

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PAMPA

LEANDRO FERREIRA FRIEDRICH

**MODELAGEM NÚMÉRICA DE AUMENTO DE TENACIDADE A FRATURA
DE MATERIAIS DE BASE FRÁGIL REFORÇADOS POR FIBRAS**

**Alegrete
2014**

LEANDRO FERREIRA FRIEDRICH

**MODELAGEM NÚMÉRICA DE AUMENTO DE TENACIDADE A FRATURA
DE MATERIAIS DE BASE FRÁGIL REFORÇADOS POR FIBRAS**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado
ao Curso de Engenharia Mecânica da
Universidade Federal do Pampa, como
requisito parcial para obtenção do Título de
Bacharel em Engenharia Mecânica

Orientador: Prof. Dr. Wang Chong

**Alegrete
2014**

LEANDRO FERREIRA FRIEDRICH

**MODELAGEM NÚMÉRICA DE AUMENTO DE TENACIDADE A FRATURA DE
MATERIAIS DE BASE FRÁGIL REFORÇADOS POR FIBRAS**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado
ao Curso de Engenharia Mecânica da
Universidade Federal do Pampa, como
requisito parcial para obtenção do Título de
Bacharel em Engenharia Mecânica

Trabalho de Conclusão de Curso defendido e aprovado em: 10, Março de 2014.

Banca examinadora:

Prof. Dr. Wang Chong
Orientador
UNIPAMPA

Prof. Dr. Luis Eduardo Kostas
(UNIPAMPA)

Prof. Dr. Vincente Bergamini Puglia
(UNIPAMPA)

Dedico este trabalho aos meus pais e meu
irmão pelo incondicional apoio.

AGRADECIMENTO

À Deus em primeiro lugar, a minha mãe Roselaine e meu pai Waldermar que sempre me apoiaram durante este percurso. Ao meu irmão Luciano pelo apoio em todos os momentos.

Ao Prof. Dr. Wang Chong pela paciência, dedicação e orientação prestada, cujo conhecimento comigo dividiu, conduzindo-me com êxito no desenvolvimento deste trabalho.

A colega Angélica pela amizade e apoio.

A todos os colegas do curso, dos quais levarei a amizade e o carinho.

Aos professores da banca, pela disponibilidade e interesse, e aos demais professores do curso de Engenharia Mecânica da UNIPAMPA pelo conhecimento compartilhado.

Agradeço também ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo apoio financeiro com o auxílio de bolsa de Iniciação Científica.

“O maior bem do homem é uma mente inquieta”.

Isaac Asimov

RESUMO

Materiais cerâmicos avançados são de grande interesse tecnológico devido suas intrínsecas propriedades mecânicas e físicas como baixa densidade, alta resistência à corrosão e à abrasão, baixa condutividade térmica, resistência a altas temperaturas, ao desgaste e a compressão. Contudo, a maior restrição na aplicação de sistemas estruturais cerâmicos, ou materiais com predominância de ligações de natureza iônica, decorre da elevada fragilidade de suas matrizes. Uma completa caracterização do comportamento de compósitos de alto desempenho, produzidos pela adição de fibras, exige a determinação da relação entre aproximadamente treze parâmetros (dentre os principais destacam-se os dimensionais, de resistência, módulo de elasticidade, percentagem volumétrica das fibras, módulo de elasticidade das fibras, resistência à fratura e coeficiente de atrito na interface fibra/matriz), a interação de tantos fatores torna os métodos experimentais altamente dispendiosos quanto ao custo e tempo de execução. Portanto, a modelagem matemática e simulação numérica são imprescindíveis no projeto destes materiais. Neste trabalho apresenta-se um modelo numérico abrangente para análise do compósito de concreto reforçado por fibras, utilizando o software ANSYS que tem como base o método de elementos finitos. O modelo teórico-constitutivo proposto para o concreto é um modelo baseado nas teorias da mecânica da elasticidade e mecânica da fratura com o objetivo de dar um tratamento numérico-computacional mais adequado para estimação do aumento da tenacidade em materiais compósitos quando reforçados com fibras. A linguagem ANSYS *Parametric Design Language* (APDL) será adotada com o objetivo de criar o modelo geométrico e otimizar o processo. As comparações dos resultados obtidos pelo modelo proposto neste trabalho com os dados experimentais e resultados encontrados em outros modelos na literatura mostram a importância em se considerar o efeito *spalling*, módulo de elasticidade da fibra, os processos de descolagem da interface fibra/matriz e *pull-out* da fibra da matriz, etc. Os resultados obtidos confirmam que há uma combinação ótima de parâmetros que podem aumentar significativamente o aumento da tenacidade a fratura do compósito.

Palavras-Chave: ANSYS, Método dos Elementos finitos, Aumento da Tenacidade, Materiais Compósitos.

ABSTRACT

Advanced ceramic material are of great technological interest because of their intrinsic mechanical and physical properties such as low density , high corrosion resistance and abrasion resistance , low thermal conductivity , high temperature resistance , wear and compression . However, a major limitation in the implementation of structural ceramics with predominantly nature of ionic bonds, due to the high fragility of their headquarters. Complete characterization of high performance composites produced by addition of fiber needs to determine the relationship among approximately thirteen parameters such as fiber dimensions, strength, elastic modulus, fiber volume percentage, fracture resistance and coefficient of friction on the fiber / matrix interface. To clear the interaction of those parameters, experimental methods is highly expensive both in the cost and execution time. Therefore, mathematical modeling is essential in the design of these materials. This work presents a numerical model for analysis of fiber reinforced cementitious composite using ANSYS which is based on the finite element method. The theoretical model proposed for the concrete constitutive model is based on the theories of elasticity and fracture mechanics in order to give a numerical treatment best suited for estimation of the toughening in composite materials reinforced with fibers. The language of ANSYS Parametric Design Language (APDL) will be adopted with the objective of geometric model creation and process optimization . The results will be compared with ones of numerical models and experiments, extracted from papers presented by other researchers. The comparisons of results show the importance of spalling effect, fiber elasticity module , process of fiber/matrix interface debonding and fiber pull-out from the matrix. The results confirm that there is an optimum combination of the parameters that can significantly increase in fracture toughness of the composite.

Keywords : ANSYS , Finite Element Method , Toughening , Composite Materials .

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 - a) Adição de fibras ao cimento; (b) Aumentando a resistência do concreto com fibras.	22
Figura 2.2- Fibras de aço reforçando concreto.	23
Figura 2.3- Aplicações do concreto reforçado com fibras.	23
Figura 2.4 - (E) Comportamento do dano em R/C; (D) R/ECC, mostra 10% de força.	24
Figura 2.5- <i>pull-out</i> para comprimento enterrado l . (a) Para fibra alinhada com a força axial; (b) Fibra com orientação arbitrária.	26
Figura 2.6- Esquema de fibra (a) <i>debonding</i> e (b) <i>pull-out</i>	27
Figura 2.7- (a) Fibra dobrando no cruzamento da trinca; (b) Componentes da força e tensão de ponte.	28
Figura 2.8- Fibra como uma viga em balanço após abertura da trinca.	29
Figura 2.9 Componentes de deslocamento em um nó de um elemento triangular (2-D 6-nós – ANSYS Elements Reference).....	33
Figura 3.1- Trinca considerada-Modo I.....	39
Figura 3.2-Orientação 3-D randômica da fibra onde o comprimento enterrado tem sua parte final na superfície hemisférica e a probabilidade $P(\theta)$	39
Figura 3.3- Fibra inclinada e com parte enterrada na matriz.....	40
Figura 3.4-Configuração da fibra antes da trinca abrir.....	41
Figura 3.5- Parâmetros dimensionais fibra/matriz	43
Figura 3.6- Elemento Solid65 e Solid45	44
Figura 3.7- Curva tensão-deformação multilinear isotrópica típica do ensaio compressivo do concreto	47
Figura 3.8- GUI ANSYS <i>element status</i> , região da abertura da trinca.....	49
Figura 3.9- Layout da fibra inclinada ao plano de fratura e as resultantes das reações e os deslocamentos	50
Figura 3.10- Fluxograma para análise da tenacificação	51
Figura 4.1-Malha gerada para $Le=5$	54
Figura 4.2- Tensão de Ponte para fibras com diâmetro de 0,02 mm.....	55
Figura 4.3- Tensão de Ponte para fibras com diâmetro de 0,05 mm.....	56
Figura 4.4 Tensão de Ponte para fibras com diâmetro de 0,1 mm	56
Figura 4.5- Tensão de Ponte para fibras com diâmetro de 0,5 mm.....	57
Figura 4.6 -Tensão de ponte- Modelo Viga em Balanço, $E_f = E_m$	58

Figura 4.7- Tensão de ponte- Modelo considerando atrito da interface	58
Figura 4.8- Análise de tensões na fibra. Fibra de aço, $d_f=0.1$, $\theta=30^\circ$ e $Le=5$	59
Figura 4.9- Análise de tensões da matriz com fibras de aço	60
Figura 4.10- Análise de tensões da matriz com fibras sintética	60
Figura 4.11- Tensões na matriz frágil reforçada com fibra de aço.....	62
Figura 4.12- Tensões na matriz frágil reforçada com fibra sintética.....	62
Figura 4.13- Tensões na matriz frágil reforçada com fibra aço.....	63
Figura 4.14- Típica curva tensão-deslocamento para o processo de descolagem e <i>Pull-out</i>	64
Figura 4.15- Tensões na matriz frágil reforçada com fibra sintética.....	64
Figura 4.16- Dano causado na matriz com fibra sintética $d_f=0,1$, $Le=5$, $\theta=30^\circ$, $w=0.0001$ mm	65
Figura 4.17- Dano causado na matriz com fibra de aço $d_f=0,1$, $Le=5$, $\theta=30^\circ$, $w=0.0001$ mm	65
Figura 4.18- Evolução do dano na matriz reforçada com fibra de aço.....	66
Figura 4.19- Evolução do dano na matriz reforçada com fibra sintética.....	67
Figura 4.20- Evolução do dano na matriz reforçada com fibra aço	68
Figura 4.21- Evolução do dano na matriz reforçada com fibra sintética.....	68
Figura 4.22- Evolução do dano na matriz reforçada com fibra aço	70
Figura 4.23- Evolução do dano na matriz reforçada com fibra sintética.....	70
Figura 4.24- Evolução do dano na matriz reforçada com fibra aço	71
Figura 4.25- Evolução do dano na matriz reforçada com fibra sintética.....	71
Figura 4.26- Diagrama de copo livre estático fibra descolando	72
Figura 4.27- Aumento da tenacidade a fratura matriz frágil reforçada com fibras	74

LISTA DE QUADROS

Quadro 3. 1- <i>Element Types</i>	44
---	----

LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1- Propriedades dos materiais	45
Tabela 3.2- Status de elementos do concreto	48
Tabela 3.3- Parâmetros usados nos casos investigados	53
Tabela 4.1-Comparação do aumento da tenacidade	73

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

A_f = Área da seção transversal da fibra

APDL = ANSYS Parametric Design Language

d_f = Diâmetro da fibra

E = Módulo de elasticidade longitudinal - módulo Young

MEF= Método dos Elementos Finitos

G_c = Aumento da tenacidade à fratura

l_e = Comprimento enterrado

l_f = Comprimento da fibra

θ = Ângulo de inclinação da fibra em relação ao plano da trinca

N = Força axial

$P(\theta)$ = Probabilidade da orientação - ângulo θ formado pela fibra e pelo vetor normal à superfície da trinca principal

$p(z)$ = Probabilidade da localização z do centro da fibra até a superfície da trinca

r = Raio da fibra

V_f = Fração volumétrica de fibras distribuídas no compósito

w = Abertura das superfícies da trinca principal

z = Distância do centro da fibra até a superfície da trinca principal

ν = Coeficiente de *Poisson*

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	16
1.1	Objetivo	17
1.1.1	Objetivo geral.....	17
1.1.2	Objetivos específicos.....	18
1.2	Organização do trabalho	18
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	19
2.1	Considerações Iniciais	19
2.2	Cerâmica Avançada	19
2.3	Mecanismos de Tenacificação	20
2.3.1	Tenacificação por Microtrincas.....	20
2.3.2	Tenacificação por Partículas	21
2.3.3	Tenacificação por Whiskeres	21
2.3.4	Tenacificação por Fibras	21
2.4	Tenacificação de materiais compósitos reforçados por fibras	21
2.5	Modelos numéricos para aumento da tenacificação de materiais compósitos reforçados por fibras.....	25
2.6	Fundamentos do método dos elementos finitos	31
2.6.1	Introdução.....	31
2.6.2	Conceitos fundamentais.....	31
2.6.3	Vetor dos deslocamentos.....	32
2.6.4	Vetor das deformações	34
2.6.5	Vetor das tensões.....	36
3	METODOLOGIA	38
3.1	Considerações Iniciais	38
3.2	Descrição Do Modelo Numérico	38
3.2.1	Trinca.....	38
3.2.2	Delimitações De Dimensões E Funções Da Distribuição Da Fibra	39
3.2.3	Layout Da Fibra Em Relação À Superfície Da Trinca.....	40
3.3	Aplicação Do Método Dos Elementos Finitos	42
3.3.1	<i>Element Types</i>	44

3.3.2	Propriedades Dos Materiais.....	45
3.3.3	Determinação da tenacidade a fratura pelos resultados das forças de reações através do método de elementos finitos	50
3.3.4	Tensão De Ponte Proveniente Das Fibras No Plano Trincado	52
3.3.5	Aumento de energia de fratura G_c	52
3.4	Casos Modelados e Parâmetros Utilizados	53
4	RESULTADOS E DISCUSSÕES	54
4.1	Malha em Elementos Finitos	54
4.2	Relação Tensão de Ponte e Abertura da trinca	55
4.3	Distribuição de Tensões nas Fibras.....	59
4.3.1	Influência do Diâmetro da Fibra	60
4.3.2	Influência do Comprimento Enterrado (L_e)	61
4.3.3	Influência do Ângulo de Inclinação (θ).....	63
4.4	Evolução do Dano na Matriz	65
4.4.1	Influência do Comprimento Enterrado (L_e)	65
4.4.2	Influência do Diâmetro da Fibra	67
4.4.3	Influência do Ângulo de Inclinação (θ).....	69
4.5	Aumento da Tenacidade G_c	73
5	CONCLUSÕES	75
6	SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS.....	76
	REFERÊNCIAS	77
	APÊNDICE A- Algoritmo ANSYS	83
	APÊNDICE B- Programa para calcular a tensão de ponte e o aumento da tenacidade a fratura.....	94
	ANEXO A – Critério de falha de William e Warnke.....	98

1 INTRODUÇÃO

O avanço da tecnologia, em conjunto com o aumento das necessidades econômicas e ambientais, tem desafiado a indústria na busca por novos materiais com melhor desempenho e menor custo. Nesse sentido materiais tradicionais como o aço vem perdendo espaço para uma nova gama de materiais, os compósitos. Estes materiais apresentam uma enorme versatilidade, características mecânicas inigualáveis e de baixo custo. Dentre essa variedade de materiais a cerâmica avançada tem sido objeto de pesquisa nas últimas décadas devido as suas excelentes propriedades mecânicas e físicas, como a resistência ao uso, alta resistência a corrosão e abrasão, alta dureza, baixa densidade, resistência a altas temperaturas e boa resistência química além de algumas características específicas das cerâmicas como a supercondutividade, condutividade iônica e propriedades nucleares. Devido a suas inúmeras vantagens é vasto o campo de aplicações das cerâmicas avançadas, podendo-se destacar aplicações em áreas que envolvem altas tecnologias como: reatores nucleares, motores automotivos, turbinas, foguetes, materiais de alta resistência à abrasão entre outros.

