

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO PAMPA  
CAMPUS ALEGRETE  
CURSO DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA**

**ANÁLISE DINÂMICA DE UM MODELO DETERMINÍSTICO  
PARA A DESCRIÇÃO DO COMPORTAMENTO DA  
CAMADA LIMITE ATMOSFÉRICA NOTURNA**

**TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO**

**Maicon Fonseca Andrades**

**Alegrete**

**2016**

**MAICON FONSECA ANDRADES**

**ANÁLISE DINÂMICA DE UM MODELO DETERMINÍSTICO  
PARA A DESCRIÇÃO DO COMPORTAMENTO DA CAMADA  
LIMITE ATMOSFÉRICA NOTURNA**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal do Pampa (UNIPAMPA, RS), como requisito parcial para obtenção do grau de **Bacharel em Engenharia Mecânica em Engenharia Mecânica**.

Orientador: Prof. Felipe Denardin Costa

**Alegrete**

**2016**

MAICON FONSECA ANDRADES

**ANÁLISE DINÂMICA DE UM MODELO DETERMINÍSTICO  
PARA A DESCRIÇÃO DO COMPORTAMENTO DA CAMADA  
LIMITE ATMOSFÉRICA NOTURNA**

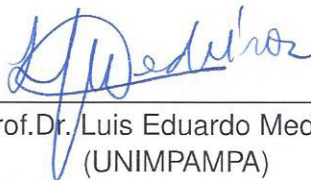
Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal do Pampa (UNIPAMPA, RS), como requisito parcial para obtenção do grau de **Bacharel em Engenharia Mecânica em Engenharia Mecânica**.

Trabalho de conclusão de curso defendido e aprovado em: 08 de julho de 2016.

Banca examinadora:



Prof. Dr. Felipe Denardin Costa  
Orientador  
(UNIPAMPA)



Prof.Dr. Luis Eduardo Medeiros  
(UNIMPAMPA)



Prof.Dr. Daniel Michelin dos Santos  
(UNIPAMPA)

## RESUMO

O presente trabalho propõe a criação de um modelo simplificado, capaz de reproduzir tanto a transição do regime de escoamento que caracteriza o acoplamento atmosférico como também o surgimento de eventos intermitentes de turbulência. Após a definição do conjunto de equações diferenciais que irá compor o modelo, uma análise dinâmica é aplicada ao mesmo com o objetivo de identificar se este apresenta características caóticas ou não. Tal avaliação é realizada através da análise de previsibilidade do modelo.

Palavras-chave: Camada limite estável. Turbulência. Intermitência. Caos.

## **ABSTRACT**

This paper proposes the creation of a simplified model, capable of playing both the transition flow regime that characterizes the atmospheric coupling as well as the emergence of intermittent turbulence events. After defining the set of differential equations that will conform to the model, a dynamic analysis is applied thereto in order to identify whether or not this has chaotic characteristics. Such evaluation is achieved by the predictability model analysis.

Keywords: Stable boundary layer. Turbulence. Intermittence. Chaos

## LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Representação de uma camada limite. ....	11
Figura 2.2 – Tipos de camada limite atmosférica. ....	14
Figura 2.3 – Representação das subdivisões da camada limite atmosférica. ....	14
Figura 2.4 – Trajetória no espaço de fase. ....	19
Figura 2.5 – Alocação de sistemas não-lineares em função do número de variáveis. .	21
Figura 2.6 – Ilustração de uma viga sobre flambagem. ....	23
Figura 2.7 – Exemplo de um diagrama de bifurcação. ....	24
Figura 3.1 – Representação do modelo de camadas utilizado para a integração das equações. ....	29
Figura 4.1 – Evolução do modelo para velocidades de vento geostrófico distintas no topo da CLE para um nível entre a superfície e o topo do domínio. ....	32
Figura 4.2 – Diagrama da bifurcação para os picos locais de $\theta$ e $u$ quando $n = 1$ . ....	33
Figura 4.3 – Evolução do modelo para velocidades de vento geostrófico distintas no topo da CLE para dois níveis entre a superfície eo topo do domínio. ....	34
Figura 4.4 – Diagrama da bifurcação para os valores máximos de $u$ em relação a $u_G$ para $n = 2$ . ....	35
Figura 4.5 – Evolução do modelo para velocidades de vento geostrófico distintas no topo da CLE para $n = 3$ . ....	36
Figura 4.6 – Diagrama da bifurcação para os valores máximos de $u$ em relação ao forçante mecânico para $n = 3$ . ....	36
Figura 4.7 – Evolução do modelo para velocidades de vento geostrófico distintas no topo da CLE. ....	37
Figura 4.8 – Diagrama da bifurcação para os valores máximos de $u$ em relação ao forçante mecânico para uma CLE com 5 níveis. ....	38
Figura 4.9 – Divergência entre as séries temporais para a variável $x$ do sistema de Lorenz. ....	39
Figura 4.10 – Atrator de Lorenz para $\rho = 28$ e $\rho = 28,01$ . ....	39
Figura 4.11 – Dependência das soluções obtidas em relação ao forçante mecânico para cinco níveis entre a superfície e o topo da camada para 10 horas de simulações. ....	40
Figura 4.12 – Divergência entre as órbitas do atrator para 5 níveis entre a superfície e o topo do domínio para 20 horas de simulações. ....	41
Figura 4.13 – Sensibilidade às condições iniciais. ....	41
Figura 4.14 – Divergência entre as órbitas do atrator para 3 níveis entre a superfície e o topo da camada limite para 20 horas de simulações. ....	42
Figura 4.15 – Sensibilidade às condições iniciais para $n = 3$ . ....	42

## **LISTA DE TABELAS**

# SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>8</b>
<b>2</b>	<b>REVISÃO BIBLIOGRÁFICA</b>	<b>10</b>
<b>2.1</b>	<b>Mecânica dos Fluidos</b>	<b>10</b>
2.1.1	Definição de Fluido	10
2.1.2	Regimes de Escoamento	10
2.1.3	Camada Limite	10
<b>2.2</b>	<b>Turbulência</b>	<b>11</b>
2.2.1	Equações Básicas	12
<b>2.3</b>	<b>Micrometeorologia</b>	<b>13</b>
2.3.1	Camada Limite Atmosférica	13
2.3.2	Camada Superficial	14
2.3.3	Número de Richardson	15
2.3.4	Intermitência e Acoplamento atmosférico	15
<b>2.4</b>	<b>Sistema Dinâmicos</b>	<b>16</b>
2.4.1	Sistemas Não-Autônomos	19
2.4.2	Caos	21
2.4.3	Bifurcações	22
<b>3</b>	<b>METODOLOGIA</b>	<b>25</b>
<b>3.1</b>	<b>Equações Básicas</b>	<b>25</b>
<b>3.2</b>	<b>Fechamento de Turbulência</b>	<b>26</b>
<b>3.3</b>	<b>Parametrização da Superfície</b>	<b>28</b>
<b>3.4</b>	<b>Condições Iniciais e de Contorno</b>	<b>28</b>
<b>3.5</b>	<b>Integração</b>	<b>29</b>
<b>3.6</b>	<b>Análise Dinâmica</b>	<b>31</b>
<b>4</b>	<b>RESULTADOS</b>	<b>32</b>
<b>4.1</b>	<b>Comportamento do Modelo para Diferentes Níveis</b>	<b>32</b>
<b>4.2</b>	<b>Sensibilidade às Condições Iniciais</b>	<b>38</b>
<b>5</b>	<b>CONCLUSÕES</b>	<b>44</b>
	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b>	<b>45</b>



# 1 INTRODUÇÃO

A camada limite atmosférica (CLA) é formada como consequência dos processos físicos oriundos das interações entre a atmosfera e a superfície subjacente, em escalas de tempo que variam de segundos até horas (STULL, 1988). O escoamento na CLA é predominantemente turbulento, na qual a turbulência surge no escoamento por influência da superfície. Isto ocorre devido ao fato desta exercer resistência de atrito à atmosfera, em contrapartida, o ar que se move próximo a superfície exerce uma força de arrasto sobre a mesma. Além disso, o ciclo diurno da CLA é controlado pelo balanço de energia na superfície.

Durante o dia a radiação proveniente do Sol aquece a superfície, e conseqüentemente a camada de ar adjacente a ela, diminuindo sua densidade e originando um processo convectivo. Nestas condições a CLA é uma camada bastante profunda, caracterizada pela presença de turbulência bem desenvolvida e é conhecida como camada limite convectiva (CLC). Após o pôr-do-Sol, a incidência de radiação de onda curta cessa, e a superfície começa a ser resfriada pela perda de energia na forma de radiação de onda longa (STULL, 1988). Consecutivamente, a camada de ar mais próxima da superfície também é resfriada dando origem a uma camada limite estavelmente estratificada, conhecida como camada limite estável (CLE) (ARYA, 2001).

A estratificação térmica estável, implica em um gradiente de temperatura positivo, que faz com que o fluxo de calor na superfície se torne negativo indicando que a atmosfera passa a “ceder” energia na forma de calor sensível. Durante a noite, a força de empuxo que antes atuara como um agente criador de turbulência, passa a “destruí-la” devido a acomodação de camadas de ar mais densas junto a superfície. Em noites com grande perda radiativa, que ocorrem comumente sob condições de céu claro e vento fraco, a estratificação estável é tão intensa que pode causar a supressão da turbulência no escoamento em quase todas as suas escalas, causando a aparente laminarização do mesmo. Entretanto, ainda que em uma escala que pode ser várias ordens de grandeza menor, as flutuações características do escoamento turbulento ainda podem ser observadas nas componentes do campo de velocidade do escoamento (MAHRT; VICKERS, 2006).

Nas condições anteriormente descritas é muito comum observar o surgimento de eventos esporádicos de turbulência, os quais ocorrem de maneira imprevisível tanto temporalmente quanto espacialmente (COSTA et al., 2011). A supressão da turbulência em quase todas as suas escalas e o seu posterior ressurgimento é um fenômeno conhecido como intermitência global (MAHRT, 1999). As condições nas quais ocorrem a intermitência global, posteriormente aqui referida somente como intermitência, são condições características da transição dos regimes de escoamento atmosférico, no qual o regime está passando de uma situação na qual a superfície está desacoplada energeticamente dos níveis superiores da atmosfera para um regime no qual todos os níveis atmosféricos estão energeticamente acoplados através da presença de turbulência contínua no escoamento (ACEVEDO; COSTA; DEGRAZIA, 2012; SUN et al., 2012). Este processo de transição é conhecido como acoplamento atmosférico (DERBYSHIRE, 1999; ACEVEDO; COSTA; DEGRAZIA, 2012; van de WIEL et al., 2012).

Embora o escoamento não seja completamente laminarizado pela ação da força de empuxo, a ausência de turbulência bem desenvolvida faz com que a descrição do escoamento, bem como a as origens da intermitência e o conseqüente reestabelecimento da turbulência, tornam a descrição da CLE um dos maiores desafios da micrometeorologia.

Sabe-se que a transição laminar-turbulenta é caracterizada pelo surgimento intermitente de vórtices, e este fenômeno é uma rota para o caos (KADANOFF, 2008). A turbulência em si não é um fenômeno caótico, pois esta possui muitos graus de liberdade, todavia, os “meandros” que levam ao surgimento da turbulência completamente desenvolvida podem ser fenômenos caóticos (RUELLE; TAKENS et al., 1971), e neste contexto se encontra a intermitência.

Blackadar (1979), propôs um modelo clássico para a interação da superfície do solo com a atmosfera com o intuito de reproduzir as principais características do escoamento atmosférico sob forte estratificação térmica. ReVelle (1993) e McNider et al. (1995) mostraram que o tipo de esquema proposto por Blackadar apresenta grande sensibilidade às condições iniciais no sentido que uma pequena perturbação nos parâmetros externos podem levar a uma solução completamente diferente, em termos de conexão entre a superfície e a atmosfera. Contudo, o fato de o modelo apresentar soluções constantes no tempo, tanto no estado desacoplado, quanto no estado acoplado, após o transiente, revela que tal modelo não é capaz de reproduzir o comportamento complexo, que é característico dos eventos intermitentes. O simples reestabelecimento do escoamento turbulento, na CLE, após a turbulência ter decaído completamente é umas das principais dificuldades encontradas por modelos numéricos utilizados para simular o comportamento da turbulência na CLE (van de WIEL et al., 2002). van de Wiel et al. (2002) propõem um modelo capaz de reproduzir de maneira periódica o surgimento de eventos intermitentes de turbulência, através da rápida troca de energia em superfície causada pela baixa capacidade calorífica de uma camada de vegetação sobre o solo. Posteriormente, Costa et al. (2011), propõem um modelo capaz de reproduzir o comportamento imprevisível da turbulência na CLE sem o uso de funções arbitrárias para descrever a intensidade turbulenta. Do ponto de vista dinâmico, tal característica é muito relevante, pois a aplicação dessas funções reduzem o grau de liberdade do sistema, coibindo a ocorrência de soluções complexas.

O modelo proposto por Costa et al. (2011), utiliza uma equação de balanço para a energia cinética turbulenta (ECT), onde é possível observar claramente o papel de cada um dos termos desta equação na descrição do comportamento da intensidade da turbulência no escoamento. Neste sentido, três termos se destacam: a produção de turbulência por cisalhamento, a destruição de turbulência por empuxo e a dissipação viscosa de turbulência. Estes três termos são dependentes de 3 grandezas: a intensidade turbulenta; a magnitude do vento; e a estratificação térmica. Neste contexto, o presente trabalho propõe a criação de um modelo simplificado, baseado em argumentos eurísticos para o comportamento dessas três grandezas, o qual seja capaz de reproduzir tanto a transição do regime de escoamento, que caracteriza o acoplamento atmosférico como também o surgimento de eventos intermitentes de turbulência.

Após a definição do conjunto de equações diferenciais que irá compor o modelo, uma análise dinâmica detalhada é aplicada a este com o objetivo de identificar se há ou não a presença de caos no mesmo. Esta análise é realizada através métodos clássicos para o estudo de sistemas dinâmicos (STROGATZ, 2014).

A estrutura do presente trabalho está baseada em uma revisão teórica, apresentada no capítulo 2, na metodologia que será utilizada para a construção e análise do modelo, presente no capítulo 3. Finalmente, os resultados e as conclusões obtidas estão presentes nos capítulos 4 e 5.

## 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

### 2.1 Mecânica dos Fluidos

#### 2.1.1 Definição de Fluido

Um fluido é uma substância que se deforma continuamente sob a aplicação de uma tensão cisalhante, não importa qual seja sua magnitude. A mecânica dos fluidos é o ramo da ciência que estuda o comportamento dos fluidos em repouso (estática dos fluidos) ou em movimento (dinâmica dos fluidos), (FOX; MCDONALD; PRITCHARD, 2006).

#### 2.1.2 Regimes de Escoamento

Conforme suas características, um escoamento pode ser classificado como laminar ou turbulento. O regime laminar é caracterizado pelo escoamento em linhas de corrente, suaves e com movimentos altamente ordenados. No regime turbulento, o fluido escoava de forma desordenada, caracterizado pelas flutuações de velocidade (FOX; MCDONALD; PRITCHARD, 2006). Em um escoamento laminar não ocorre troca de propriedades macroscópicas entre as camadas de mesmo, em contrapartida, no regime turbulento, existe uma intensa troca de quantidades macroscópicas em diferentes regiões do escoamento. Uma propriedade é dita macroscópica quando pode ser observada a olho nu, sem a utilização de instrumentos

O principal parâmetro utilizado para definir se um escoamento é laminar ou turbulento é o número de Reynolds. Tal parâmetro é um número adimensional que relaciona as forças inerciais e viscosas do escoamento, expresso por:

$$Re = \frac{VL}{\nu}, \quad (2.1)$$

onde  $Re$  é o número de Reynolds,  $V$  e  $L$  são velocidade e uma escala de comprimento, respectivamente, e  $\nu$  é a viscosidade cinemática do fluido. O valor crítico para este parâmetro varia em torno de 2300 para escoamentos no interior de tubos, enquanto que para escoamentos atmosféricos este valor pode atingir a casa de  $10^7$ .

