software* e uma aula teórica. Nessa aula prática foram apresentadas figuras do cotidiano e perguntado aos estudantes quais das figuras são sólidos de revolução, sendo os mesmos estimulados a definir com suas próprias palavras o que é um sólido de revolução. Logo após, foram construídas as figuras geométricas no Geogebra, mostrando algumas animações para estimular o interesse pela atividade.

Conforme levantamentos dos autores, foi concluído que o *software* de matemática dinâmica Geogebra é uma ferramenta auxiliadora e eficiente no ensino dos sólidos de revolução.

Nadalon e Leivas (2019) analisaram provas do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) aplicadas no período de 2009 a 2015, pesquisaram sobre como os conhecimentos matemáticos são exigidos nessas provas e quais conteúdos são mais cobrados. O conteúdo de geometria ganhou destaque, e como é pouco abordado, os autores acreditam que a inserção do uso do software Geogebra pelos professores, para desenvolver o conteúdo de superfícies e sólidos de revolução, tornará o aprendizado mais produtivo.

Os programas dinâmicos de representação, como o Geogebra, auxiliam no sentido da visualização, permitindo que os alunos consigam visualizar os sólidos para analisar suas características e comparar com formas do seu cotidiano.

Para isso, Nadalon e Leivas (2019) criaram uma oficina intitulada Superfícies e Sólidos de Revolução no Geogebra, com o objetivo de explorar os recursos desse *software* no ensino médio. Destaca-se que foi utilizado, dentre outros, o recurso de rotação do Geogebra, que possibilita uma visão tridimensional.

O público-alvo da oficina foram 9 participantes pertencentes ao Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (Pibid), alunos graduandos do curso de Licenciatura em Matemática. Foram desenvolvidas questões adaptadas do ENEM utilizando o Geogebra em atividades dinâmicas.

Nas atividades foi constatado que o uso do Geogebra é um mecanismo viável e adequado para o ensino de geometria, e como um facilitador para a obtenção e visualização de superfícies e Sólidos de Revolução.

Não encontramos pesquisas que abordam sólidos de revolução a partir da Modelagem Matemática. Realizou-se a busca no Portal de Periódicos da CAPES e no Google Acadêmico, com os termos a) Modelagem; Sólidos; Revolução; b) Modelagem; Sólidos; c) Sólidos; Revolução.

2.2 Modelagem Matemática como Metodologia de Ensino

A Modelagem Matemática está sendo empregada como metodologia para desenvolver vários conteúdos de matemática. Segundo Meyer, Caldeira e Malheiros (2011), a modelagem não trabalha com exercícios elaborados, os quais possamos retirar de algum livro, mas sim com problemas relacionados à realidade. Na modelagem o professor não vai levar os exercícios prontos para o aluno fazer, mas vai estimular o estudante a refletir sobre a situação e conseguir resolver o problema.

Os alunos podem desenvolver seu raciocínio e deduzir suas próprias conclusões sobre a atividade proposta com a ajuda da modelagem matemática, e o professor como mediador deve instruir o aluno a pensar e querer resolver as situações problemas, de forma a ter mais autonomia e confiança para chegar ao resultado possível.

Meyer, Caldeira e Malheiros (2011) fazem o seguinte questionamento com uma resposta na sequência: Como comparar o mundo real com o universo da Matemática? Uma das maneiras é por meio da Modelagem. Os autores desenvolvem o processo de Modelagem em cinco momentos:

- Determinar a situação;
- Simplificar as hipóteses dessa situação;
- Resolver o problema matemático decorrente;
- Validar as soluções matemáticas de acordo com a questão real;
- Definir a tomada de decisão com base nos resultados.

Almeida, Silva e Vertuan (2012) afirmam que a modelagem matemática sugere resultados para problemas fazendo o uso de modelos matemáticos, e nesse caso o modelo matemático é o que “dá forma” à solução do problema e a modelagem matemática é a “atividade” de busca por solução.

Para os autores a atividade de modelagem matemática abrange 4 fases para estruturação e resolução de problemas, sendo elas:

- Inteiração: essa etapa representa o primeiro contato com a situação problema que vai ser estudada, com o objetivo de entender suas particularidades e características distintas. Ainda que seja uma etapa inicial, ela pode se estender no decorrer do andamento da atividade da modelagem.

- Matematização: linguagem matemática que evidencia o problema matemático a ser resolvido. Acontece pelo processo de transição da visualização e de uso de símbolos para a realização de descrições matemáticas a partir de formulação de hipóteses, escolha de variáveis e simplificações em relação às informações e ao problema proposto na fase da inteiração.

- Resolução: corresponde à construção de um modelo matemático com a finalidade de descrever a situação, permitir a análise dos aspectos relevantes da situação, responder perguntas formuladas sobre o problema a ser investigado na situação, podendo viabilizar a realização de previsões para o problema de estudo.

- Interpretação de resultados e Validação: a interpretação de resultados indicados pelo modelo implica a análise de uma resposta para o problema. A análise da resposta constitui um processo avaliativo realizado pelos envolvidos na atividade e implica uma validação da representação matemática associada ao problema. Essa fase visa, para além da capacidade de construir e aplicar modelos, ao desenvolvimento, nos alunos, da capacidade de avaliar esse processo de construção de modelos e os diferentes contextos de sua aplicação.

Para Biembengut e Hein (2011) a modelagem matemática é o processo que envolve a criação de um modelo, que está não somente no conhecimento matemático, mas sim na percepção e na sua imaginação, para interpretar o que se pede. Sendo assim, os autores agrupam esse processo em 3 etapas, subdivididas em seis sub etapas, a saber:

- Interação:
    - Reconhecimento da situação-problema;
    - Familiarização com o assunto a ser modelado - referencial teórico.
- Matematização:
    - Formulação do problema - hipótese;
    - Resolução do problema em termos do modelo.
- Modelo Matemático:
    - Interpretação da solução;
    - Validação do modelo - avaliação.

Bassanezi (2011) aborda a modelagem em 5 etapas, são elas:

1. Experimentação: é uma atividade laboratorial essencial onde se processa a obtenção de dados. O processo experimental, com frequência, é ditado pela própria natureza do experimento e objetivos da pesquisa;

2. Abstração: é o que leva à formulação dos modelos matemáticos. Nessa fase procura-se analisar as variáveis para ficarem bem definidas, e o modelo matemático depende do grau de complexidade das hipóteses e da quantidade de variáveis;

3. Resolução: o modelo matemático é obtido quando se substitui a linguagem natural das hipóteses por uma linguagem matemática coerente. A resolução de um modelo está relacionado ao grau de complexidade empregado em sua formulação, e por vezes pode precisar de auxílio computacional, fornecendo uma solução aproximada;

4. Validação: é o processo da aceitação ou não do modelo proposto. O modelo deve ser testado em comparação com os dados empíricos para analisar as particularidades, se é suficiente para a situação analisada ou precisa de algum ajuste;

5. Modificação: alguns fatores ligados ao problema original podem provocar a rejeição ou aceitação parcial dos modelos, exigindo uma modificação na busca de adequação ou melhorias.

O processo de modelagem está presente no nosso cotidiano, pois assemelha-se a qualquer situação que envolva um problema e que precise de imaginação e conhecimento sobre o tema para poder resolvê-lo.

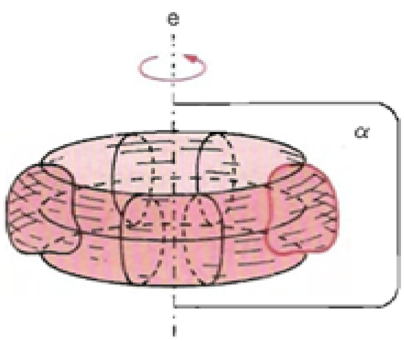
A modelagem matemática pode ser uma das maneiras para levar os alunos a ter curiosidade por conteúdos matemáticos que ainda não estudou e aprender a modelar situações-problema matematicamente.

2.3 Matemática dos Sólidos de Revolução

Sólidos de Revolução

Definição: Consideremos um semiplano de origem *e* (eixo) e nele uma superfície *S*; girando o semiplano em torno de *e*, a superfície *S* gera um sólido chamado sólido de revolução.

