

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO PAMPA**

**MARIANA LIMA DURO**

**PROJEÇÕES ORTOGONAIS DE OBJETOS TRIDIMENSIONAIS NO ENSINO  
MÉDIO**

**Bagé  
2022**

**MARIANA LIMA DURO**

**PROJEÇÕES ORTOGONAIS DE OBJETOS TRIDIMENSIONAIS NO ENSINO  
MÉDIO**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Especialização em Ensino de Matemática no Ensino Médio: Matemática na Prática da Universidade Federal do Pampa, na modalidade EaD - Pólo Gravataí como requisito parcial para obtenção do certificado de Especialista em Ensino de Matemática para o Ensino Médio.

Orientador: Prof. Dr. Leandro Blass  
Coorientador: Anderson Luis Jeske Bihain

**Bagé  
2022**

Ficha catalográfica elaborada automaticamente com os dados fornecidos  
pelo(a) autor(a) através do Módulo de Biblioteca do  
Sistema GURI (Gestão Unificada de Recursos Institucionais) .

D947p Duro, Mariana Lima

Projeções ortogonais de objetos tridimensionais no ensino  
médio / Mariana Lima Duro.

39 p.

Trabalho de Conclusão de Curso(Especialização)--  
Universidade Federal do Pampa, ESPECIALIZAÇÃO EM MATEMÁTICA NO  
ENSINO MÉDIO (MATEMÁTICA NA PRÁTICA), 2023.

"Orientação: Leandro Blass".

1. Projeção ortogonal. 2. Geometria Espacial. 3.  
Aprendizagem cooperativa. I. Título.

**MARIANA LIMA DURO**

**PROJEÇÕES ORTOGONAIS DE OBJETOS TRIDIMENSIONAIS NO ENSINO MÉDIO**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Especialização em Ensino de Matemática no Ensino Médio: Matemática na Prática da Universidade Federal do Pampa, na modalidade EaD - Pólo Gravataí como requisito parcial para obtenção do certificado de Especialista em Ensino de Matemática para o Ensino Médio.

Trabalho de Conclusão de Curso defendido e aprovado em: 28/11/2022.

Banca examinadora:

---

Prof. Dr. Leandro Blass

Orientador

UNIPAMPA

---

Prof. Dr. Everson Jonatha Gomes da Silva

UNIPAMPA

---

Prof. Dra. Francieli Aparecida Vaz

UNIPAMPA



Assinado eletronicamente por **LEANDRO BLASS, PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR**, em 07/02/2023, às 15:03, conforme horário oficial de Brasília, de acordo com as normativas legais aplicáveis.



Assinado eletronicamente por **EVERSON JONATHA GOMES DA SILVA, PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR**, em 07/02/2023, às 15:06, conforme horário oficial de Brasília, de acordo com as normativas legais aplicáveis.



Assinado eletronicamente por **FRANCIELI APARECIDA VAZ, PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR**, em 08/02/2023, às 09:39, conforme horário oficial de Brasília, de acordo com as normativas legais aplicáveis.



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site [https://sei.unipampa.edu.br/sei/controlador\\_externo.php?acao=documento\\_conferir&id\\_orgao\\_acesso\\_externo=0](https://sei.unipampa.edu.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0), informando o código verificador **1050061** e o código CRC **877D6440**.

---

Dedico este trabalho aos familiares, aos amigos e aos alunos, que contribuíram para a construção da minha trajetória docente e possibilitaram as próximas reflexões.

## **AGRADECIMENTO**

Aos colegas de profissão e estudantes que participaram voluntariamente desta proposta.

Aos familiares e amigos que compreenderam as ausências.

Ao Prof. Dr. Leandro Blass que aceitou o desafio da orientação.

## RESUMO

Este relato de experiência corresponde a reflexões realizadas a partir de uma aula de matemática inédita desenvolvida como Trabalho de Conclusão de Curso de Especialização para Professores do Ensino Médio de Matemática Matemática na Prática. Tem-se como propósito apresentar e analisar uma proposta didática baseada em atividades envolvendo projeções ortogonais, utilizando como base a teoria piagetiana referente à construção da noção do espaço e à aprendizagem cooperativa. Para isso, os jogos *La Boca* e *Mental Blocks* foram utilizados como ponto de partida para compreender a construção da habilidade de realizar projeções ortogonais de objetos tridimensionais por estudantes do primeiro e do terceiro ano do ensino médio de uma escola pública estadual localizada no município de Canoas/RS, objetivo geral deste estudo. Os resultados obtidos a partir de um questionário aplicado aos estudantes, bem como à análise dos trabalhos desenvolvidos após jogarem, apontam que a aprendizagem cooperativa é uma importante estratégia para a construção da noção espacial, especialmente quanto às projeções ortogonais de sólidos geométricos. Conclui-se com este estudo que as atividades cooperativas envolvendo jogos de projeção ortogonal envolvem, aproximam e motivam os estudantes a aprender e a contribuir com a aprendizagem dos colegas.

**Palavras-chave:** Projeção ortogonal; Geometria Espacial; Aprendizagem cooperativa.



## ABSTRACT

This experience report corresponds to reflections made from an unpublished mathematics class developed as a Completion Work of a Specialization Course for High School Mathematics Teachers Matemática at Prática. The purpose is to present and analyze a didactic proposal based on activities involving orthogonal projections, using as a basis the Piagetian theory regarding the construction of the notion of space and cooperative learning. For this, the games *La Boca* and *Mental Blocks* were used as a starting point to understand the limits and possibilities of building the ability to perform orthogonal projections of three-dimensional objects by students of the first and third year of high school in a public school located in the city of Canoas/RS, general objective of this study. The results obtained from a questionnaire applied to students, as well as the analysis of the work developed after playing, indicate that cooperative learning is an important strategy for the construction of the spatial notion, especially regarding the orthogonal projections of geometric solids. It is concluded with this study that cooperative activities involving orthogonal projection games involve, approach and motivate students to learn and contribute to the learning of their colleagues.

**Keywords:** Orthogonal projection; Spatial Geometry; Cooperative learning.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Peças do jogo <i>La Boca</i> .....	23
Figura 2 – Tabuleiro.....	23
Figura 3 – Cartas do jogo <i>La Boca</i> .....	24
Figura 4 – Peças do jogo <i>Mental Blocks</i> .....	25
Figura 5 – Cartas do Jogo <i>Mental Blocks</i> .....	25
Figura 6 – Peças de madeira utilizadas nas montagens.....	28
Figura 7 – Trabalho cooperativo em equipe.....	31
Figura 8 – Trabalho cooperativo na representação gráfica.....	33
Figura 9 – Aprendizagem de Geometria pela perspectiva.....	34
Figura 10 – Representações em perspectiva.....	36
Figura 11 – Representações de projeções ortogonais.....	36

## SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO.....</b>	<b>12</b>
<b>2 CONCEITOS GERAIS E REVISÃO DE LITERATURA.....</b>	<b>15</b>
2.1 Revisão de literatura: Construção da Noção Espacial.....	15
2.2 Revisão de literatura: Aprendizagem Cooperativa e Aprendizagem Baseada em Equipes (ABE).....	19
<b>3 O PLANO DE AULA – ANÁLISE A PRIORI.....</b>	<b>21</b>
3.1 Proposta Didática - Jogos <i>La Boca</i> e <i>Mental Blocks</i> .....	22
3.1.1 Atividade 1 - formação dos grupos.....	22
3.1.2 Atividade 2 - os jogos.....	27
3.1.3 Atividade 3 - sistematização escrita.....	26
3.2 Proposta Didática - Projeção ortogonal.....	27
3.2.1 Atividade 1 - sistematização gráfica.....	28
<b>4 ANÁLISE A POSTERIORI.....</b>	<b>29</b>
4.1 O trabalho em grupo (ABE e aprendizagem cooperativa).....	30
4.2 Noção espacial e projetiva.....	32
<b>5 CONSIDERAÇÕES FINAIS.....</b>	<b>37</b>
<b>REFERÊNCIAS.....</b>	<b>39</b>

## INTRODUÇÃO

Este trabalho tem como propósito apresentar uma proposta didática de ensino e de aprendizagem de matemática a partir de projeções ortogonais (parte da Geometria Espacial) baseada na perspectiva piagetiana da aprendizagem cooperativa e da metodologia da Aprendizagem Baseada em Equipes (ABE), nesta mesma perspectiva. Essa proposta utiliza como instrumento jogos de projeções ortogonais colaborativos, conhecidos comercialmente como *La Boca* e *Mental Blocks*.