#### 2.1.3 Camada Limite

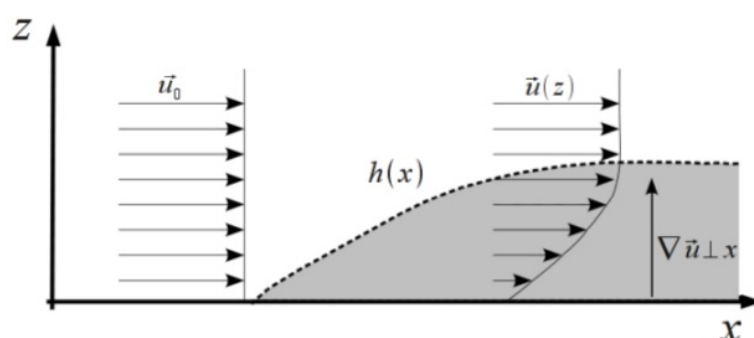
A medida que a velocidade do escoamento aumenta ou com o aumento do número de Reynolds do mesmo, os efeitos viscosos sobre as forças inerciais reduzem-se, exceto por uma pequena região adjacente a superfície (YONG; OKIISHI; MUNSON, 2004). Tal região é denominada camada limite e pode ser definida como a porção do escoamento em que os efeitos viscosos são significativos. Originalmente, este conceito foi introduzido por Ludwig Prandtl em 1904, quando este mostrou que muitos escoamentos viscosos podem ser analisados dividindo-os em duas regiões distintas, uma próxima a superfície e outra

que compreende o restante do escoamento. Prandtl concluiu que apenas na pequena região próxima a superfície (camada limite) os efeitos da viscosidade são importantes. Na outra região, fora da camada limite, tal efeito pode ser desprezado (FOX; MCDONALD; PRITCHARD, 2006).

Landau (1959) define uma camada limite como a região do escoamento próxima a uma superfície onde existe um forte gradiente de velocidade, que força suas componentes a convergirem para zero à medida que o este se aproxima da superfície.

Um dos primeiros trabalhos sobre o equacionamento de camadas limite foi desenvolvido por Blasius em 1908. Em sua publicação o autor simplifica as equações da continuidade e da quantidade de movimento para a simulação de um escoamento laminar, incompressível, com ausência de gradientes térmicos e de pressão ocorrendo sobre uma face plana e lisa. Para este caso, a condição de escoamento sobre linhas de corrente e de similaridade são válidas. O desenvolvimento do conceito de camada limite foi fundamental para a solução de problemas de escoamentos viscosos, além de fornecer a base para a formulação teórica das forças de arrasto.

Figura 2.1: Representação de uma camada limite.



Fonte: Fox, McDonald e Pritchard (2006).

## 2.2 Turbulência

A turbulência é um fenômeno físico que não possui uma definição formal. Usualmente, consiste em muitos turbilhões de diversas escalas sobrepostos uns nos outros, no qual sua energia cinética relativa define o espectro turbulento (STULL, 1988)

Arya (2001), afirma que a turbulência se refere à natureza aparentemente caótica de muitos escoamentos, que se manifestam na forma de flutuações irregulares, quase aleatórias nas componentes de velocidade, temperatura e escalares em torno de seus valores médios no tempo e espaço.

A importância da turbulência está no fato de esta promover trocas eficientes de calor e umidade entre a atmosfera e o solo, tornando-o habitável para os seres vivos. A atmosfera recebe praticamente todo o vapor de água através de intercâmbios promovidos pela turbulência perto da superfície. Além disso, esta contribui para a difusão de poluentes liberados próximos à superfície, impedindo o envenenamento do ar e contribuindo para manutenção da vida na Terra. Outros efeitos da transferência turbulenta sobre o balanço de energia são

através do calor sensível e latente trocados entre o solo e a atmosfera. Sobre superfícies de terra, a troca de calor sensível, geralmente, é mais importante do que a de calor latente, mas o inverso é verdadeiro em grandes lagos e oceanos (ARYA, 2001).

A turbulência atmosférica é sempre manifestada na forma de rajadas de vento, de modo que tais rajadas podem ser consideradas como uma forma de medir sua intensidade. Normalmente, os movimentos na camada limite atmosférica são sempre turbulentos, na camada superficial, ela se apresenta de forma mais ou menos contínua, embora possa ser intermitente e irregular na parte superior da CLA.

### 2.2.1 Equações Básicas

As formulações básicas trabalhadas em mecânica dos fluidos compreendem a equação da continuidade (conservação da massa), equação 2.2, e a equação da conservação de momento (Segunda Lei de Newton), equação 2.3.

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = 0 \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = \left( \frac{\partial \bar{u}^2}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}'v'}{\partial y} + \frac{\partial \bar{u}'w'}{\partial z} \right) + \nu \nabla^2 \bar{u} \quad (2.3)$$

A partir da Segunda Lei de Newton, incluindo as tensões de superfície, tem-se as equações de Navier-Stokes, equações diferenciais que descrevem os campos de velocidade e pressão de um escoamento. Estas equações estabelecem que as variações de aceleração e momento apresentadas pelo fluido são resultado das variações de pressão e das forças viscosas que nele atuam.

$$\rho \left( \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) = \mu \left[ \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right] \frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x \quad (2.4)$$

$$\rho \left( \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) = \mu \left[ \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \right] \frac{\partial p}{\partial y} + \rho g_y \quad (2.5)$$

$$\rho \left( \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = \mu \left[ \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right] \frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z \quad (2.6)$$

A seguir, apresenta-se uma revisão sobre micrometeorologia, no qual alguns conceitos sobre camada limite atmosférica, intermitência e acoplamento atmosférico são apresentados.

## 2.3 Micrometeorologia

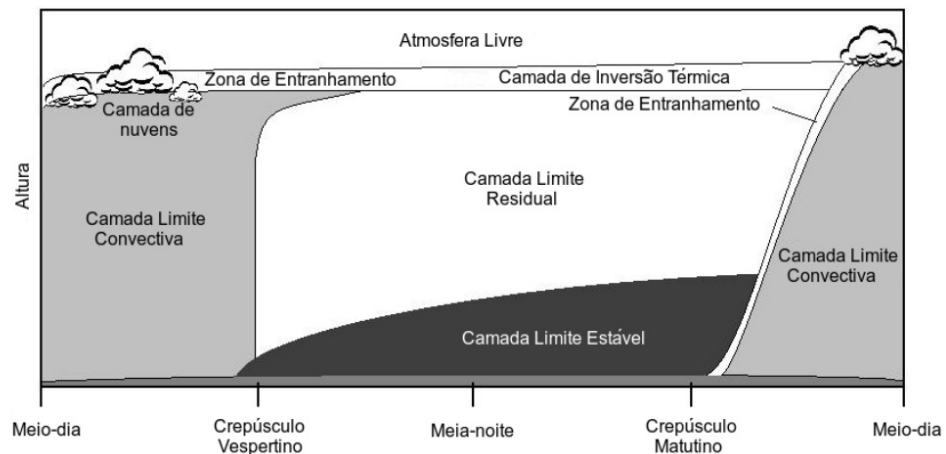
### 2.3.1 Camada Limite Atmosférica

A camada limite atmosférica (CLA) é formada como consequência das interações entre a atmosfera e a superfície subjacente. Estas interações se dão via processos turbulentos que possuem escalas de tempo de alguns segundos até várias horas. Sua profundidade aumenta ou diminui em resposta ao aquecimento diurno e ao ciclo de resfriamento noturno, respectivamente. Assim, por exemplo, em uma superfície de terra seca durante verão, sua altura pode estar abaixo dos 100 *m* no início da manhã e a alguns quilômetros do solo ao final da tarde. A altura ou profundidade da CLA é uma característica importante da mesma, aparecendo frequentemente em estudos sobre poluição do ar, pois representa a profundidade em que ocorre a mistura dos poluentes emitidos. Como resultado, a CLA é geralmente mais poluída que a atmosfera livre acima dela. O contraste entre as duas é bastante acentuado em grandes cidades e pode ser observado a partir de uma aeronave, uma vez que sai ou entra na CLA. Outras variações temporais da dimensão e estrutura da CLA geralmente ocorrem como resultado do desenvolvimento e passagens de sistemas de mesoescala (ARYA, 2001).

Variações diurnas da altura da CLA e outras variáveis meteorológicas são menores em grandes lagos, mares e oceanos, devido a pequena variação da temperatura da superfície da água. Isso se deve à grande capacidade calorífica da mesma. Outras variações temporais da profundidade da CLA ocorrem, normalmente, devido ao desenvolvimento e a passagem de sistemas de mesoescala. A CLA se torna mais fina quando sofre influência de grandes escalas de subsidência e divergências horizontais de baixo nível associadas a sistemas de alta pressão (anticiclone). Todavia, a CLA pode crescer muito, a ponto de se fundir com grandes nuvens em condições meteorológicas perturbadas associadas a sistemas de baixa pressão (ciclones). Nessas condições é muito difícil distinguir o topo da CLA, geralmente, a base da nuvem é utilizada como limite arbitrário para o topo da CLA (ARYA, 2001).

De acordo com sua estabilidade, uma camada limite atmosférica pode ser classificada como: camada limite neutra, camada limite estável e camada limite instável, como mostra a Figura 2.2. A camada limite neutra ocorre em momentos de transição de estabilidade ou em dias com fortes ventos, sua principal característica é o gradiente de temperatura nulo. A camada instável ocorre durante o dia, são caracterizadas por forte turbulência e pelo gradiente de temperatura negativo. Durante o ciclo diurno, a CLA instável também é conhecida como camada limite convectiva, pois o ar próximo da superfície é mais quente e, conseqüentemente, menos denso, sobe, misturando-se nas primeiras dezenas ou centenas de metros acima desta. A camada limite estável (CLE), ocorre no período da noite, na qual incide a inversão do gradiente de temperatura, este passa a ser positivo e a turbulência se torna predominantemente mecânica. Durante o ciclo noturno o ar mais frio e mais pesado permanece próximo da superfície, enquanto o ar mais quente permanece nas camadas superiores, isto dá origem a uma camada estavelmente estratificada, conhecida como camada limite estável (CLE) (STULL, 1988).

Figura 2.2: Tipos de camada limite atmosférica.

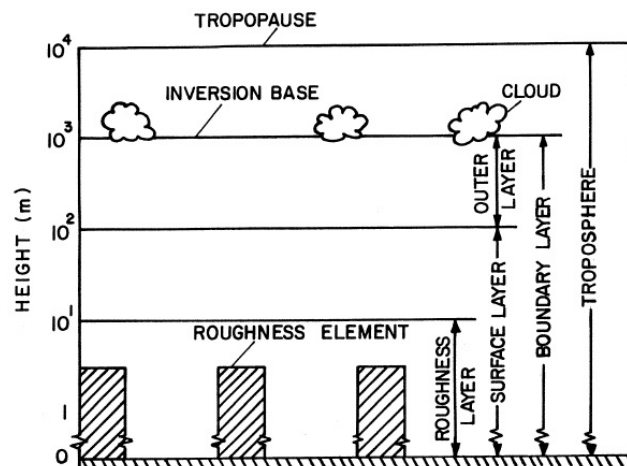


Fonte: Adaptado de Stull (1988).

### 2.3.2 Camada Superficial

A camada superficial atmosférica é uma faixa de camada abaixo da camada limite onde os efeitos de coriolis ou de rotação da Terra podem ser ignorados. Esta camada é uma parte integrante e sofre grande influência da CLA. O topo da CLA pode ser facilmente detectado utilizando dispositivos de sensoriamento remoto, tais como sondas acústicas e também pode ser inferido a partir de temperatura, umidade, vento e sondagens. Porém, a camada superficial é prontamente passível de operações a partir do solo ou então por meio de torres micrometeorológicas (ARYA, 2001). A parte mais baixa da camada de superfície, onde a influência dos elementos de rugosidade individuais pode ser facilmente discernida é chamada de camada de rugosidade, como mostra a Figura 2.3.

Figura 2.3: Representação das subdivisões da camada limite atmosférica.



Fonte: Adaptado de Arya (2001).

Para o estudo da camada limite turbulenta, os campos de velocidade, temperatura, pressão e umidade devem ser decompostos em médias de Reynolds. Para este fim, os números de Reynolds, bem como o número de Richardson e o comprimento característico de Monin-Obukhov são fundamentais, pois determinam a relação entre os termos turbulentos de origem térmica e dinâmica que atuam no fluido (MONIN; OBUKHOV, 1954). O comprimento de Obukhov,  $L$ , é uma escala de comprimento de flutuabilidades, ele introduz a altura característica da subcamada dinâmica turbulenta. Obukhov utilizou esta escala para descrever teoricamente os perfis do vento e da temperatura da camada de superfície em termos de um parâmetro de estabilidade fundamental,  $z/L$  (ARYA, 2001).

### 2.3.3 Número de Richardson

Existem dois números de Richardson, o número de Richardson gradiente,  $Ri_g$  e o número de Richardson fluxo,  $Ri_f$ . Semelhantes, porém indicam processos inversos. O Richardson fluxo indica o valor no qual o escoamento turbulento se torna laminar, equação 2.7, enquanto o Richardson gradiente indica o valor com o qual o escoamento laminar se torna turbulento, equação 2.8.

$$Ri_f = \frac{\frac{g}{\theta_v} \overline{w'\theta_v}}{u'_i u'_j \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j}} \quad (2.7)$$

$$Ri_g = \frac{\frac{g}{\theta_v} \frac{\partial \theta_v}{\partial z}}{\left(\frac{\partial \overline{U}}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial \overline{V}}{\partial z}\right)^2} \quad (2.8)$$

Para o escoamento laminar se tornar turbulento, admite-se que  $Ri_g$  apresente valor abaixo de 0,21 ou 0,25. Em contrapartida, para o escoamento turbulento se tornar laminar,  $Ri_f$  deve ser maior que 1 (BATTISTI, 2014).

### 2.3.4 Intermitência e Acoplamento atmosférico

Uma camada limite estável pode ser classificada como fracamente ou fortemente estável. Uma camada limite fracamente estável apresenta turbulência contínua, enquanto aquelas com forte estabilidade apresentam turbulência reduzida. Em alguns casos, o escoamento pode apresentar um caráter intermitente, fenômeno que ocorre quando a turbulência é suprimida em quase todas as suas escalas por uma forte estratificação térmica. Posteriormente, esta ressurgue de maneira imprevista em períodos curtos devido a intervenção de pequenas flutuações imensuráveis. O caso intermitente ocorre com a incidência de ventos fracos ou com a advecção de ar quente sobre uma superfície muito mais fria. Em contrapartida, no caso pouco estável, a turbulência contínua ocorre com ventos mais fortes e/ou resfriamento mais fraco da superfície (MAHRT, 1999).

Holtslag e Nieuwstadt (1986) afirmam que camadas limite fracamente estáveis podem ser ocupadas por turbulência contínua perto da superfície e pela turbulência intermitente nos níveis mais elevados. Com o aumento da estabilidade, a turbulência intermitente ocupa mais a camada limite e atinge a superfície em condições muito estáveis.

Derbyshire (1999), salienta que em condições muito estáveis, o fluxo perto da superfície pode não ser capaz de manter a turbulência, pois esta não é capaz de suportar o fluxo



de calor para baixo exigida pelo resfriamento radiativo da superfície.

Uma forma de identificar se uma CLE é fracamente ou fortemente estável é analisando sua dependência do fluxo de calor sensível sobre sua estabilidade. Em uma camada fracamente estável o fluxo de calor aumenta com a estabilidade, enquanto em uma camada muito estável a estratificação térmica é forte o suficiente para amortecer os fluxos, que diminuem com o aumento da estabilidade (ACEVEDO; COSTA; DEGRAZIA, 2012).