Materiais cerâmicos avançados ou de alta tecnologia são aqueles obtidos a partir de matéria sintética, tais como carbetos, óxidos, nitretos, entre outros e o processamento envolve técnicas mais avançadas, com controle de processamento de alto nível tecnológico. Logo, a microestrutura destes materiais é mais homogênea e tem uma quantidade de poros menor do que a cerâmica tradicional.

Entretanto esse tipo de material é altamente frágil, pouco tenaz, ou seja, possui baixa energia de resistência à fratura, sendo que uma trinca se propaga facilmente quando submetida a ações de tensões ou cargas de impacto. A redução da fragilidade da cerâmica é alvo de muitas pesquisas em grandes centros especializados, destacam-se na área, University of Michigan (MIT), Max-Planck-Institute (MPI) e a University of Tokyo. Grande parte das pesquisas está direta ou indiretamente relacionada ao estudo e desenvolvimento de modelos que auxiliem na prescrição de métodos para o aumento da resistência do material à fratura e estimação da taxa de alívio crítico de tensões.

Os resultados destas pesquisas fez com que surgisse uma nova variedade de cerâmicas avançadas, mais resistentes e com propriedades diversificadas, que visam o aumento da tenacidade do material compósito. Sabe-se que a tenacidade é responsável por controlar várias características do material, como a resistência ao choque térmico e suscetibilidade ao desgaste erosivo.

Para que fosse possível o aparecimento dessas novas cerâmicas, experimentos e simulações tem sido desenvolvidos, de várias formas e diferentes métodos, testando diferentes tipos e tamanhos de fibras. Estes testes são de altíssimo custo, exigindo em muitos casos equipamentos específicos, que juntamente com mão de obra especializada, tempo, entre outros fatores, contribuem para que o processo de confecção destes materiais se torne de custo elevado.

Por estas razões, a utilização da simulação e modelagem numérica para desenvolver cerâmica composta de alto desempenho é uma etapa necessária e econômica, pois poderá prever o comportamento do compósito de maneira otimizada e eficiente, e assim trazer a melhor composição que irá propiciar a maior tenacidade.

1.1 Objetivo

Cerâmica é um material utilizado largamente no campo da engenharia, devido suas boas propriedades mecânicas. Contudo, sua fragilidade limita sua aplicação. Por isso o aumento de tenacidade à fratura sempre é um assunto importante de pesquisa. Um caminho para aumentar a tenacidade da cerâmica claramente é adicionar fibras dúcteis na matriz frágil, formando novos materiais compósitos reforçados por fibras. No entanto, testes experimentais variando os parâmetros para obter o melhor aumento da tenacidade à fratura são de custo elevado, exigindo equipamentos específicos e de alta tecnologia. Nesse sentido a simulação e modelagens computacionais como o MEF (Método de Elementos Finitos) tornam-se uma alternativa econômica e eficiente.

1.1.1 Objetivo geral

Aplicar o método de elementos finitos, delimitado a investigar a influência das propriedades mecânicas de fibras, matriz, interface e da geometria da fibra, e realizar a modelagem do aumento da tenacidade à fratura de material de base frágil reforçado por fibras.

1.1.2 Objetivos específicos

1. Elaborar um algoritmo para calcular as coordenadas dos pontos de controle de configurações geométricas de uma fibra inclinada em relação à superfície fraturada da matriz frágil, variando diâmetro da fibra, ângulo de inclinação e o comprimento enterrado;
2. Implementar o algoritmo no software ANSYS na linguagem APDL e gerar a malha de elementos finitos automaticamente;
3. Realizar análises de tensões com aumento da abertura da trinca e obter as reações de contorno da matriz especificada;
4. Analisar o dano na matriz sobre a influência dos parâmetros do item 1.
5. A partir dos dados obtidos, analisar a contribuição da fibra calculando-se o aumento de tenacidade à fratura.

1.2 Organização do trabalho

Este trabalho é composto de sete capítulos. Após esta introdução, uma revisão bibliográfica, onde foram abordados conceitos sobre materiais frágeis, suas aplicações e mecanismos de tenacificação, uma breve referência à literatura sobre modelos matemáticos e mecânicos para calcular a tenacificação por fibras. O capítulo três mostra os detalhes da dedução do modelo proposto. O capítulo quatro fará a apresentação dos resultados e discussões e no cinco as conclusões finais. Sugestões para trabalhos futuros são apontadas no capítulo seis e no último capítulo apresenta-se as referências bibliográficas utilizadas no trabalho.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1 Considerações Iniciais

No presente estudo, a cerâmica reforçada com fibras é definida como um compósito bifásico, ou seja, duas fases (cerâmica + fibras) com uma interface entre ambas. Neste tipo de compósito, a interação que ocorre na interface fibra/matriz é a responsável pela eficiência das fibras em melhorar o desempenho do compósito. O objetivo deste capítulo é apresentar um breve contexto histórico sobre o surgimento e evolução da cerâmica e apresentar os mecanismos envolvidos na interação fibra/matriz. Neste capítulo também é apresentada uma descrição geral das abordagens utilizadas nas modelagens numéricas deste compósito.

2.2 Cerâmica Avançada

A palavra cerâmica deriva dos antigos gregos "kerameikos" palavra que era o nome de uma região da antiga cidade de Atenas onde a cerâmica era feita e vendida. Em princípio, a palavra cerâmica era usada como referência apenas a panelas de porcelanas, mas atualmente o termo abrange uma área muito mais ampla. Kingery (1960) define cerâmica como a arte da ciência de fazer e de usar artigos sólidos que têm como componentes de materiais não metálicos inorgânicos essenciais. A definição inclui não somente materiais como cerâmica, porcelana, refratários, produtos cerâmicos estruturais, abrasivos, esmaltes de porcelana, cimentos, vidro, mas também materiais magnéticos não-metálicos, ferroelásticos e cerâmicas vítreas.

Com o passar dos anos esses materiais evoluíram e desenvolveram-se um novo tipo de cerâmica com diversas aplicações dos mais variados graus de importância. A fabricação deste novo material requer uma série de combinações de propriedades, e sua composição depende do tipo de aplicação desejada, podendo ser formados de alumina (Al_2O_3), carbetos de silício (SiC), nitreto de silício (Si_3N_4), zircônia (ZrO_2), carbetos de boro (B_4C) e diboreto de titânio (TiB_2), são produzidos por processos rigorosamente controlados exigindo equipamentos com elevada qualidade.

As aplicações das cerâmicas avançadas são incontáveis, desde motores a combustão interna e de turbinas, chapas de blindagem, naves espaciais, satélites, aviões, próteses humanas, aparelhos de som/vídeo, suporte de catalisadores para automóveis, sensores (umidade, gases e outros), ferramentas de corte, brinquedos, embalagens de componentes

eletrônicos, na fibra óptica, e para conversão, armazenamento e geração de energia os quais, são classificados em eletroeletrônicos, aeroespaciais, magnéticos, ópticos, químicos, térmicos, mecânicos, biológicos e nucleares (MEGUID,1996; AWAJI, 2002; NÓBREGA et al, 2004).

No entanto materiais cerâmicos são muito frágeis, ou seja, possuem baixa energia de fratura. Contudo existem pesquisas a nível mundial voltadas para solucionar o problema da tenacidade da cerâmica, e que tem mostrado resultados positivos com a adição de uma nova fase cerâmica, os compósitos com matriz cerâmica.

2.3 Mecanismos de Tenacificação

Com a mistura de dois ou mais materiais distintos, pretende-se aperfeiçoar as características mecânicas, tais como rigidez, fragilidade, ductilidade, capacidade de absorção de energia de deformação, tenacidade, comportamento pós-fissuração, resistência em condições ambientes e a altas temperaturas. Diferentes materiais podem ser combinados, geralmente são formados por duas fases na qual uma é chamada de matriz que é contínua e envolve a outra fase que é a dispersa, desde que se conheçam suas propriedades mecânicas, físicas e químicas dos materiais de constituição, como pode ser feita a combinação, a quantidade relativa e a geometria da fase dispersa. (SOARES, 2010)

Existem vários mecanismos que podem melhorar a tenacidade das cerâmicas avançadas segundo William e Callister (2002), os mais utilizados são: tenacificação por microtrincas, tenacificação por transformação de fases, tenacificação por partículas e tenacificação por micro fibras ou bigodes (whisker).

2.3.1 Tenacificação por Microtrincas

Sabe-se que em alguns casos a formação de trincas em materiais causa danos, entretanto as microtrincas podem aumentar a tenacidade do material. A maior dificuldade desse método é o que considera o crescimento da microtrinca estável, não acontecendo em materiais frágeis. (SOARES, 2010).

A trinca principal se expande em uma região de microtrincas, formadas pela bifurcação da trinca principal, dessa forma surge uma nova superfície de microtrincas que será responsável por consumir a energia de deformação, capaz de reduzir a expansão da trinca principal e melhorar a resistência de materiais. (LIKE *et al*, 2007).

Por depender da temperatura este mecanismo de tenacificação é pouco eficaz, além de não poder controlar a propagação de microtrincas quando a estabilidade das mesmas. (PAVAN, 2006).

2.3.2 Tenacificação por Partículas

Nos compósitos reforçados por partículas, as partículas possuem aproximadamente as mesmas características dimensionais em todas as direções, possuindo a fase dispersa eixos quase iguais. Este método pode ser dividido em outros dois submétodos: compósitos reforçados com partículas grandes e compósitos reforçados por dispersão. No primeiro a tensão aplicada a matriz é transferida às partículas, que suportam determinadas cargas. O grau de reforço é dependente da ligação da interface matriz-partícula. No segundo o reforço se dá através de partículas dúcteis, ou seja, é dependente do grau de deformação máxima.

2.3.3 Tenacificação por Whiskeres

Embora os compósitos reforçados por whiskeres apresentem grande contribuição para tenacidade do material, seu uso fica restrito ao alto custo e difícil aplicabilidade.

2.3.4 Tenacificação por Fibras

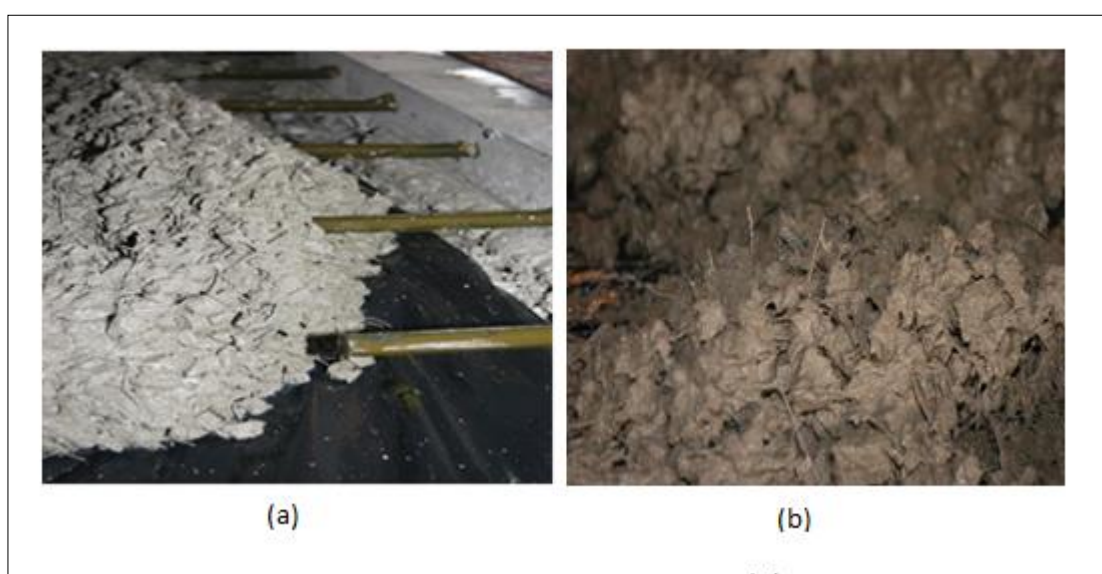
É o mecanismo mais eficaz, apresentando melhoras significativas na resistência à fratura. Fatores como grande força de ligação entre fibra e matriz, faz com que os compósitos adquiram maior ductibilidade e durabilidade contribuindo para o aumento da tenacificação.

2.4 Tenacificação de materiais compósitos reforçados por fibras

As características das fibras tem fundamental importância no material compósito, fato afirmado por Taylor (1994), que cita dentre os principais parâmetros para controlar o desempenho dos materiais compósitos reforçados por fibras estão o módulo de elasticidade, resistência, teor, comprimento, diâmetro, propriedades físicas da fibra e matriz, aderência e compatibilidade entre as duas fases.