Com isso, tem-se como objetivo compreender a construção da habilidade de realizar projeções ortogonais de objetos tridimensionais por estudantes do primeiro e do terceiro ano do ensino médio de uma escola pública estadual localizada no município de Canoas/RS. Partindo desse objetivo principal, descreve-se como objetivos específicos: 1) realizar um estudo teórico sobre a habilidade da noção espacial e a sua construção cooperativa por meio de jogos em equipe; 2) proporcionar uma prática pedagógica visando a construção da noção do espaço a partir de projeções ortogonais por meio de jogos em equipe e 3) analisar a atuação dos discentes nesta prática observando sua aprendizagem por meio das ações executadas ao longo das atividades.

O presente estudo tem como justificativa pelo menos dois aspectos, primeiramente, pela inexistência, até onde se sabe, de estudos que tratem do referido tema, embora seja um problema bastante cotidiano e presente em provas de seleção como o Enem. Em segundo, observa-se, a partir de minha prática docente, a dificuldade evidente dos estudantes do ensino médio em visualizar objetos tridimensionais, analisando-os sob diferentes perspectivas. Neste caso, abordaremos a perspectiva ortogonal, por acreditar ser de mais simples compreensão e suas habilidades serem aplicadas a perspectivas em angulações diferentes.

A projeção ortogonal também é assunto no Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), sendo um dos tópicos utilizados pelo ENEM para avaliar a habilidade 6 da competência de Matemática de área 2, que se refere a "interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional". (SIBEMBERG; NOTARE, 2022, p.2).

Como mencionado, a metodologia será baseada na perspectiva cooperativa piagetiana, complementada pela Aprendizagem Baseada em Equipes (ABE), considerando a metodologia dos próprios jogos escolhidos para a prática pedagógica.

Por meio de uma pesquisa qualitativa exploratório-descritiva, a proposta consiste em dividir uma turma de primeiro ano e uma turma de terceiro ano do ensino médio em equipes para jogarem *La Boca* e *Mental Blocks*. Nessa proposta, a aprendizagem será avaliada pelo desempenho e pela ação dos estudantes ao jogar, bem como a partir das atividades posteriores propostas.

O jogo *La Boca* é cooperativo, mas também competitivo. A montagem da estrutura tridimensional (sorteada em uma pilha de fichas), cuja imagem apresenta uma perspectiva ortogonal (imagem bidimensional) de uma estrutura de blocos coloridos (em formato de cubos, paralelepípedos e “L”s tridimensionais), exige a montagem, considerando a perspectiva do oponente, que observa outra perspectiva ortogonal dessa mesma estrutura. Assim, embora essa montagem precise ser colaborativa para construir corretamente a estrutura tridimensional correspondente às duas visões opostas e utilizando todas as peças disponíveis, somente um dos jogadores (ou equipe) vence o jogo, aquele que obtiver menor pontuação, baseada no tempo de construção obtido em cada rodada, com os diferentes oponentes.

O jogo *Mental Blocks*, semelhante ao *La Boca*, é um jogo de montagem de estruturas tridimensionais com blocos, a partir de diferentes visões bidimensionais, sendo uma delas disponibilizada para cada equipe ou jogador. No caso deste jogo, ele é somente cooperativo, sendo que todos os jogadores compreendem um mesmo time, tendo apenas o tempo como oponente, com algumas modificações que deixam o jogo mais ou menos complexo.

Ambos os jogos, do ponto de vista educacional, abrangem diversas habilidades. A primeira, e mais desafiadora delas, é o desafio da visão espacial, a partir de uma representação bidimensional, exige rápidas tomadas de decisão, a partir do trabalho em equipe e, muitas vezes, da necessidade de liderança na gerência da montagem dos blocos, uma vez que os participantes podem se comunicar, mas não podem ver o projeto da outra equipe ou oponente. Além disso, é necessário obter a capacidade de reorganizar e reestruturar o pensamento, considerando que nem sempre a primeira construção é a que funciona para todas as visões ortogonais.

Para o desenvolvimento deste estudo, na sequência serão trazidos alguns conceitos teóricos sobre a habilidade da noção espacial e a sua construção cooperativa por meio de jogos em equipe. A partir desses estudos será descrita a metodologia que irá ao encontro de atingir aos demais objetivos do presente trabalho, delimitando os passos da proposta desenvolvida. Com isso, serão apresentados os

resultados e suas respectivas análises, a fim de compreender a construção da habilidade de realizar projeções ortogonais de objetos tridimensionais por estudantes do primeiro e do terceiro ano do ensino médio de uma escola pública estadual localizada no município de Canoas/RS. As considerações finais indicarão as perspectivas abertas por este estudo e finalizarão a proposta apresentada, deixando a ideia de continuidade e de novos estudos que possam ser realizados sob esta perspectiva da aprendizagem colaborativa a partir da projeção ortogonal de objetos tridimensionais.

## **2 CONCEITOS GERAIS E REVISÃO DE LITERATURA**

Neste capítulo serão apresentados os principais conceitos relacionados à construção da noção espacial, com ênfase na projeção ortogonal, baseados na perspectiva da aprendizagem cooperativa, de maneira complementar, de forma a organizar, justificar e elaborar a proposta didática aqui sugerida e analisada.

### **2.1 Revisão de literatura: Construção da Noção Espacial**

A Epistemologia Genética piagetiana tem em vista explicar o desenvolvimento humano, na perspectiva de compreender como se passa de um conhecimento menos complexo para um mais complexo. Como conclusão, Piaget define que “a criança constrói seu conhecimento por meio de uma experimentação ativa” (MONTTOITO; LEIVAS, 2012, p.23).

O texto de Monttoito e Leivas (2012), traz a perspectiva discutir como se dá a representação do espaço com foco no ensino de geometria, especialmente na educação infantil e nos anos iniciais do ensino fundamental. Assim, discutem sobre a necessidade de promover a independência, despertando curiosidade e iniciativa nas crianças para criarem sua “própria ideia das coisas” (p.25). Aqui, o propósito é discutir a mesma questão no contexto do ensino médio, de modo que as principais características das relações que compõem este processo sejam consideradas, entendendo que, em graus diferentes de complexidade, o processo do aprender é semelhante em qualquer etapa do desenvolvimento.

Partindo do princípio de que o conhecimento geométrico (assim como qualquer outro) é construído ativamente pelo sujeito, destaca-se o descaso com que esse vem sendo tratado nas escolas, muitas vezes deixado de lado ou apresentado de forma desconectada aos demais assuntos relacionados à matemática, ou ao cotidiano. Quando isso ocorre, observa-se que “o uso da representação dos entes matemáticos ocorre anteriormente à sua construção”, contrariando os estudos de Piaget (MONTTOITO; LEIVAS, 2012, p.25).

A Geometria Euclidiana faz parte dos currículos escolares da educação básica brasileira e seus postulados servem como base para a Geometria Espacial, cerne deste trabalho. Deste modo, no que tange ao raciocínio geométrico, em visão bidimensional e tridimensional, é importante que o estudante desenvolva essa percepção por meio da visualização, estabelecendo relações entre o que se propõe nas situações matemáticas e

na realidade, tendo a possibilidade de compreender formalmente o assunto, assim como sua aplicabilidade em diversas situações (SOUZA; AZEVEDO; ALVES, 2021, p.92)

Sobre isso, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC - BRASIL, 2018), documento que orienta o trabalho docente no Brasil, destaca que, no ensino médio, a matemática deve estar aplicada à realidade a partir de "ações que estimulem e provoquem seus processos de reflexão e de abstração, que deem sustentação a modos de pensar criativos, [...] que favoreçam a tomada de decisões [...]". (BRASIL, 2018, p.518). Assim, em interação com colegas e professora, os estudantes são estimulados não só a realizarem a tarefa (saber fazer) como a "investigar, explicar e justificar os problemas resolvidos, com ênfase nos processos de argumentação matemática" (p.19), compreendendo para além de fazer com êxito.

Destacando uma competência específica (Competência Específica 4), a BNCC traz:

Compreender e utilizar, com flexibilidade e fluidez, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas, de modo a favorecer a construção e o desenvolvimento do raciocínio matemático (BRASIL, 2018, p.530).

Essas representações matemáticas abrem portas a um conjunto de ferramentas para resolver problemas matemáticos. "Portanto, percebe-se que, do ponto de vista cognitivo, as aprendizagens fundamentais relativas ao raciocínio requerem a diversificação dos registros" (BRASIL, 2018, p.530). Assim, a habilidade específica EM13MAT407 traduz, especificamente, o que as atividades propostas tiveram como principal objetivo: "Interpretar e construir vistas ortogonais de uma figura espacial para representar formas tridimensionais por meio de figuras planas" (BRASIL, 2018, p.531).