Figura 1: Sólido de revolução

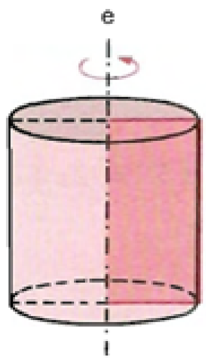


Fonte: Dolce e Pompeo (1995).

Cilindro

O cilindro circular reto é chamado de cilindro de revolução, pois é gerado pela rotação de um retângulo.

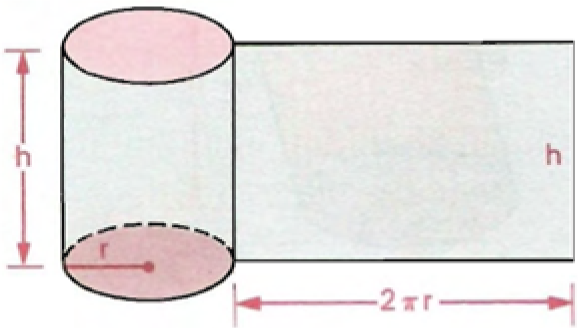
Figura 2: Cilindro de revolução



Fonte: Dolce e Pompeo (1995).

A superfície lateral do cilindro de revolução é equivalente a um retângulo de dimensões $2\pi r$ (comprimento da circunferência da base) e h (altura do cilindro), onde r é o raio da base.

Figura 3: Área do cilindro



Fonte: Dolce e Pompeo (1995).

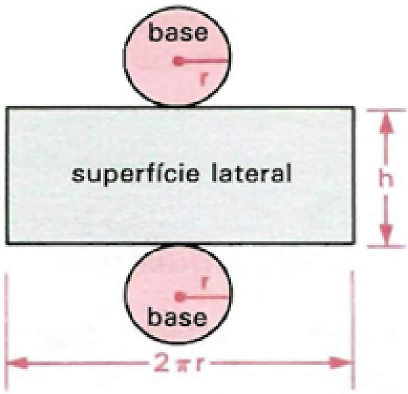
Portanto a área lateral de um cilindro é

$$A_l = 2\pi r h$$

A área total do cilindro é

$$A_t = 2\pi r\,(h + r)$$

Figura 4: Área total do cilindro



Fonte: Dolce e Pompeo (1995).

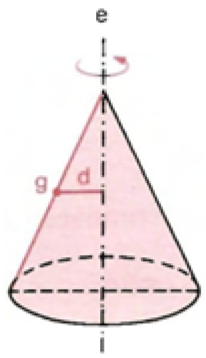
O volume do cilindro é o produto da área da base pela medida da altura,

$$V = \pi r^2 h$$

Cone

O cone circular reto é chamado de cone de revolução, pois é gerado pela rotação de um triângulo.

Figura 5: Cone de revolução



Fonte: Dolce e Pompeo (1995).

A área lateral do cone pode ser calculada por

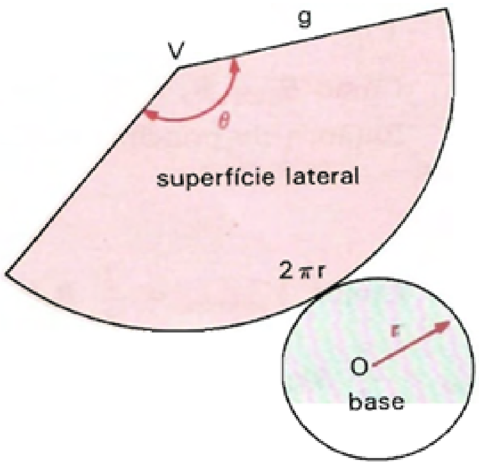
$$A_l = \pi r g$$

onde *g* é a geratriz e *r* é o raio da base.

Área total do cone é dada por

$$A_t = \pi r (g + r)$$

Figura 6: Área total do cone



Fonte: Dolce e Pompeo (1995).

O volume do cone é um terço do produto da área da base pela medida da altura,

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

Tronco de cone

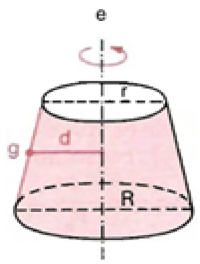
Área lateral de tronco de cone de revolução é

$$A_l = 2\pi l d$$

$$A_l = \pi(R + r)g$$

onde *l* é a geratriz e *d* é a distância do centro de gravidade da superfície ao eixo de rotação.

Figura 7: tronco de cone



Fonte: Dolce e Pompeo (1995).

O volume do tronco é dado por

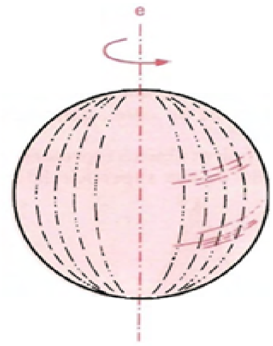
$$V = \frac{1}{3}\pi h(R^2 + r^2 + Rr)$$

onde R é o raio maior, r é o raio menor e h é a altura.

Esfera

A esfera é também o sólido de revolução gerado pela rotação de um semicírculo em torno de um eixo.

Figura 8: Esfera



Fonte: Dolce e Pompeo (1995).

A área da superfície da esfera de raio *r* é

$$A = 4\pi r^2$$

O volume da esfera é dado por

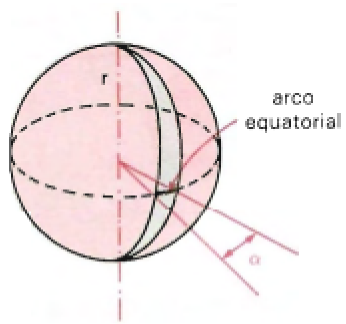
$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Fuso Esférico

É a interseção da superfície de uma esfera com um diedro (ou setor diedral) cuja aresta contém um diâmetro dessa superfície esférica.

O ângulo α, medida do diedro, medida na seção equatorial, é o que caracteriza o fuso.

Figura 9: Fuso Esférico



Fonte: Dolce e Pompeo (1995).

A área do fuso é dada por

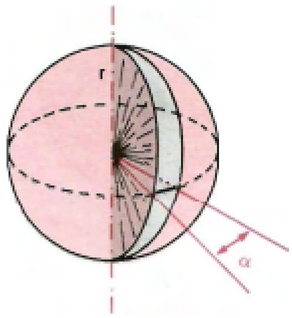
$$A = 2r^2\alpha$$

Cunha Esférica

É a interseção de uma esfera com diedro (ou setor diedral) cuja aresta contém o diâmetro da esfera.

A cunha é caracterizada pelo raio da esfera e pela medida do diedro.

Figura 10: Cunha Esférica



Fonte: Dolce e Pompeo (1995).

O volume da cunha esférica é dado por

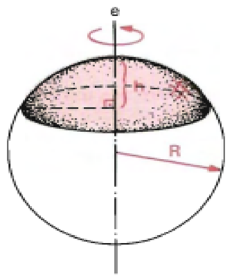
$$V = \frac{2r^3\alpha}{3}$$

Calota esférica

É a superfície de revolução cuja geratriz é um arco de circunferência e cujo eixo é uma reta tal que:

a) passa pelo centro da circunferência que contém o arco;
b) passa por um extremo do arco e não o intercepta em outro ponto;
c) é coplanar com o arco.

Figura 11:Calota esférica



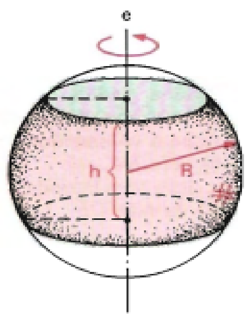
Fonte: Dolce e Pompeo (1995).

Zona Esférica

É a superfície de revolução cuja geratriz é um arco de circunferência e cujo eixo é uma reta tal que:

a) passa pelo centro da circunferência que contém o arco;
b) não passa por nenhum extremo do arco nem intercepta o arco em outro ponto:
c) é coplanar com o arco.

Figura 12: Zona esférica.