Os materiais compósitos podem ser descritos como as ações combinadas de dois ou mais materiais distintos, ou seja, duas fases na qual uma é chamada de matriz e a outra é a fase dispersa. A aplicação destes materiais vem se estendendo na construção civil pela variedade de aplicações no ramo como: telhas de fibrocimento, painéis de vedação vertical, placas de plásticos reforçados com fibras de vidro, estruturas de concreto, pisos e pavimentos rígidos. A Figura 2.1 apresenta a adição de fibras aos compósitos de cimento.

Figura 2.1 - a) Adição de fibras ao cimento; (b) Aumentando a resistência do concreto com fibras.

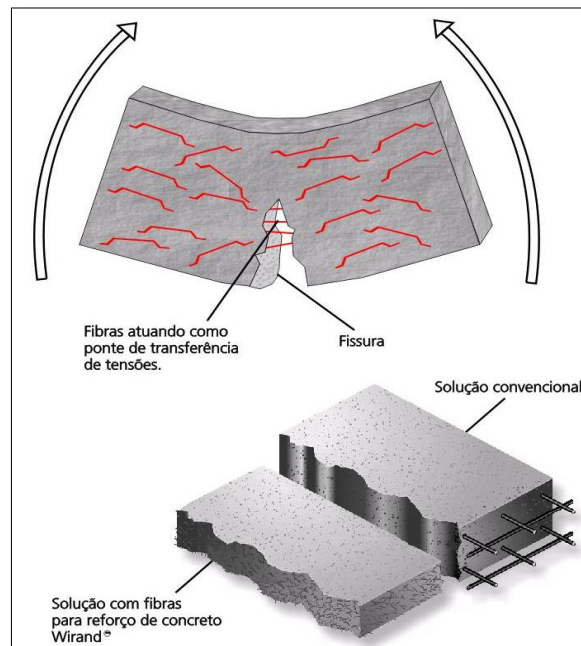


FONTE: Chodounsky (2008).

Em compósitos como o concreto reforçado com fibras, as fibras servem como ponte de transferência de tensões através das fissuras, minimizando a concentração de tensões nas extremidades das mesmas. Assim, acontece a interrupção da propagação das fissuras no concreto, ou seja, o concreto responde com certa capacidade portante pós-fissuração, este comportamento recebe o nome de pseudo-dúctil.

A Figura 2.2 mostra as fibras Wirand® redistribuindo as tensões aplicadas ao concreto, dificultando a propagação de fissuras e conseqüentemente aumentando a resistência pós-fissuração do elemento estrutural aumentando a resistência do compósito.

Figura 2.2- Fibras de aço reforçando concreto.



Fonte: Maccaferri (2002).

A Figura 2.3 mostra algumas aplicações do concreto reforçado com fibras.

Figura 2.3-Aplicações do concreto reforçado com fibras.

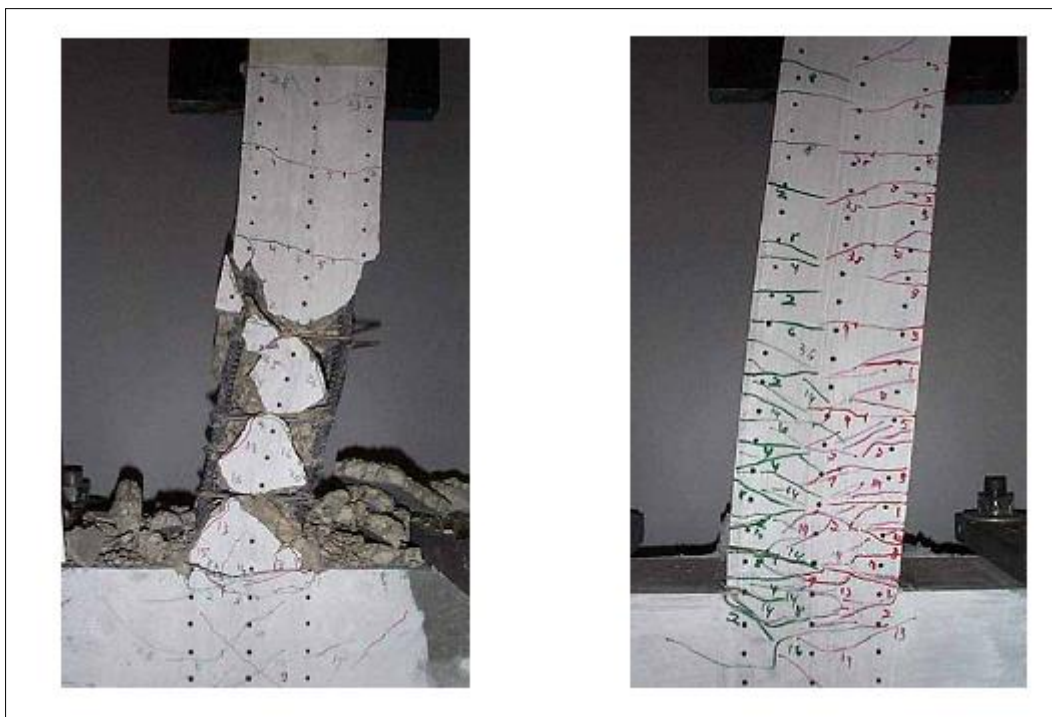


Fonte: Adaptado de Maccaferri (2002).

A Figura 2.4 mostra uma comparação entre colunas de concreto sem e com reforço de fibras. Observa-se que com alto esforço, não quebra a matriz R/ECC (compósitos de cimento

reforçados por fibra dúctil). Em contraste a coluna de concreto R/C (compósitos de cimento) perde a resistência depois da ligação com a trinca e a quebra ocorre.

Figura 2.4 - (E) Comportamento do dano em R/C; (D) R/ECC, mostra 10% de força.



Fonte: Li (2003).

Para obter melhor desempenho estrutural que a matriz, o módulo de elasticidade da fibra do compósito fibra/matriz deverá ser maior que o da matriz. Além disso, se a fibra possuir alta resistência a tração exigirá uma elevada aderência a para impedir o arracamento da fibra antes que a resistência máxima seja aplicada. (PIACESKI, 2009)

Segundo Johnston (1994), as fibras em uma matriz podem em geral ter dois efeitos importantes, tendem a reforçar o compósito sobre todos os modos de carregamento que induzem (tensões de tração, tração direta ou flexão e cisalhamento) e melhoram a ductilidade e a tenacidade de uma matriz frágil.

A habilidade de uma fibra em transmitir cargas está ligada ao posicionamento destas em relação ao plano da ruptura, quanto se tem uma fibra posicionada paralelamente ao plano de ruptura, esta não influencia na transmissão de cargas, no entanto quando a fibra está perpendicular ao plano de ruptura tem influência máxima. A tensão de resistência máxima da fibra pode ser atingida quando submetida a determinado carregamento, ocasionando seu rompimento o que depende de sua capacidade de deformação.

A fibra serve como um empecilho para a propagação de trincas, assim o compósito só irá falhar completamente depois de várias fibras individuais falharem. Para uma maior resistência do compósito é fundamental uma alta força de ligação entre fibra e matriz.

2.5 Modelos numéricos para aumento da tenacificação de materiais compósitos reforçados por fibras.

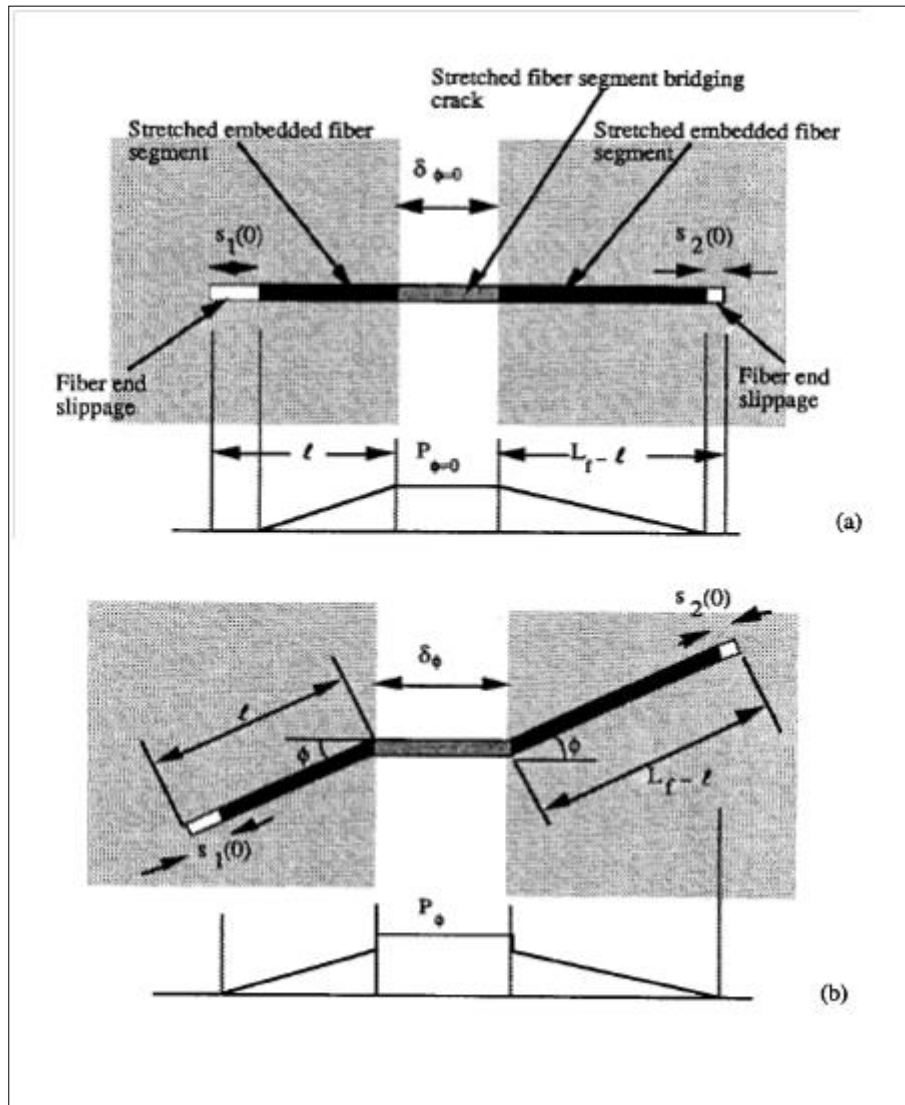
Os atuais modelos existentes dedicados ao estudo dos benefícios da adição de fibras em materiais compósitos procuram uma solução ao problema da fragilidade, na literatura existem vários modelos que buscam prever o comportamento destes.

O maior problema em se criar um modelo eficiente é encontrar a relação de tensão proveniente por fibras (tensão de ponte ou *bridging stress*), pois de acordo com os modelos já existentes, essa relação é a peça chave de um modelo correto. Ainda há outros processos e efeitos que também dependem dessa relação como a descolagem da interface fibra/matriz (*debonding*), fibra sendo arrancada para fora da matriz (*pull-out*) ou escorregamento, a máxima tensão suportada pela fibra antes do rompimento (*apparent strength*). As características mecânicas das fibras, dúcteis ou frágeis, são de extrema importância para avaliar a tensão de ponte que as agregam ao compósito.

A modelagem de um sistema como o em estudo é difícil, envolvendo vários fatores, pois a fibra pode romper antes mesmo de atingir a sua tensão de resistência máxima, como o que acontece na fibra de carbono, ou seja, o rompimento também depende da capacidade de deformação da fibra (ductilidade).

Li, Wang e Backer (1991) estudaram o processo de *pull-out* (Figura 2.5) e propuseram um modelo para prever o comportamento da tensão de ponte com a abertura da trinca após a propagação (*post-cracking*) em compósito de base frágil com fibras randômicas distribuídas. Foram usadas microfibras elásticas com trinca de propagação plana, não considerando efeitos como a deformação localizada na matriz no ponto em que a fibra deixa a matriz (*spalling*) e feito *Poisson*, também considerou a variação da tensão de ligação de atrito fibra/matriz com a distância escorregada da fibra, obtendo bom resultado no comportamento *pull-out* para fibras de nylon e polipropileno, para estas fibras sintéticas a tensão de ligação aumenta com a distância escorregada durante o processo *pull-out*, ainda obteve resultados satisfatórios do comportamento de fibras de aço para a qual a tensão de ligação diminui com a distância escorregada.

Figura 2.5- *pull-out* para comprimento enterrado l . (a) Para fibra alinhada com a força axial; (b) Fibra com orientação arbitrária.



Fonte: Li, Wang e Backer (1991).

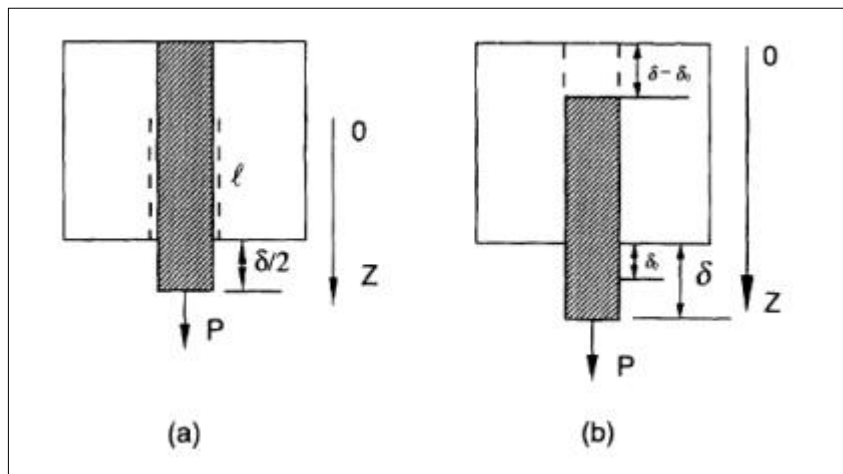
Baseado nisso, Li (2003) sugere um modelo onde o atrito da interface fibra/matriz é constante, através do processo de *pull-out* prevê o comportamento da tensão-deslocamento após a propagação de trinca e a energia de fratura, para compósitos de cimento reforçados de diversos tipos de fibra (aço, carbono, sintéticas) com parâmetros micro mecânicos variados, determinados experimentalmente, chamado de “*constant- τ model*”.