A natureza da construção da noção de espaço "pode ocorrer naturalmente, experimentalmente, devido à própria intuição perceptiva que a criança adquire em seu desenvolvimento" (LEIVAS, 2009, p.61). Para Piaget e Inhelder (1993), conceitos como dentro, fora, ao lado, na frente, perto, longe, entre outros, são elaborados em primeiro lugar, chamadas de relações topológicas (MONTITO; LEIVAS, 2012, p.26). Somente após esta construção a criança é capaz de estabelecer relações variáveis conforme o ponto do observador ou da referência adotada, a perspectiva (relações projetivas), conforme o conteúdo que está sendo abordado neste trabalho. Simultaneamente, a criança também é capaz de construir as relações euclidianas,



baseadas em um sistema de referência fixo de relações métricas (sendo esta última a mais, se não a única, relação abordada na escola).

O que podemos afirmar até aqui é que, sem pensarmos em como se dá a construção do espaço na criança e sem dedicarmos atenção a este processo, o ensino de geometria é falho e, sem alicerce, apenas armazenará conhecimentos de uma maneira frágil, sem significados ou interconexões, apenas com o objetivo de cumprir o programa escolar - isto se considerarmos que a geometria chegue mesmo às salas de aula e não apareça apenas como anotações nos cadernos de registros escolares (MONTTOITO; LEIVAS, 2012, p.34).

Assim, dado que a representação espacial é “uma ação interiorizada”, não se pode ensinar geometria a partir da “imaginação de um dado exterior” (PIAGET; INHELDER, 1993, p.474). Nesse sentido, discutir apenas o reconhecimento de figuras planas e suas fórmulas de cálculo de área e perímetro, por exemplo, não contribui para a construção das relações que configuram a noção e o reconhecimento espacial (MONTTOITO; LEIVAS, 2012, p.25). Ensinar geometria (ou qualquer outra coisa) somente pela linguagem, desconsiderando o caráter ativo da aprendizagem, resulta em fórmulas decoradas desprovidas de reconhecimento e interiorização de conceitos fundamentais para a sua compreensão e aplicação desse conhecimento em diferentes contextos.

Esta mudança gradativa da percepção do espaço é descrita por Piaget e Inhelder (1993). A percepção é o ponto de partida, sendo sua representação construída posteriormente. Então, as relações topológicas correspondem às características dos objetos em si mesmos. Em contrapartida, as relações projetivas relacionam esses objetos uns aos outros sob diferentes pontos de vista (embora inicialmente sem conservar as dimensões, pois parte de um único ponto de vista), dando início a um processo de abstração. Ainda nesta etapa, a criança confunde o seu ponto de vista com o de outro observador, o que pode revelar “representações diferentes das que seriam corretas no que concerne às perspectivas” (MONTTOITO; LEIVAS, 2012, p.29). Sobre isso, os autores complementam: “[...] da mesma forma que as noções elementares de vizinhança e separação nas relações topológicas conduzem a uma geometria do objeto, a criança precisa coordená-las de modo a estabelecer uma geometria do espaço” (p.29). A importância das medidas é dada formalmente neste momento em que a diferenciação entre os pontos de vista é estabelecida e se consegue sair do espaço para o plano.

Uma questão importante consiste no que sempre é feito em Geometria. Primeiro, o plano representativo é desenvolvido. Posteriormente, ou quase nunca, o perceptivo. Talvez essa seja uma das questões para que ela seja

tão pouco desenvolvida em nossas escolas e haja tão pouco interesse em estudá-la (LEIVAS, 2009, p.63).

Embora, para Piaget, as relações euclidianas formam-se no indivíduo até a idade de 7-8 anos, em média (MONTTOITO; LEIVAS, 2012, p.29), na prática, observa-se que estudantes do ensino médio, a partir de 14 anos, ainda não as constituíram.

Da pré-escola até o ensino médio, o aluno passa, então, gradativamente, da geometria “tátil” e “real” para a formalização desta, tornando-se independente de objetos à mostra e, até mesmo, de desenhos, de modo que se vê capaz de “visualizá-la” apenas mentalmente [...] (MONTTOITO; LEIVAS, 2012, p.33).

O que muda, de fato, é que, na adolescência, os problemas passam a ser investigados, de forma a refletir sobre as relações possíveis para sua resolução. Esse é o chamado início do pensamento científico, para além do anterior, empírico, na busca por generalizações (MONTTOITO; LEIVAS, 2012, p.33). Nesse sentido, as relações construídas neste período possuem esse caráter de generalização. A projeção ortogonal, estudada junto à geometria espacial, trata de representações dos objetos no plano, com linhas de visualização perpendiculares a ele. Este é o ponto discutido nos jogos em questão neste estudo, considerando que “estudos revelaram, também, a importância de os alunos explorarem construções dinâmicas com projeção ortogonal antes de se aventurarem em construí-las” (SIBEMBERG; NOTARE, 2022, p.1). “Sobre esta arte de projeção [...] fundamenta-se o ensino da Perspectiva. Todas as outras artes de projeção, possíveis na Geometria Descritiva, deixam-se considerar como casos especiais desta arte” (SANTOS; GUEDES, 2007, p. 3).

Para construção de noções espaciais e a constituição do pensamento geométrico do ensino médio, além de compreender o processo da sua construção, é importante discutir a metodologia para seu ensino e sua aprendizagem. Sobre isso, ainda Piaget nos traz a ideia da aprendizagem cooperativa, também entendida na metodologia da Aprendizagem Baseada em Equipes. Esses conceitos serão discutidos no tópico a seguir.

## **2.2 Revisão de literatura: Aprendizagem Cooperativa e Aprendizagem Baseada em Equipes (ABE)**

O biólogo suíço Jean Piaget não só contribuiu com ideias sobre a construção da noção espacial em crianças, como também nos traz indícios de como ensiná-la. Na história da humanidade a aprendizagem é entendida como um processo idêntico ao de ensino, traduzida, por exemplo, em expressões como “processo de ensino-aprendizagem”. Porém, como já discutido anteriormente, o conhecimento não é “ensinado”, mas construído (NITZKE; FRANCO, 2002), talvez mais facilmente, por um processo de ensino qualificado.

Sobre isso, Piaget destaca as interações sociais como importante fator no desenvolvimento cognitivo, auxiliando na construção do conhecimento, que é individual. Assim surge a expressão “aprendizagem cooperativa”, na qual os integrantes de um grupo “não estejam apenas preocupados na aglutinação de pedaços de trabalho individual, mas realizem uma atividade coordenada com o objetivo de construir algo em comum, com a participação efetiva de todos” (NITZKE; FRANCO, 2002, p.26).

Para compreender a cooperação, antes é necessário entender o que é “operação” para Piaget. Esta se trata de uma ação interiorizada, reversível e parte de uma estrutura interna do sujeito. A cooperação, neste contexto, se caracteriza como uma “operação entre operações” (NITZKE; FRANCO, 2002, p.27. No caso das relações sociais, essas operações se dão na dimensão coletiva entre iguais, sem qualquer intervenção de uma autoridade, por exemplo. Desta forma, a cooperação também é um processo a ser construído. “Esta condição de ser capaz de cooperar, agindo em um ambiente de respeito mútuo, com ausência de hierarquia, no entanto, não é espontânea no sujeito, devendo ser construída da mesma maneira das outras estruturas cognitivas (NITZKE; FRANCO, 2002, p.27, MONTOITO; LEIVAS, 2012).

Nitzke e Franco (2002) destacam que a nossa sociedade não está preparada para atitudes cooperativas, adotando, frequentemente, “posturas competitivas e dependentes de um controle hierárquico” (NITZKE; FRANCO, 2002, p.27). Os autores ainda complementam:

Assim, não é porque dois ou mais sujeitos juntam-se na elaboração de um trabalho conjunto que a aprendizagem será melhorada. É necessário que esta interação entre os sujeitos gere atividades extras (explicações, desentendimentos, regulações mútuas) que irão acionar outros mecanismos cognitivos tais como elicitación do conhecimento, internalização ou demanda

cognitiva. O resultado destes é que irá resultar numa aprendizagem de melhor qualidade (NITZKE; FRANCO, 2002, p.27)

Entendendo que nossa sociedade é competitiva e individualista, Freitas (2005) destaca que, nesta sociedade, o conhecimento não basta para a própria constituição de uma sociedade mais justa, ao contrário, acaba sendo fator de prestígio social. Assim, com base no que nos foi apresentado por Piaget, a cooperação é dada por interações entre indivíduos com um objetivo em comum. Neste caso, individualmente a aprendizagem é constituída a partir da coordenação de pontos de vista diferentes, considerando a organização do pensamento do outro na construção do seu próprio. A cooperação é necessária para a construção coletiva à medida que

todos tenham objetivos comuns e sintam-se responsáveis pelo crescimento de todo o grupo [...] para aprendizagem de todos que fazem parte do processo, e um meio de socialização de saberes que possibilita a democratização do conhecimento sem preconceitos ou hierarquias, onde as diferenças e semelhanças de pensamento convergem para um propósito comum” (FREITAS, 2015, p.52).