Fonte: Dolce e Pompeo (1995).

Área da calota e da área da zona esférica é dada por

$$A = 4\pi R^2$$

Volume de uma calota esférica é dado por

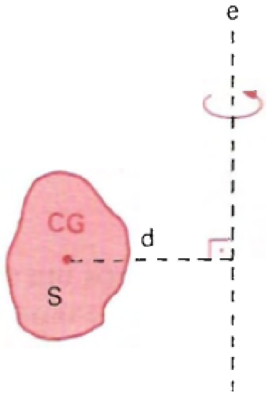
$$V = \frac{1}{3}\pi h^2 (3r - h)$$

Além das expressões dos volumes de sólidos conhecidos (cilindro, cone, tronco de cone, esfera, etc) o cálculo do volume de um sólido de revolução pode ser feito através da formulação

$$V = 2\pi Sd$$

em que V é o volume do sólido gerado, S é a área da superfície geradora e d é a distância do centro de gravidade da superfície ao eixo de rotação.

Figura 13: Centro de Gravidade

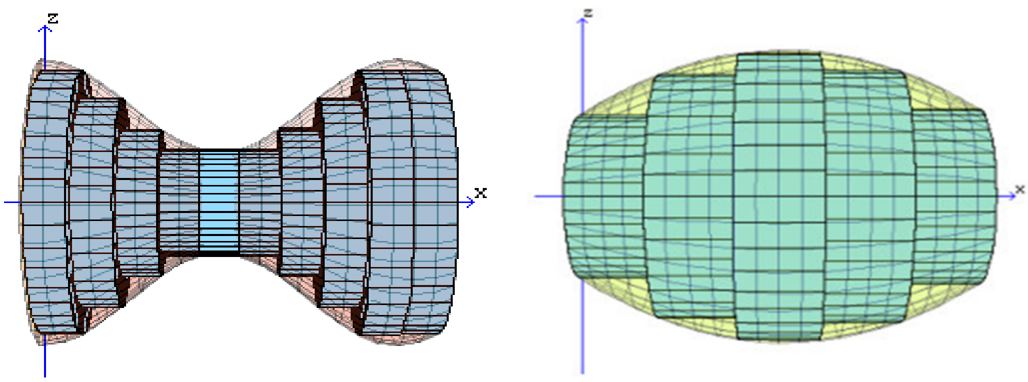


Fonte: Dolce e Pompeo (1995).

Aproximação de Volume por Cilindros (discos)

Pode-se calcular o volume de um sólido de revolução por aproximação de discos, fatiando o sólido. A ideia é fatiar o sólido particionando o intervalo [*a*, *b*] e obtendo algo como mostrado na figura seguinte.

Figura 14: Aproximação de volume por Cilindros (discos).



Fonte: MIPEDES (2019).

Assim, temos o volume de cada cilindro dado por

$$V_i = \pi \cdot f^2(x_i) \cdot \Delta x = \pi \cdot f^2(x_i) \cdot \Delta x$$

com a extremidade esquerda em um ponto *x*, o raio dele é a imagem desse ponto, logo o volume total a partir do *i*-ésimo disco será

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} V_i = \sum_{i=1}^{n} \pi \cdot f^2(x_i) \cdot \Delta x$$

em que Δx é a altura, f é o raio do cilindro.

Aproximação de Volume por Troncos de Cones

Pode-se calcular o volume de um sólido de revolução por aproximação de troncos de cones, fatiando o sólido, de forma a obter o volume

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} V_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{3}\pi \cdot \Delta x \cdot \left[f^2(x_i) f^2(x_{i+1}) + f(x_i) \cdot f(x_{i+1})\right]$$

em que Δx é a altura, $f(x_i)$ e $f(x_{i+1})$ são os raios maior e menor do tronco.

3 MODELAGEM MATEMÁTICA DOS SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO

O conteúdo de Sólidos de Revolução abordado no plano de aula usará como metodologia a modelagem matemática, para poder proporcionar uma aula mais dinâmica e produtiva, pois os alunos são estimulados a participar em todas as etapas.

O problema de Modelagem Matemática apresentado é: Como identificar e explorar figuras geométricas de revolução em objetos cotidianos?

A sequência de ensino proposta, segue as etapas metodológicas de Almeida (2011), com o intuito de abordar o conteúdo de Sólidos de Revolução:

- Estudo prévio ou revisão dos sólidos de revolução: Plano 1;
- Inteiração: Plano 1 e Plano 2. Ao final do Plano 1 (4º momento) a inteiração acontece com a pesquisa de sólidos de revolução presentes no cotidiano do aluno. Já no Plano 2 (1º momento), ao responder o questionário sugerido, os alunos estão se inteirando acerca do sólido pesquisado em relação aos já abordados anteriormente.
- Matematização: Plano 2, no processo de coleta dos dados (com o devido registro) (2º momento) e na apresentação do sólido (3º momento). Plano 3 (1º e 2º momentos) onde os alunos vão representar o objeto a partir de sólidos já conhecidos.
- Resolução: Plano 3 (3º momento), com o cálculo de diferentes grandezas nos sólidos. Plano 4 (2º momento), na reconstrução do objeto em programa computacional com representação virtual.
- Interpretação de Resultados e Validação: Plano 4 (2º momento), na comparação dos resultados obtidos a partir do Objeto de Aprendizagem. Plano 5, em apresentação e discussão de todo o processo com a turma.

PLANO DE AULA 1	
Instituição/Escola	
Professor(a) Regente:	
Disciplina: **Matemática**	
Ano: 2024	Turma:
Data:	Duração total da aula: 5 períodos

UNIDADE TEMÁTICA:

Geometria Espacial.

OBJETOS DE CONHECIMENTO (objetivos):

Estudo de Sólidos de Revolução e pesquisa de sólidos aplicados no cotidiano.

HABILIDADES:

(EM13MAT201) Propor ou participar de ações adequadas às demandas da região, preferencialmente para sua comunidade, envolvendo medições e cálculos de perímetro, de área, de volume, de capacidade ou de massa.

PRÉ-REQUISITOS:

Sólidos Geométricos.

Recursos didáticos:

Material concreto dos sólidos, bandeiras para rotação, formulário para coletar dados.

DESENVOLVIMENTO:

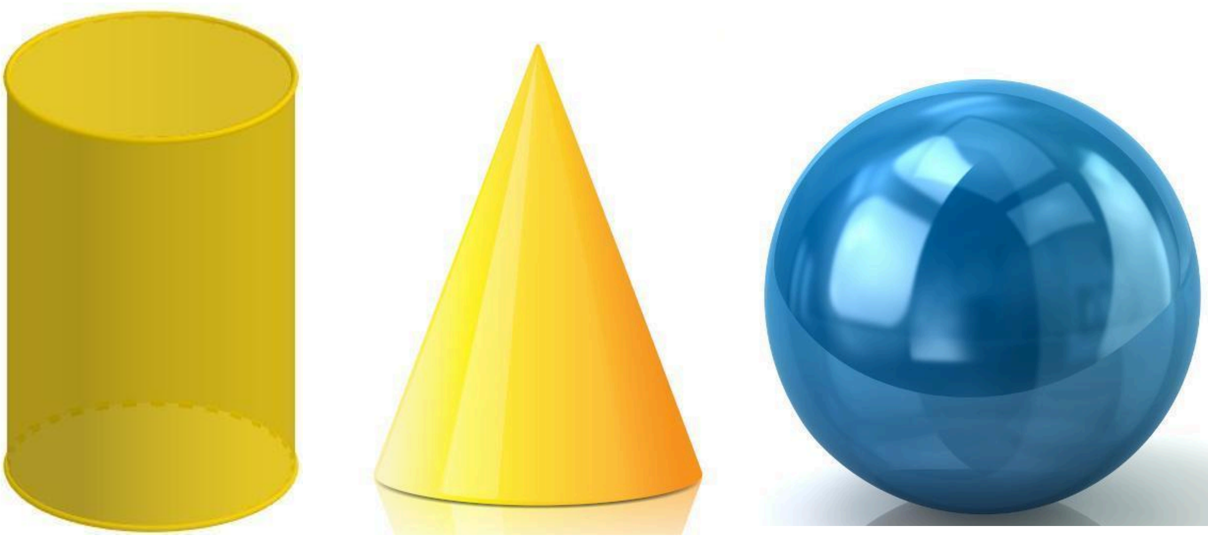
1º momento (1 período)

Separar a turma em grupos de 5 alunos, pedir para cada grupo analisar o sólido a eles entregue e responder o questionário.