Entretanto, Lin e Li (1997) discordam quanto o uso do modelo τ quando ocorre grande escorregamento (*slip*) na interface do sistema fibra/matriz, em especial para trincas que alcançam o máximo da tensão de ponte, e assim desenvolveram um modelo variando a

tensão de cisalhamento na interface em função dos deslocamentos por escorregamento da fibra matriz.

Já Gao, Wing e Cotterell (1988) exploraram a influência da força de atrito no processo de *debonding* (descolagem) e comparando o modelo com dados experimentais de um compósito de fibras de aço e resina.

Figura 2.6- Esquema de fibra (a) *debonding* e (b) *pull-out*.



Fonte: Lin e Li (1997).

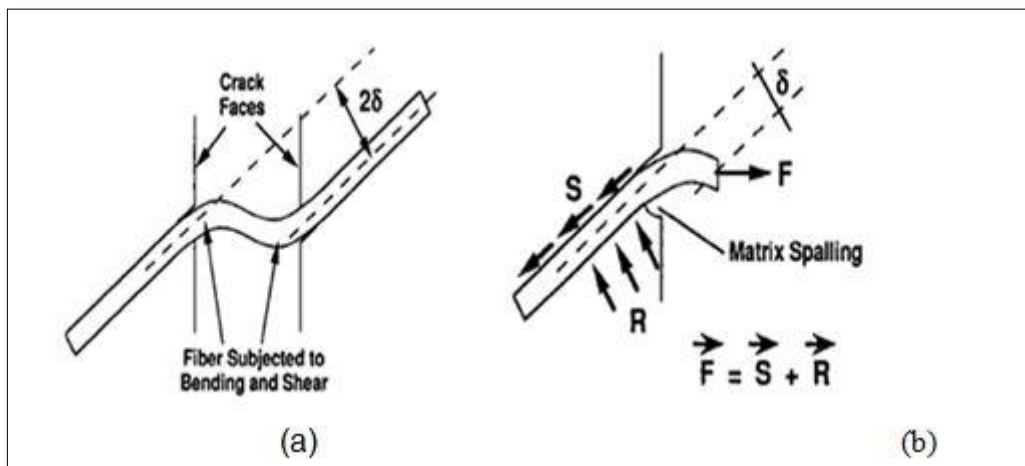
Ainda levando em consideração o atrito na interface, Morton e Groves (1974) realizaram experimentos sobre *debonding* e *pull-out* (Figura 2.6) e afirmaram que a fibra inclinada pode ser dividida em duas partes iguais ao centro da trinca, ou seja, a simetria da trinca, na qual uma parte fica enterrada na matriz e outra livre "viga em balanço". Estudaram-se os efeitos sobre fibras de cobre, níquel e aço, com orientação oblíqua a face da trinca em matriz de resina. Observando que uma grande força é adicionada a fibra quando esta está inclinada a aproximadamente 45° para aberturas de trinca menor que o diâmetro da fibra. Notou-se que a força na trinca é fortemente influenciada pela deformação da trinca inclinada, além de contribuir para o trabalho de fratura nos casos que a fibra é muito mais curta que o comprimento crítico.

Como um dos elementos principais do compósito, a influência do comprimento da fibra na tensão de ponte (*bridging stress*) foi estudada por Marshall e Cox (1987) e Lin, Kanda e Li (1999), desenvolvendo modelos para uma fibra em *pull-out* (*single fiber pull-out*) com micro-mecanismos que caracterizam as propriedades da interface como a energia de fratura (*fracture toughness*), tensão de cisalhamento (*frictional bond*) e coeficiente *slip-*

hardening. Neste modelo a tensão cisalhante é considerada constante, no entanto atribuem a tenacidade da interface (*chemical bond*) ao modelo uma propriedade que influencia fortemente no processo de descolagem da fibra/matriz.

O modelo de Leung e Li (1992) é talvez o mais aprofundado, considerando fibras como uma viga e matriz como uma fundação elástica, trabalharam com os efeitos de inclinação da fibra e da tensão atravessando a trinca por fibras reforçando o compósito de matriz frágil, considerando ainda o efeito *bending* (fibra curvada na saída da matriz), base elástica e a possibilidade de ocorrência de *spalling* (quebra da matriz na saída da fibra) estes dois últimos analisados através do Método de Elementos Finitos. Notou-se uma melhora no desempenho dos materiais reforçados por fibras quando analisa-se a propagação das tensões na trinca atravessada para uma dada trinca propagando-se. As forças que atravessam a trinca foram divididas em duas componentes, uma para a tensão da interface fibra/matriz (Figura 2.7(a)) e outra para as reações causada pela dobra da fibra novamente na matriz (Figura 2.7(b)), a força pode ser calculada como um vetor soma, e a tensão pode ser obtida pela produção da força atravessando as fibras e pelo número de fibras por unidade de área.

Figura 2.7- (a) Fibra dobrando no cruzamento da trinca;(b) Componentes da força e tensão de ponte.



Fonte: Leung e Li (1992).

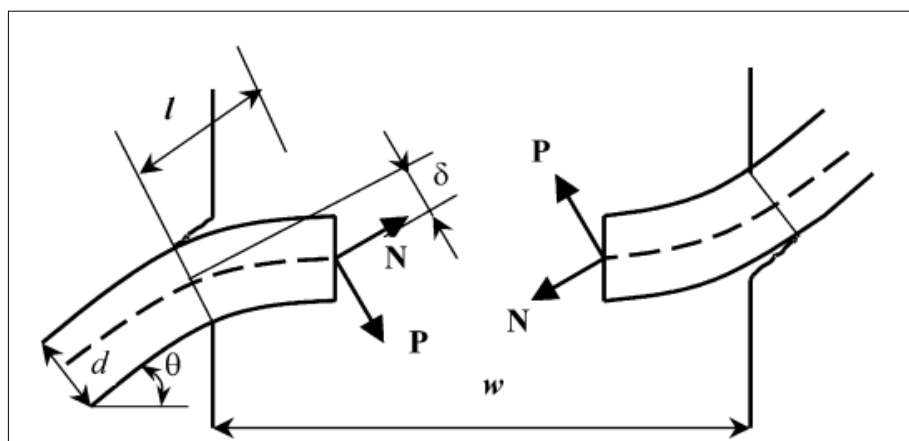
Pode-se notar que em compósitos de matriz frágil reforçados com fibras frágeis, há a ocorrência de *spalling* na matriz no ponto de saída da fibra, isto contribui para o aumento da resistência a tensão do compósito, pois o *spalling* faz com que as fibras relaxem e assim demorem mais a quebrar. As propriedades mecânicas do compósito de matriz frágil são fortemente influenciadas pela tensão causada pelas fibras inclinadas no plano da trinca, sendo

que a tensão numa trinca abrindo é função de vários micros mecanismos incluindo fibras dobrando, e ruptura da matriz. A teórica previsão da máxima tensão no compósito por fibras inclinadas são comparadas com resultados experimentais sobre uma fibra de poliéster revestida por fibra de vidro.

Brandt (1985), propôs um problema de otimização no qual a energia absorvida na fratura é considerada como uma função objetiva e a máxima é buscada, variando-se o ângulo de orientação de fibras paralelas e a otimização do problema é resolvido por derivação com relação ao ângulo. Também analisou-se a habilidade do material em resistência a propagação de trincas, a quantia de energia absorvida para a produção de uma trinca no elemento e a extensão evidente da abertura. O efeito de puxar para fora da matriz e a passagem das fibras cruzando a trinca confirmam que para fibras mais fortes requerem mais altos valores de inclinação angular.

Ainda levando em consideração a influência no ângulo e inclinação das fibras, Zhang e Li (2002) estudaram a influência desta inclinação na ruptura quando sujeitas a carregamentos em compósitos de cimento reforçados por fibras, utilizando de dados experimentais de matriz cimento com fibras de carbono, confirmaram a diminuição na tensão de ruptura da fibra à medida que o ângulo aumenta influenciado pela elasticidade da fibra e da matriz e a força cisalhante entre fibra/matriz. A fibra enterrada na matriz é tratada como uma viga em balanço (Figura 2.8) sobre uma fundação elástica e infinita.

Figura 2.8- Fibra como uma viga em balanço após abertura da trinca.



Fonte: Zhang e Li (2002).

Lin, Kanda e Li (1999) compararam dois compósitos fibra/matriz de PVA-RMU e PVA-RK através de um modelo micro-mecânico, caracterizando as propriedades interfaciais de uma única fibra sofrendo o processo de *pull-out*, considerando-se parâmetros como

tenacidade a fratura interfacial, resistência a tensão de cisalhamento e coeficiente de pós descolagem. Além dos parâmetros já citados também consideraram a ruptura da fibra e a redução da resistência devido à inclinação da fibra sendo puxada para fora da matriz, e concluíram que em casos de ruptura da fibra, a tenacidade a fratura tende a aumentar à resistência a tração, mas diminui a energia de fratura dos compósitos.

Kanda e Li (1998) analisaram fibras de PVA (*polyvinyl alcohol*) em *pull-out* em relação às propriedades da fibra/matriz e a máxima tensão suportada pela fibra antes da ruptura (*apparent strength*). Os resultados confirmam que a máxima tensão suportada pela fibra antes da quebra é reduzida com a inclinação da fibra enterrada na trinca plana, e provavelmente contribuem para o desempenho do compósito menos que o previsto se comparado com fibras de alto desempenho. Ainda pode se notar que as fibras têm alta ligação química e tensão de atrito relativamente estável independentemente da razão água/cimento empregado da matriz.

Katz e Li (1995) desenvolveram um modelo analítico a partir de experimentos usando fibras de carbono (frágeis), com o objetivo de prever o carregamento e tensão de fibras inclinadas atravessando uma trinca, considerando a ocorrência de quebra da matriz na saída da fibra (*spalling*) e a tensão desenvolvida nas fibras atravessando a trinca. Observaram por experimentos que o aumento do módulo de elasticidade das fibras, resistência de ligação ou o alto módulo de elasticidade da matriz, conduz a um aumento das tensões das fibras para uma dada abertura da trinca resultando numa menor falha destas, e assim diminuindo o carregamento atravessando com uma expectativa de melhoria nas propriedades do material.

Trabalhos mais recentes como de Liu, Tao e Guo (2005), mostra uma tendência dos modelos mais modernos em focarem na influência do coeficiente de fricção da interface fibra/matriz. Através de equações de tensões de equilíbrio, utilizando os métodos das condições de contorno e da continuidade estabeleceram um modelo teórico do coeficiente de fricção no descolamento da fibra da interface no processo de *pull-out*.

Existem ainda muitos outros trabalhos na literatura sobre compósitos de cimento que merecem atenção como Li e Wu (1992), Katz, Li e Kazmer (1995), Li e Maalej (1996), Mobasher, Ouyang e Shah (1991), Li e Chan (1993), Shah e Ouyang (1991), Nelson, Li e Kamada (2002), Wang e Li (2006).

Os princípios de métodos numéricos empregados para prever o comportamento da cerâmica são os mesmos que compósitos de cimentos, no qual este trabalho é focado. Pode-se notar a infinidade de parâmetros envolvidos no processo de modelagem dos modelos

propostos pelos mais diversos autores. No entanto quando se trata de matriz cementícia há uma escassez de trabalhos por envolver tantas propriedades que dificultam o modelo.

2.6 Fundamentos do método dos elementos finitos

2.6.1 Introdução

Segundo Segerlind (1976), o método dos elementos finitos é um procedimento numérico para resolver equações diferenciais da física e da engenharia. O método teve seu começo na indústria aeroespacial por volta de 1950 e foi primeiro apresentado por Turner, Clough, Martin e Topp (1956). Uma importante contribuição foi feita em 1963 por Melosh que mostrou que o método dos elementos finitos como sendo uma variação do conhecido procedimento de Rayleigh-Ritz. Em problemas estruturais, o método produz um conjunto de equações lineares de equilíbrio pela minimização da energia potencial do sistema. O relacionamento do método dos elementos finitos com um procedimento de minimização, ampliou rapidamente seu uso para outras áreas da engenharia.

As primeiras publicações Zienkiewicz e Cheng (1965), Visser (1965) e Wilson e Nieckell (1966) mostram a aplicação do método dos elementos finitos para a condução e transferência do calor.

O método dos elementos finitos progrediu a partir de um procedimento numérico para resolver problemas estruturais para um procedimento numérico para resolver uma equação diferencial ou sistema de equações diferenciais. Este progresso foi realizado em um período de 15 anos e foi ajudado pelo desenvolvimento de computadores mais velozes, pela necessidade de análises mais precisas na fabricação de aviões e pela corrida espacial.

2.6.2 Conceitos fundamentais

Em Franco (1970), Segerlind (1976), Zienkiewicz (1980) encontra-se a teoria básica do método dos elementos finitos (MEF) para o cálculo de tensões e deformações.

O conceito fundamental do método dos elementos finitos é que qualquer quantidade contínua, tal como temperatura, pressão ou deslocamentos pode ser aproximada por um método discreto composto por funções contínuas por partes.

Os aspectos conceituais básicos do método são:

1. Discretização da região: definindo os pontos nodais e os elementos;
2. Definição da função elemento para um único elemento;
3. Combinação das funções de elementos para obter uma função contínua por partes para toda uma região;
4. Cálculo do sistema de equações usando a minimização de um funcional relacionado com o problema físico;
5. Solução do sistema de equações para os valores nodais;
6. Cálculo dos elementos resultantes.

Em Borges (1997) encontramos os principais passos no desenvolvimento de um modelo matemático para o cálculo de tensões atuantes em um corpo elástico, isotrópico e homogêneo resolvido por meio do método dos elementos finitos. O domínio bidimensional é modelado em elementos finitos triangulares formando uma malha de elementos. Para cada vértice, de cada um dos triângulos são determinadas as componentes do vetor de deslocamento $\{U\}$. Calcula-se posteriormente o vetor de deformação específica $\{\epsilon\}$ e por último, usando a lei de Hooke, calcula-se o vetor das tensões $\{\sigma\}$.