Entendendo essa proposta de aprendizagem cooperativa, podemos destacar a importância dos trabalhos em pequenos grupos em sala de aula. Esses espaços propiciam, além do desenvolvimento da argumentação, o contato com diferentes percepções (OLIVEIRA; ARAUJO; VEIT, 2016). Os pesquisadores ainda destacam que em grupos os alunos “são capazes de resolver problemas mais complexos e que, além disso, as soluções encontradas são significativamente melhores do que aquelas produzidas individualmente pelo melhor membro do grupo [...]” (OLIVEIRA; ARAUJO; VEIT, 2016, p.965, FREITAS, 2015, TEIXEIRA; REIS, 2012).

Como metodologia de ensino, este trabalho aproxima-se da Aprendizagem Baseada em Equipes (ABE), embora não haja interesse aqui em seguir as etapas descritas na sua concretização, mas compartilham-se as concepções epistemológicas. Nesta perspectiva, valoriza-se a produção coletiva e na concepção de que o professor deve ser um facilitador da aprendizagem, sendo igualmente um aprendiz no processo (BANDEIRA; SILVA; VILELA, 2017).

Seguindo as ideias acima apresentadas, entendo a aprendizagem projetiva como a da própria cooperação como um processo de construção, descreve-se a metodologia adotada para o desenvolvimento da proposta didática deste estudo.

### 3 O PLANO DE AULA – ANÁLISE A PRIORI

Neste capítulo do estudo serão apresentados o tipo de pesquisa realizado e os métodos e procedimentos adotados para o desenvolvimento da aula inédita aplicada. Para isso, foi elaborada uma descrição minuciosa e rigorosa do objeto de estudo e das técnicas utilizadas nas atividades. Assim, essa investigação, de cunho qualitativo, expõe o desenvolvimento de uma proposta didática inédita, organizada em três encontros, com duração de dois períodos (1h20min) cada, desenvolvidos com uma turma de primeiro e outra de terceiro ano do ensino médio. Aqui, entende-se uma análise qualitativa, pelas palavras de Minayo (2012), como o fato de compreender o lugar do outro, considerando

a singularidade do indivíduo, porque sua subjetividade é uma manifestação do viver total. Mas também é preciso saber que a experiência e a vivência de uma pessoa ocorrem no âmbito da história coletiva e são contextualizadas e envolvidas pela cultura do grupo em que ela se insere. Toda compreensão é parcial e inacabada [...] interpretar é um ato contínuo que sucede à compreensão e também está presente nela: toda compreensão guarda em si uma possibilidade de interpretação, isto é, de apropriação do que se compreende. A interpretação se funda existencialmente na compreensão e não vice-versa, pois interpretar é elaborar as possibilidades projetadas pelo que é compreendido (p.623).

Correspondendo ao entendimento dessa singularidade de experiências, ao encontro da ideia de interpretação e compreensão parcial de uma realidade de Minayo (2012), esse relato de experiência fundamenta-se em uma pesquisa exploratória-descritiva. Para Gil (2017), pesquisas exploratórias buscam elencar hipóteses sobre uma situação, flexíveis em termos de planejamento, para se ter maior liberdade em observar e compreender diferentes aspectos da realidade analisada. É também descritiva, pois busca descrever o contexto da aplicação e da execução das atividades.

Participaram da oficina 15 alunos do terceiro ano e 30 alunos do primeiro ano do Ensino Médio de uma escola da rede estadual do Estado do Rio Grande do Sul, localizada no município de Canoas, em horário regular das aulas de Matemática. De modo geral, em cada uma das turmas os alunos foram organizados em dois grupos para a realização das atividades envolvendo os jogos e em duplas para as demais atividades de sistematização.

### **3.1 Proposta Didática - Jogos *La Boca* e *Mental Blocks***

Os jogos escolhidos para esta aula foram *La Boca* e *Mental Blocks*. Fugindo um pouco dos objetivos da maioria dos jogos, as duas atividades propostas são cooperativas e com uma jogabilidade bem interativa baseada na projeção (ortogonal ou não) de sólidos geométricos no plano. Nesse sentido, os referidos jogos promovem a interação entre os alunos, considerando que eles farão parte de um mesmo time, estimulando assim um espírito de equipe. Ressalta-se que não foram encontrados trabalhos referentes a nenhum destes dois jogos, utilizando seus nomes como palavras-chave de busca. Assim, entende-se que esta aula não só é inédita para a autora deste trabalho, como parece ser também para os demais leitores desta prática.

Esta proposta didática teve como objetivos: 1) possibilitar o desenvolvimento e a ampliação do raciocínio lógico, 2) desenvolver a visão plana das várias faces de um mesmo sólido geométrico ou da combinação de dois ou mais sólidos, que formam faces de diferentes formas e 3) possibilitar o desenvolvimento ou ampliação da visão isométrica dos sólidos geométricos separadamente ou agrupados. O desenvolvimento destes pensamentos é fundamental para a construção das ideias de figuras espaciais.

Ainda, entendendo a importância dos diferentes pontos de vista que se pode ter sobre um mesmo objeto, de tal forma que dependendo da posição do observador sobre a peça pode-se obter diferentes informações, busca-se fazer uma analogia sobre pontos de vista sobre assuntos diversos, assim como acontece com os sólidos, a compreensão dos dilemas do cotidiano também depende do ponto de vista que quem trata sobre o assunto. Para aprofundar o que foi tratado na aula e de que forma foi conduzida, os próximos tópicos apresentam as etapas do roteiro traçado nos encontros.

#### *3.1.1 Atividade 1 - formação dos grupos*

Inicialmente foi explicada à turma a necessidade da divisão em dois grupos para o desenvolvimento das duas atividades (jogos), dando oportunidade para que todos participassem. Assim, seguiu-se para uma distribuição da metade dos estudantes de cada turma. Uma delas jogou *Mental Blocks* no primeiro encontro e *La Boca* no segundo encontro, da mesma forma, a outra metade jogou *La Boca* no primeiro encontro e *Mental Blocks* no segundo encontro. Após a divisão da turma, os

alunos foram direcionados a diferentes espaços da escola para conhecer a atividade que desenvolveram. O que jogou *Mental Blocks* permaneceu na sala de aula, e o grupo que jogou o *La Boca* foi encaminhado para um espaço externo da escola, próximo à quadra de esportes.

### 3.1.2 Atividade 2 - os jogos

#### a) La Boca

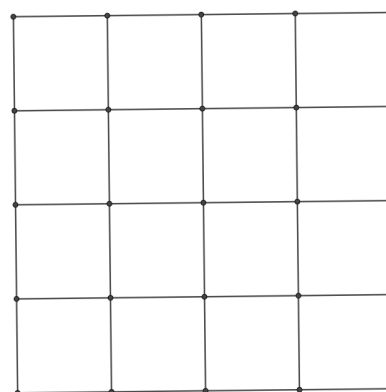
No local destinado ao jogo, foram mostradas as peças e a pasta contendo as cartas do jogo com as vistas ortogonais das montagens das peças que deveriam ser reproduzidas. Este jogo contém peças tridimensionais em MDF, compostas por um, dois ou três cubos de 30 cm de aresta. Seu objetivo é empilhar todas as peças (Figura 1), formando um bloco único sobre um tabuleiro 4x4 que foi reproduzido no chão, utilizando fita adesiva (Figura 2). Para isso, quatro jogadores (sendo dois de cada lado da montagem) serão os manipuladores das peças, portanto, não verão a carta selecionada, apenas serão guiados quanto à montagem por seus colegas, demais membros da equipe. Assim, o restante dos componentes do time orienta verbalmente os manipuladores para a montagem real, baseada na projeção ortogonal apresentada na carta sorteada.