Outra forma de classificar uma CLE é em relação ao estado de acoplamento entre o ar próximo a superfície e os níveis superiores. Quando há uma intensa turbulência dentro da CLE, todos os seus níveis permanecem conectados uns aos outros e ao topo da camada, de tal forma que os gradientes verticais são bastantes reduzidos. Esta situação caracteriza o estado acoplado, na qual a superfície pode ser considerada como acoplada a CLE superior, que coincide com o regime fracamente estável. Em contrapartida, se a turbulência for bastante reduzida, a superfície tende a se separar dos níveis superiores e os gradientes verticais se elevam. Esta situação caracteriza o estado desacoplado que está associado ao regime muito estável da camada limite noturna (ACEVEDO; COSTA; DEGRAZIA, 2012). A transição entre estes dois regimes de escoamento é conhecido como acoplamento atmosférico e ocorre de maneira abrupta e imprevista na natureza.

Acevedo e Fitzjarrald (2003) apresentam dados observacionais do desacoplamento atmosférico de uma rede de estações, no qual os resultados mostram que estações localizadas em regiões mais elevadas permanecem turbulentas durante toda a noite, enquanto outras sofrem um rápido resfriamento e uma redução da velocidade do vento. O acoplamento pode ocorrer de forma intermitente, e quando este ocorre, a temperatura da superfície eleva-se em até  $10\text{ K}$ . Tal temperatura é semelhante à encontrada nas estações mais elevadas que permanecem turbulentas durante toda a noite.

Mesmo com vários estudos sobre camadas limite muito estáveis, uma teoria sobre tal processo ainda não está consolidada devido a enorme dificuldade de medir a turbulência intermitente e os baixos fluxos, além disso é necessário um número gigantesco de dados para estudá-los de forma adequada. A camada muito estável tem muita importância nas atividades antropogênicas, tais como agricultura, por exemplo, os danos causados pela geada incomum são mais prováveis de ocorrer no caso muito estável.

A seguir, apresenta-se um apanhado sobre os conceitos dinâmicos necessários para a compreensão das análises propostas, na qual a definição de caos é apresentada, bem como a análise dos diagramas de bifurcação.

## 2.4 Sistema Dinâmicos

A dinâmica, originalmente, era um ramo pertencente a física, hoje é um assunto interdisciplinar. Iniciou-se em meados de 1600 com a descoberta das equações diferenciais por Isaac Newton, através de suas leis de movimento e gravitação universal. Combinando suas leis com o movimento planetário de Kepler, Newton resolveu o problema para dois corpos (ex.: sol e Terra), contudo, o mesmo método não era aplicável a problemas com três corpos (ex.: sol, lua e Terra). Após décadas de tentativas de formular equações sem sucesso para os movimentos dos três corpos, no fim dos anos 1800, Poincaré solucionou o problema através de uma poderosa geometria de abordagem baseada em conceitos dinâmicos. Além disso, Poincaré foi a primeira pessoa a vislumbrar o caos, no qual um determinado sistema apresenta um comportamento aperiódico que depende fortemente das

condições iniciais, tornando assim, impossível sua previsão a longo prazo (STROGATZ, 2014).

Posteriormente, com a invenção do computador em 1950, novas perspectivas foram alcançadas, uma vez que este tornou possível a realização de cálculos e a solução de equações diferenciais que antes eram impossíveis analiticamente, além de desenvolver conceitos sobre sistemas não-lineares através de novos experimentos. Tais experimentos levaram Edward Lorenz em 1963 a descobrir o movimento caótico em um estranho atrator. Enquanto estudava um modelo simplificado de convecção atmosférica, visando compreender a imprevisibilidade do tempo, Lorenz percebeu que as soluções para suas equações nunca convergiam para o equilíbrio ou para um estado periódico. Ele percebeu também que alterando sensivelmente as condições iniciais do sistema, os resultados obtidos eram totalmente diferentes, pequenos erros na medição atual do estado da atmosfera se ampliam rapidamente levando a previsões equivocadas, ou seja, o sistema é inerentemente imprevisível. Ao plotar o gráfico das soluções das equações, em três dimensões, percebeu um conjunto de pontos em forma de borboleta, Lorenz argumentou que este conjunto eram um grupo de infinitas superfícies complexas, o que hoje chamamos de fractal (SAVI, 2006).

Após o trabalho de Lorenz a teoria do caos se expandiu para as mais diversas áreas da ciência, todavia, isto só ocorreu a partir da década de 70. Em 1971, Ruelle e Takens propuseram uma nova teoria para o aparecimento da turbulência em fluidos, tal hipótese baseava-se em considerações abstratas sobre estranhos atratores. Em 1974, o biólogo Robert May encontrou exemplos de caos em mapeamentos biológicos de iterações entre populações de um ecossistema. Contudo, foi o físico Mitchell Feigenbaum, em 1978, que fez a descoberta mais surpreendente de todas. Ele constatou que há certas leis universais que regem a transição de regular ao comportamento caótico, basicamente, sistemas completamente diferentes podem se tornar caóticos da mesma forma. Seu trabalho estabeleceu uma ligação entre o caos e as fases de transições (STROGATZ, 2014).

Há dois tipos principais de sistemas dinâmicos: sistemas de equações diferenciais e mapas de iteração. As equações diferenciais descrevem a evolução do sistema com o tempo, enquanto mapas iterativos surgem em problemas onde o tempo é discreto. Limitando-se apenas às equações diferenciais, pode-se classificá-las em equações ordinárias ou em equações parciais. Por exemplo, a equação para um oscilador harmônico amortecido:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = 0, \quad (2.9)$$

é uma equação diferencial ordinária porque apresenta somente derivadas ordinárias  $dx/dt$  e  $d^2x/dt^2$ . Isto é, que há somente uma variável independente, o tempo  $t$ .

Em contraste, a equação do calor:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (2.10)$$

é uma equação diferencial parcial, pois tem tanto o tempo como o espaço como variáveis independentes. Neste trabalho, trabalhar-se-á apenas com o comportamento puramente temporal de equações ordinárias. Um quadro muito geral de equações diferenciais ordinárias é fornecido pelo sistema (STROGATZ, 2014):

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, \dots, x_n), \end{aligned} \quad (2.11)$$

Os pontos denotam diferenciações em relação ao tempo, assim:

$$\dot{x}_i = \frac{dx_i}{dt} \quad (2.12)$$

as variáveis  $x_1, \dots, x_n$ , podem representar concentrações de produtos químicos em um reator, populações de diferentes espécies em um ecossistema ou as posições e volidades dos planetas no sistema solar. As funções  $f_1, \dots, f_n$ , são determinadas pelo tipo de problema.

Através da introdução de novas variáveis, Strogatz (2014) mostra que é possível reescrever o oscilador amortecido 2.9 na forma de 2.11, para isso, faz-se  $x_1 = x$  e  $x_2 = \dot{x}$ . Assim, quando  $\dot{x}_1 = x_2$  a partir das definições:

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 &= \ddot{x} = -\frac{b}{m}\dot{x} - \frac{k}{m}x \\ \dot{x}_2 &= -\frac{b}{m}x_2 - \frac{k}{m}x_1, \end{aligned} \quad (2.13)$$

a partir das definições e da equação governante 2.9, o sistema equivalente a 2.11 é:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{b}{m}x_2 - \frac{k}{m}x_1 \end{aligned} \quad (2.14)$$

Este sistema é considerado linear, pois todas as  $x_i$  do lado direito aparecem à primeira potência apenas, o outro lado do sistema é não-linear. Os termos não lineares são produto e funções de  $x_i$ , tais como  $x_1x_2$ ,  $x_1^3$  ou  $\cos x_2$  o sistema é dito não-linear (STROGATZ, 2014).

Por exemplo, a oscilação de um pêndulo é governada pela equação:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{g}{L} \sin x = 0, \quad (2.15)$$

na qual  $x$  é o ângulo do pêndulo com a vertical,  $g$  a aceleração da gravidade e  $L$  é o comprimento do pêndulo. O sistema não-linear equivalente é:

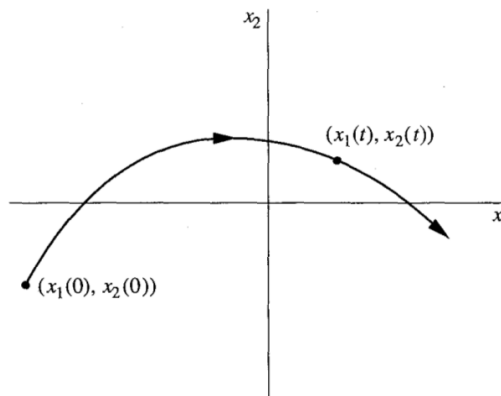
$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{g}{L}x_2 \sin x_1 \end{aligned} \quad (2.16)$$

As não-linearidades tornam a equação do pêndulo muito difícil de se resolver analiticamente, assim, para contornar tal problema, considera-se um pequeno ângulo de aproximação,  $\sin x = x$  para  $x \ll 1$ . Isto torna o problema linear, facilitando sua solução.

Supondo que se tem uma solução para o sistema de pêndulo para uma dada condição inicial, tal solução se apresenta como um par de funções  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$ , representando a

posição e a velocidade do pêndulo. Se construirmos um espaço abstrato com coordenadas  $(x_1, x_2)$ , quando a solução  $(x_1(t), x_2(t))$  corresponde a um ponto que se move ao longo de uma curva neste espaço, Figura 2.4.

Figura 2.4: Trajetória no espaço de fase.



Fonte: Adaptado de Strogatz (2014).

A curva é chamada trajetória e o espaço é chamado espaço de fase do sistema. A trajetória é o percurso que a solução  $x_1(0), x_2(0)$  realiza no espaço de fase. Tal região é completamente preenchida com trajetórias, uma vez que cada ponto pode servir como uma condição inicial. Se uma partícula se move em um meio unidimensional, esta apresentará um espaço de fase de duas dimensões, caso ela se desloque em um plano, apresentará um espaço de fase de quatro dimensões (SAVI, 2006).

Para analisar a evolução temporal de um sistema dinâmico é necessário valer-se de ferramentas numéricas, para simplificar o problema e discretizá-lo. Tal simplificação transforma suas equações diferenciais em um sistema algébrico, que pode ser facilmente resolvido (SAVI, 2006).

#### 2.4.1 Sistemas Não-Autônomos

Segundo Strogatz (2014), um sistema é dito não autônomo quando depende explicitamente do tempo, como o oscilador harmônico forçado,  $m\ddot{x} + bx + kx = F \cos t$ , por exemplo. Para lidar com tal dependência é preciso realizar o mesmo procedimento anterior, contudo, dessa vez acrescenta-se uma dimensão extra ao sistema, observe:

Fazendo  $x_1 = x$ ,  $x_2 = \dot{x}$  e  $x_3 = t$ . Quando  $\dot{x}_3 = 1$ , o sistema equivalente será:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{m} ( -kx_1 - bx_2 + F \cos x_3 ) \\ \dot{x}_3 &= 1 \end{aligned} \quad (2.17)$$

Como se pode ver, o sistema obtido passa a ser tridimensional, com esta técnica é possível remover qualquer dependência do tempo, basta adicionar uma dimensão extra para o sistema. Isto é útil pois permite visualizar um espaço de fases com trajetórias

“congeladas” formando uma espécie de imagem geométrica, caso contrário, a variação no tempo faria com que os vetores e trajetórias se alterem constantemente, impossibilitando a obtenção de tais informações (STROGATZ, 2014).

Mencionou-se antes que sistemas não-lineares são muito difíceis de se resolver analiticamente, mas não foi apresentado o porquê de serem mais difíceis que os lineares ou a principal diferença entre eles. Basicamente, um sistema linear pode ser “quebrado” em partes, e cada parte pode ser resolvida separadamente e posteriormente, recombina-das visando obter a resposta do sistema. Todavia, muitas coisa não se comportam desta maneira, sempre que um sistema apresentar componentes relacionados a interferência, competição ou cooperação, existem iterações não-lineares ocorrendo e estas não podem ser subdivididas (STROGATZ, 2014).

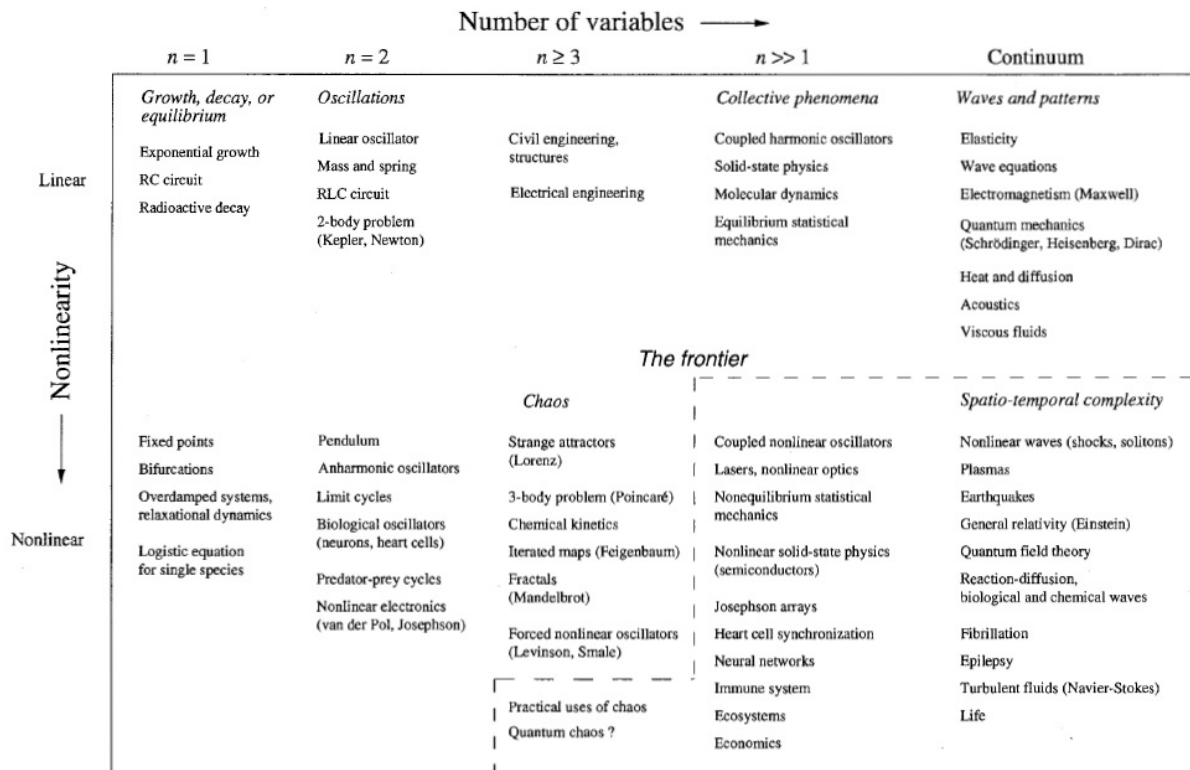
A Figura 2.5 apresenta dois eixos, um deles representa o número de variáveis neces-sárias para se caracterizar um sistema, este número equivale ao número de dimensões do espaço de fase. O outro eixo nos diz se o sistema é linear ou não. Por exemplo, considere o crescimento exponencial de uma população de microorganismos, descrito pela seguinte equação diferencial:

$$\frac{dx}{dt} = rx \quad (2.18)$$

em que  $x$  é a população,  $t$  é o tempo e  $r$  a taxa de crescimento.

Este sistema pode ser alocado na coluna  $n = 1$ , porque apenas uma informação é suficiente para prever o crescimento da população. Analisando o exmplo do pêndulo, apresentado anteriormente, o estado do sistema é dado por duas variáveis: o ângulo  $x$  e a velocidade angular  $\dot{x}$ . Ou seja, precisamos de valores iniciais de ambas as variáveis, logo, o pêndulo deve estar alocado na coluna  $n = 2$ .

Figura 2.5: Alocação de sistemas não-lineares em função do número de variáveis.