Junto com o questionário será disponibilizado os sólidos de material concreto com as figuras geométricas para poderem manusear.

Os sólidos geométricos em material concreto estão representados na figura abaixo.

Figura 15: Sólidos geométricos



Fonte: Brasil Escola (2024)

Questionário

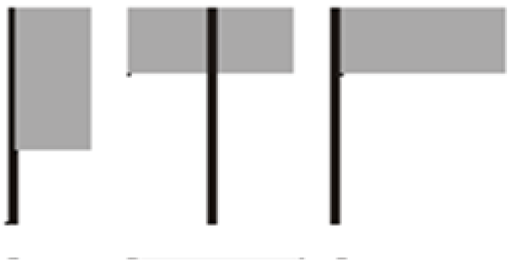
1) Qual é o sólido representado na figura abaixo?
2) Quais são as principais características desse sólido?
3) Como calcular seu volume?
4) Como calcular a área total?

2º momento (2 períodos)

Essa atividade foi adaptada de Kaleff, Sá e Toledo (2002)**,** que usa a caixa geradora de sólidos de revolução. Para essa atividade vamos usar as bandeiras fixadas no palito e os alunos vão friccionar, para fazer com que elas girem e formem o sólido de revolução.

a) será entregue 3 bandeiras com formato de retângulo, para que eles possam rotacionar e responder esse questionamento: discuta com seu grupo se as três bandeirinhas geram sólidos de revolução iguais, e se possuem as mesmas medidas.

Figura 16: Bandeiras com retângulos



Fonte: Kaleff, Sá e Toledo (2002).

O professor vai analisar as respostas e concluir com os alunos que os retângulos são figuras geométricas congruentes, mas de acordo com a posição fixada no palito vai obter 3 bandeiras distintas e que as figuras geradas por cada bandeira retangular é chamada de cilindro, e que nesse caso não possuem as mesmas dimensões.

b) será entregue 3 bandeiras com formato de triângulos, para que eles possam rotacionar e responder o seguinte questionamento: existe alguma característica comum aos triângulos que formam as bandeirinhas? E quanto à posição em que as figuras geométricas foram fixadas ao mastro?

Figura 17: Bandeiras com triângulos

Fonte: Kaleff, Sá e Toledo (2002).

Os alunos vão observar que os triângulos retângulos do conjunto de bandeiras são figuras geométricas congruentes, e conforme elas são fixadas no palito, criam-se 3 bandeiras distintas. As duas bandeiras que possuem a forma pontiaguda (ângulo agudo) geram figuras que são chamadas de cones. A outra bandeira, com o ângulo reto, forma uma figura de dois cones unidos por suas bases.

c) será entregue 3 bandeiras com formato de círculos e semicírculos, para que eles possam rotacionar e responder o seguinte questionamento: existe alguma característica comum às duas figuras com a forma de semicírculo que formam as bandeirinhas? O que você pode afirmar com relação aos sólidos de revolução gerados pelas duas bandeirinhas congruentes, ou seja, pelos dois semicírculos?

Figura 18: Bandeiras com círculos e semicírculos

Fonte: Kaleff, Sá e Toledo (2002).

Os alunos deverão observar que duas das figuras de semicírculo são figuras geométricas congruentes, e que conforme fixadas no palito (eixo de rotação do sólido de revolução), obtemos dois sólidos de revolução distintos, chamados de esfera e semiesfera.

3º momento (2 períodos)

Pedir para que os alunos de cada grupo apresentem o sólido, e com o uso do material concreto e da bandeirinha, fazerem a comparação e explicarem o que têm em comum.

Logo após o grupo apresentar o sólido, o professor pode realizar explicações complementares, especialmente sobre as dúvidas dos alunos. Finalizar esse momento com a explanação sobre a definição de sólidos de revolução, abordando os elementos: eixo de rotação, figura plana a ser rotacionada e sólido gerado.

4º momento (alguns minutos)

A turma é separada em grupos de 5 alunos, sendo que cada grupo tem a tarefa de pesquisar objetos do cotidiano que possam ser representados por sólidos de revolução, e trazê-los na próxima aula.

Itens obrigatórios na pesquisa:

- Os objetos não devem ser representados por apenas um sólido de revolução que foram mencionados na aula, por exemplo: cone de sinalização, lata cilíndrica, bola, etc;
- Trazer os objetos (ou fotografias) para o próximo encontro e realizar as medidas dos mesmos.

AVALIAÇÃO:

Será por meio da participação dos alunos no desenvolvimento do questionário, das perguntas com atividade das bandeiras e na apresentação dos grupos.

REFERÊNCIAS:

DOLCE; O; POMPEO; J. N. Fundamentos de Matemática Elementar: Geometria Espacial. Vol. 10. 5 ed. São Paulo: Atual Editora, 1995.

KALEFF, M. A.; SÁ, A. L.; TOLEDO, M. J. M. **Criando, Vendo e Entendendo Sólidos de Revolução.** Boletim GEPEM Nº 40, p. 35-54, 2002.

OLIVEIRA, R. R. Brasil Escola: Corpos Redondos [homepage na Internet], 2024. Acesso em: 15 junho 2024. Disponível em: <https://brasilescola.uol.com.br/matematica/corpos-redondos.htm#:~:text=Os%20corpos%20redondos%2C%20tamb%C3%A9m%20chamados,uma%20lata%20de%20refrigerante%20etc>.

PLANO DE AULA 2	
Instituição/Escola	
Professor (a) Regente:	
Disciplina: **Matemática**	
Ano: 2024	Turma:
Data:	Duração total da aula: 4 períodos

UNIDADE TEMÁTICA:

Geometria Espacial

OBJETOS DE CONHECIMENTO (objetivos):

Estudo de Sólidos de Revolução aplicados

HABILIDADES:

(EM13MAT201) Propor ou participar de ações adequadas às demandas da região, preferencialmente para sua comunidade, envolvendo medições e cálculos de perímetro, de área, de volume, de capacidade ou de massa.

PRÉ-REQUISITOS:

Sólidos de Revolução

Recursos didáticos:

Sólidos pesquisados pelos grupos e ferramentas de medição.

DESENVOLVIMENTO:

Após feita a pesquisa pelos grupos e escolhido o sólido a ser estudado, vamos prosseguir para a análise do sólido. O professor poderá usar as perguntas abaixo para poder ajudar os alunos no desenvolvimento da atividade.

1) Qual lugar encontrou esse sólido de Revolução? Como e porquê o escolheram?

2) Tem semelhança com algum sólido estudado? Se sim, quais?

3) Como vão fazer a coleta dos dados? Sugerir: fita métrica, régua, compasso, paquímetro (o professor deve levar esses materiais)

4) Conseguem calcular usando os sólidos estudados?

5) Vocês acreditam que conseguem um valor exato ou aproximado?

1º momento (1 período)

Com os grupos organizados, realizar as perguntas sugeridas acima, fomentando a discussão em grupo e fazendo o registro das respostas. Conforme as dúvidas e dificuldades surjam, o(a) professor(a) pode auxiliar introduzindo novos questionamentos, proposições ou direcionamentos.

2º momento (1 período)

Definido o sólido a ser explorado pelo grupo, solicitar a coleta dos dados (com o devido registro), indicando e auxiliando na escolha e uso das ferramentas de medição. O(A) professor(a) deve levar para a aula diferentes instrumentos de medida, tais como: fita métrica, régua, compasso, paquímetro, barbante, folha milimetrada.

3º momento (2 períodos)

Realização de uma plenária com apresentação dos grupos, em que cada grupo deve apresentar o sólido estudado, considerando:

- Onde encontraram o sólido;
- O que é e como é utilizado o sólido;
- Porque esse sólido foi escolhido;
- Como realizaram a coleta dos dados;
- Outras maneiras de obter os dados.