Figura 1 – Peças do jogo *La Boca*



Fonte: A autora, 2022

Figura 2 – Tabuleiro

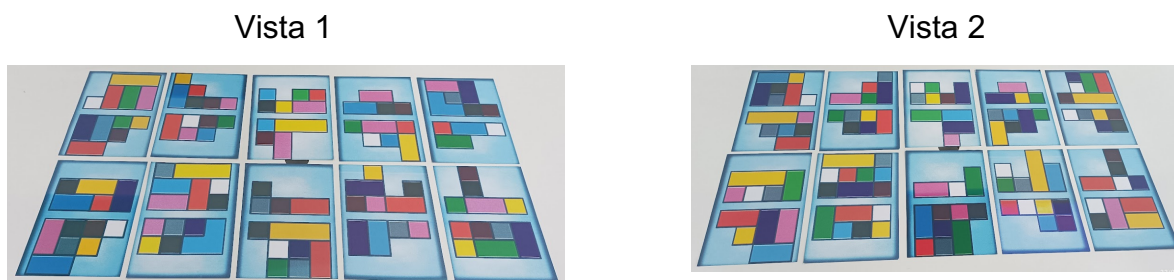


Fonte: A autora, 2022

A carta sorteada possui, em cada face, uma vista lateral, sendo uma oposta a outra, da figura pretendida. Então cada grupo montou a sua vista, porém, considerando a montagem baseada na vista dos demais colegas, já que as peças são compartilhadas e o resultado final é obtido a partir de uma elaboração única. As cartas

podem ser visualizadas na Figura 3, sendo que a vista 2 corresponde, respectivamente, à vista oposta de uma mesma montagem de peças.

Figura 3 – Cartas do jogo *La Boca*



Fonte: A autora, 2022

Os estudantes não podiam circular em volta da montagem, pois veriam tanto a carta do colega, como a vista dele. A ideia é que eles conseguissem formar o bloco corretamente, tendo somente a sua vista e conversando com os colegas que têm a outra vista. Em cada rodada mudaram-se os manipuladores, dando oportunidade de toda a equipe participar da atividade nesta posição.

É uma regra do jogo a necessidade de utilizar todas as peças disponíveis, mesmo sem que apareçam nas cartas e nas projeções, ou seja, precisavam dessas peças precisavam ser inseridas em locais que não poderiam ser vistas, conforme a projeção ortogonal correspondente. Também não é permitido que as peças fiquem sem apoio, ou seja, elas não podem formar "buracos" na montagem.

Para realizar o jogo, foi marcado o tempo que cada dupla de manipuladores levou para montar a vista, a partir das orientações dos colegas, ou seja, mesmo divididos em duas equipes, todos os jogadores tinham um objetivo em comum, cujo único oponente era o tempo. Ou seja, todo mundo jogava cooperativamente contra o relógio.

#### b) Mental Blocks

Na sala de aula, foram apresentados os elementos do jogo, as peças da Figura 4 para montagem dos blocos e as cartas que indicam uma das quatro projeções ortogonais, contendo as cores das peças, ou a visão isométrica do bloco a ser montado, em tons de cinza (Figura 5). Ao total, o jogo conta com 8 cartas de vistas para cada bloco a ser montado. Optou-se por os estudantes trabalharem em duplas,



reduzindo a quantidade de cartas de visão isométrica e mantendo as quatro cartas de vistas ortogonais coloridas. As peças têm o formato tridimensional com faces quadradas, triangulares ou retangulares e devem ser montadas de modo a corresponder a todas as vistas apresentadas nas cartas.

Figura 4 – Peças do jogo *Mental Blocks*



Fonte: A autora, 2022

Figura 5 – Cartas do Jogo *Mental Blocks*



Fonte: A autora, 2022

No modo de jogo proposto, os estudantes puderam utilizar livremente todas as peças disponíveis e o objetivo foi construir um bloco único em que possam ser observadas todas as imagens das cartas corretas. As duplas de estudantes não poderiam mostrar a sua carta às demais duplas, mas podiam movimentar-se em torno da mesa e conversar à vontade sobre a sua vista.

Para vencer este jogo é necessário que a figura esteja pronta no menor tempo possível. Assim como a experiência do *La Boca*, no *Mental Blocks* também é sugerida a montagem cooperativa, estando toda a equipe empenhada em realizar a montagem no menor tempo possível. A primeira rodada não foi contabilizada para servir de exemplo aos estudantes que ainda tinham alguma dúvida sobre o jogo e suas regras.

### 3.1.3 Atividade 3 - sistematização escrita

Para realizar o fechamento da atividade e conseguir identificar as ideias dos estudantes sobre suas aprendizagens e reflexões realizadas a partir das experiências dos jogos, realizou-se um questionário sobre as suas percepções durante o jogo, cujas respostas foram solicitadas por escrito. Essas ideias foram usadas para comparar com a atividade que será relatada posteriormente e verificar se os estudantes conseguiram superar alguns conceitos ainda não construídos corretamente ou mesmo ampliar aqueles que tinham uma pequena noção. As questões estão expostas abaixo, com um breve comentário sobre o que se esperava de cada uma delas.

- 1) Qual jogo você jogou? Como as turmas serão separadas em dois grupos, em cada um dos dois primeiros encontros cada um jogará um dos jogos propostos.
- 2) O que você achou do jogo? Espera-se aqui escutar as percepções dos alunos abrindo um espaço para os questionamentos seguintes.
- 3) Quais as dificuldades enfrentadas? Espera-se que, com esse momento para reflexão, os alunos consigam identificar quais foram seus maiores problemas ao jogarem.
- 4) Vocês conseguiram superá-las ao longo das partidas? Como? Espera-se que, ao terem reconhecido suas dificuldades, eles tenham pensado em formas de melhorar seu desempenho.
- 5) Quais as facilidades e dificuldades na identificação das peças e no seu posicionamento? Espera-se que os alunos comentem sobre a diferença que o ponto de vista pode ter acerca de uma mesma peça, pois, dependendo da figura espacial, sua visualização planejada pode diferir.
- 6) Quais as facilidades e dificuldades na organização do trabalho em equipe? Espera-se que os alunos relatem sobre suas interações com os colegas, positivas e negativas.

- 7) Quais as estratégias que o seu grupo utilizou para jogar mais rápido? Espera-se explorar como cada grupo criou estratégias que otimizaram seu desempenho de acordo com as individualidades do grupo.
- 8) Se você fosse jogar de novo, você faria alguma coisa diferente? Pensou em alguma forma de jogar diferente da que foi usada? Espera-se que os alunos elaborem soluções para as dificuldades relatadas nas questões anteriores.

Para avaliação das atividades foram acompanhados o desenvolvimento e a participação dos estudantes no jogo, considerando sua contribuição e colaboração aos demais colegas para alcançar o objetivo final da construção dos blocos. Além disso, utilizou-se os questionamentos respondidos por escrito para verificar suas fragilidades e suas potencialidades sobre os conteúdos discutidos e propostos nos objetivos da proposta didática. Para verificar as aprendizagens a partir de uma atividade de sistematização, seguiremos para o próximo tópico.

### **3.2 Proposta Didática - Projeção ortogonal**

Os dois primeiros encontros foram destinados aos jogos e às respostas ao questionário. Assim, no terceiro e último encontro teve-se como propósito atribuir uma tarefa oposta à realizada anteriormente, com intuito de observar as aprendizagens adquiridas a partir da representação espacial e das vistas ortogonais de blocos de madeira, solicitou-se que estes fossem representados em desenhos. Dessa forma, ampliam-se os objetivos:

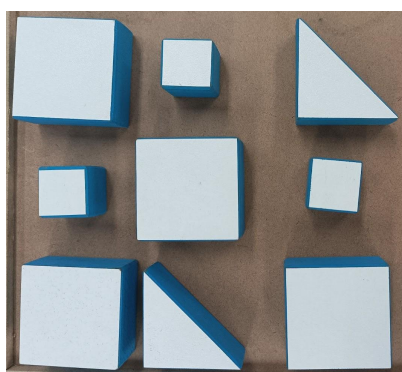
- Oportunizar aos alunos a construção das vistas de uma montagem diferente das montagens sugeridas nas cartas na aula anterior, com blocos de madeira semelhantes aos blocos utilizados nos jogos, especialmente observando a representação dos sólidos com faces triangulares, por exemplo.
- Observar se os alunos conseguiram identificar as diferentes faces de um mesmo bloco, e caso isso não tenha acontecido, auxiliar para que notem essas características.
- Comparar as respostas obtidas no questionário da aula anterior às atividades desenvolvidas nesta aula, a fim de observar se as dificuldades apresentadas foram sanadas e auxiliar para que isso ocorra.

### 3.2.1 Atividade 1 - sistematização gráfica

Solicitou-se aos alunos que, voluntariamente, fizessem uma montagem qualquer, com peças de madeira (Figura 6), usando as mesmas regras de montagem do jogo para serem desenhadas suas vistas ortogonais em folhas de papel quadriculado. Essa atividade foi proposta para ser desenvolvida em duplas, mas cada componente da dupla deveria fazer um ou mais desenhos, ou seja, ambos da dupla deverão desenhar.