2.6.3 Vetor dos deslocamentos

Seja o elemento triangular mostrado na Figura 2.9. Este elemento possui três faces retas e seis nós. O elemento tem sua aproximação polinomial formada segundo a equação (2.1). De modo geral, da Figura 2.9, podemos escrever a seguinte aproximação polinomial no domínio:

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy + \alpha_5 x^2 + \alpha_6 y^2 \quad (2.1)$$

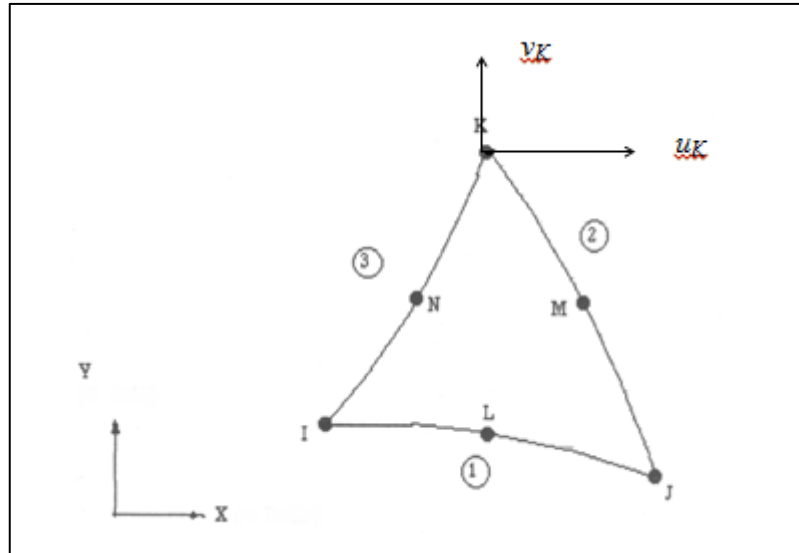
$$v = \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 y + \beta_4 xy + \beta_5 x^2 + \beta_6 y^2 \quad (2.2)$$

ou na forma matricial:

$$u = [1 \ x \ y \ xy \ x^2 \ y^2] \{\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3 \ \alpha_4 \ \alpha_5 \ \alpha_6\}^T \quad (2.3)$$

$$v = [1 \ x \ y \ xy \ x^2 \ y^2] \{\beta_1 \ \beta_2 \ \beta_3 \ \beta_4 \ \beta_5 \ \beta_6\}^T \quad (2.4)$$

Figura 2.9 Componentes de deslocamento em um nó de um elemento triangular (2-D 6-nós – ANSYS Elements Reference)



Sendo u_I, u_J, u_K, u_L, u_M e u_N conhecidos, podemos formar um sistema de equações lineares onde os α_i são as incógnitas.

$$\left\{ \begin{array}{l} u_I = \alpha_1 + \alpha_2 x_I + \alpha_3 y_I + \alpha_4 x_I y_I + \alpha_5 x_I^2 + \alpha_6 y_I^2 \\ u_J = \alpha_1 + \alpha_2 x_J + \alpha_3 y_J + \alpha_4 x_J y_J + \alpha_5 x_J^2 + \alpha_6 y_J^2 \\ u_K = \alpha_1 + \alpha_2 x_K + \alpha_3 y_K + \alpha_4 x_K y_K + \alpha_5 x_K^2 + \alpha_6 y_K^2 \\ u_L = \alpha_1 + \alpha_2 x_L + \alpha_3 y_L + \alpha_4 x_L y_L + \alpha_5 x_L^2 + \alpha_6 y_L^2 \\ u_M = \alpha_1 + \alpha_2 x_M + \alpha_3 y_M + \alpha_4 x_M y_M + \alpha_5 x_M^2 + \alpha_6 y_M^2 \\ u_N = \alpha_1 + \alpha_2 x_N + \alpha_3 y_N + \alpha_4 x_N y_N + \alpha_5 x_N^2 + \alpha_6 y_N^2 \end{array} \right. \quad (2.5)$$

Onde,

$$u = [1 \ x \ y \ xy \ x^2 \ y^2] [C]^{-1} \{u_I \ u_J \ u_K \ u_L \ u_M \ u_N\}^T \quad (2.6)$$

Sendo

$$[I \ x \ y \ xy \ x^2 \ y^2] [C]^{-1} = [N_I \ N_J \ N_K \ N_L \ N_M \ N_N] \quad (2.7)$$

onde, $N_I \ N_J \ N_K \ N_L \ N_M \ N_N$, são as seis funções de forma, uma para cada nó.

Substituindo (4.3) em (4.2):

$$u = [N_I \ N_J \ N_K \ N_L \ N_M \ N_N] \{u\} \quad \text{ou} \quad u = [N] \{U\} \quad (2.8)$$

Analogamente

$$v = [N_I \ N_J \ N_K \ N_L \ N_M \ N_N] \{v\} \quad \text{ou} \quad v = [N] \{V\} \quad (2.9)$$

As quantidades u e v são escalares e são função de um conjunto de funções de forma.

2.6.4 Vetor das deformações

Da teoria da elasticidade de Timoshenko e Goodier (1999), a partir dos deslocamentos nos nós determinam-se as deformações:

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (2.10)$$

Calculando as derivadas e substituindo em (4.6) temos a expressão:

$$\{\varepsilon\} = [B] \begin{Bmatrix} u_I \\ v_I \\ u_J \\ v_J \\ u_K \\ v_K \\ u_L \\ v_L \\ u_M \\ v_M \\ u_N \\ v_N \end{Bmatrix} \quad (2.11)$$

onde $[B]$ está dada por:

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} & \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \frac{\partial N_2}{\partial y} & \frac{\partial N_2}{\partial x} \end{bmatrix}$$

A expressão (2.11) pode ser escrita por:

$$\{\varepsilon\} = [B]\{U\} \quad (2.12)$$

que é o vetor das deformações.

A matriz $[B]$ é obtida a partir da diferenciação própria de $[N]$. Os valores atuais de $[B]$ dependem do elemento considerado e do tipo de problema que está sendo resolvido.

2.6.5 Vetor das tensões

Em geral, o material contido dentro do contorno do elemento pode estar sujeito a deformações iniciais, tais como as devido a mudança de temperatura, retrações, cristalização, etc. Se representarmos estas deformações por ε_0 , as tensões se devem a diferença entre as deformações reais e as iniciais (ZIENKIEWICZ, 1980) e,

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon^{el}\} + \{\varepsilon_0\} + \{\varepsilon^{th}\}$$

onde, $\{\varepsilon\}$ = deformação total do material

$\{\varepsilon^{el}\}$ = deformação elástica

$\{\varepsilon^{th}\}$ = deformação térmica

Admitindo-se um comportamento elástico linear do tipo mais geral, a relação entre tensões e deformações será linear e da forma:

$$\{\sigma\} = [D](\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_0\} - \{\varepsilon^{th}\}) \quad (2.13)$$

onde $[D]$ é a matriz de elasticidade que contém as propriedades do material.

Para o caso particular de tensão plana, temos que considerar três componentes de tensão que se relacionam com as deformações anteriormente expressas por:

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.14)$$

e a matriz $[D]$ se obterá de forma simples da relação usual entre tensões e deformações para um meio isotrópico.

$$\varepsilon_x - (\varepsilon_x)_0 - (\varepsilon_x)_{th} = \frac{1}{E} \sigma_x - \frac{\nu}{E} \sigma_y \quad (2.15)$$

$$\varepsilon_y - (\varepsilon_y)_0 - (\varepsilon_y)_{th} = -\frac{\nu}{E} \sigma_x + \frac{1}{E} \sigma_y \quad (2.16)$$

$$\gamma_{xy} - (\gamma_{xy})_0 - (\gamma_{xy})_{th} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy} \quad (2.17)$$

e resolvendo o sistema temos:

$$[D] = \frac{1}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

onde ν é o coeficiente de Poisson do material e E o módulo de Young.

3 METODOLOGIA

3.1 Considerações Iniciais

O modelo proposto tem por objetivo analisar o comportamento do concreto reforçado por fibras de aço. Esta escolha está diretamente ligada ao fato de que este tipo de material está associado ao elemento solid65 do ANSYS V.12, o qual possui diversas aplicações, permitindo simular diversos processos envolvendo o concreto. Dentre estas características está a possibilidade de saber de que forma se encontra o material após sofrer algum tipo de carga. Na sequência deste trabalho são mostradas estas características que o fazem diferenciado, lembrando que o modelo pode ser utilizado para qualquer material de base frágil.

Serão considerados e aplicados conceitos típicos da Mecânica da Fratura, Mecânica da Elasticidade e o Método dos Elementos Finitos utilizando o software ANSYS, para que se possa calcular as forças e tensões às quais as fibras estão sujeitas quando uma trinca principal aparece na matriz frágil, e assim determinar através das forças de reações dos contornos da matriz a tensão de ponte e posteriormente a tenacidade à fratura, também serão analisadas as tensões sofridas pela fibra e quantificar o dano na matriz. Softwares computacionais como o Matlab 2010b também são empregados para os cálculos da tensão de ponte e tenacidade fratura.

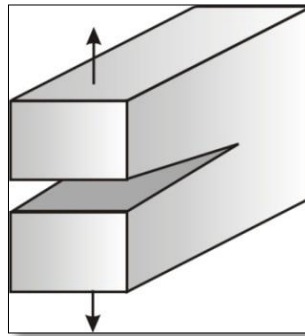
Nos próximos itens são apresentadas considerações iniciais sobre parâmetros do modelo como, matriz, fibra, ângulo de inclinação entre outros. Isto será de fundamental importância para a criação do código ANSYS na linguagem de programação de script *APDL* (*ANSYS Parametric Design Language*), pois serão estes os dados de entrada do algoritmo.

3.2 Descrição Do Modelo Numérico

3.2.1 Trinca

De acordo com a classificação da Mecânica da Fratura Linear Elástica, será utilizada a trinca tipo *opening mode* ou modo “abrindo” (Modo I) como mostra a Figura 3.1. O valor para abertura da trinca (w) será a resultante dos deslocamentos aplicados. A trinca se comportará como uma superfície plana e propagação paralela.

Figura 3.1- Trinca considerada-Modo I.

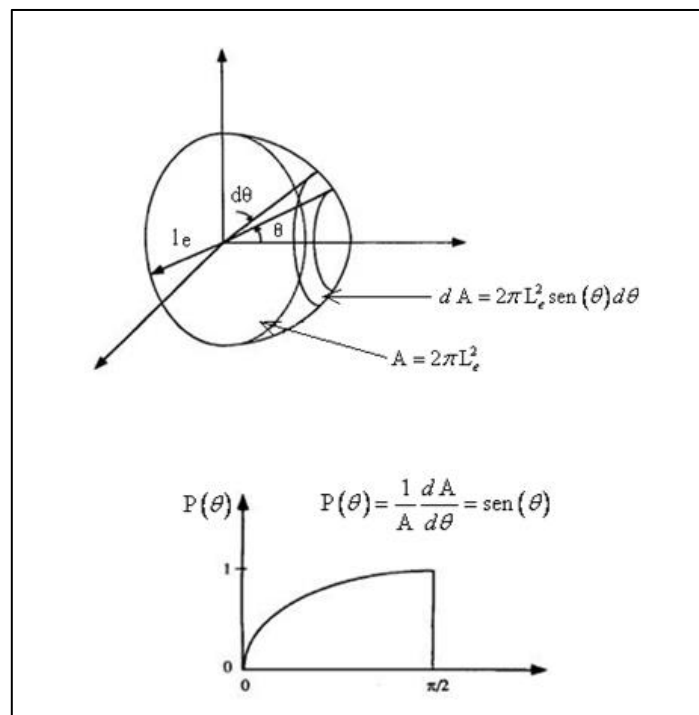


Fonte: Pavan (2006).

3.2.2 Delimitações De Dimensões E Funções Da Distribuição Da Fibra

Li e Chan (1993) consideram uma distribuição randômica das fibras na matriz, ou seja, a probabilidade da parte final da fibra enterrada na matriz está em algum ponto da superfície hemisférica (anel) (Figura 3.2), sendo o ângulo de inclinação (θ) da fibra referente à normal ao plano fraturado ($\text{sen } \theta$).

Figura 3.2-Orientação 3-D randômica da fibra onde o comprimento enterrado tem sua parte final na superfície hemisférica e a probabilidade $P(\theta)$.



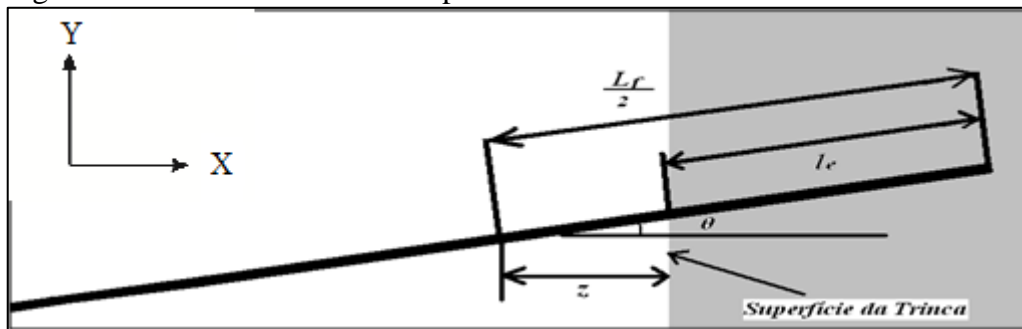
Fonte: Adaptado de Li, Wang e Backer (1991, p.610).

3.2.3 Layout Da Fibra Em Relação À Superfície Da Trinca

Observando a Figura 3.4 mostra-se uma fibra antes da deformação pela propagação da trinca, a fibra é inclinada com um ângulo θ em relação à superfície fraturada com parte da fibra enterrada l_e .

A Figura 3.3 mostra o layout da fibra no plano, onde l_e é o comprimento enterrado, z a distância até o centro da fibra e θ o ângulo de inclinação, onde a parte escura indica a matriz onde a fibra esta enterrada e a clara a fibra fora da matriz.

Figura 3.3- Fibra inclinada e com parte enterrada na matriz



Fonte: Adaptado de Li, Wang e Backer (1991, p.609).