Fonte: Adaptado de Strogatz (2014).

### 2.4.2 Caos

Ao longo dos anos, inúmeras áreas da ciência se defrontaram com o caos, principalmente a ecologia, a economia, a engenharia e a medicina (SAVI, 2006). O conceito mais forte para a definição do caos é a da sensível dependência das condições iniciais, superando até mesmo o conceito de instabilidade. Resumidamente, tem-se órbitas (curvas), iniciadas em pontos próximos que acabam se afastando em determinado instante do tempo, tal defasagem cresce exponencialmente com o tempo, tornando o sistema imprevisível (STROGATZ, 2014). O conceito de instabilidade está associado em como uma solução de um dado sistema responde a uma perturbação qualquer. Se esta perturbação afetar significativamente tal solução o sistema será instável, do contrário o sistema será estável (SAVI, 2006).

Segundo Alligood, Sauer e Yorke (2003) quando um sistema dinâmico só pode ser determinado por seu estado anterior, diz-se que este é um sistema determinístico. De acordo com o autor, um sistema determinístico pode ser definido como:

Dado um estado  $x_n$ , unidimensional, com  $n$  pertencente aos números naturais, o estado seguinte pode ser determinado por:

$$x_{n+1} = f(x_n), \tag{2.19}$$

onde  $f$  é uma função qualquer cujo domínio é igual a imagem (mapa).

Assim, para n-ésima iteração da função  $f$ , tem-se:

$$x_n = f^n(x_0), \quad (2.20)$$

Uma vez definido o conceito de sistema determinístico é possível definir o conceito de ponto fixo. (STROGATZ, 2014) define um ponto fixo como um ponto  $x$ , tal que  $f(x) = x$ . De acordo com o autor, os pontos fixos podem ser classificados como estáveis ou instáveis, na qual os pontos estáveis representam o equilíbrio estável do sistema em que todas as perturbações são amortecidas. Em contrapartida, os pontos instáveis representam o equilíbrio instável onde os distúrbios crescem com o tempo.

Alligood, Sauer e Yorke (2003) afirmam que em um sistema dinâmico, a derivada do mapa revela a estabilidade do mesmo. Na qual:

$|f'(x)| < 1$ , então  $x$  é um ponto estável

$|f'(x)| > 1$ , então  $x$  é um ponto instável.

onde  $f'(x)$  é a derivada de  $f(x)$  em  $x$ .

Contudo, tais informações não são suficientes para caracterizar um sistema dinâmico, principalmente em relação a presença de características caóticas. Sendo assim, novos métodos de análise surgiram, entre eles, destaca-se as análises de bifurcações.

### 2.4.3 Bifurcações

A dinâmica de campos vetoriais é bastante limitada: todas as soluções se estabelecem para o equilíbrio ou apontam para  $\infty$ . O que é muito interessante em sistemas unidimensionais é a sua dependência aos seus parâmetros. A estrutura qualitativa do fluxo pode mudar aqueles que são variáveis. Em particular, pontos fixos podem ser criados ou destruídos, ou sua estabilidade pode mudar. Tais mudanças qualitativas na dinâmica são chamadas bifurcações, e os valores dos parâmetros em que ocorrem são chamados pontos de bifurcações (STROGATZ, 2014).

As bifurcações tem muita importância cientificamente, pois fornecem modelos de transição e instabilidades quando alguns parâmetros de controle são variados. Por exemplo, considere a flambagem de uma viga. Se um pequeno peso é colocado no topo da viga, Figura 2.6. Esta pode suportá-lo e permanecer na vertical. Todavia, se o carregamento for muito elevado, a posição vertical da mesma se torna instável e a viga flamba (STROGATZ, 2014). Para este exemplo, o peso desempenha o papel de parâmetro de controle e a deflexão da viga desempenha o papel da dinâmica variável  $x$ .

Figura 2.6: Ilustração de uma viga sobre flambagem.



Fonte: Adaptado de Hibbeler (2006).

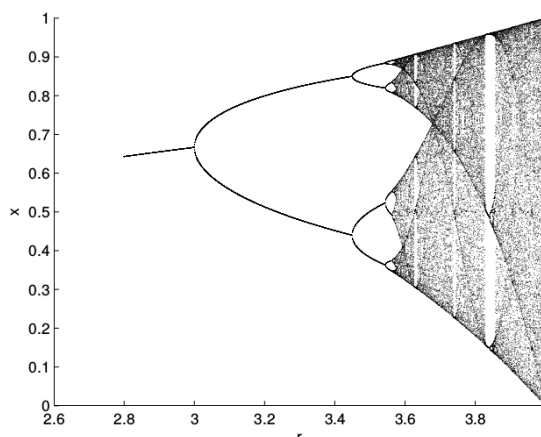
O diagrama de bifurcações é um gráfico dos valores assintóticos da variável de estado em relação ao parâmetro de controle. Os valores assintóticos podem ser compreendidos como o estado das curvas após um tempo suficientemente grande, no qual os efeitos transientes não são considerados. É importante desconsiderar tais regimes de iterações, pois estas podem mascarar os estados assintóticos, que são os resultados de interesse para estudo (VIANA, 2011). A Figura 2.7 apresenta o diagrama da bifurcação para o mapa logístico descrito por Robert May em 1976, um exemplo clássico da literatura, na qual a equação:

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n) \quad (2.21)$$

descreve um modelo populacional para insetos. Com  $x_n$  sendo o número de indivíduos da  $n$ -ésima geração (variável de interesse) e  $r$  a taxa de crescimento populacional (parâmetro de controle).



Figura 2.7: Exemplo de um diagrama de bifurcação.



Fonte: Adaptado de Viana (2011).

Destacam-se as faixas próximas a  $r = 3$  e  $r = 3,5$ , nessas regiões, tem-se a presença de pontos de bifurcação. Tais pontos ocorrem quando tanto a função, quanto sua derivada primeira são nulas:

$$f(x, r) = \frac{\partial f}{\partial r} = 0 \quad (2.22)$$

Mas em que implica a existência de um ponto de bifurcação? Quando se tem a presença deste, a função apresenta diferentes soluções de equilíbrio, como mostrado na Figura 2.7. O número de soluções para uma determinada função pode ser estimada através da Teoria da Catástrofe. Basicamente, tal teorema caracteriza o surgimento inesperado de soluções qualitativamente diferentes para um sistema quando um dado parâmetro do mesmo é levemente alterado. É por esse motivo que tais gráficos são muito utilizados na análise de sistemas dinâmicos, visando a localização de regiões propícias ao caos.

Segundo Hoff et al. (2014), as bifurcações podem ser classificadas de acordo com a possibilidade de previsão destas através dos autovalores da matriz Jacobiana do sistema. Quando há possibilidade, as bifurcações são ditas locais, quando não há, as bifurcações são denominadas globais e não podem ser detectadas avaliando os pontos de equilíbrio próximos. Sistemas com apenas uma equação tem sua derivada primeira igual a Jacobiana. Analogamente, o autovalor para uma única expressão, também é igual a Jacobiana. O que implica que este deve ser nulo em um ponto de bifurcação.

Após todo o levantamento teórico aqui apresentado, a seguir, apresenta-se a metodologia adotada para a confecção e análise do modelo proposto.

### 3 METODOLOGIA

#### 3.1 Equações Básicas

Para a criação do modelo proposto, idealiza-se um sistema de camadas semelhante ao de McNider et al. (1995) e Costa et al. (2011), subdividido em  $n$  níveis entre a superfície e o topo da camada limite. O conjunto de equações será composto por quatro expressões, no qual algumas hipóteses devem ser assumidas para simplificar sua solução. Primeiramente, despreza-se os efeitos gerados por advecção e pela divergência horizontal de fluxo. Posteriormente, desconsidera-se a rotação da Terra e, assume-se que a componente meridional do vento geostrófico,  $v$ , é nula. Despreza-se também a divergência radiativa e as possíveis mudanças de estado da água. Nestas condições, a componente zonal média do vento,  $\bar{u}$ , e a temperatura média,  $\bar{\theta}$ , na CLA, são dependentes apenas da divergência vertical do fluxo turbulento e podem ser escritas da forma (STULL, 1988):

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = P \frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z} \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t} = \frac{\partial \overline{w'\theta'}}{\partial z} \quad (3.2)$$

Nas equações acima,  $u$  é a componente zonal da velocidade do vento,  $\theta$  é a temperatura potencial do ar,  $P$  é um gradiente de pressão que acelera o vento e  $z$  é a altura.

A terceira expressão acrescentada ao modelo é uma equação de balanço de energia cinética turbulenta (ECT), variável muito importante para quantificar a intensidade da turbulência. Na qual consiste em (STULL, 1988):

$$\frac{\partial \bar{E}}{\partial t} = \bar{u}_j \frac{\partial \bar{E}}{\partial z_j} - \frac{\partial (\overline{u'_j E'})}{\partial z_j} + \delta_{i3} \frac{g}{\Theta} (\overline{u'_i \theta'}) - \overline{u'_i u'_j} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial z_j} - \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial}{\partial z_i} (\overline{u'_i p'}) - \varepsilon. \quad (3.3)$$

Na expressão acima,  $\bar{E}$ , é a energia cinética turbulenta,  $g$  é a aceleração da gravidade,  $\Theta$  é a temperatura de referência e  $p$  é o gradiente de pressão.

A equação de balanço de ECT leva em conta os diferentes processos que agregam, retiram ou transportam energia no campo turbulento. O termo do lado esquerdo da expressão representa o balanço local de ECT, enquanto que os termos do lado direito representam o transporte de ECT por advecção, o transporte turbulento de ECT, a produção/destruição de ECT por empuxo, a produção mecânica de ECT por cisalhamento, o transporte de ECT por flutuações de pressão e a dissipação viscosa de ECT, respectivamente.

A última expressão do modelo é uma equação prognóstica para o cálculo da temperatura da superfície:

$$\frac{\partial \theta_g}{\partial t} = \frac{1}{C_g} (I - \sigma \theta_g^4) - H_0 - k_m (\theta_g - \theta_m) \quad (3.4)$$

em que:

$C_g$  - capacidade térmica do solo;

$\theta_m$  - temperatura do substrato;

$\theta_g$  - temperatura do solo;

$H_0$  - fluxo de calor sensível na superfície

$k_m$  - coeficiente de transferência de calor entre a camada superficial do solo e a camada mais profunda.

$I \#$  - radiação de onda longa proveniente da atmosfera.

Essas são as quatro equações que compõe o modelo, como o número de variáveis é maior que o número de equações, os termos desconhecidos não podem ser solucionados individualmente, o que caracteriza um problema de fechamento. Assim, para solucionar tal problema é preciso realizar parametrizações em função de quantidades e parâmetros conhecidos. Uma parametrização é uma aproximação utilizada quando a verdadeira física responsável por um dado fenômeno não é conhecida.

### 3.2 Fechamento de Turbulência

Existem várias técnicas de fechamento de turbulência, a mais simples que pode ser utilizada para eliminar as variáveis desconhecidas do sistema de equações (1)-(4) é o fechamento de primeira ordem utilizando médias de Reynolds. Nesta técnica os fluxos turbulentos são parametrizados em termos dos gradientes das variáveis médias. Por exemplo, para uma variável  $\chi$  qualquer (STULL, 1988):

$$(\overline{w'\chi'}) = K_\chi \frac{\partial \chi}{\partial z} \quad (3.5)$$

em que  $K_\chi$  é o coeficiente de difusão de  $\chi$ .

Aplicando essa técnica nos fluxos turbulentos de calor sensível, têm-se:

$$(\overline{w'\theta'}) = K_H \frac{\partial \theta}{\partial z} \quad (3.6)$$

na qual  $K_H$  é o coeficiente de difusão de energia sob a forma de calor sensível. Pode-se relacioná-lo com o coeficiente de difusão de momentum utilizando o número de Prandtl turbulento,  $Pr_t$ , tal que:

$$K_H = Pr_t K_m, \quad (3.7)$$

assumindo  $Pr_t = 1$ ,  $K_H = K_m$ .

O coeficiente de difusão de momentum é obtido através do produto entre a velocidade de fricção,  $u_*$ , e o comprimento de mistura,  $l_m$  (COSTA et al., 2011).

$$K_H = K_m = l_m u_* \quad (3.8)$$

O fluxo turbulento de momentum também pode ser parametrizado como função da velocidade de fricção, além do ângulo  $\psi$ , que é o ângulo entre as componentes zonal e meridional do vento geostrófico. Assim:

$$(\overline{u'w'}) = u_*^2 \cos(\psi) \quad (3.9)$$

onde:

$$\psi = \arctg\left(\frac{v}{u}\right) \quad (3.10)$$

como não há componente meridional ( $v = 0$ ), isso implica que  $\psi = 0$ , assim,  $(\overline{u'w'}) = u_*^2$ .

Sabe-se que  $u_*^2$  é proporcional à ECT e a constante de proporcionalidade  $\alpha$  é função da estabilidade atmosférica (ACEVEDO et al., 2014):

$$E = \alpha u_*^2 \quad (3.11)$$

para este trabalho, assume-se  $\alpha$  igual a 5,5 (DUYNKERKE, 1988).

De acordo com Costa et al. (2011), os termos de produção mecânica e destruição térmica da equação da ECT podem ser parametrizados como  $Su_*^2$  e  $RiSu_*^2$ , respectivamente. Onde  $S$  é o cisalhamento do vento e  $Ri$  o número de Richardson, calculados diagnósticamente por:

$$S = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2} \quad (3.12)$$

$$Ri = \frac{g}{\Theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} / S^2 \quad (3.13)$$

O termo de transporte vertical de turbulência pode ser resolvido conforme a simplificação proposta por Duynkerke (1988):

$$\frac{\partial}{\partial z} [(\overline{w'E'}) + \frac{1}{\rho} (\overline{w'p'})] = \frac{K_E}{\sigma_E} \frac{\partial E}{\partial z} = T \quad (3.14)$$

no qual,  $\sigma_E$  é o número de Prandtl turbulento para a dissipação de energia, que segundo o autor, não possui valor definido. Neste trabalho, assume-se que  $K_E = K_m/2,5$  e faz-se  $\sigma_E = 2,5$  (COSTA et al., 2011).

A taxa de dissipação viscosa,  $\epsilon$ , pode ser escrita como função da velocidade de fricção e do comprimento de mistura, com o auxílio de uma constante de proporcionalidade  $c_\epsilon$  (COSTA et al., 2011). Assim:

$$\epsilon = c_\epsilon \left( \frac{u_*^3}{l_m} \right) \quad (3.15)$$

os valores assumidos por  $c_\epsilon$  variam entre 0,08 e 0,7. Para esse trabalho, assume-se  $c_\epsilon = 0,18$  (COSTA et al., 2011).

O comprimento de mistura é definido por:

$$l_m = \kappa z \quad (3.16)$$

onde  $\kappa$  é a constante de Von Kármán. Um parâmetro adimensional que descreve o perfil de velocidade logarítmica de um escoamento turbulento perto de uma fronteira com condição de não escorregamento. De acordo com a literatura, usualmente, faz-se  $\kappa = 0,4$ .