Inicialmente, solicitou-se que as peças fossem representadas individualmente, considerando suas vistas superior, inferior e laterais (escolheu-se estas vistas por não terem sido discutidas ou visualizadas durante o jogo). Na sequência, os estudantes deveriam representar montagens mais complexas, contendo três ou mais blocos empilhados. Posteriormente, os blocos ainda seriam construídos por uma dupla e trocados entre as duplas para serem representados graficamente. Após prontos os desenhos, os membros da dupla devem discutir se concordam com as vistas reproduzidas para entregar à professora. As vistas frontais e traseiras também poderiam ser solicitadas aos estudantes, caso fossem mais rápidos que os colegas no desenvolvimento da tarefa.

Figura 6 - Peças de madeira utilizadas nas montagens



Fonte: A autora, 2022

Para avaliação das atividades, a entrega das vistas desenhadas por cada dupla foi utilizada para comparar o que os estudantes trouxeram por escrito com o que demonstraram nos desenhos, indicando novos indícios de dificuldades e aprendizagens desenvolvidas por meio das atividades propostas.

#### 4 ANÁLISE A POSTERIORI

Entendendo que esta é a parte central desse estudo, aqui serão apresentados os resultados obtidos com as atividades desenvolvidas, bem como a análise e interpretação desses resultados. Assim, as atividades desenvolvidas foram analisadas a partir do trabalho cooperativo em equipe e da noção espacial e projetiva, foco desta pesquisa. Mesmo as atividades sendo desenvolvidas em turmas de primeiro e de terceiro ano do ensino médio, obteve-se resultados de observação das práticas semelhantes, por este motivo as análises foram realizadas sem distinção entre as turmas. Assim, exceto por alguns comentários específicos, as respostas ao questionário também serão analisadas conjuntamente entre as turmas (101 e 301) e os jogos (*La Boca* e *Mental Blocks*), cujos objetivos e estratégias são semelhantes.

Para o questionário, aplicado em ambas as turmas, no total foram computadas 34 respostas. Sobre os jogos, de maneira geral, até os estudantes mais pessimistas e críticos os consideraram divertidos. Para outros estudantes esta característica veio acompanhada de outros adjetivos, tais como: complexo, bacana, intuitivo, interessante, cansativo, legal e interessante. Observa-se que todos estes podem ser considerados positivos, uma vez que "complexo" acompanhou a "diversão", dando a ideia de um tão buscado desafio em sala de aula e o "cansativo", quando acompanhado do "divertido", remete à necessidade de movimentação e argumentação, tão necessária aos estudantes, especialmente neste período pós-pandemia de covid-19.

Inicialmente, os alunos mostraram-se resistentes às atividades, talvez por não compreender, em um primeiro momento, as regras e a dinâmica dos jogos. Entretanto, essa resistência foi rapidamente superada, dando lugar a uma certa satisfação e vontade de pertencer à equipe. Observou-se que todos os estudantes tiveram participação ativa nas atividades, não permanecendo nenhum deles alheio aos grupos. Especialmente no jogo *La Boca*, os estudantes revezaram-se na "liderança", garantindo que todos tivessem a oportunidade de mexer as peças gigantes sob orientação dos demais membros da equipe.

No questionário aplicado ao final da atividade, foi perguntado sobre as dificuldades enfrentadas nos jogos. Em geral, os estudantes apontaram, principalmente, raciocínio e comunicação. Algumas dessas respostas estavam contidas em expressões tais como: "fazer a junção da imagem de cada equipe em

uma só", "interpretar a figura", "encaixar as peças com o outro grupo", "encontrar o ângulo de cada um" e "visão dos desenhos", que envolvem raciocínio e "juntar os pensamentos" e "consenso em grupo", que envolvem comunicação. Desta forma, a análise das atividades foi dividida nestes tópicos.

#### 4.1 O trabalho em grupo (ABE e aprendizagem cooperativa)

Como já discutido no referencial teórico, as interações sociais caracterizam a aprendizagem cooperativa, auxiliando significativamente no desenvolvimento cognitivo individual. Nestas atividades, a aprendizagem cooperativa ficou evidenciada, dado que os participantes não podiam "cada um fazer a sua parte", mas foi necessária realização de ações coordenadas com o objetivo de construir algo em comum. Assim, não só a aprendizagem de conceitos e relações matemáticas ficaram evidentes (estas serão descritas mais para frente), como o verdadeiro trabalho em equipe e suas dificuldades e superações foram observadas, como podemos ver na Figura 7, que representa um destes momentos cooperativos em cada um dos jogos propostos.

Figura 7 - Trabalho cooperativo em equipe



Fonte: A autora, 2022

Para dar mais argumentos ao que aconteceu de fato em termos de aprendizagem cooperativa, selecionou-se alguns termos utilizados pelos estudantes ao referirem-se sobre este tema nos questionários realizados. Exemplos das dificuldades que envolviam a comunicação, como citado pelos estudantes, podem ser observados em respostas como: "falta de comunicação, cada um queria mover as peças ao mesmo tempo, o que não dava certo". Sobre as dificuldades apontadas, os

estudantes, em sua maioria, afirmaram conseguir superá-las quando "pensaram como equipe", "agiram em conjunto", "gritaram menos", "tiveram mais paciência", "comunicaram-se com o outro grupo", "ouviram os colegas", "dialogaram". Ou seja, os estudantes reconheceram e aprenderam que a superação das dificuldades, sejam elas de raciocínio ou de comunicação, só poderiam ser superadas quando o trabalho cooperativo em equipes acontecesse.

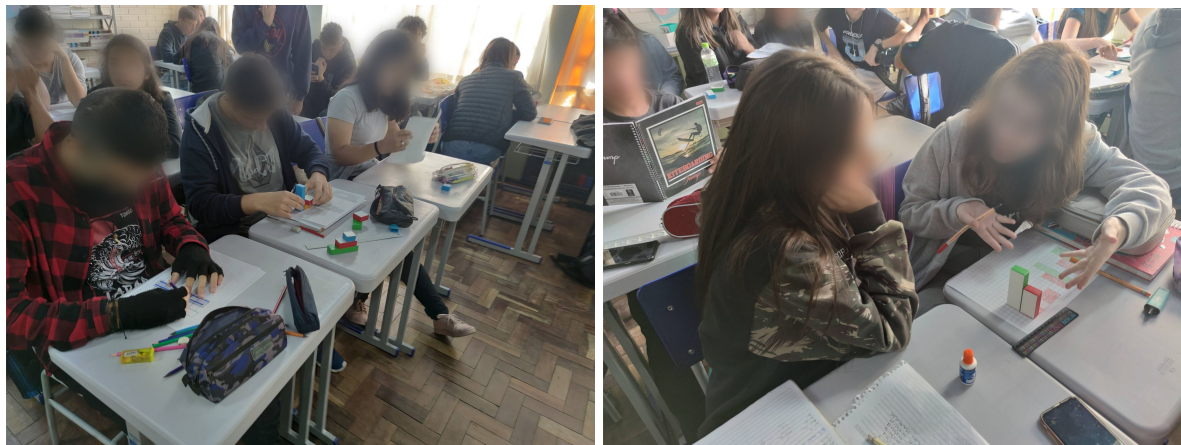
Especificamente sobre o trabalho em equipe, os estudantes apontaram o fato de já se conhecerem como uma facilidade, embora isso não tenha impedido dificuldades, como: "colocar as ideias em prática", "ouvir os colegas em meio a muitos gritos", "escutar o time", "falar todos ao mesmo tempo", "falta de paciência". Sobre isso, um estudante concluiu: "todo mundo ficava falando em cima do outro, o que dificultava; quando alguém tomava a frente e organizava, ficava mais fácil".

Entretanto, além dos problemas de comunicação observados e superados, uma argumentação mostrou um aprendizado ainda maior: "entender que um grupo precisava do outro". Ou seja, o trabalho cooperativo passou a ser entendido quando os estudantes, em meios aos gritos, próprios do estilo dos jogos, passaram a compreender que o jogo era, de fato, cooperativo e que um grupo precisava do outro para juntos obterem a vitória contra o relógio, produzindo algo em comum a partir da comunicação e da confiança.

Na segunda parte da atividade, referente à representação gráfica dos blocos em diferentes configurações, a cooperação mostrou-se essencial, conforme pode-se observar na Figura 8 abaixo. Nesta etapa, os estudantes, convidados a representar graficamente uma estrutura elaborada por eles próprios, buscaram nos colegas a confirmação de sua montagem, tal como nos jogos, em que a equipe precisava entrar em acordo para a "entrega" da montagem final e paralisação do tempo que estava correndo.