Li e Chan (1993) sugerem que

$$\theta \leq \frac{\pi}{2} \quad \dots(3.1)$$

Mas observando a Figura 3.4, verificamos que o ângulo de inclinação da fibra que realmente contribuirá com a tenacidade é limitado por (Equação 3.2)

$$\theta < \arctan \frac{L_f}{d_f} \quad \dots(3.2)$$

Para $L_e > 0$, obtemos

$$0 < z < \frac{L_f}{2} \cos \theta - \frac{d_f \cdot \text{sen} \theta}{2} \quad \dots(3.7)$$

Assim as probabilidades de que o ângulo θ e a distância z aconteçam (Equação 3.8 e 3.9) é dada por,

$$p(\theta) = \text{sen}(\theta) \quad \text{para } 0 \leq \theta \leq \arctg\left(\frac{L_f}{d_f}\right) \quad \dots(3.8)$$

$$p(z) = \frac{2}{L_f} \quad \text{para } 0 \leq z \leq \frac{L_f \cos(\theta) - d_f \text{sen}(\theta)}{2} \quad \dots (3.9)$$

3.3 Aplicação Do Método Dos Elementos Finitos

Devido ao avanço dos trabalhos científicos, têm-se desenvolvidos vários modelos mecânicos e matemáticos para se analisar o comportamento do concreto reforçado. Geralmente, a utilização de tais modelos requerem o uso de métodos numéricos eficazes, entre os quais pode-se citar o método dos elementos finitos. Como mencionado anteriormente, o programa desenvolvido neste trabalho utiliza o método dos elementos finitos por ser um método que proporciona modelagens realísticas, confiáveis e de aplicação prática na engenharia. Baseando-se nas considerações feitas sobre o compósito fibra/matriz vistos nas seções anteriores criou-se um algoritmo em linguagem APDL para a criação do modelo geométrico e a malha de elementos finitos.

Estabelecendo uma porcentagem volumétrica de fibras no compósito de 1,5% em relação ao volume total e o comprimento da fibra fixo e (l_f) igual a 10mm, pode-se então deixar as dimensões da matriz em função da geometria da fibra. Tendo estabelecidas as propriedades dimensionais da fibra como diâmetro da fibra (d_f) e comprimento da fibra (l_f), encontrou-se uma relação ideal através do princípio de *Saint-Venant* que relaciona a distância mínima do ponto em análise para a carga aplicada, sendo esta distância no valor de 4(quatro) vezes o diâmetro da fibra em relação as duas extremidades. Por fim, a relação do comprimento da matriz é ($l_f + 8d_f$), podemos então calcular o valor do diâmetro da matriz pelas Equações 3.10 a 3.11.

$$\frac{V_f}{V_T} = 0,015 \quad \dots(3.10)$$

Onde V_T indica o volume total do compósito, sendo a fibra e matriz cilíndricas temos, que o diâmetro da matriz (d_M) é dado por:

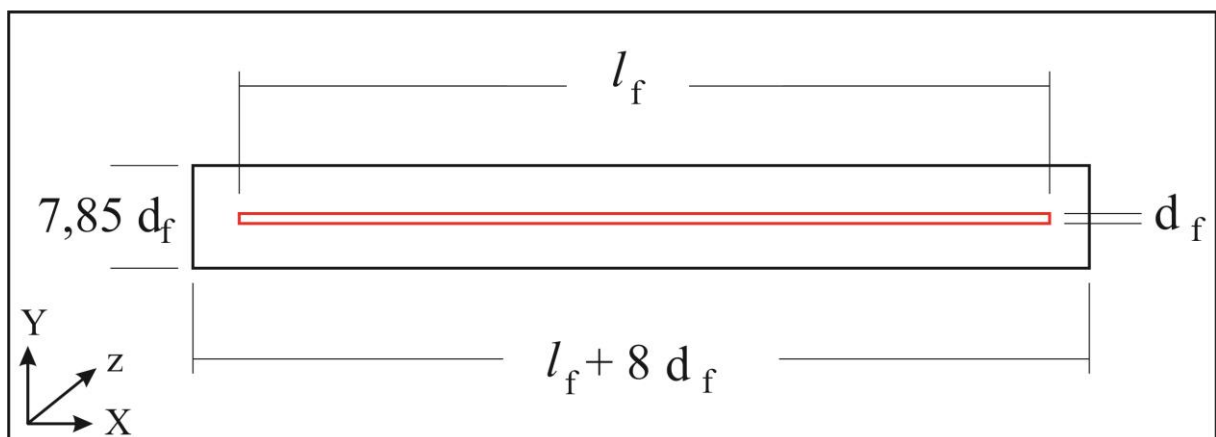
$$d_M = \frac{V_f}{0,015L_M} = \sqrt{\frac{d_f^2 L_f}{(8d_f + L_f)0,015}} \quad \dots(3.11)$$

Substituindo os valores e relacionando o resultado com parâmetros da fibra temos,

$$d_M = 0,785 = 7,85d_f \quad \dots(3.12)$$

Os parâmetros dimensionais do compósito estão apontados na Figura 3.5. Onde o retângulo em vermelho indica a fibra e o retângulo em preto a matriz.

Figura 3.5- Parâmetros dimensionais fibra/matriz



Como o elemento solid65 é um elemento 3D, a solução foi extrudar o modelo com um valores de d_f em relação ao eixo z, esta distância já será o suficiente e não alterará os resultados.

A seguir são descritos os passos e as entradas que serão utilizadas na criação do modelo em elementos finitos.

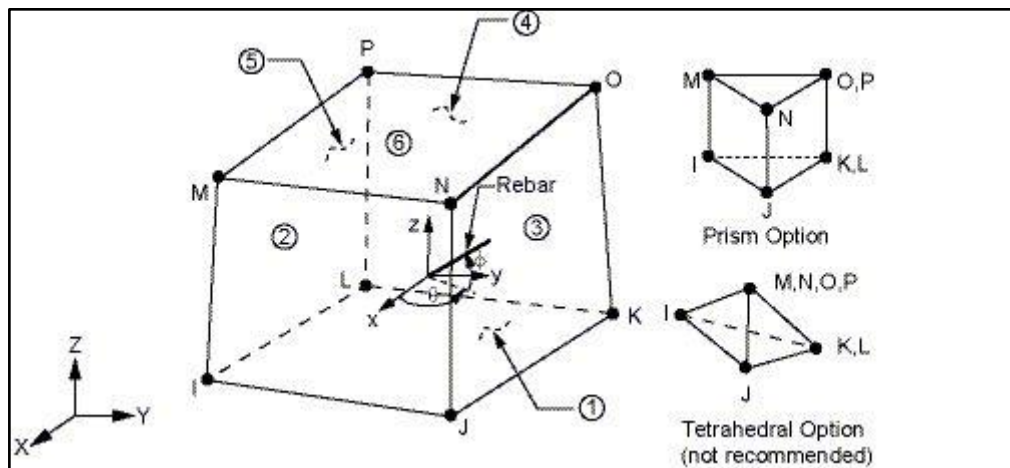
3.3.1 Element Types

Os tipos de elementos utilizados neste modelo são apresentados na Quadro 3.1. O elemento Solid65 foi usado para modelar o concreto. Este elemento possui oito nós com três graus de liberdade em cada nó, também é capaz de simular a deformação plástica, rachaduras em três direções ortogonais e esmagamento. O elemento Solid45 foi utilizado para a fibra de aço e sintética. Este elemento também possui oito nós com três graus de liberdade. A geometria e nós dos elementos Solid65 e Solid45 é mostrada na Figura 3.6. As descrições de cada elemento são definidas na biblioteca de elementos do ANSYS.

Quadro 3. 1- *Element Types*

Tipo de Material	ANSYS <i>Element</i>
Concreto	Solid65
Fibra Aço/ Sintética	Solid45

Figura 3.6- Elemento Solid65 e Solid45



3.3.2 Propriedades Dos Materiais

As definições das propriedades dos materiais são mostradas na Tabela 3.1.

Tabela 3.1- Propriedades dos materiais

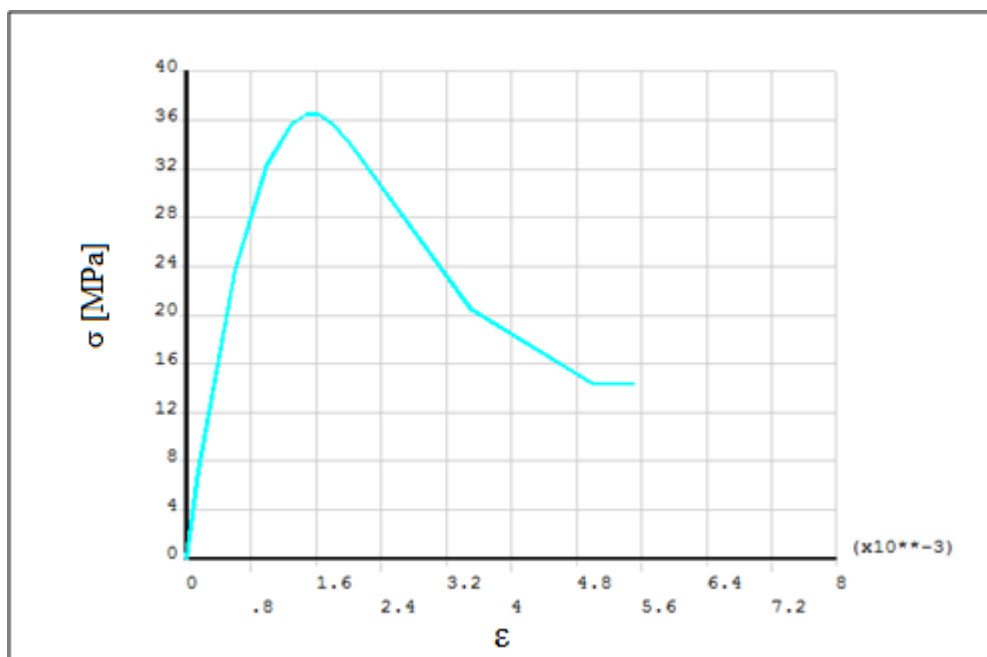
Número do material	Tipo de elemento (<i>Element Type</i>)	Propriedades dos Materiais																																	
1	Solid65	<table border="1"> <thead> <tr> <th colspan="2">Linear isotrópico</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>E</td> <td>30 GPa</td> </tr> <tr> <td>ν</td> <td>0,2</td> </tr> </tbody> </table>	Linear isotrópico		E	30 GPa	ν	0,2																											
		Linear isotrópico																																	
		E	30 GPa																																
		ν	0,2																																
		<table border="1"> <thead> <tr> <th colspan="3">Multilinear Isotrópico</th> </tr> <tr> <th>Pontos</th> <th>ϵ</th> <th>σ [MPa]</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>Ponto 1</td> <td>0,00024</td> <td>7,2</td> </tr> <tr> <td>Ponto 2</td> <td>0,00096</td> <td>23,69</td> </tr> <tr> <td>Ponto 3</td> <td>0,0016</td> <td>32,41</td> </tr> <tr> <td>Ponto 4</td> <td>0,00208</td> <td>35,69</td> </tr> <tr> <td>Ponto 5</td> <td>0,00236</td> <td>36,5</td> </tr> <tr> <td>Ponto 6</td> <td>0,00259</td> <td>36,5</td> </tr> <tr> <td>Ponto 7</td> <td>0,00288</td> <td>35,6</td> </tr> <tr> <td>Ponto 8</td> <td>0,0032</td> <td>34,25</td> </tr> <tr> <td>Ponto 9</td> <td>0,0054</td> <td>20,49</td> </tr> </tbody> </table>	Multilinear Isotrópico			Pontos	ϵ	σ [MPa]	Ponto 1	0,00024	7,2	Ponto 2	0,00096	23,69	Ponto 3	0,0016	32,41	Ponto 4	0,00208	35,69	Ponto 5	0,00236	36,5	Ponto 6	0,00259	36,5	Ponto 7	0,00288	35,6	Ponto 8	0,0032	34,25	Ponto 9	0,0054	20,49
		Multilinear Isotrópico																																	
		Pontos	ϵ	σ [MPa]																															
		Ponto 1	0,00024	7,2																															
		Ponto 2	0,00096	23,69																															
		Ponto 3	0,0016	32,41																															
		Ponto 4	0,00208	35,69																															
		Ponto 5	0,00236	36,5																															
		Ponto 6	0,00259	36,5																															
		Ponto 7	0,00288	35,6																															
		Ponto 8	0,0032	34,25																															
		Ponto 9	0,0054	20,49																															
		<table border="1"> <thead> <tr> <th colspan="2">Concrete</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>ShrCf-Open</td> <td>0,2</td> </tr> <tr> <td>ShrCf-Close</td> <td>0,7</td> </tr> <tr> <td>UnTensSt</td> <td>3,7</td> </tr> <tr> <td>UnCompSt</td> <td>36,6</td> </tr> <tr> <td>BiCompSt</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>HydroPrs</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>HydroBiCompSt</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>HydroUnCompSt</td> <td>0</td> </tr> <tr> <td>TensCrFac</td> <td>0</td> </tr> </tbody> </table>	Concrete		ShrCf-Open	0,2	ShrCf-Close	0,7	UnTensSt	3,7	UnCompSt	36,6	BiCompSt	0	HydroPrs	0	HydroBiCompSt	0	HydroUnCompSt	0	TensCrFac	0													
		Concrete																																	
		ShrCf-Open	0,2																																
		ShrCf-Close	0,7																																
UnTensSt	3,7																																		
UnCompSt	36,6																																		
BiCompSt	0																																		
HydroPrs	0																																		
HydroBiCompSt	0																																		
HydroUnCompSt	0																																		
TensCrFac	0																																		

2	Solid45	Linear isotrópico- Aço	
		E	200 GPa
		ν	0,3
		Linear isotrópico- Sintética	
		E	60 GPa
		ν	0,35

O material número 1 refere-se ao elemento solid65. Este por sua vez requer propriedades lineares isotrópicas e multilineares isotrópicas para melhor caracterização do concreto. O material multilinear isotrópico usa o critério de falha de Von Mises em conjunto com o modelo de falha de Willam e Warnock (ANEXO A) para definir a superfície de falha do concreto. E é o módulo de elasticidade, e ν é o coeficiente de Poisson, os dados utilizados para a matriz de concreto e para fibra de aço foram retirados de Fantilli e Vallini (2007) e as propriedades mecânicas da fibra sintética de Lin, kind e li (1999).