Sugere-se que cada integrante do grupo deve explicar um item para que todos possam participar, mas podendo sua resposta ser complementada pelo colega, se necessário.

AVALIAÇÃO:

Será durante o processo de medição do objeto em grupo, bem como da participação na plenária, especialmente no que se refere à compreensão do conceito de sólido de revolução.

REFERÊNCIAS:

ALMEIDA, W. L; SILVA, P. K; VERTUAN, E. R. **Modelagem Matemática na Educação Básica**. São Paulo: Editora Contexto, 2011.

DOLCE; O; POMPEO; J. N. Fundamentos de Matemática Elementar: Geometria Espacial. Vol. 10. 5 ed. São Paulo: Atual Editora, 1995.

PLANO DE AULA 3	
Instituição/Escola	
Professor (a) Regente:	
Disciplina: **Matemática**	
Ano: 2024	Turma:
Data:	Duração total da aula: 6 períodos

UNIDADE TEMÁTICA:

Geometria Espacial

OBJETOS DE CONHECIMENTO (objetivos):

Estudo de Sólidos de Revolução aplicados

HABILIDADES:

(EM13MAT201) Propor ou participar de ações adequadas às demandas da região, preferencialmente para sua comunidade, envolvendo medições e cálculos de perímetro, de área, de volume, de capacidade ou de massa.

PRÉ-REQUISITOS:

Sólidos de Revolução

Recursos didáticos:

Sólidos pesquisados pelos grupos e ferramentas de medição.

DESENVOLVIMENTO:

1º momento (2 períodos)

Feita a coleta dos dados, agora passaremos para a etapa de resolução, onde os alunos vão organizar os dados coletados e fazer o modelo matemático, podendo usar como apoio os sólidos de revolução já estudados e conforme a necessidade, adaptá-los dependendo do objeto escolhido.

Perguntas que podem auxiliar na matematização e resolução:

a) Com quais sólidos é parecido o objeto escolhido pelo grupo?
b) É possível planificar o sólido escolhido no papel milimetrado?
c) E a projeção do objeto no papel milimetrado?
d) Quais áreas se pode calcular?
e) E quais volumes?
f) Quais outras medidas podemos considerar?

2º momento (2 períodos)

Com base nas respostas do momento anterior, discutir com os alunos formas de dividir o sólido, sugerindo duas possibilidades:

a) com diferentes sólidos regulares;
b) com troncos de cone.

Após, encaminhar uma atividade para representar a figura plana a ser rotacionada, com base nas possibilidades anteriores, conforme escolha de cada grupo. Os grupos podem utilizar papel milimetrado e as medidas já obtidas, bem como das ferramentas de medida para conferência e busca de novos dados.

Temos um exemplo de sólido calculado - uma taça - conforme figura abaixo. Numa perspectiva de relacionar com objetos já conhecidos, a taça foi dividida nas seguintes figuras (do pé à boca): tronco de cone; cilindro; esfera; tronco de cone; tronco de cone. As medidas de seus diâmetros e alturas foram obtidas com auxílio de régua, caneta e paquímetro, conforme apresentados na tabela abaixo.

Figura 19: Taça

Fonte: Corrêa (2024)

Sólido (do pé à boca da taça)	Medidas
Tronco de cone	Diâmetro maior: $D = 6,6\ cm$ Diâmetro menor: $d = 1,2\ cm$ Altura: $h = 1,5\ cm$
Cilindro	Diâmetro: $d = 1,2\ cm$ Altura: $h = 4\ cm$
Esfera (calota e/ou zona esférica)	Diâmetro: $d = 7,8\ cm$ Altura: $h = 6,5\ cm$
Tronco de cone	Diâmetro maior: $D = 5,8\ cm$ Diâmetro menor: $d = 5,4\ cm$ Altura: $h = 3\ cm$
Tronco de cone	Diâmetro menor: $d = 5,4\ cm$ Diâmetro maior: $D = 7\ cm$ Altura: $h = 3,5\ cm$

Com estes dados e aproximação, pode-se calcular áreas e volumes a partir de sólidos já conhecidos. Por outro lado, também é possível buscar sua representação a partir de funções, conforme dados obtidos na tabela abaixo, bem como a figura a ser rotacionada com as coordenadas cartesianas do arco de cada sólido, do pé à boca da taça.

Sólido (do pé à boca da taça)	Função do arco
Tronco de cone	$y =- 1,8x + 3,3$ Domínio: $0 \leq x \leq 1,5\ cm$ Pontos extremos: (0; 3,3) e (1,5; 0,6)
Cilindro	$y = 0,6$ Domínio: $1,5 \leq x \leq 5,5$ Pontos extremos: (1,5; 0,6) e (5,5; 0,6)
Esfera (calota e/ou zona esférica)	$y = \sqrt{3,9^2 - (x - 9,4)^2}$ Domínio: $5,5 \leq x \leq 12$ Pontos extremos: (5,5; 0) e (12; 2,9)
Tronco de cone	$y =- \frac{x}{15} + \frac{37}{10}$ Domínio: $12 \leq x \leq 15\ cm$ Pontos extremos: (12; 2,9) e (15; 2,7)
Tronco de cone	$y = \frac{8}{35}x - \frac{51}{70}$ Domínio: $15 \leq x \leq 18,5\ cm$ Pontos extremos: (15; 2,7) e (18,5; 3,5)

Figura 20: Retas e curva da figura plana para rotação da taça

Fonte: da autora (2024).

Para encontrarmos as funções afim, $y = ax + b$, a partir das medidas e dos valores dos pontos extremos já obtidos, temos

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$b = y_1 - a \cdot x_1 \quad \text{ou} \quad b = y_2 - a \cdot x_2$$

Para a primeira função, por exemplo, obtemos

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0,6 - 3,3}{1,5 - 0} = \frac{-2,70}{1.5} = - 1,8$$

$$b = y_1 - a \cdot x_1 = 3,3 - (- 1,8) \cdot 0 = 3,3$$

A Função Constante é caracterizada por apresentar uma lei de formação $f(x) = c$, e pode ser obtida pelo mesmo processo da função afim, ou simplesmente pela coordenada de y_1 ou y_2,

$$y = y_1 \quad \text{ou} \quad y = y_2$$

Para a função da semicircunferência, $y = \sqrt{r^2 - (x - d)^2}$, onde r é o raio e d é o deslocamento horizontal, temos

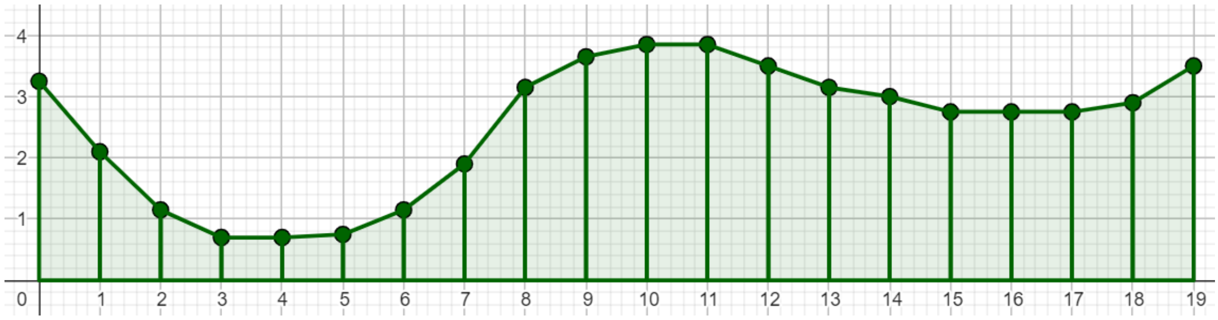
$$y = \sqrt{3,9^2 - (x - 9,4)^2}$$

Cabe destacar que as funções podem ser encontradas por diferentes métodos, conforme a investigação dos alunos e mediação do professor.