Com todas as parametrizações realizadas acima, pode-se reescrever a equação de balanço de ECT da seguinte maneira:

$$\frac{\partial \bar{e}}{\partial t} = Su_*^2 - RiSu_*^2 + \frac{\partial T}{\partial z} - c_\epsilon \frac{u_*^3}{l_m} \quad (3.17)$$

### 3.3 Parametrização da Superfície

O fluxo de calor sensível na superfície é obtido a partir da seguinte expressão:

$$H_0 = \rho c_p \overline{w\theta} \quad (3.18)$$

onde  $\rho$  e  $c_p$  são a densidade e o calor específico do ar, respectivamente.  $\overline{w\theta}$  é um fluxo turbulento que pode ser parametrizado como (COSTA et al., 2011):

$$\overline{w\theta} = u_* \theta_*$$

onde  $\theta_*$  é uma escala turbulenta de temperatura, dada por:

$$\theta_* = \left( \frac{K_H}{u_*} \right) \left( \frac{\partial \theta}{\partial z} \right)$$

Substituindo essa equação em (3.18), tem-se que:

$$\frac{\partial \bar{e}}{\partial t} = S u_*^2 \quad Ri S u_*^2 + \frac{\partial T}{\partial z} \quad c_\epsilon \frac{u_*^3}{l_m} \quad (3.19)$$

$$H_0 = \rho C_p u_* \theta_* \quad (3.20)$$

A radiação de onda longa, definida por Staley e Jurica (1972), é função de outra série de parâmetros, como mostra a equação abaixo:

$$I \# = \sigma (Q_c + 0,67(1 - Q_c)(1670Q_a)^{0,008}) \theta^4 \quad (3.21)$$

na qual  $Q_a$  é a umidade específica,  $Q_c$  a cobertura de nuvens e  $\sigma$  a constante de Stefan-Boltzman. Para este trabalho, assume-se que  $Q_c = 0$ , logo a expressão se reduz a:

$$I \# = \sigma (0,67(1670Q_a)^{0,008}) \theta^4 \quad (3.22)$$

### 3.4 Condições Iniciais e de Contorno

As condições de entrada são fundamentais para a resolução de qualquer conjunto de equações, assim, é preciso estabelecer os limites do sistema no qual todas as equações apresentadas são válidas. Esses limites são o topo da camada limite,  $h$ , fixada em 50 m e a superfície do solo,  $z = 0$ , como mostrado na Figura 3.1. Entre estes limites existem  $n$  níveis, o primeiro fixado em  $n = 5$  m e os demais igualmente espaçados entre si até  $h$ .

### 3.3 Parametrização da Superfície

O fluxo de calor sensível na superfície é obtido a partir da seguinte expressão:

$$H_0 = \rho c_p \overline{w\theta} \quad (3.18)$$

onde  $\rho$  e  $c_p$  são a densidade e o calor específico do ar, respectivamente.  $\overline{w\theta}$  é um fluxo turbulento que pode ser parametrizado como (COSTA et al., 2011):

$$\overline{w\theta} = u_* \theta_*$$

onde  $\theta_*$  é uma escala turbulenta de temperatura, dada por:

$$\theta_* = \left( \frac{K_H}{u_*} \right) \left( \frac{\partial \theta}{\partial z} \right)$$

Substituindo essa equação em (3.18), tem-se que:

$$\frac{\partial \bar{e}}{\partial t} = S u_*^2 \quad Ri S u_*^2 + \frac{\partial T}{\partial z} \quad c_\epsilon \frac{u_*^3}{l_m} \quad (3.19)$$

$$H_0 = \rho C_p u_* \theta_* \quad (3.20)$$

A radiação de onda longa, definida por Staley e Jurica (1972), é função de outra série de parâmetros, como mostra a equação abaixo:

$$I \# = \sigma (Q_c + 0,67(1 - Q_c)(1670Q_a)^{0,008}) \theta^4 \quad (3.21)$$

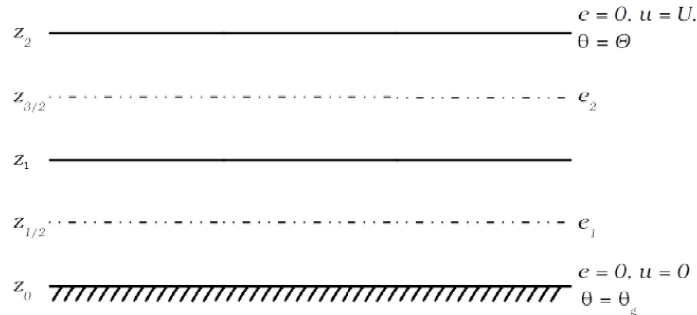
na qual  $Q_a$  é a umidade específica,  $Q_c$  a cobertura de nuvens e  $\sigma$  a constante de Stefan-Boltzman. Para este trabalho, assume-se que  $Q_c = 0$ , logo a expressão se reduz a:

$$I \# = \sigma (0,67(1670Q_a)^{0,008}) \theta^4 \quad (3.22)$$

### 3.4 Condições Iniciais e de Contorno

As condições de entrada são fundamentais para a resolução de qualquer conjunto de equações, assim, é preciso estabelecer os limites do sistema no qual todas as equações apresentadas são válidas. Esses limites são o topo da camada limite,  $h$ , fixada em 50 m e a superfície do solo,  $z = 0$ , como mostrado na Figura 3.1. Entre estes limites existem  $n$  níveis, o primeiro fixado em  $n = 5$  m e os demais igualmente espaçados entre si até  $h$ .

Figura 3.1: Representação do modelo de camadas utilizado para a integração das equações.



Fonte: Elaborado pelo autor.

Nos níveis principais são calculadas as equações para a velocidade do vento e a temperatura potencial, enquanto que a energia cinética turbulenta é calculada em níveis intermediários, da mesma forma que o modelo proposto por McNider et al. (1995). Os níveis intermediários são definidos como  $z_{i/2} = (z_i + z_{i-1})/2$ , assim, se  $z_1 = 5 \text{ m}$ ,  $z_{1/2} = 2,5 \text{ m}$  (COSTA et al., 2011).

Como condições de contorno, tem-se que, em  $h$ , a temperatura potencial e a velocidade são constantes,  $\theta(t, h) = \Theta = 300 \text{ K}$  e  $u(t, h) = u_G$ , e a velocidade de fricção é nula (van de WIEL et al., 2002; COSTA et al., 2011).

Assume-se que a velocidade inicial no primeiro nível do modelo seja  $u(t, h) = 0,1 \text{ m/s}$ . Além disso, considera-se também que em todos os níveis a temperatura potencial inicial seja igual a temperatura de referência,  $\theta_g(0, z_i) = \Theta = 300 \text{ K}$ . Em contrapartida, assume-se que a temperatura do substrato é  $\theta_m = 285 \text{ K}$ . Em todos os níveis intermediários é assumido um valor inicial mínimo de ECT.  $E(0, z_i) = 0,005 \text{ m}^2/\text{s}^2$ .

Outras constantes a serem consideradas são  $g = 9,81 \text{ ms}^{-2}$ ,  $z_0 = 0,1 \text{ m}$  (coeficiente de rugosidade). O termo de aceleração  $P$  na equação 3.1 é  $P = 10^{-4} \text{ ms}^{-2}$ .

### 3.5 Integração

Realizando todas as parametrizações descritas nos itens 3.2 e 3.3, obtém-se o seguinte sistema de equações:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = P \frac{\partial u_*^2}{\partial z} \quad (3.23)$$

$$\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t} = K_H \frac{\partial \theta}{\partial z} \quad (3.24)$$

$$\frac{\partial \bar{e}}{\partial t} = Su_*^2 \quad RiSu_*^2 + \frac{\partial T}{\partial z} \quad c_\epsilon \frac{u_*^3}{\kappa z} \quad (3.25)$$

$$\frac{\partial \theta_g}{\partial t} = \frac{1}{C_g} (I \# \quad \sigma \theta^4) \quad H_0 \quad K_m(\theta_g \quad \theta_m) \quad (3.26)$$

As expressões acima são discretizadas espacialmente em relação ao domínio apresentado pela Figura 3.1. Assim, obtêm-se o seguinte conjunto:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} = P \quad \frac{1}{z_{(i/2)+1} \quad z_{i/2}} (u_{*i+1}^2 \quad u_{*i}^2) \quad (3.27)$$

$$\frac{\partial \bar{\theta}_i}{\partial t} = \frac{1}{z_{(i/2)+1} \quad z_{i/2}} (u_{*i+1} \theta_{*i+1} \quad u_{*i} \theta_{*i}) \quad (3.28)$$

$$\frac{\partial \bar{E}_i}{\partial t} = S_i u_{*i}^2 \quad Ri_i S_i u_{*i}^2 + \frac{T_i \quad T_{i-1}}{z_i \quad z_{i-1}} \quad c_\epsilon \frac{u_{*i}^3}{\kappa z_{i/2}} \quad (3.29)$$

$$\frac{\partial \theta_g}{\partial t} = \frac{1}{C_g} (I \# \quad \sigma \theta^4) \quad H_0 \quad K_m(\theta_g \quad \theta_m) \quad (3.30)$$

Na equação (3.29),  $T_i$  é o fluxo turbulento vertical de  $E$ . Ele é definido nos níveis principais e parametrizado da forma (COSTA et al., 2011):

$$T_i = \frac{5,5 K_{m_{i+1}} + K_{m_i}}{\sigma_E} \frac{u_{*i+1}^2 \quad u_{*i}^2}{z_{(i/2)+1} \quad z_{i/2}} \quad (3.31)$$

Considerando que  $u_*$  tende a zero em  $h$  e que o topo do domínio não é uma barreira rígida, a condição limite para  $T_i$  é:

$$T_i = \frac{5,5 K_{m_i}}{\sigma_E} \frac{u_{*i}^2}{2 \quad h \quad z_{i/2}} \quad (3.32)$$

Segundo McNider et al. (1995), o número de Richardson e o cisalhamento do vento são calculados nos níveis intermediários, onde o número de Richardson no nível mais próximo da superfície é dado por:

$$Ri_1 = \frac{g \quad \rho}{\Theta} \frac{z_1}{z_0} \frac{\theta_1}{z_0} \frac{\theta_g}{u_1^2 + v_1^2}, \quad (3.33)$$

e nos outros níveis:

$$Ri_i = \frac{g(z_i \quad z_{i-1})}{\Theta} \frac{\theta_i \quad \theta_{i-1}}{(u_i \quad u_{i-1})^2 + (v_i \quad v_{i-1})^2} \quad (3.34)$$

Por fim, o cisalhamento do vento em todos os níveis intermediários é obtido através da seguinte expressão:

$$S_i = \frac{((u_i \quad u_{i-1})^2 + (v_i \quad v_{i-1})^2)^{1/2}}{z_i \quad z_{i-1}} \quad (3.35)$$

É importante lembrar que a componente meridional do vento é nula em todos os níveis, assim as equações apresentadas acima são reduzidas.

O modelo é integrado por 40 horas através do método de Rung-Kutta de 4° ordem,



utilizando um código em linguagem Fortran. As simulações são realizadas variando a velocidade no topo da CLE de 1 até  $3m.s^{-1}$  para uma CLE com 1, 2, 3 e 5 níveis entre a superfície e o topo. São realizadas seis simulações, uma para cada nível e outras duas variando ligeiramente a condição inicial para a energia cinética turbulenta para 3 e 5 níveis.

Após o término das simulações os arquivos de dados gerados são analisados através de ferramentas gráficas como o Gnuplot e o R Studio.

### 3.6 Análise Dinâmica

A integração de um sistema dinâmico fornece muitas informações sobre o comportamento das soluções, assim, após realizar as simulações para cada um dos níveis, os dados obtidos são trabalhados visando a extração dos máximos locais de  $E$ ,  $\theta$  e  $u$ , isto é feito numericamente através de um script em linguagem Fortran. Tais informações são muito importantes para a construção dos diagramas de bifurcação para as variáveis. Estes diagramas são fundamentais para a análise dinâmica do modelo, pois é através destes que as regiões propícias ao caos são identificadas. Os gráficos são construídos utilizando o programa Gnuplot versão 4.6, no qual os picos locais são plotados em relação a um parâmetro fixado.

Após a construção e análise dos diagramas, as faixas de  $u_G$  que apresentam características caóticas são verificadas através de sua previsibilidade. Para a aplicação de tal método, testa-se a sensibilidade do modelo às condições iniciais. Isto é realizado através da construção e comparação de atratores e séries temporais para duas simulações realizadas com diferentes parâmetros de entrada. Novamente, faz-se uso do Gnuplot, além do software R Studio para visualizar os resultados obtidos. Estes são comparados e discutidos na próxima seção.

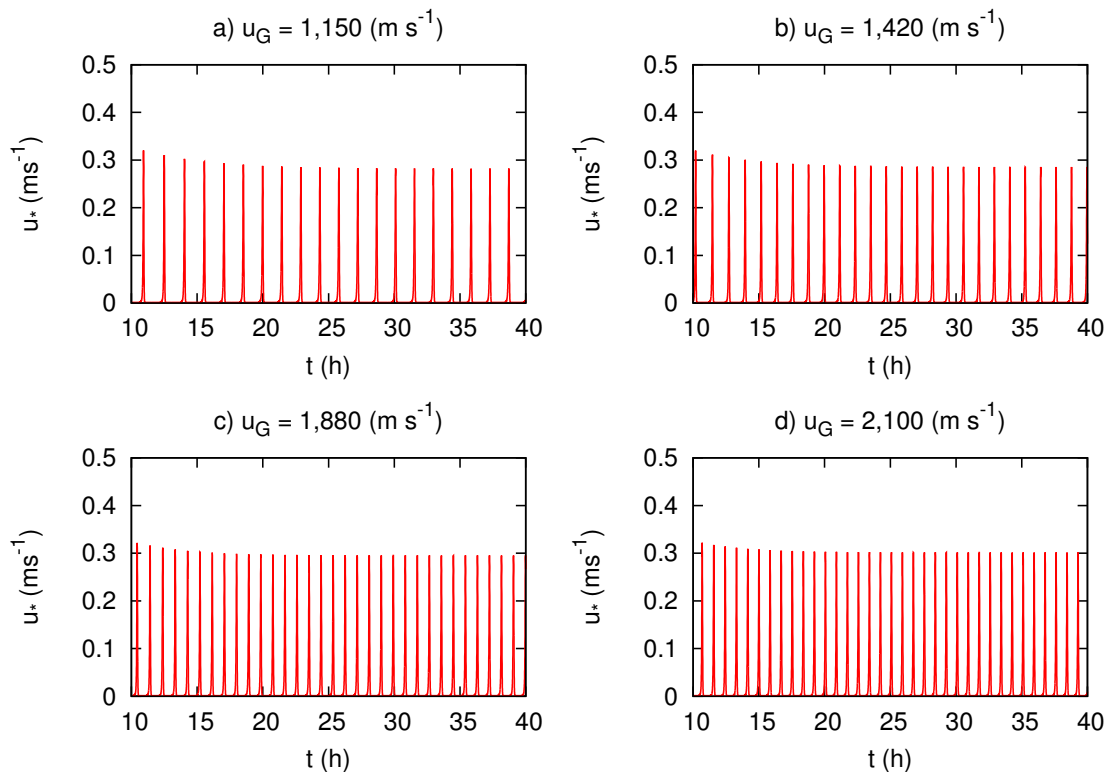
## 4 RESULTADOS

### 4.1 Comportamento do Modelo para Diferentes Níveis

As primeiras informações obtidas através da integração do modelo revelam que este é fortemente influenciado pelo forçante mecânico no topo da CLE e pelo número de níveis utilizados entre este e a superfície. A seguir, discute-se os resultados obtidos através das séries temporais para  $u_*$  e da análise do comportamento dinâmico apresentado pelo modelo. Tal avaliação é realizada elaborando diagramas de bifurcação para  $u$ , através da extração de seus máximos locais. Tais gráficos são a fonte principal de informações sobre o sistema dinâmico; neles, busca-se identificar regiões que apresentem características caóticas, indicadas pela presença de pontos de bifurcação.

A Figura 4.1 apresenta as séries obtidas para  $u_*$  para uma camada com apenas um nível entre a superfície e o topo do domínio. Observa-se que as soluções obtidas para diferentes magnitudes de  $u_G$  apresentam características periódicas, ou seja, os eventos intermitentes apresentam periodicidade, semelhante ao que ocorre no modelo de van de Wiel et al. (2002). Analisando a Figura 4.1, também é possível ver que a magnitude da velocidade de fricção não varia com o aumento do forçante mecânico, contudo sua frequência se intensifica a medida que este se eleva, como mostram os gráficos a) e d).