Aqui, o trabalho cooperativo foi ainda além da opinião sobre estratégias de realocação de blocos, mas induziu os estudantes a uma colaboração na qual seu próprio trabalho e resultado não estava envolvido, criando um clima de auxílio mútuo por um trabalho que era individual. Observa-se, desta forma, duas novas aprendizagens: a representação de projeção ortogonal de blocos de madeira e a aprendizagem em equipe numa atividade individual e da qual o seu sucesso não depende do sucesso do colega.

Figura 8 - Trabalho cooperativo na representação gráfica



Fonte: A autora, 2022

Superadas as dificuldades do trabalho em equipe e da compreensão que nem sempre a competição garante o sucesso de um grupo, passamos a refletir sobre as aprendizagens matemáticas desses estudantes, especialmente no que tange aos conhecimentos de noções de geometria espacial (posição e formato dos sólidos geométricos) e geometria projetiva, sendo ela ortogonal ou não, por meio de visualizações planas de faces ortogonais ou visões isométricas de um conjunto de sólidos. Esse assunto será discutido no tópico a seguir.

#### **4.2 Noção espacial e projetiva**

Como já discutido no referencial teórico, o conhecimento geométrico é construído ativamente pelo sujeito. E essa é a proposta das duas atividades desenvolvidas com os estudantes do primeiro e terceiro ano do ensino médio. Buscando iniciar uma discussão sobre geometria na escola, tentou-se construir geometria antes mesmo da representação matemática de seus elementos. Nesse sentido, o estudante teve a possibilidade de estabelecer relações matemáticas da realidade observada no jogo de forma orgânica e natural, entendendo que a representação espacial de entes geométricos é uma ação que ocorre dentro do sujeito e que não pode ser transmitida, mas compreendida a partir destas ações.

Aqui introduziu-se o estabelecimento de relações sobre as possíveis soluções, na busca por generalizações, no caso, estratégias comuns para "jogar melhor". Na Figura 9 observa-se os estudantes realizando conjecturas sobre os elementos



propostos no jogo, em termos de posição dos elementos tridimensionais, a partir das imagens bidimensionais disponibilizadas.

Figura 9 - Aprendizagem de Geometria pela perspectiva



Fonte: A autora, 2022

Além do que foi observado durante os jogos, os alunos também foram convidados a responder questões relacionadas à geometria aprendida. Especificamente sobre a identificação e o posicionamento das peças dos jogos, os estudantes relatam poucas facilidades a priori, elencando algumas dificuldades, tais como: "entender os desenhos", ou seja, compreender o ângulo da projeção, especificamente para o *Mental Blocks*. "Entender o raciocínio e a posição das peças do time adversário", considerando que "tinham peças que eram na horizontal, na prática, mas que no papel estavam representadas como quadrado", além de arrumar as peças quando "um lado dava certo e o outro errado". No jogo *Mental Blocks*, os alunos alegaram que "as peças coloridas eram mais fáceis de identificar, as isométricas eram mais difíceis, pois tínhamos que tentar olhar de um ângulo muito específico para dar certo", pois "cada jogador tinha uma visão diferente", embora "podíamos nos movimentar livremente".

No que tange às estratégias utilizadas pelos grupos, os alunos elencaram: "persistência e paciência", "atenção", "olhar vários ângulos", "ver o que cada um vê", "cada grupo monta sua imagem e encaixamos uma na outra", "esperar a outra equipe montar primeiro". Ou seja, perceberam que matemática exige paciência e atenção e que, naquela atividade, o ângulo de visão seria importante para atingir seus objetivos.

Em estratégias como: "montar primeiro os coloridos e depois o resto, tentando encaixar", ou, contraditoriamente, "quem tinha a visão completa montava a forma e

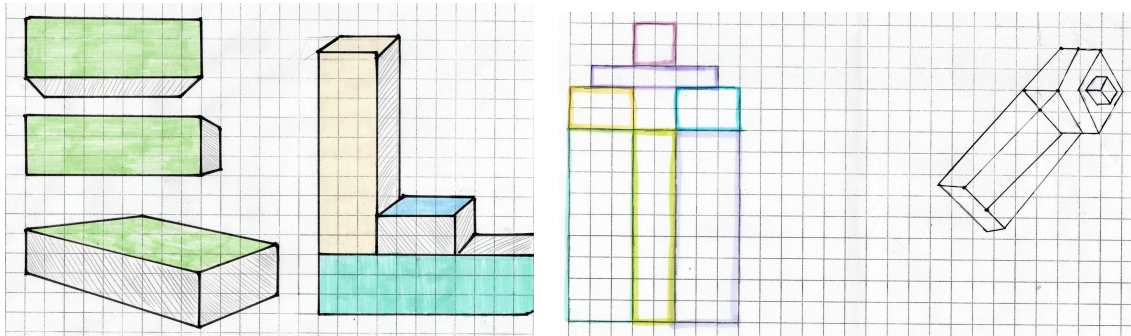
quem tinha as visões coloridas organizava", ou "começamos de cima para baixo, priorizando as peças menores", contradizendo, "começamos de baixo para cima e pelas peças menores", pode-se observar a riqueza das construções estratégicas, muito mais importante que sua efetividade, neste momento, mas a construção da necessidade de generalização, importante na geometria e na matemática como um todo.

Finalizando, os estudantes apresentaram o entendimento de que ganhar "não dependia só de um lado dar certo e que terminaríamos no mesmo tempo". Ou seja, os estudantes demonstraram refletir sobre o conceito de perspectiva, podendo avançar para uma discussão ainda mais ampla sobre diferentes pontos de vista e o quanto o ângulo de visão de uma situação pode torná-la diferente em diversos aspectos.

Conforme já mencionado, a sistematização das ideias mobilizadas no desenvolvimento da atividade vão ao encontro do que traz a BNCC (BRASIL, 2018), considerando que as questões induzem à construção de modelos a partir da resolução dos problemas propostos pelos jogos, mobilizando "seu modo próprio de raciocinar, representar, argumentar, comunicar e, com base em discussões e validações conjuntas, aprender conceitos e desenvolver representações e procedimentos cada vez mais sofisticados" (p.519), visando a reorganização do seu pensamento e a reflexão sobre novas estratégias ou ampliação delas.

Assim, a próxima atividade consistia em representar blocos tridimensionais em suas visões ortogonais, tais como explorado nos jogos. Inicialmente, os estudantes foram convidados a representar as peças individualmente, como uma atividade inicial de ambientação e de identificação de semelhanças e elementos que se repetem. Segundo a BNCC (BRASIL, 2018), essa identificação de regularidades e padrões exigem a "construção de uma argumentação consistente para justificar o raciocínio utilizado" (p.519) e a representação com a elaboração de registros (em diferentes linguagens) é um caminho para isso. Alguns alunos custaram a compreender a proposta, e insistiram em representar as peças em perspectiva, como se pode observar na Figura 10.

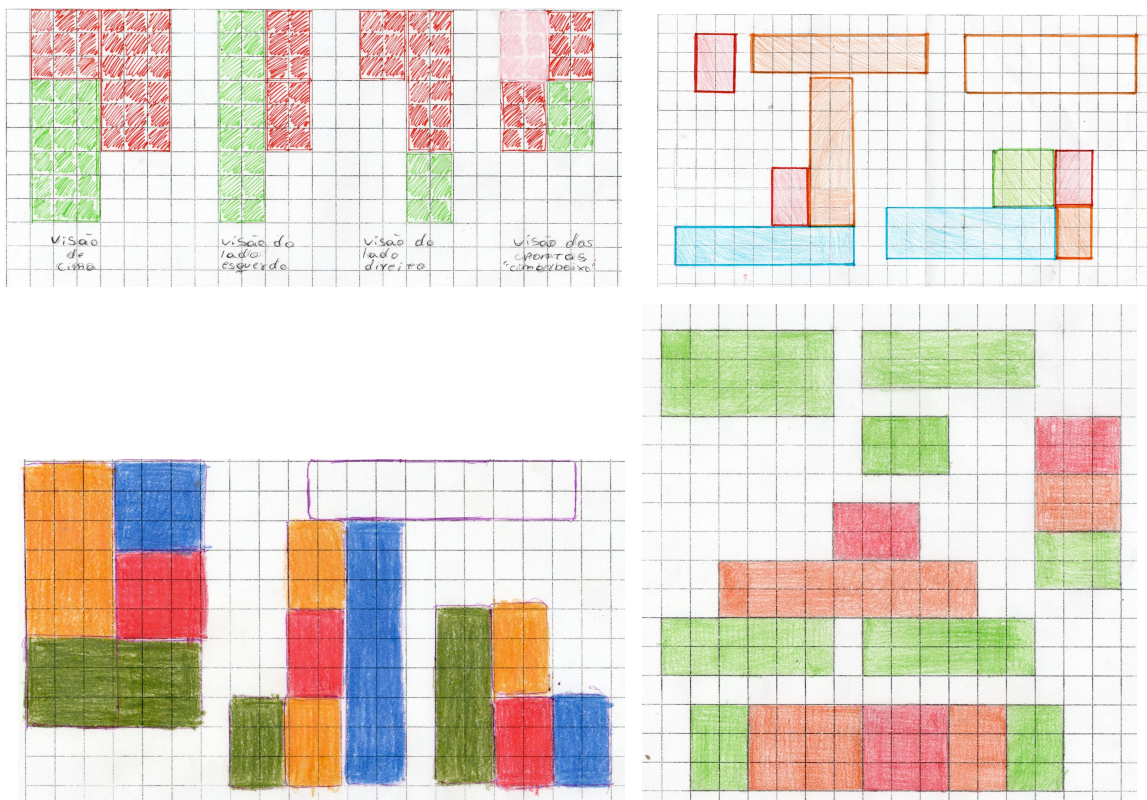
Figura 10 - Representações em perspectiva