E considerando uma aproximação por troncos de cone, obtivemos a figura plana a ser rotacionada, a partir da lista de pontos

P={(0,3.25), (1,2.1), (2,1.15), (3,0.7), (4,0.7), (5,0.75), (6,1.15), (7,1.90), (8,3.15), (9,3.65), (10,3.85), (11,3.85), (12,3.5), (13,3.15), (14,3), (15,2.75), (16,2.75), (17,2.75), (18,2.9), (19,3.5)}.

Figura 21: Pontos dos trapézios da figura plana para rotação da taça



Fonte: da autora (2024).

3º momento (2 períodos)

Com base nos dados e representações do sólido pelos grupos (duas possibilidades sugeridas anteriormente), sugerir a construção do modelo de representação do sólido, calculando:

- Área da figura de rotação;
- Volume total do sólido;
- Comprimento do arco externo ao sólido;
- Área de superfície;
- Outros dados específicos do sólido: da taça, por exemplo, temos volume de líquido, seja total, ou para diferentes alturas.

Usando como exemplo a Figura 21, vamos calcular a área lateral por aproximação de troncos de cones. Primeiro, podemos buscar a geratriz, e depois a área lateral de cada tronco de cone individualmente, a partir de

$$g^2 = h^2 + (R - r)^2$$

onde g é a geratriz, h é altura, R é o raio maior, r é o raio menor, e

$$A_L = \pi(r + R)g$$

Vale destacar que a geratriz também pode ser calculada de outras maneiras, já que é a distância sequencial entre os pontos da lista P e representados na Figura 21. Por exemplo, ao primeiro tronco de cone, sua geratriz é a distância entre os dois pontos (0,3.25) e (1,2.1). Na tabela abaixo, são apresentados os dados calculados.

Tronco de cone (da esquerda para direita)	Geratriz g (cm)	Área lateral A_L (cm²)
1	1,5239	25,5997
2	1,3793	14,0757
3	1,0965	6,3695
4	1	4,396
5	1,0012	4,5583
6	1,0770	6,4252
7	1,25	11,9712
8	1,6007	25,3818
9	1,1180	23,8714
10	1,0198	24,0157
11	1	24,178
12	1,0594	24,4497
13	1,0594	22,1212
14	1,0111	19,7451
15	1,0307	18,6087
16	1	17,27
17	1	17,27
18	1,0111	17,9376
19	1,1661	23,4336

Por fim, basta somar todas as áreas laterais (de cada tronco) para obter a área lateral (ou de superfície) da taça. Portanto, tem-se A_L= 331,6784 cm².

Com o mesmo exemplo podemos calcular o comprimento do arco externo, pois já que calculamos a geratriz, somando elas encontraremos o comprimento total do arco externo da taça, obtendo 21,4042 cm.

AVALIAÇÃO:

Será no decorrer da organização dos dados, assim como se estão conseguindo calcular com base nos sólidos já estudados ou se será necessário dividir o sólido para calcular.

REFERÊNCIAS:

ALMEIDA, W. L; SILVA, P. K; VERTUAN, E. R. Modelagem Matemática na Educação Básica. São Paulo: Editora Contexto, 2011.

CORRÊA; Karine. Fotógrafa, 2024.

DOLCE; O; POMPEO; J. N. Fundamentos de Matemática Elementar: Geometria Espacial. Vol. 10. 5 ed. São Paulo: Atual Editora, 1995.

PLANO DE AULA 4	
Instituição/Escola	
Professor (a) Regente:	
Disciplina: **Matemática**	
Ano: 2024	Turma:
Data:	Duração total da aula: 4 a 6 períodos

UNIDADE TEMÁTICA:

Geometria Espacial

OBJETOS DE CONHECIMENTO (objetivos):

Estudo de Sólidos de Revolução aplicados

HABILIDADES:

(EM13MAT201) Propor ou participar de ações adequadas às demandas da região, preferencialmente para sua comunidade, envolvendo medições e cálculos de perímetro, de área, de volume, de capacidade ou de massa.

PRÉ-REQUISITOS:

Sólidos de Revolução

Recursos didáticos:

Sólidos pesquisados pelos grupos e computadores com internet e/ou software Geogebra.

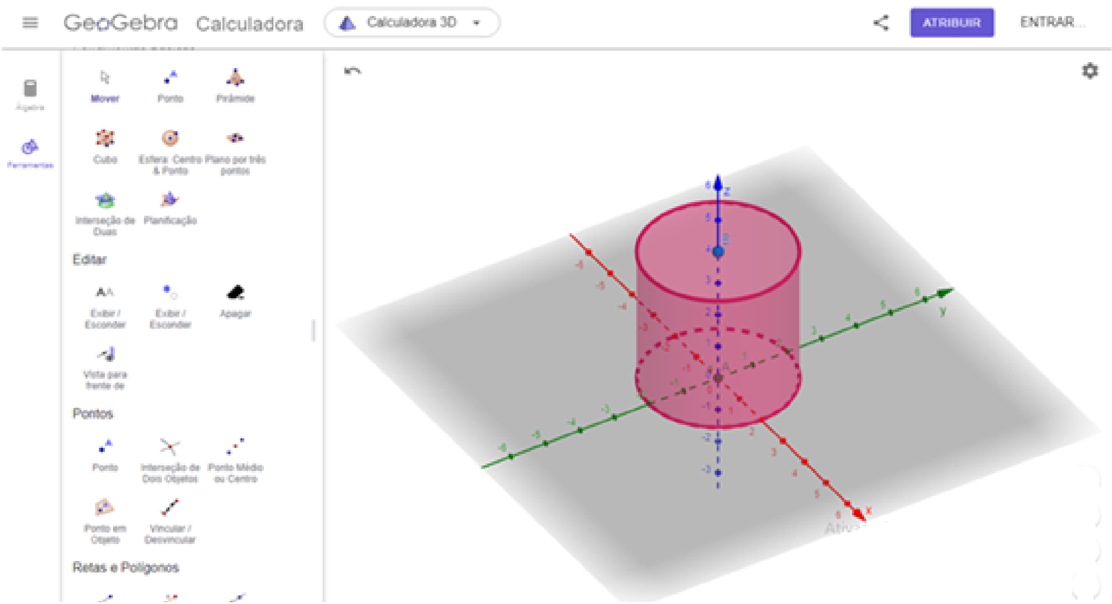
DESENVOLVIMENTO:

1º momento (2 períodos)

Levar os alunos para o laboratório de informática para explorar o programa livre Geogebra. Pode-se utilizar uma versão online (http://www.geogebra.org/) ou mesmo baixar o programa para o computador, ou ainda como aplicativo para celulares (Geogebra, 2024).

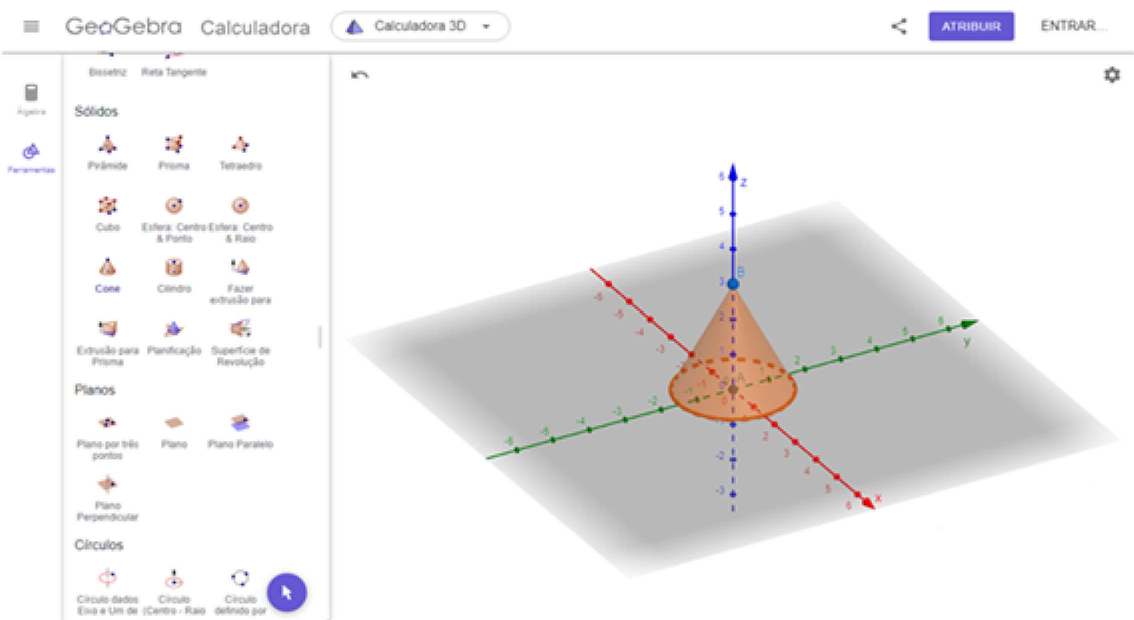
Nessa exploração do programa, sugerir e auxiliar os alunos a criar alguns sólidos, especialmente os de revolução, como por exemplo: cilindro, cone, esfera, entre outros. Nas Figuras 22 a 24 temos a representação de tais sólidos no Geogebra online.