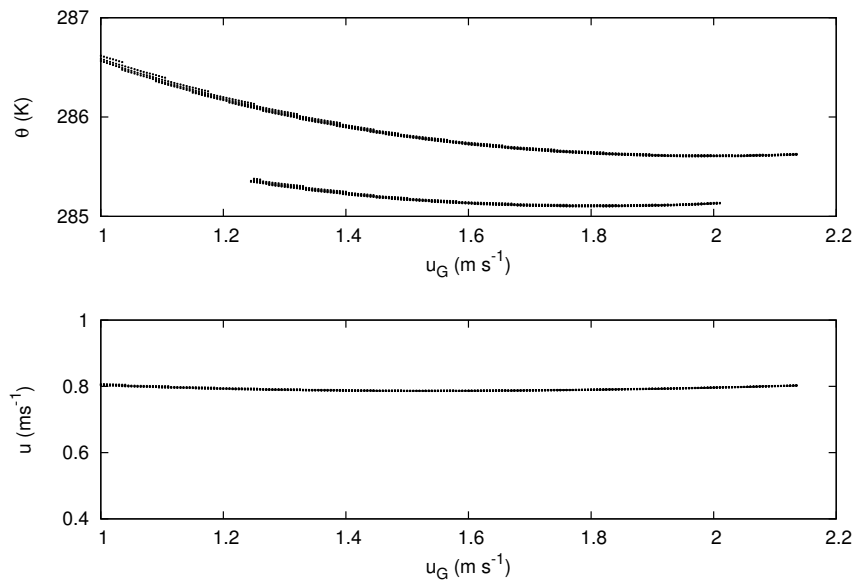
Figura 4.1: Evolução do modelo para velocidades de vento geostrófico distintas no topo da CLE para um nível entre a superfície e o topo do domínio.



Analisando os diagramas de bifurcação obtidos para  $\theta$  e  $u$ , Figura 4.2, observa-se que

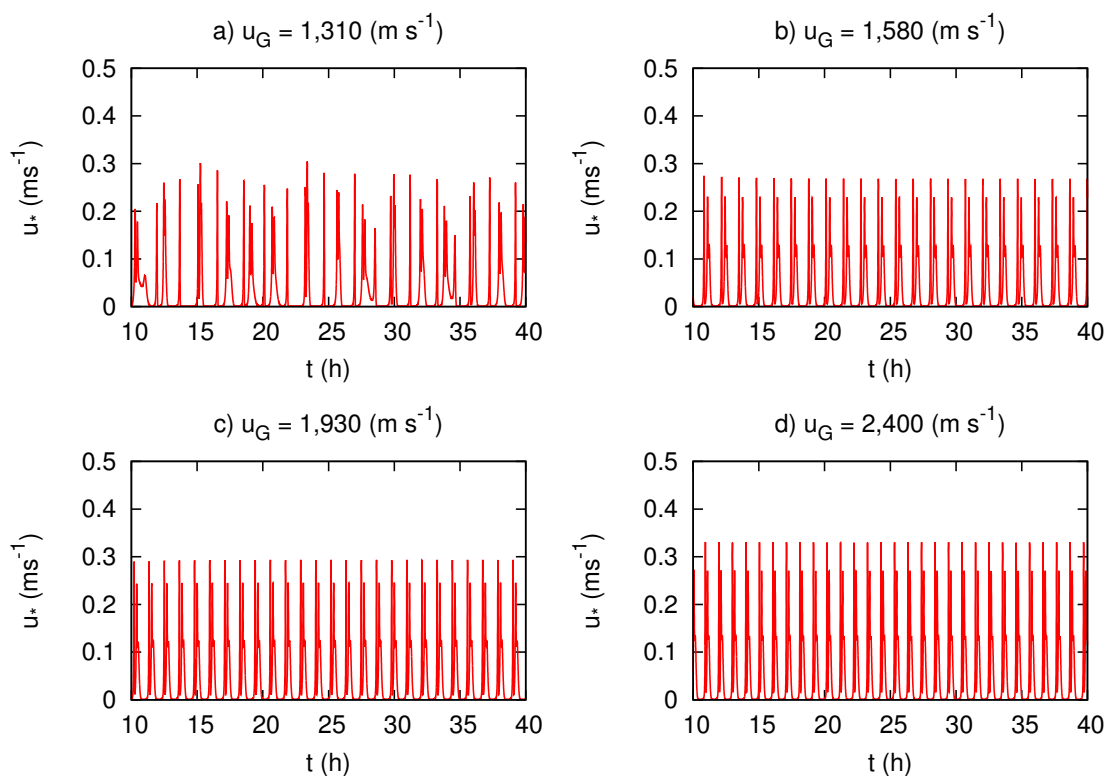
não há regiões potenciais no qual possam existir pontos de bifurcação. Para apenas um nível entre a superfície e o topo as soluções apresentam comportamento periódico. Logo, para este caso, deduz-se que o sistema não apresenta características caóticas.

Figura 4.2: Diagrama da bifurcação para os picos locais de  $\theta$  e  $u$  quando  $n = 1$ .



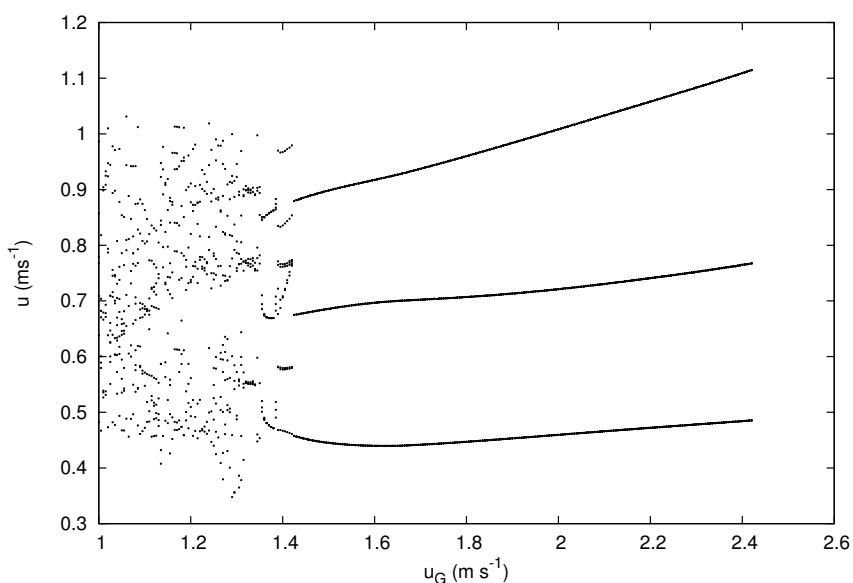
A Figura 4.3 apresenta as séries obtidas para  $u_*$  para dois níveis entre a superfície e o topo da camada limite. Vê-se que as soluções apanhadas para diferentes valores de  $u_G$  ainda se mostram periódicas, em sua maioria, contudo, observa-se que para  $u_G = 1,31 \text{ m s}^{-1}$  a solução não apresenta periodicidade. Em a) os valores máximos para  $u_*$  estão na faixa de  $0,3 \text{ m s}^{-1}$ , enquanto que em b), o comportamento estritamente periódico apresenta máximos abaixo desse valor. Em c), quando  $u_G = 1,93 \text{ m s}^{-1}$ , a magnitude de  $u_*$  aumenta até um valor próximo a  $0,3 \text{ m s}^{-1}$  e com o aumento da velocidade do vento geostrófico em d), os máximos ultrapassam este valor.

Figura 4.3: Evolução do modelo para velocidades de vento geostrófico distintas no topo da CLE para dois níveis entre a superfície eo topo do domínio.



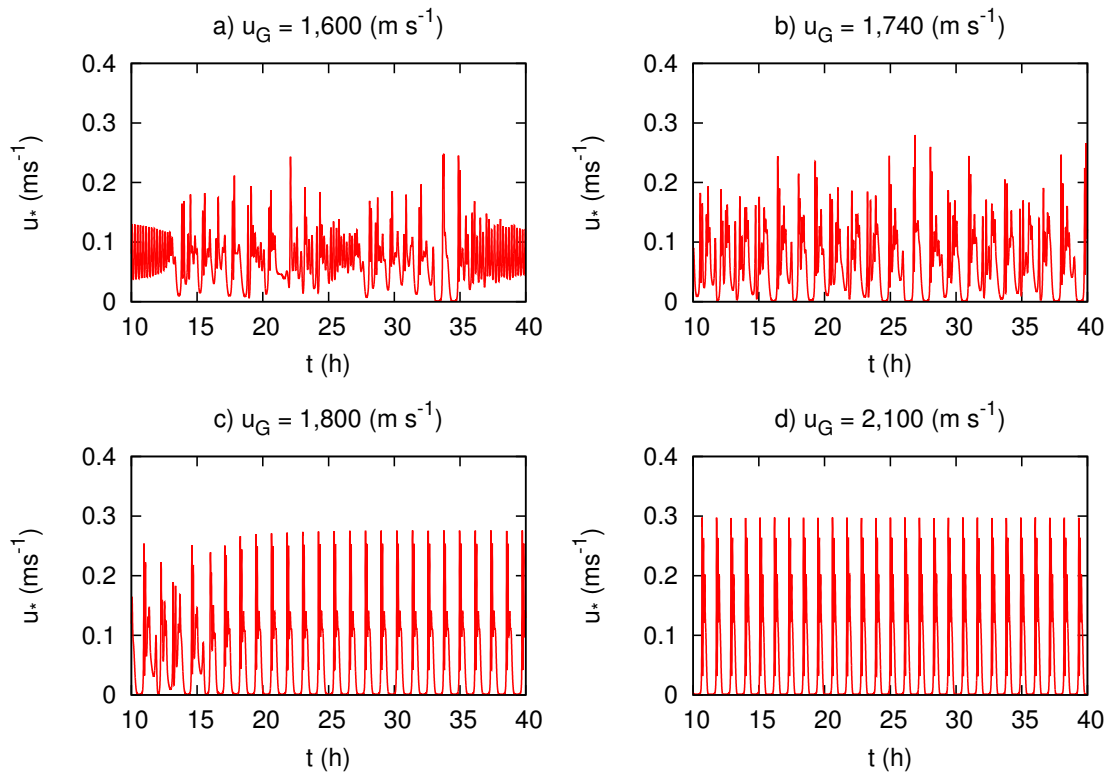
Construindo o diagrama de bifurcação para a referida quantidade de níveis, apresentado na Figura 4.4, pode-se ver características caóticas na região entre  $u_G = 1,2 \text{ ms}^{-1}$  e  $u_G = 1,4 \text{ ms}^{-1}$ , faixa que se mostra propícia a incidência de pontos de bifurcação. Observando novamente as séries temporais, Figura 4.3, vê-se que o valor de  $u_G$  para qual a solução se torna aperiódica se encontra nesta faixa. Para valores de vento geostrófico maiores que  $1,5 \text{ ms}^{-1}$ , observa-se um comportamento estritamente periódico, como o apresentado no diagrama da Figura 4.2. Contudo, esta região é caracterizada pela presença de período 3 (três linhas bem definidas), o que segundo Li e Yorke (1975) implica em caos.

Figura 4.4: Diagrama da bifurcação para os valores máximos de  $u$  em relação a  $u_G$  para  $n = 2$ .



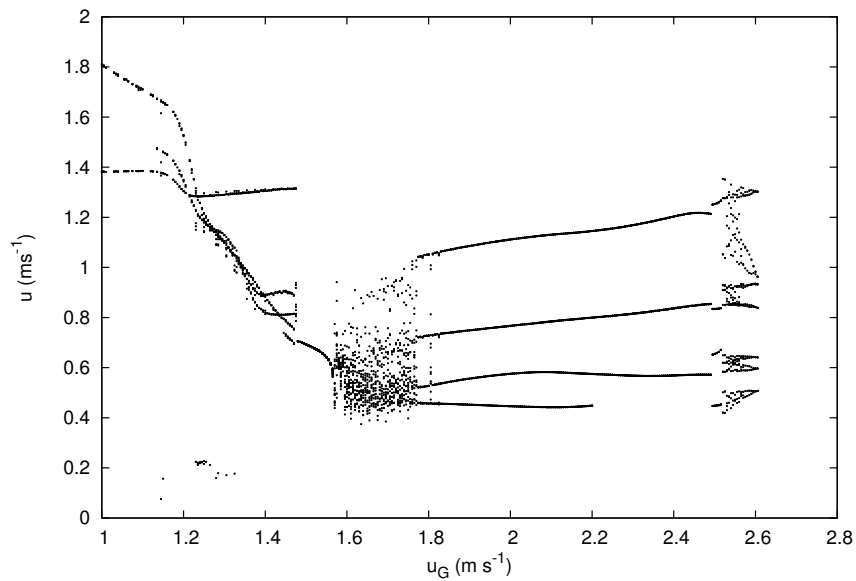
A Figura 4.5 apresenta as séries temporais adquiridas para a velocidade de fricção para três níveis entre a superfície e o topo da CLE. Em a) se pode ver o aumento da complexidade das soluções e a ocorrência de eventos intermitentes não periódicos, com máximos em torno de  $u_* = 0,25\text{m s}^{-1}$ . Em b) a complexidade das soluções diminui, contudo a não periodicidade persiste e o aumento da velocidade do vento geostrófico faz com que os valores médios da velocidade de fricção aumentem em relação a a). O gráfico em c) mostra um intervalo de 5 horas em que a solução ainda se mostra aperiódica, porém, a partir de 20 horas de simulação, a intermitência volta a apresentar características periódicas, no qual o valor médio de  $u_*$  ultrapassa  $0,25\text{m s}^{-1}$ .

Figura 4.5: Evolução do modelo para velocidades de vento geostrófico distintas no topo da CLE para  $n = 3$ .



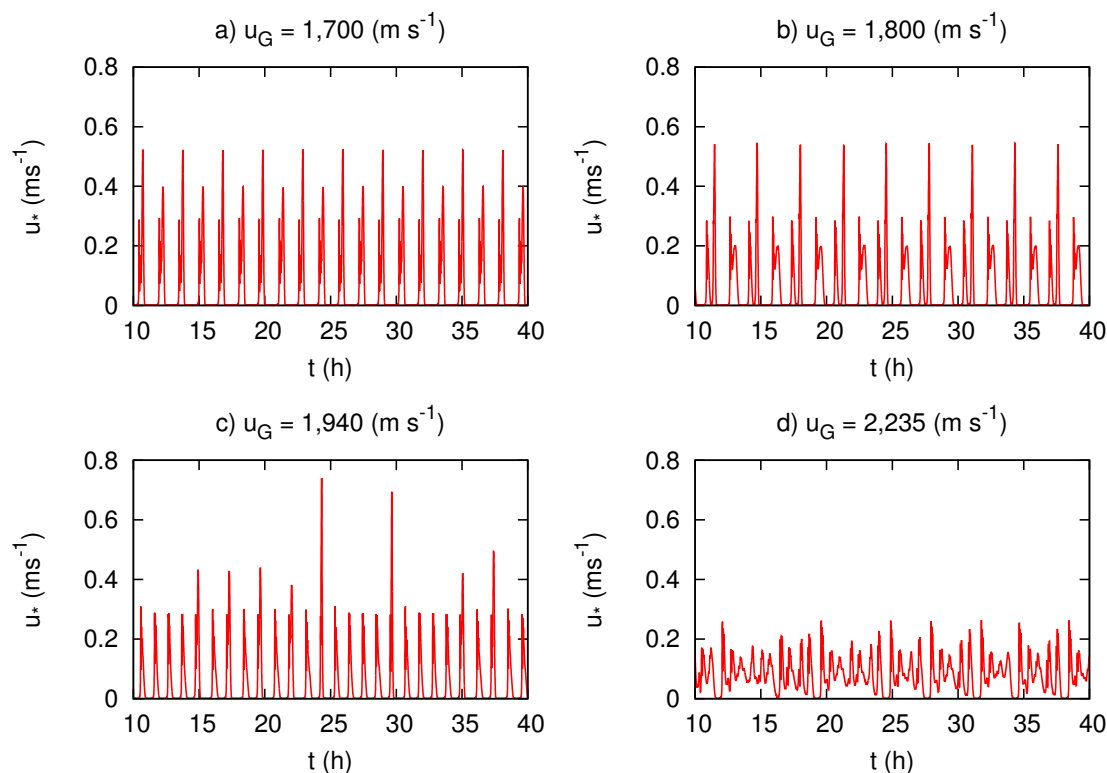
O diagrama de bifurcação elaborado para  $n = 3$ , Figura 4.6, revela um comportamento mais detalhado que o obtido para o de dois níveis entre os limites do domínio. Observa-se que as soluções são periódicas até  $1,6 \text{ m s}^{-1}$ ; entre este valor e  $1,8 \text{ m s}^{-1}$  há uma região claramente caótica em que se tem pontos de bifurcação para  $u_G$  em torno de  $1,75 \text{ m s}^{-1}$ .