Fonte: A autora, 2022

Entretanto, "a análise das representações utilizadas pelos estudantes para resolver um problema permite compreender os modos como o interpretaram e como raciocinaram para resolvê-lo" (BRASIL, 2018, p.530). Dessa forma, a compreensão da visão ortogonal e a progressiva construção da noção de espaço elaborada de maneira colaborativa possibilitou que os estudantes construíssem representações como essas trazidas na Figura 11, demonstrando que os objetivos iniciais propostos para a oficina foram atendidos.

Figura 11 - Representações de projeções ortogonais



Fonte: A autora, 2022

Com esses resultados, observa-se que as atividades propostas vão ao encontro do que traz a BNCC (BRASIL, 2018), pois, "após resolverem os problemas matemáticos, os estudantes precisam apresentar e justificar seus resultados, interpretar os resultados dos colegas e interagir com eles" (p.519 - grifo da autora). Sobre isso, a atividade possibilita a apresentação dos resultados da atividade por meio das construções realizadas com os blocos (seja no jogo, seja nos desenhos), a sua justificativa por meio dos questionários e também pelos próprios desenhos realizados e confrontados com a representação da realidade observada e a interpretação do resultado apresentado pelos colegas, configurando esses desenhos, de modo a interpretá-los a partir de suas vistas ortogonais ou sua correção a partir da reflexão realizada sobre a tarefa do outro.

## 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este estudo teve como objetivo compreender a construção da habilidade de realizar projeções ortogonais de objetos tridimensionais por estudantes do primeiro e do terceiro ano do ensino médio de uma escola pública estadual localizada no município de Canoas/RS, a partir de uma proposta didática baseada na perspectiva piagetiana da aprendizagem cooperativa. Dessa forma, entende-se que os jogos *La Boca* e *Mental Blocks* foram importantes aliados para que este objetivo fosse atingido.

Assim, foram discutidas as principais dificuldades enfrentadas (limitações), relacionadas ao atual método de trabalho pedagógico das escolas, que coloca em segundo plano tanto a aprendizagem cooperativa como estratégia de ensino, quanto o conteúdo de projeção discutido no decorrer das atividades. Ainda, os resultados positivos quanto à aprendizagem desses dois importantes fatores (possibilidades) foram aqui tratados de forma detalhada e objetiva com o intuito de servir como inspiração para atividades semelhantes, tanto em termos estratégicos quanto de conteúdo matemático.

O primeiro objetivo específico consistia em realizar um estudo teórico sobre construção da noção espacial e aprendizagem cooperativa por meio de jogos em equipe, objetivo este atingido ainda no decorrer do referencial teórico deste estudo. Sobre o objetivo de proporcionar uma prática pedagógica visando a construção da noção do espaço a partir de projeções ortogonais por meio de jogos em equipe, esse foi atingido e descrito em detalhes a partir dos resultados obtidos com os questionários e com as atividades desenvolvidas após a atividade dos jogos, com intuito de sistematizar e organizar essas aprendizagens. O terceiro e último objetivo era analisar a atuação dos discentes nesta prática observando sua aprendizagem por meio das ações executadas ao longo das atividades. As aprendizagens puderam ser constatadas na análise das atividades desenvolvidas.

Tendo sido atingidos todos os objetivos propostos, ainda fica como proposta a um trabalho futuro, a análise da aprendizagem desses estudantes a partir de aplicações de noções de projeções em outros contextos, especialmente aqueles trazidos em questões de provas de seleção e classificação, tais como o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM). Assim como a surpresa dessa autora em não encontrar pesquisas que relatam atividades com os jogos desenvolvidos neste estudo, ainda se destaca a surpresa de pouco material disponível que discuta o conteúdo de

projeção ortogonal, tão importante não apenas em situações do cotidiano, mas também em ampliar o pensamento matemático e realizar fechamentos de estruturas em termos da construção da noção do espaço na criança e no adolescente.

## REFERÊNCIAS

BANDEIRA, Denise Maria Almeida; SILVA, Maria Alexsandra; VILELA, Rosana Quintella B. Aprendizagem Baseada em Equipe. **Revist. Port.: Saúde e Sociedade**. 2(1):371-379, 2017.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**, 2018.

FREITAS, Júlio Cesar Matias de. **Trabalhando poliedros através de aprendizagem cooperativa utilizando softwares**. Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Juazeiro do Norte, 2015.

GIL, Carlos, A. **Como Elaborar Projetos de Pesquisa**, 6ª edição. São Paulo, Atlas, 2017.

LEIVAS, José Carlos Pinto. Organizando o espaço geométrico por caminhos topológicos. **Vidya**, v. 28, n. 2, p. 59-71, jul/dez - Santa Maria, 2009. ISSN 0104-270 X.

MINAYO, Maria Cecília de Souza. Análise qualitativa: teoria, passos e fidedignidade. **Ciência & Saúde Coletiva**, 17(3):621-626, 2012.

MONTOITO, Rafael; LEIVAS, José Carlos Pinto. A representação do espaço na criança, segundo piaget: os processos mentais que a conduzem à formação da noção do espaço euclidiano. **Vidya**, v. 32, n. 2, p.21-35, jul./dez. - Santa Maria, 2012. ISSN 0104-270 X.

NITZKE, Julio Alberto; FRANCO, Sérgio Roberto Kieling. Aprendizagem cooperativa: utopia ou possibilidade? **Informática na Educação: Teoria & Prática**, V5, nº 2, Porto Alegre, Nov, 2002.

OLIVEIRA, Tobias Espinosa de Oliveira; ARAUJO, Ives Solano; VEIT, Eliane Angela. Aprendizagem Baseada em Equipes (Team-Based Learning): um método ativo para o Ensino de Física. **Caderno Brasileiro de Ensino de Física**, v. 33, n. 3, p.962-986, dez. 2016.

PIAGET, J. **Introducción a la epistemología genética: el pensamiento matemático**. Buenos Aires: Paidós, 1975.

PIAGET, J; INHELDER, B. **A representação do espaço na criança**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1993.

SANTOS, Maria Madalena; GUEDES, Nadja Lisboa da Silveira. A teoria da perspectiva fundamentada pela geometria projetiva. **Graphica**. Curitiba-Paraná, 2007.

SIBEMBERG, Lucas Siviero; NOTARE, Márcia Rodrigues. Projeção Ortogonal: uma abordagem com Geometria Dinâmica. **REMAT: Revista Eletrônica da Matemática**,

Bento Gonçalves, RS, v. 8, n. 1, p. e2005, 30 de junho de 2022.  
<https://doi.org/10.35819/remat2022v8i1id5241>.

SOUSA, Renata Teófilo; AZEVEDO, Italândia Ferreira de; ALVES, Francisco Régis Vieira. O GeoGebra 3D no Estudo de Projeções Ortogonais Amparado Pela Teoria das Situações Didáticas. **JIEEM** v.14, n.1, p. 92-98, 2021.  
<https://doi.org/10.17921/2176-5634.2021v14n1p92-98>

TEIXEIRA, Madalena Telles; REIS, Maria Filomena. A Organização do Espaço em Sala de Aula e as Suas Implicações na Aprendizagem Cooperativa. **Meta: Avaliação**. Rio de Janeiro, v. 4, n. 11, p. 162-187, mai./ago. 2012.