O primeiro ponto da curva tensão-deformação multilinear isotrópica (Figura 3.7) deve ser preenchida pelo usuário e satisfazer a Lei de Hooke. A curva multilinear é usada para simular a curva típica de ensaio compressivo do concreto e ajudará com a convergência da solução não linear.

Figura 3.7- Curva tensão-deformação multilinear isotrópica típica do ensaio compressivo do concreto



O critério de falha da superfície do concreto de Willam e Warnke (1974) é estabelecido através das propriedades definidas para o material *Concrete*. As nove constantes para o concreto são:

1. Coeficiente de transferência de cisalhamento para uma trinca aberta;
2. Coeficiente de transferência de cisalhamento para uma trinca fechada;
3. Tensão no estado uniaxial de trincas;
4. Tensão uniaxial de esmagamento (positivo);
5. Tensão biaxial de esmagamento (positivo);
6. Estado de tensão no ambiente hidrostática para uso com constantes 7 e 8 ;
7. Tensão biaxial (positivo) de esmagamento sob o estado de tensão no ambiente hidrostático (constante 6);
8. Tensão uniaxial (positivo) de esmagamento sob o estado de tensão no ambiente hidrostático (constante 6);
9. Multiplicador de rigidez para a condição trincas na tração.

Coeficientes de transferência de cisalhamento típicas variam de 0,0 a 1,0, com 0,0 representando uma abertura lisa (perda total de transferência de cisalhamento) e 1,0 representando uma abertura áspera (sem perda de transferência de cisalhamento) . Os

coeficientes de transferência de cisalhamento para fissuras abertas e fechadas foram determinada utilizando o trabalho de Kachlakev *et al* (2001) como base.

Além disso, o material *concrete* permite que através de uma tabela de status de cada elemento pode-se saber quais elementos foram esmagados ou trincados, entre outros status como mostra a Tabela 3.2, os *status* variam de 1 a 16 e nas três direções principais.

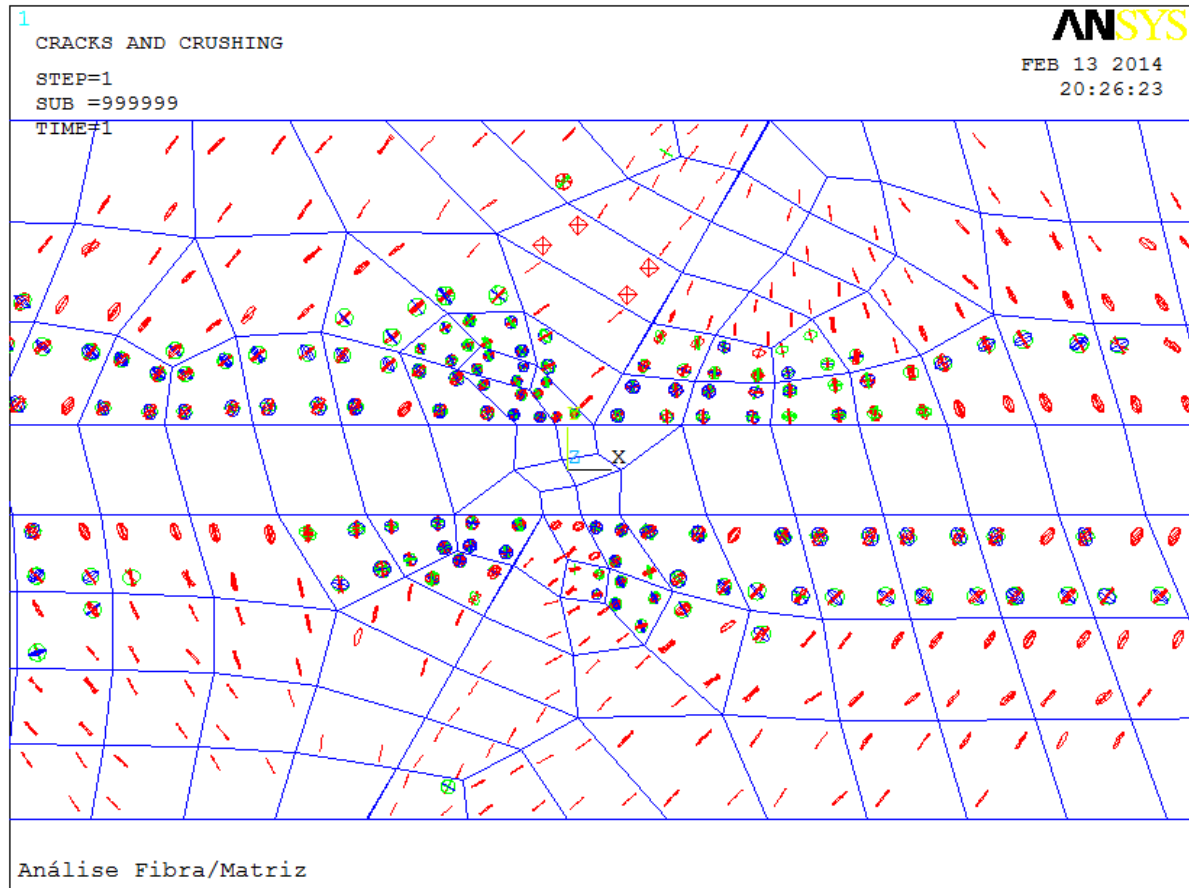
Tabela 3.2- Status de elementos do concreto

Status	Status na direção 1	Status na direção 2	Status na direção 3
1	<i>Crushed</i>	<i>Crushed</i>	<i>Crushed</i>
2	<i>Open</i>	<i>Neither</i>	<i>Neither</i>
3	<i>Closed</i>	<i>Neither</i>	<i>Neither</i>
4	<i>Open</i>	<i>Open</i>	<i>Neither</i>
5	<i>Open</i>	<i>Open</i>	<i>Open</i>
6	<i>Closed</i>	<i>Open</i>	<i>Open</i>
7	<i>Closed</i>	<i>Open</i>	<i>Neither</i>
8	<i>Open</i>	<i>Closed</i>	<i>Open</i>
9	<i>Closed</i>	<i>Closed</i>	<i>Open</i>
10	<i>Open</i>	<i>Closed</i>	<i>Neither</i>
11	<i>Open</i>	<i>Open</i>	<i>Closed</i>
12	<i>Closed</i>	<i>Open</i>	<i>Closed</i>
13	<i>Closed</i>	<i>Closed</i>	<i>Neither</i>
14	<i>Open</i>	<i>Closed</i>	<i>Closed</i>
15	<i>Closed</i>	<i>Closed</i>	<i>Closed</i>
16	<i>Neither</i>	<i>Neither</i>	<i>Neither</i>

Aqui *crushed* indicam os elementos esmagados, *open* as trincas abertas, *closed* as trincas fechadas e *neither* o elemento nem esta esmagado nem com trincas. Através da GUI do ANSYS é possível visualizar estes status por diferentes geometrias dentro de cada elemento. A função PLCRACK é responsável por isso e feita especialmente para esse elemento, ela exibe círculos dentro dos elementos com trincas e um octaedro dentro dos elementos esmagados. Se a trinca foi aberta e depois fechada ele exibe um “X” no centro do elemento (Figura 3.8). O elemento pode trincar em até três planos diferentes, a primeira

aparição da primeira trinca é mostrada como um círculo vermelho, a segunda é mostrada como um círculo verde e por fim a terceira com um círculo azul.

Figura 3.8- GUI ANSYS *element status*, região da abertura da trinca



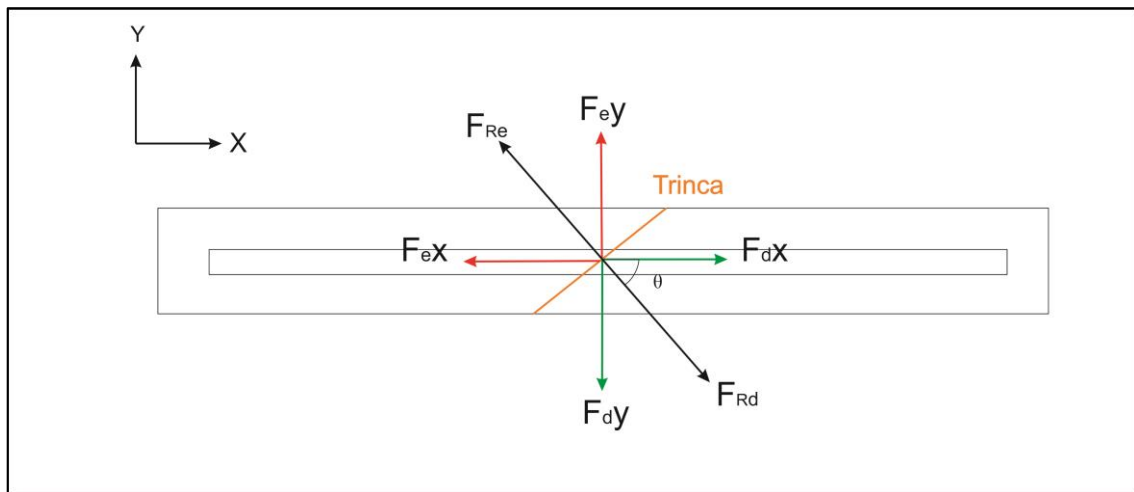
Isto será de fundamental importância, pois será desta forma que sabendo o status do elemento se esmagado (*crushed*) ou trincas abertas (*open*) em quaisquer das direções o elemento será “morto” através da função *Kill and Death* do ANSYS, tornando o elemento com rigidez zero, solucionando novamente o modelo até nenhum elemento estiver danificado, e assim sabe-se a verdadeira força de arracamento da fibra da matriz.

O material número 2 refere-se ao elemento solid45. Este elemento é muito usado para simular estruturas de aço entre outros diversos materiais. Aqui será usado para modelar um elemento isotrópico linear para simular as fibras de aço e sintéticas.

3.3.3 Determinação da tenacidade a fratura pelos resultados das forças de reações através do método de elementos finitos

Aplicando-se deslocamentos nos contornos da matriz, é possível obter a resultante das reações ocorridas no compósito.

Figura 3.9- Layout da fibra inclinada ao plano de fratura e as resultantes das reações e os deslocamentos



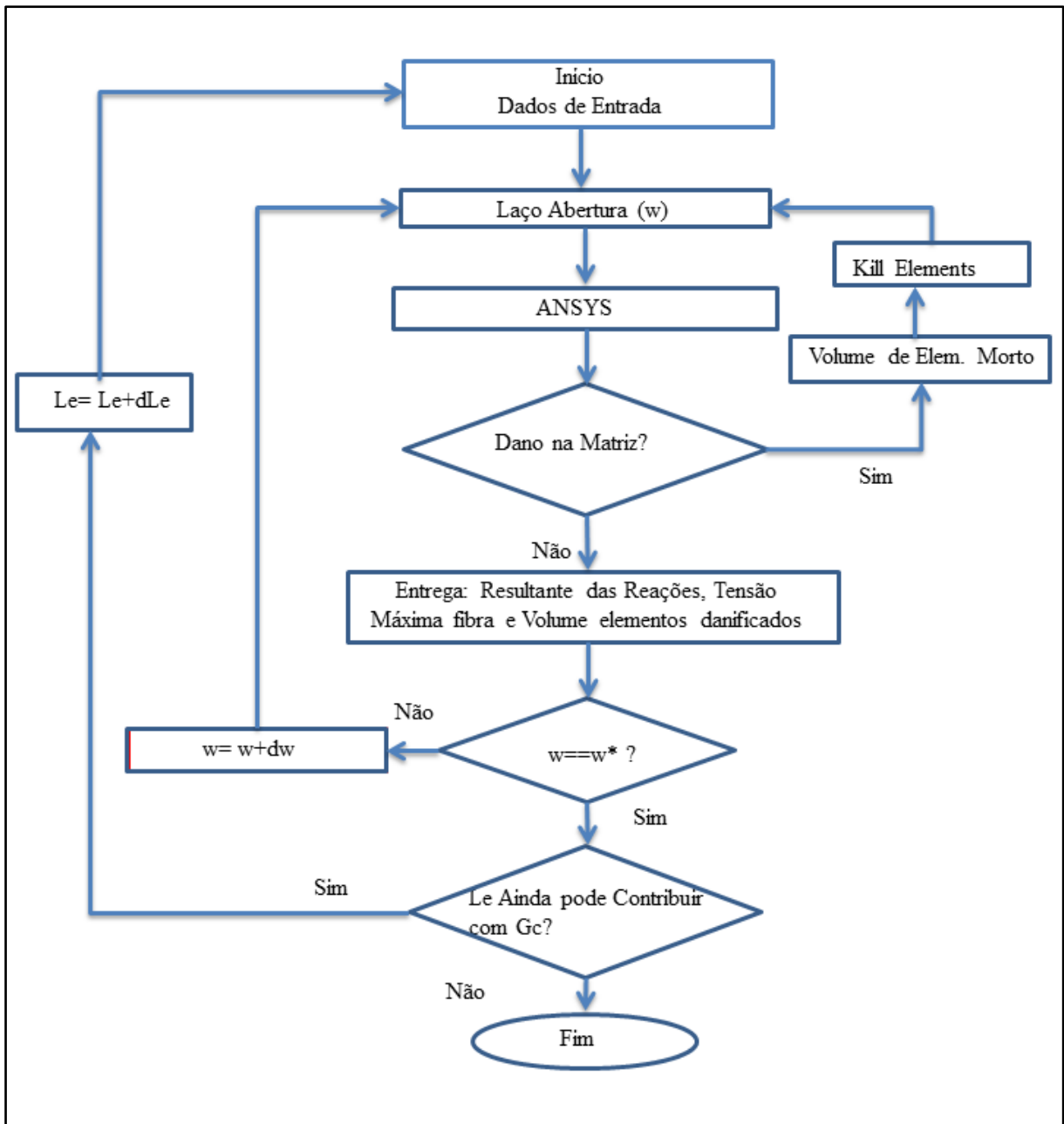
O programa oferece os resultados das reações nos contornos da matriz esquerda e direita. A Figura 3.9 mostra o layout da fibra inclinada ao plano de fratura e os resultantes das reações. Pela figura podemos obter as forças de reação da matriz esquerda e direita respectivamente pelas equações 3.13 e 3.14,

$$\left(\vec{F}_{Re}\right)^2 = \left(\vec{F}_{eX}\right)^2 + \left(\vec{F}_{eY}\right)^2 \quad \dots(3.13)$$

$$\left(\vec{F}_{Rd}\right)^2 = \left(\vec{F}_{dX}\right)^2 + \left(\vec{F}_{dY}\right)^2 \quad \dots(3.14)$$

No entanto para se obter as forças de reações é necessário que todas as tensões da fibra já estejam zeradas, ou seja, após uma abertura w^* não há mais nenhuma fibra que pode contribuir com a tenacidade do material. O fluxograma abaixo mostra como funciona o algoritmo criado.