Figura 22: Cilindro no programa Geogebra



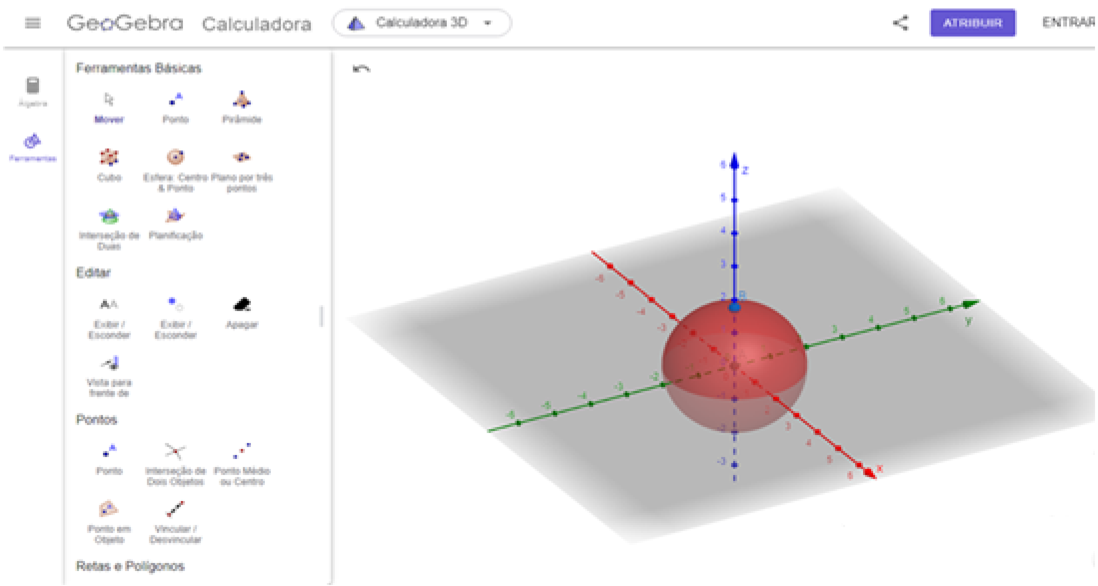
Fonte: da autora (2024).

Figura 23: Cone no programa Geogebra



Fonte: da autora (2024).

Figura 24: Esfera no programa Geogebra



Fonte: da autora (2024).

2º momento (2 a 4 períodos)

Após a exploração inicial do Geogebra, utilizar os Objetos de Aprendizagem (OA) que foram desenvolvidos para auxiliar na reconstrução e visualização do sólido, além da comparação dos resultados obtidos anteriormente.

Os Objetos de Aprendizagem estão disponíveis online ou para baixar, com duas perspectivas de aplicação já mencionadas nos planos anteriores:

1) Reconstrução de um sólido de revolução a partir de funções, com base em uma aproximação por sólidos já conhecidos: disponível em https://www.geogebra.org/m/n5f4ynyt

2) Reconstrução de um sólido de revolução a partir de pontos, com base em uma aproximação por troncos de cones: disponível em https://www.geogebra.org/m/zxfe3mv4

Nas Figuras 25 e 26 são apresentadas a reconstrução da taça como exemplo de aplicação nos Objetos de Aprendizagem.

Figura 25: Taça com aproximação de sólidos já conhecidos

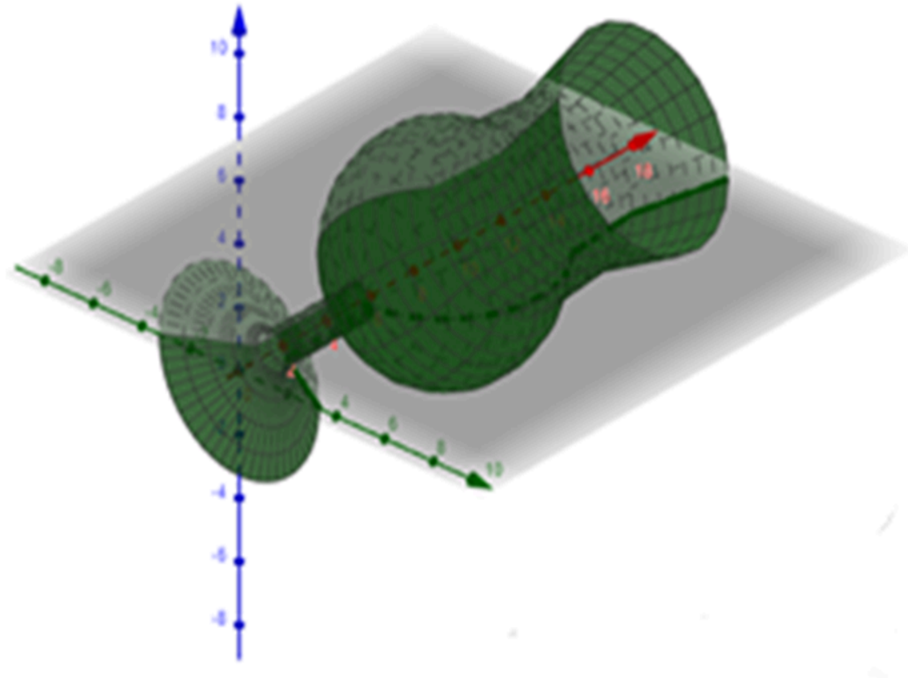
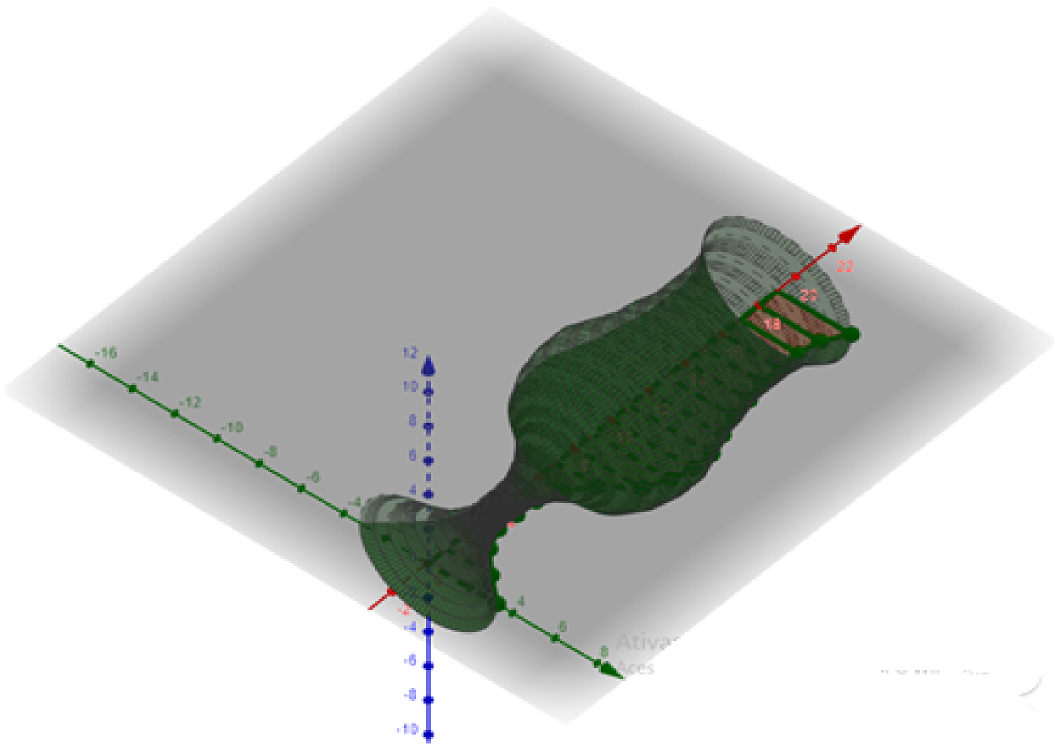


Figura 26: Taça com aproximação por troncos de cone



Fonte: da autora (2024).