Figura 4.6: Diagrama da bifurcação para os valores máximos de  $u$  em relação ao forçante mecânico para  $n = 3$ .



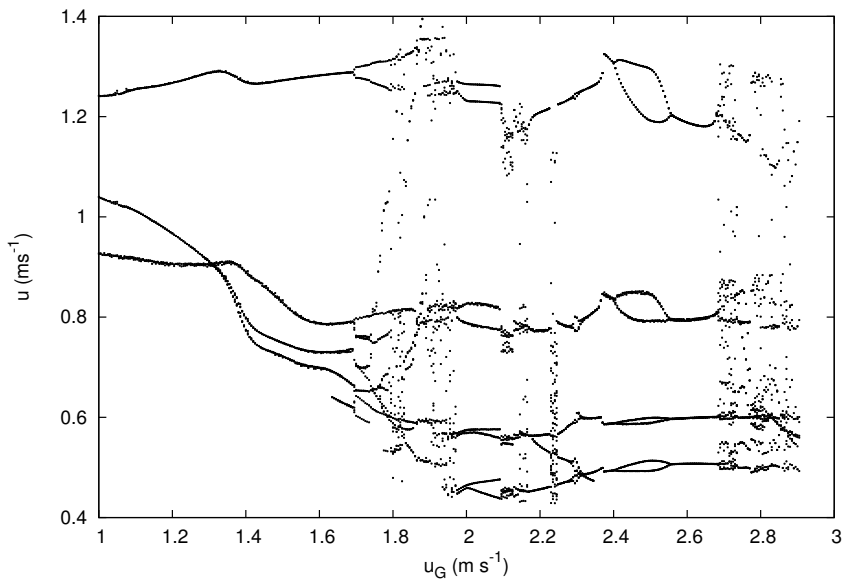
A Figura 4.7 apresenta a dependência do sistema em relação ao vento geostrófico no topo da CLE para cinco níveis entre a superfície e a altura máxima do domínio. Observa-se que com o aumento da magnitude do vento, a turbulência se intensifica e a ocorrência de eventos intermitentes pode ser observada.

Figura 4.7: Evolução do modelo para velocidades de vento geostrófico distintas no topo da CLE.



Plotando o diagrama de bifurcação para os picos locais de  $u$  em relação a  $u_G$ , Figura 4.8, para  $n = 5$ , obtém-se os resultados mais interessantes do trabalho. Para o mesmo intervalo observado no diagrama anterior, as soluções apresentam características caóticas. Contudo, observa-se várias outras regiões em que este estado se repete, próximo a  $u_G = 2 \text{ m s}^{-1}$  e entre  $2,2$  e  $2,4 \text{ m s}^{-1}$ . Além disso, apesar da região em torno de  $u_G = 2,8 \text{ m s}^{-1}$  ser considerada periódica, tem-se a presença de soluções com período 3. Li e Yorke (1975) provaram através de teoremas que a existência de tais áreas revelam certa instabilidade e imprevisibilidade do sistema, que implicam o caos. Isto se deve ao fato de que, apesar destes locais apresentarem uma infinidade de pontos periódicos, existem incontáveis pontos que não são assintoticamente periódicos.

Figura 4.8: Diagrama da bifurcação para os valores máximos de  $u$  em relação ao forçante mecânico para uma CLE com 5 níveis.



A partir das análises realizadas, pode-se testar a sensibilidade do sistema em relação às condições iniciais e assim comprovar as afirmações.

## 4.2 Sensibilidade às Condições Iniciais

A análise da previsibilidade de um sistema dinâmico é bastante usual, na literatura, sabe-se que o sistema mais clássico para tal diagnóstico foi o desenvolvido por Lorenz (1963). Este sistema é composto por três equações:

$$\frac{dx}{dt} = \sigma(y - x) \quad (4.1)$$

$$\frac{dy}{dt} = \rho x - y - xz \quad (4.2)$$

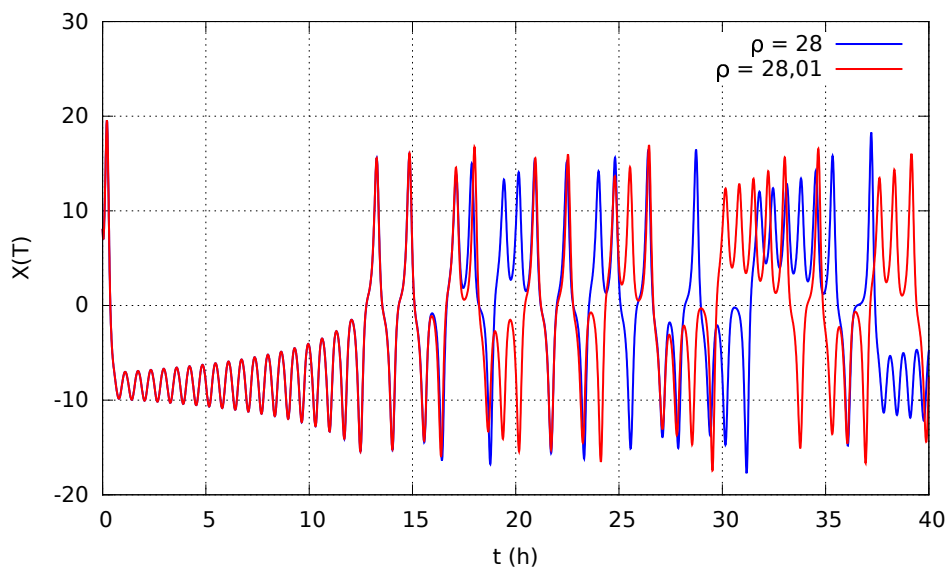
$$\frac{dz}{dt} = xy - bz \quad (4.3)$$

na qual  $\sigma$  é o número de Pradtl,  $\rho$  o número de Rayleigh e  $b$  um parâmetro qualquer. Os valores assumidos por tais parâmetros são 10, 28 e  $8/3$ , respectivamente. Reproduzindo este sistema, constroem-se as séries temporais para a variável  $x$  do conjunto de equações e assim, compararam-se as soluções obtidas para dois valores de  $\rho$  diferentes. Primeiramente, reproduz-se o sistema para  $\rho = 28$ , depois, faz-se  $\rho = 28,01$ , e então avaliam-se as soluções. Os resultados obtidos são apresentados na Figura 4.9. Observa-se que as soluções iniciam em pontos próximos e apresentam o mesmo comportamento até  $t = 15$  horas, após esse período, as séries temporais passam a divergir e assumem comportamentos completamente diferentes, como os mostrados em  $t = 20$ ,  $t = 30$  e  $t = 38$ .



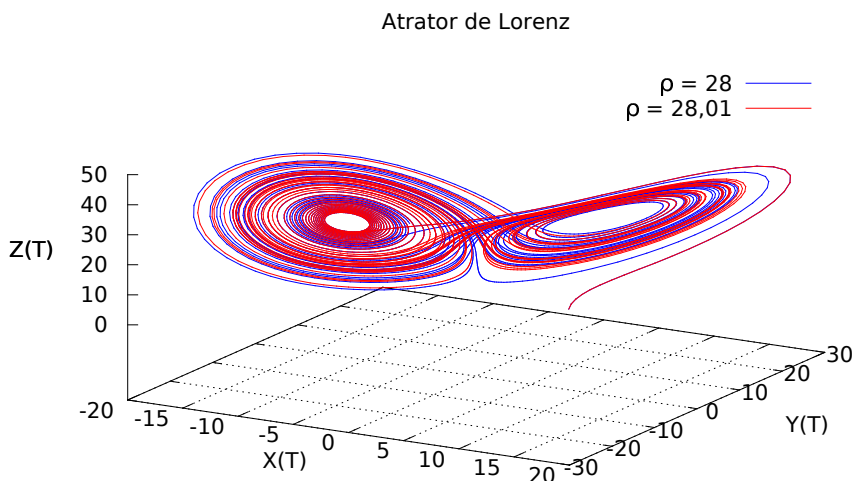
obtido para  $u_G = 1,77 \text{ m s}^{-1}$  quando  $n = 3$

Figura 4.9: Divergência entre as séries temporais para a variável  $x$  do sistema de Lorenz.



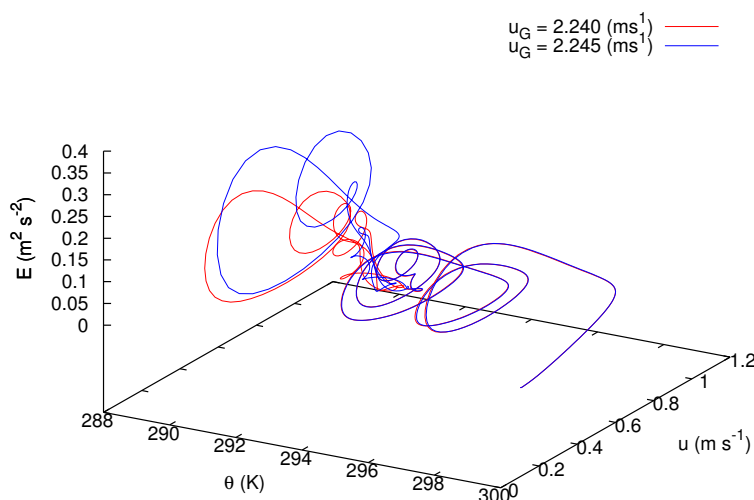
Posteriormente, plotando o gráfico das soluções em três dimensões, obtém-se a clássica imagem do atrator de Lorenz. Na Figura 4.10, tem-se os dois atratores resultantes da integração do sistema para  $\rho = 28$  e  $\rho = 28,01$ . Evidenciando a sensível dependência do mesmo em relação aos seus parâmetros de entrada.

Figura 4.10: Atrator de Lorenz para  $\rho = 28$  e  $\rho = 28,01$ .



O mesmo trabalho realizado para o sistema de Lorenz é aplicado ao modelo visando analisar o comportamento dinâmico apresentado pelo mesmo. Plotando o gráfico das soluções para  $E$ ,  $\theta$  e  $u$ , obtém-se a imagem de um atrator. A Figura 4.11 apresenta dois atratores obtidos através de diferentes valores de  $u_G$ , elaborados de forma reduzida para facilitar a visualização de suas órbitas. Observa-se que as soluções variam à medida que o vento geostrófico aumenta, mesmo que este acréscimo seja pequeno.

Figura 4.11: Dependência das soluções obtidas em relação ao forçante mecânico para cinco níveis entre a superfície e o topo da camada para 10 horas de simulações.



Como já visto, um dos primeiros indícios de caos em um sistema dinâmico é sua dependência em relação às condições iniciais. Quando tal característica se faz presente, alterando levemente o valor inicial de um de seus parâmetros, o comportamento temporal da solução sofrerá perturbações que a conduzirá a um estado completamente distinto, tal qual o sistema de Lorenz (1963) aqui apresentado.

A Figura 4.12 apresenta dois atratores obtidos através das simulações realizadas dentro do domínio estipulado para o modelo proposto. A única diferença entre as integrações numéricas é a condição inicial para a energia cinética turbulenta, alterada levemente de  $0,05000 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$  para  $0,05001 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$ . Apesar de parecer insignificante, o acréscimo de três casas decimais proporciona um comportamento completamente diferente das órbitas, muito similar ao apresentado por Lorenz (1963). Além disso, a magnitude de  $u_G$  para o qual tal resultado foi obtido se encontra dentro da faixa caótica indicada pelos diagramas de bifurcação das Figuras 4.6 e 4.8. A sensibilidade às condições iniciais também pode ser visualizada por meio da comparação entre as séries temporais para as duas simulações, Figura 4.13. Note que, novamente, as séries apresentadas correspondem as mesmas faixas mostradas pelos diagramas. Observa-se que o gráfico em a) quando  $E_0 = 0,05001 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$  apresenta valores médios de  $u_*$  na faixa de  $1,5 \text{ m s}^{-1}$ , muito superiores aos de  $E_0 = 0,05000 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$ , que se encontram na faixa de  $0,5 \text{ m s}^{-1}$ . Em b) essa discrepância diminui e as curvas apresentam um comportamento mais semelhante, porém ainda distinto. Em c), a divergência aparece apenas a partir de 25 horas e o comportamento das curvas é levemente distinto. No gráfico d) outro resultado interessante aparece, até  $t = 15$  horas, o comportamento das soluções são idênticos, para  $t > 15$  horas, quando  $E_0 = 0,05000 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$ , a solução apresenta comportamento não periódico, enquanto que para  $E_0 = 0,05001 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$ , a solução apresenta comportamento periódico.

Figura 4.12: Divergência entre as órbitas do atrator para 5 níveis entre a superfície e o topo do domínio para 20 horas de simulações.

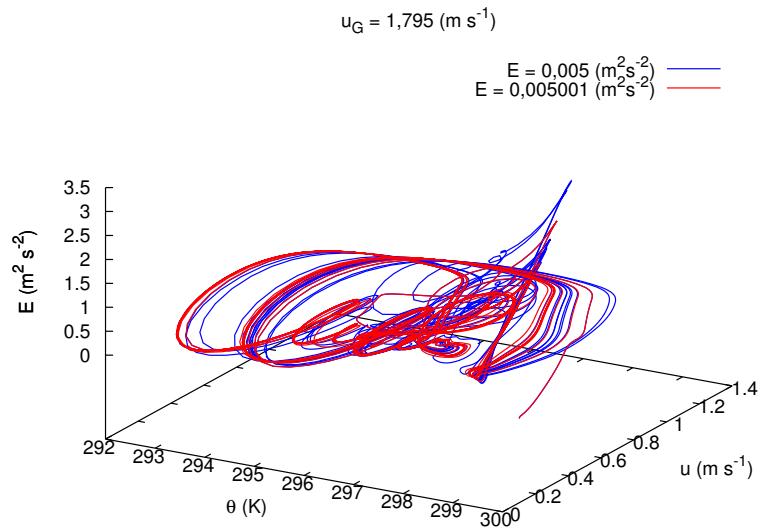
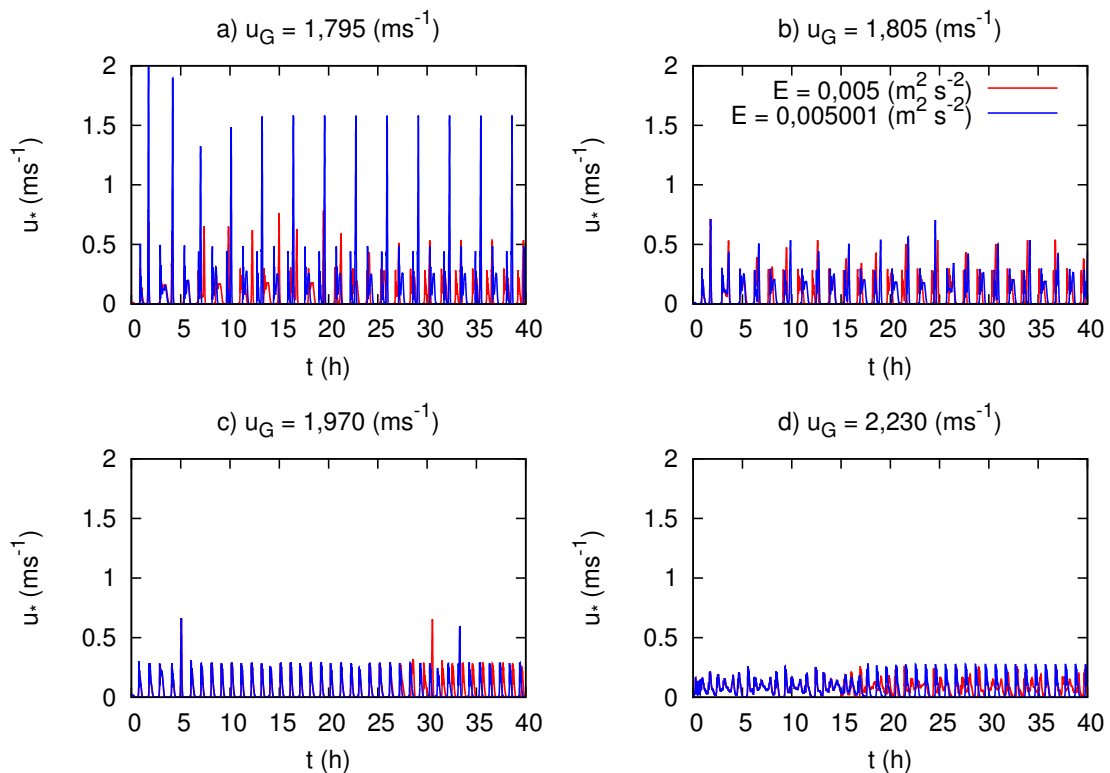


Figura 4.13: Sensibilidade às condições iniciais.



O mesmo comportamento é obtido para uma CLE com três níveis entre a superfície e  $h$ , evidenciando a complexidade das soluções. As órbitas dos atratores adquiridos, Figura 4.14, divergem claramente entre si e as séries temporais para a faixa de  $u_G$  entre  $1,6$  e  $1,8 \text{ ms}^{-1}$ , Figura 4.15, também apresentam tal característica.

Figura 4.14: Divergência entre as órbitas do atrator para 3 níveis entre a superfície e o topo da camada limite para 20 horas de simulações.

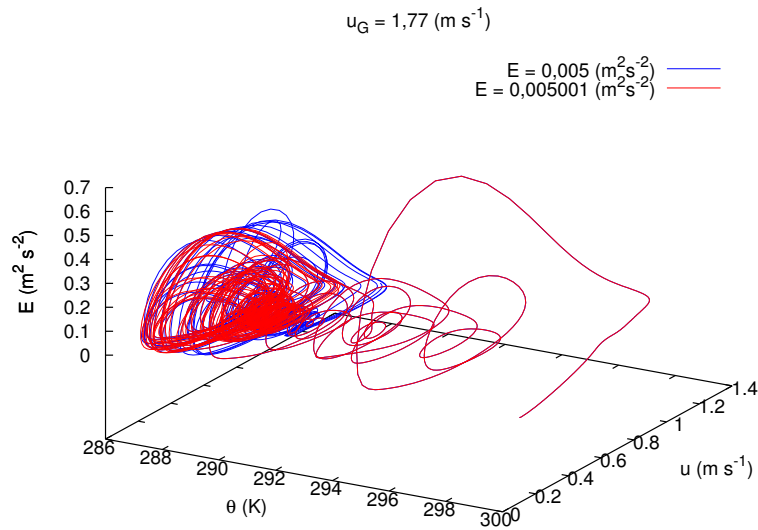
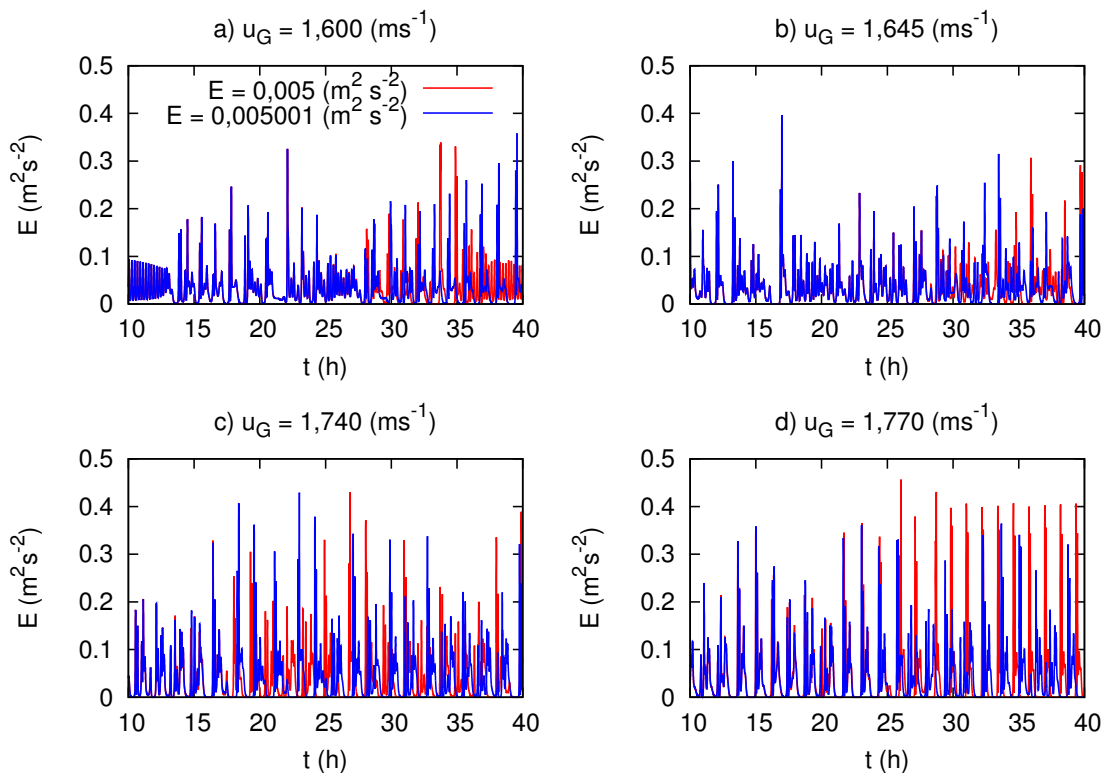


Figura 4.15: Sensibilidade às condições iniciais para  $n = 3$ .



As informações obtidas através do diagrama de bifurcação para  $n = 5$  evidenciam claramente um comportamento caótico apresentado pelo modelo, pois além da existência de pontos de bifurcação, tem-se a presença de soluções periódicas com período 3, semelhante ao mostrado por (COSTA et al., 2011). Ademais, percebe-se também que quanto

maior o número de níveis entre a superfície e o topo da CLE, melhor é a descrição dinâmica da mesma.

## 5 CONCLUSÕES

Assim, através dos resultados aqui obtidos, pode-se afirmar que o modelo é capaz de reproduzir o comportamento intermitente apresentado por uma camada limite estável, da mesma forma que os modelos apresentados por McNider et al. (1995), van de Wiel et al. (2002) e Costa et al. (2011). Em particular, os eventos intermitentes se mostram tanto periódicos, como os apresentados pelo modelo de van de Wiel et al. (2002), como também aperiódicos. Em alguns casos é possível verificar a complexibilidade das soluções como nas Figuras 4.5 e 4.7 para  $u_G = 1,60 \text{ ms}^{-1}$  e  $u_G = 2,235 \text{ ms}^{-1}$ . Outra característica do modelo é evidenciada através dos diagramas de bifurcação, na qual as regiões para qual o comportamento das séries temporais não são periódicas correspondem as faixas nas quais há incidência de pontos de bifurcação.

Pode-se confirmar também que o modelo apresenta grande sensibilidade as suas condições iniciais, na medida que órbitas vizinhas se separam exponencialmente com o decorrer do tempo, semelhante ao que ocorre no sistema de Lorenz (1963). O que segundo Strogatz (2014), caracteriza um sistema caótico. Isto é explícito nas Figuras 4.12, 4.13, 4.14 e 4.15, salientando a dificuldade de previsão das soluções do sistema de equações. Além disso, detectou-se a presença de soluções com período 3, assim como o modelo apresentado por Costa et al. (2011), sabe-se que a ocorrência de tal característica implica em caos.

Outra conclusão obtida através da realização deste trabalho é que a modelagem da camada limite estável para 1 ou 2 níveis entre a superfície e o topo não descrevem fielmente a dinâmica por trás dos processos ocorridos, como o observado através dos diagramas de bifurcação obtidos para ambos, Figuras 4.4 e 4.2. Assim, o número mínimo de níveis necessário para a obtenção de resultados mais precisos é 3. Contudo, sabe-se que o acréscimo de níveis aumenta a complexibilidade do sistema, tornando-o muito mais trabalhoso, pois o número de expressões aumenta, o que implica em um maior tempo de máquina.

Por fim, como seguimento ao estudo aqui desenvolvido, fica a implementação do método desenvolvido por Wolf et al. (1985), para a estimativa dos expoentes de Lyapunov. Tais expoentes são as taxas exponenciais médias de divergência ou convergência de órbitas próximas no espaço de fase e representam outra forma de diagnóstico para a identificação de sistemas caóticos.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ACEVEDO, O. C.; COSTA, F. D.; DEGRAZIA, G. A. Turbulence formulation influence on the coupling state of an idealized stable boundary layer. **Boundary-Layer Meteorology**, v. 145, p. 211–228, 2012.
- ACEVEDO, O. C.; COSTA, F. D.; OLIVEIRA, P. E.; PUHALES, F. S.; DEGRAZIA, G. A.; ROBERTI, D. R. The influence of submeso processes on stable boundary layer similarity relationships. **Journal of the Atmospheric Sciences**, v. 71, n. 1, p. 207–225, 2014.
- ACEVEDO, O. C.; FITZJARRALD, D. R. In the core of the night-effects of intermittent mixing on a horizontally heterogeneous surface. **Boundary-layer meteorology**, Springer, v. 106, n. 1, p. 1–33, 2003.
- ALLIGOOD, K.; SAUER, T.; YORKE, J. A.,(1996), **Chaos: An Introduction to Dynamical Systems**. [S.l.]: Springer, 2003.
- ARYA, P. S. **Introduction to micrometeorology**. [S.l.]: Academic press, 2001.
- BATTISTI, A. **Parametrização de Turbulência na Previsibilidade de Temperaturas Mínimas em um Modelo de Mesoescala**. 2014. 90 f. Dissertação (Mestrado em Meteorologia) — Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2014.
- BLACKADAR, A. High resolution models of the planetary boundary layer. **Advances in environmental science and engineering**, v. 1, n. 1, p. 50–85, 1979.
- COSTA, F. D.; ACEVEDO, O. C.; MOMBACH, J. C. M.; DEGRAZIA, G. A. A simplified model for intermittent turbulence in the nocturnal boundary layer. **Journal of the Atmospheric Sciences**, v. 68, n. 8, p. 1714–1729, 2011.
- DERBYSHIRE, S. H. Boundary-layer decoupling over cold surfaces as a physical boundary-instability. **Boundary-Layer Meteorology**, v. 90, p. 297–325, 1999.
- DUYNKERKE, P. Application of the  $E-\epsilon$  turbulence closure model to the neutral and stable atmospheric boundary layer. **Journal of the atmospheric sciences**, v. 45, n. 5, p. 865–880, 1988.
- FOX, R. W.; MCDONALD, A. T.; PRITCHARD, P. J. **Introduction to fluid mechanics**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2006.
- HIBBELER, R. C. **Resistência dos materiais**. [S.l.]: Pearson Prentice Hall, 2006.
- HOFF, A.; SILVA, D. T. da; MANCHEIN, C.; ALBUQUERQUE, H. A. Bifurcation structures and transient chaos in a four-dimensional chua model. **Physics Letters A**, Elsevier, v. 378, n. 3, p. 171–177, 2014.
- HOLTSLAG, A.; NIEUWSTADT, F. Scaling the atmospheric boundary layer. **Boundary-Layer Meteorology**, Springer, v. 36, n. 1-2, p. 201–209, 1986.
- KADANOFF, L. P. Roads to chaos. **Physics Today**, American Institute of Physics, v. 36, n. 12, p. 46–53, 2008.

LANDAU, L. Lifshitz, fluid mechanics. **Course of Theoretical Physics**, v. 6, 1959.

LI, T.-Y.; YORKE, J. A. Period three implies chaos. **The American Mathematical Monthly**, JSTOR, v. 82, n. 10, p. 985–992, 1975.

LORENZ, E. N. Deterministic nonperiodic flow. **Journal of the atmospheric sciences**, v. 20, n. 2, p. 130–141, 1963.

MAHRT, L. Stratified atmospheric boundary layers. **Boundary-Layer Meteorology**, v. 90, p. 375–396, 1999.

MAHRT, L.; VICKERS, D. Extremely weak mixing in stable conditions. **Boundary-layer meteorology**, Springer, v. 119, n. 1, p. 19–39, 2006.

MCNIDER, R. T.; ENGLAND, D. E.; FRIEDMAN, M. J.; SHI, X. Predictability of the stable atmospheric boundary layer. **Journal of the atmospheric sciences**, v. 52, n. 10, p. 1602–1614, 1995.

MONIN, A.; OBUKHOV, A. Basic laws of turbulent mixing in the surface layer of the atmosphere. **Contrib. Geophys. Inst. Acad. Sci. USSR**, v. 151, p. 163–187, 1954.

REVELLE, D. O. Chaos and “bursting” in the planetary boundary layer. **Journal of Applied Meteorology**, v. 32, n. 7, p. 1169–1180, 1993.

RUELLE, D.; TAKENS, F. et al. On the nature of turbulence. **Commun. math. phys**, World Scientific, v. 20, n. 3, p. 167–192, 1971.

SAVI, M. A. **Dinâmica não-linear e caos**. [S.l.]: Editora E-papers, 2006.

STALEY, D.; JURICA, G. Effective atmospheric emissivity under clear skies. **Journal of Applied Meteorology**, v. 11, n. 2, p. 349–356, 1972.

STROGATZ, S. H. **Nonlinear dynamics and chaos: with applications to physics, biology, chemistry, and engineering**. [S.l.]: Westview press, 2014.

STULL, R. B. **An introduction to boundary layer meteorology**. [S.l.]: Springer, 1988.

SUN, J.; MAHRT, L.; BANTA, R. M.; PICHUGINA, Y. L. Turbulence regimes and turbulence intermittency in the stable boundary layer during cases-99. **Journal of the Atmospheric Sciences**, v. 69, n. 1, p. 338–351, 2012.

van de WIEL, B.; MOENE, A.; JONKER, H.; BAAS, P.; BASU, S.; DONDA, J.; SUN, J.; HOLTSLAG, A. The minimum wind speed for sustainable turbulence in the nocturnal boundary layer. **Journal of the Atmospheric Sciences**, v. 69, n. 11, p. 3116–3127, 2012.

van de WIEL, B.; RONDA, R.; MOENE, A.; BRUIN, H. D.; HOLTSLAG, A. Intermittent turbulence and oscillations in the stable boundary layer over land. part i: A bulk model. **Journal of the atmospheric sciences**, v. 59, n. 5, p. 942–958, 2002.

VIANA, R. Introdução à dinâmica não-linear e caos. **Departamento de Física, Universidade Federal do Paraná-UFPR, Curitiba**, 2011.



WOLF, A.; SWIFT, J. B.; SWINNEY, H. L.; VASTANO, J. A. Determining lyapunov exponents from a time series. **Physica D: Nonlinear Phenomena**, Elsevier, v. 16, n. 3, p. 285–317, 1985.

YONG, D.; OKIISHI, T. H.; MUNSON, B. R. Fundamentos da mecânica dos fluidos: com cd. **São Paulo: Edgard Blucher**, 2004.