Essa ferramenta auxilia o professor a explorar ainda mais os sólidos de revolução, pois o sólido pode ser rotacionado e posicionado de diversas maneiras, diferentemente do uso do quadro branco e do papel quadriculado.

Para além da visualização, nos OA já estão calculados de forma automática: área de rotação; comprimento do arco; volume do sólido; área lateral (superfície). Assim, estes dados podem ser utilizados para comparação e validação do modelo obtido pelos alunos.

AVALIAÇÃO:

Será durante o uso do programa Geogebra, com base na inserção dos dados e reconstituição do sólido de revolução que foi escolhido pelo grupo, bem como na verificação dos resultados obtidos.

REFERÊNCIAS:

ALMEIDA, W. L; SILVA, P. K; VERTUAN, E. R. Modelagem Matemática na Educação Básica. São Paulo: Editora Contexto, 2011.

DOLCE; O; POMPEO; J. N. Fundamentos de Matemática Elementar: Geometria Espacial. Vol. 10. 5 ed. São Paulo: Atual Editora, 1995.

International GeoGebra Institute. Programa GeoGebra 6 [homepage na Internet]. Áustria, 2024. Disponível em: <http://www.geogebra.org/>. Acesso em: 30 junho 2024.

PLANO DE AULA 5	
Instituição/Escola	
Professor (a) Regente:	
Disciplina: **Matemática**	
Ano: 2024	Turma:
Data:	Duração total da aula: 2 a 4 períodos

UNIDADE TEMÁTICA:

Geometria Espacial

OBJETOS DE CONHECIMENTO (objetivos):

Estudo de Sólidos de Revolução aplicados

HABILIDADES:

(EM13MAT201) Propor ou participar de ações adequadas às demandas da região, preferencialmente para sua comunidade, envolvendo medições e cálculos de perímetro, de área, de volume, de capacidade ou de massa.

PRÉ-REQUISITOS:

Sólidos de Revolução

Recursos didáticos:

Sólidos pesquisados pelos grupos e computador com projetor.

DESENVOLVIMENTO (2 a 4 períodos):

Realizar uma plenária final para apresentação do modelo e resultados obtidos acerca do sólido escolhido por cada grupo, considerandos seguintes aspectos:

- Como foi representado o objeto do grupo como sólido de revolução? Quais os passos e processos realizados?
- O que foi mais fácil nessa atividade de modelagem?
- O que foi mais difícil e desafiador nessa atividade de modelagem?
- Como foi o uso do programa Geogebra?

- O que gostaram ou não nessa atividade de modelagem do objeto real?

AVALIAÇÃO:

Avaliar a forma e conteúdo de apresentação, considerando também a argumentação e participação coletiva do grupo.

REFERÊNCIAS:

International GeoGebra Institute. Programa GeoGebra 6 [homepage na Internet]. Áustria, 2024. Disponível em: <http://www.geogebra.org/>. Acesso em: 30 junho 2024.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho propõe uma sequência de ensino usando a metodologia de Modelagem Matemática e recursos de Objetos de Aprendizagem. O uso do programa Geogebra favorece a relevância de visualização do movimento de rotação nos sólidos de revolução, bem como para comparar os resultados dos alunos.

A sequência de ensino proposta contém 5 planos de aula, a partir das 4 fases da Modelagem Matemática conforme Almeida (2011), incluindo um estudo prévio (ou revisão) dos sólidos de revolução no primeiro plano.

Este estudo traz uma proposta que torna a aula mais dinâmica e com o uso de objetos do cotidiano dos alunos, com o intuito de maior interação entre os alunos e com o professor.

Conclui-se que a sequência de ensino com o uso da modelagem matemática e dos Objetos de Aprendizagem, tornam mais relevante, dinâmico e aplicado o estudo de Sólidos de Revolução.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, W. L; SILVA, P. K; VERTUAN, E. R. **Modelagem Matemática na Educação Básica**. São Paulo: Editora Contexto, 2011.

BIEMBENGUT, S. M; HEIN, N. **Modelagem Matemática no Ensino**. São Paulo: Editora Pinsky Ltda, 2011.

BASSANEZI, C. R. **Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática.** 3ª ed. São Paulo: Editora Contexto, 2011.

BORBA, M. C. **A Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática**. Anais da 27ª Reunião Anual da Anped, Caxambu/MG, p. 21-24, 2004.

BARBOSA, C. P. **Desenvolvendo o Pensamento Geométrico nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental: Uma Proposta de Ensino para Professores e Formadores de Professores**. Departamento de Matemática, Ouro Preto, 2011.

DOLCE; O; POMPEO; J. N. **Fundamentos de Matemática Elementar:** Geometria Espacial. Vol. 10. 5 ed. São Paulo: Atual Editora, 1995.

DUARTE, M.A; SILVA, S. M. **Sólidos de Revolução: Sequência Didáticas para o Ensino Superior Utilizando a Metodologia Proposta por George Polya.** Tubarão, 2020

FAINGUELERNT; E, K. O ensino de Geometria no 1º e 2º graus. In: **Revista da Sociedade Brasileira de Educação Matemática.** São Paulo, 1995.

International GeoGebra Institute. Programa GeoGebra 6 [homepage na Internet]. Áustria, 2024. Disponível em: <http://www.geogebra.org/>. Acesso em: 30 junho 2024.

KALEFF, M. A.; SÁ, A. L.; TOLEDO, M. J. M. **Criando, Vendo e Entendendo Sólidos de Revolução.** Boletim GEPEM Nº 40, p. 35-54, 2002.

MARCONI, A. M; LAKATOS, M. E. **Fundamentos de Metodologia Científica**. São Paulo: Editora Atlas, 2003.

MEYER, A. C. F. J.; CALDEIRA, D. A.; MALHEIROS, S. P. A. **Modelagem em Educação Matemáticas.** São Paulo: Autêntica. Coleção Tendência em Educação Matemática, 2011.

MIPEDES: Matemática Ilustrada, Prática e Descomplicada [homepage na Internet], 2019. Acesso em: 15 junho 2024. Disponível em: <https://www.mipedes.com.br/2018/02/solidos-de-revolucao-metodo-dos-discos.html>.

NADALON, O. D; LEIVAS, P. C. J. **Superfícies e Sólidos de Revolução com Auxílio do Software Geogebra.** São Vicente do Sul, 2019.

OLIVEIRA, R. R. Brasil Escola: Corpos Redondos [homepage na Internet], 2024. Acesso em: 15 junho 2024. Disponível em: <https://brasilescola.uol.com.br/matematica/corpos-redondos.htm#:~:text=Os%20corpos%20redondos%2C%20tamb%C3%A9m%20chamados,uma%20lata%20de%20refrigerante%20etc>.

PAVANELLO, M. R. **O Abandono do Ensino da Geometria no Brasil: Causas e Consequências.** Revista Zetetike-7, 1993.

PEREIRA; R. L; GOMES; G. M.; PINHEIRO; G. N. N.; SILVA; M. J.; JARDIM; F. D. e BRITO; F. A. **Usando o Geogebra para o Ensino de Sólidos de Revolução.** Santa Maria. Revista do Centro de Ciências Naturais e Exatas, 2017.

VICTER; F. E.; SILVA; V. Q. **Geometria Espacial: Uma Abordagem no Ensino Médio com Geogebra.** Editora Unigranrio, 2017.