Figura 3.10- Fluxograma para análise da tenacificação



3.3.4 Tensão De Ponte Proveniente Das Fibras No Plano Trincado

Segundo Li e Chan (1993) a tensão de ponte é ligada a abertura w com a força de ponte N de cada fibra, que é indispensável para calcular o aumento da tenacidade à fratura, conforme a Equação 3.15.

$$\sigma_c(w) = \frac{V_f}{A_f} \int_0^{\arctan(L_f/d_f)} \int_0^{(L_f \cos(\theta) - d_f \sin(\theta))/2} N(w, \theta, z) P(\theta) p(z) dz d\theta \quad \dots(3.15)$$

onde $N(w, \theta, z)$ é a força de ponte da fibra em seu respectivo processo, que deverá igual à resultante das reações e $P(\theta)$ e $P(z)$ as probabilidades de θ e z acontecerem, dadas pelas Equações 3.8 e 3.9 respectivamente.

Observando a Equação 3.15 nota-se que para uma correta determinação da tensão de ponte, necessita-se encontrar a relação entre a força axial N e a abertura w para uma determinada fibra inclinada e distante da superfície fraturada z . A dificuldade em se determinar o aumento da tenacidade a fratura esta nessa relação. Alguns trabalhos na literatura se equivocam ao proporem a parte da fibra fora da matriz como uma viga em balanço em todas as situações, pois está afirmação só está correta quando a parte que fica fora da matriz atinge mais do que oito vezes o diâmetro da fibra. Neste trabalho a força N é substituída pela resultante das reações, que por sua vez, são determinadas pelo MEF.

3.3.5 Aumento de energia de fratura G_c

O aumento de energia de fratura G_c , é encontrada através da área formada pela curva $\sigma_c - w$, assim a tenacificação é calculada pela Equação 3.16. Os resultados encontrados mostram o valor do aumento da tenacidade em relação ao material sem o reforço.

$$G_c = \int_0^{w^*} \sigma_c(w) dw = \int_0^{w^*} \frac{V_f}{A_f} \int_0^{\arctan(L_f/d_f)} \int_0^{(L_f \cos(\theta) - d_f \sin(\theta))/2} N(w, \theta, z) P(\theta) p(z) dz d\theta dw \quad \dots(3.16)$$

3.4 Casos Modelados e Parâmetros Utilizados

Neste trabalho foram simulados quatro diâmetros diferentes para dois tipos de fibras, de aço e sintética. Baseados no modelo matemático definiram-se a quantidade de aberturas (dw), comprimentos enterrados (L_e) e diferentes ângulos de inclinação (θ) já que estamos trabalhando com as probabilidades $P(\theta)$ e $P(z)$ quanto maior a quantidade de dados maior a precisão dos resultados. A Tabela 3.2 mostra os valores adotados para os casos trabalhados.

Tabela 3.3- Parâmetros usados nos casos investigados

Diâmetro Fibra	Tipo	dw	θ	L_e [mm]
0,02	Aço	10	10°, 30°, 50°, 70°	5, 4, 3, 2
	Sintética	8	10°, 30°, 50°, 70°	5, 4, 3, 2
0,05	Aço	10	10,20°, 30°, 40°, 50°, 60°, 70°	5, 4, 3, 2
	Sintética	10	10, 20°, 30°, 40°, 50°, 60°, 70°	5, 4, 3, 2
0,1	Aço	8	10, 20°, 30°, 40°, 50°, 60°, 70°	5, 4, 3, 2
	Sintética	10	10, 20°, 30°, 40°, 50°, 60°, 70°	5, 4, 3, 2
0,5	Aço	23	10, 20°, 30°, 40°, 50°, 60°, 70°	5, 4, 3, 2
	Sintética	22	10, 20°, 30°, 40°, 50°, 60°, 70°	5, 4, 3

Onde $L_e=5$ corresponde ao máximo comprimento enterrado da fibra, ou seja, a metade do comprimento da fibra ($L_f/2$), os outros comprimentos tem seus valores em mm em relação a extremidade direita da fibra. As fibras com diâmetro de 0,5 tiveram menor número de comprimentos enterrados por possuírem uma relação diâmetro/comprimento menor, não permitindo uma variação muito grande. Já as fibras menores (0,02) tiveram a quantidade de ângulos de inclinação (θ) menores, pois como o dano na matriz se propagava de forma lenta, levando mais tempo em relação as demais para ciclo completo da simulação.

Os valores das aberturas dependem do diâmetro da fibra e serão melhores visualizadas nas seções abaixo, a Tabela 3.2 nós da uma ideia melhor dos parâmetros utilizados. No total de aproximadamente 2150 simulações tentou-se trabalhar com o máximo número de dados possíveis.

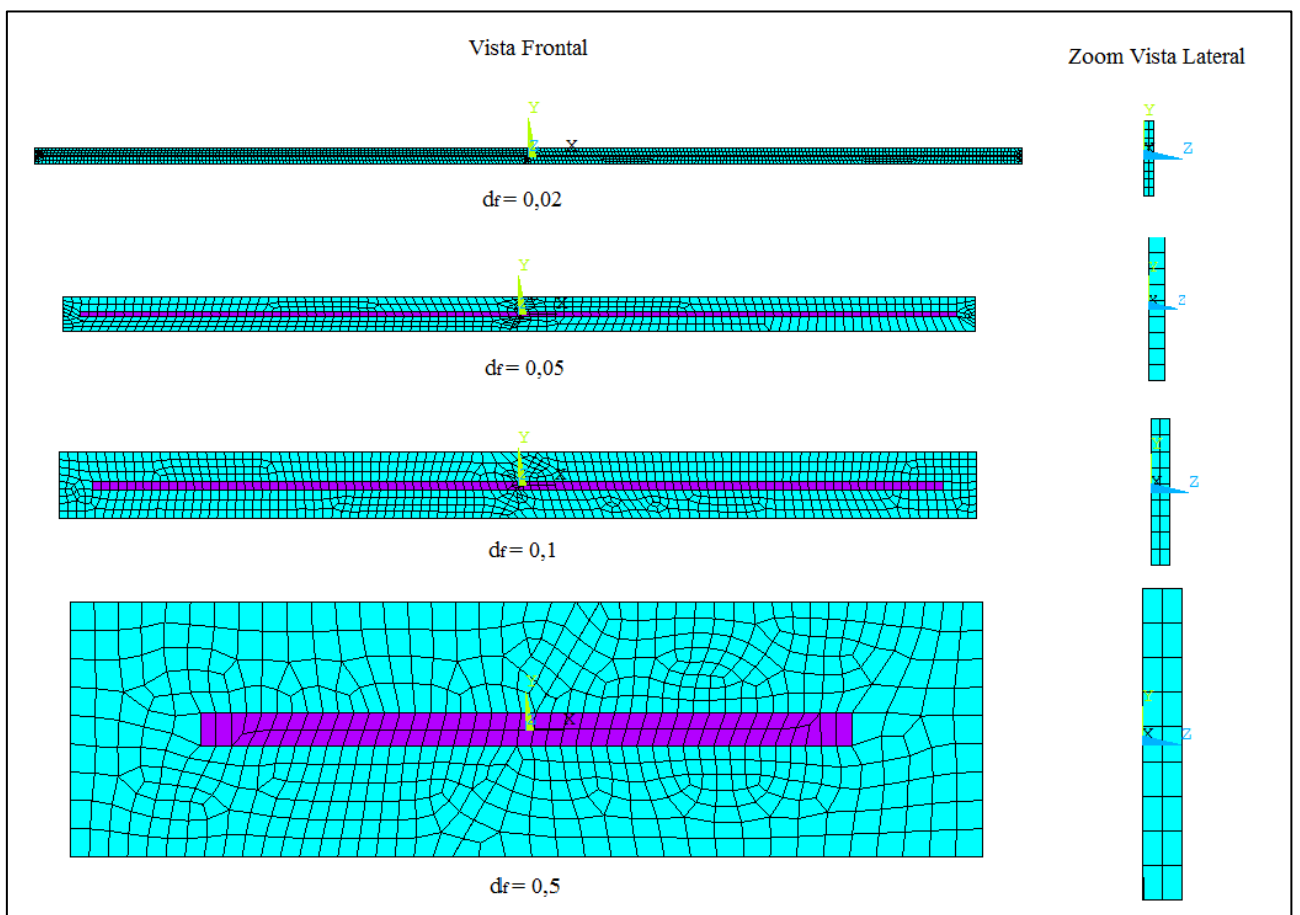
Além das reações no contorno da matriz, analisou-se a tensão máxima da fibra em cada caso e também o volume de elementos retirados, “mortos”, como forma de quantificar o dano na matriz.

4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

4.1 Malha em Elementos Finitos

Um exemplo de malha gerada para cada diâmetro de fibra é mostrada na Figura 4.1, independente do ângulo de inclinação e comprimento enterrado nenhum erro na malha foi apontado pelo ANSYS. O algoritmo completo em *APDL* encontra-se no Apêndice A.

Figura 4.1-Malha gerada para $Le=5$



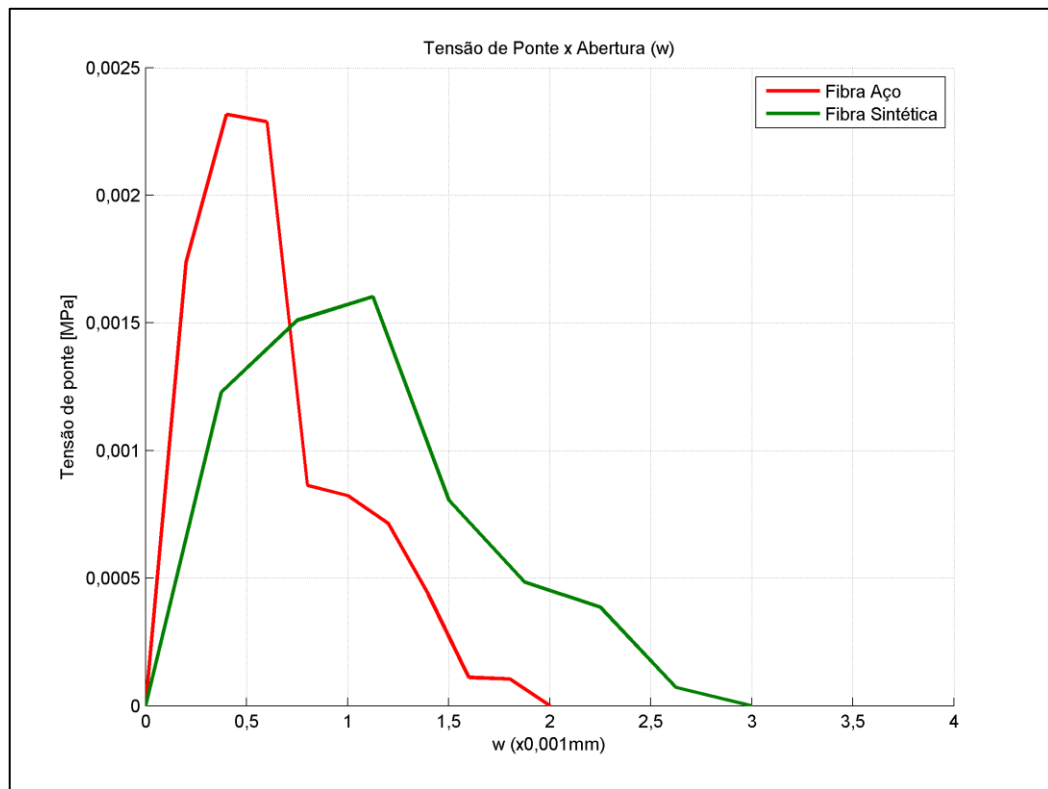
Como pode-se notar, a malha criada se encontra adequada para o problema. A correta distribuição das dimensões dos elementos, ou seja, a diferença entre o maior lado e o menor lado de um elemento seja pequena, beneficiando a convergência.

4.2 Relação Tensão de Ponte e Abertura da trinca

Para o cálculo da tensão de ponte (Equação 3.21) e posteriormente o da tenacidade (Equação 3.22), foi desenvolvido um código no Software Matlab (Apêndice B) para auxiliar neste fim. O entendimento de todos os conceitos utilizados no modelo matemático é fundamental nesta etapa dando segurança e confiabilidade nos resultados. A tensão de ponte é a soma das forças oferecidas pelas fibras que foram distribuídas numa área da matriz durante a abertura da trinca (w).

Os resultados da tensão de ponte são mostrados nas Figuras 4.2 a 4.5 abaixo.

Figura 4.2- Tensão de Ponte para fibras com diâmetro de 0,02 mm



Observa-se que as fibras de menor diâmetro (0,02 e 0,05) para os dois tipos de fibras, tem uma abertura maior que as fibras de diâmetros maiores, no entanto possuem baixa tensão de ponte, o que é compreensível uma vez que quanto maior o diâmetro maior a força que esta fibra deverá desenvolver para deformar o mesmo que a fibra de menor diâmetro.

Figura 4.3- Tensão de Ponte para fibras com diâmetro de 0,05 mm

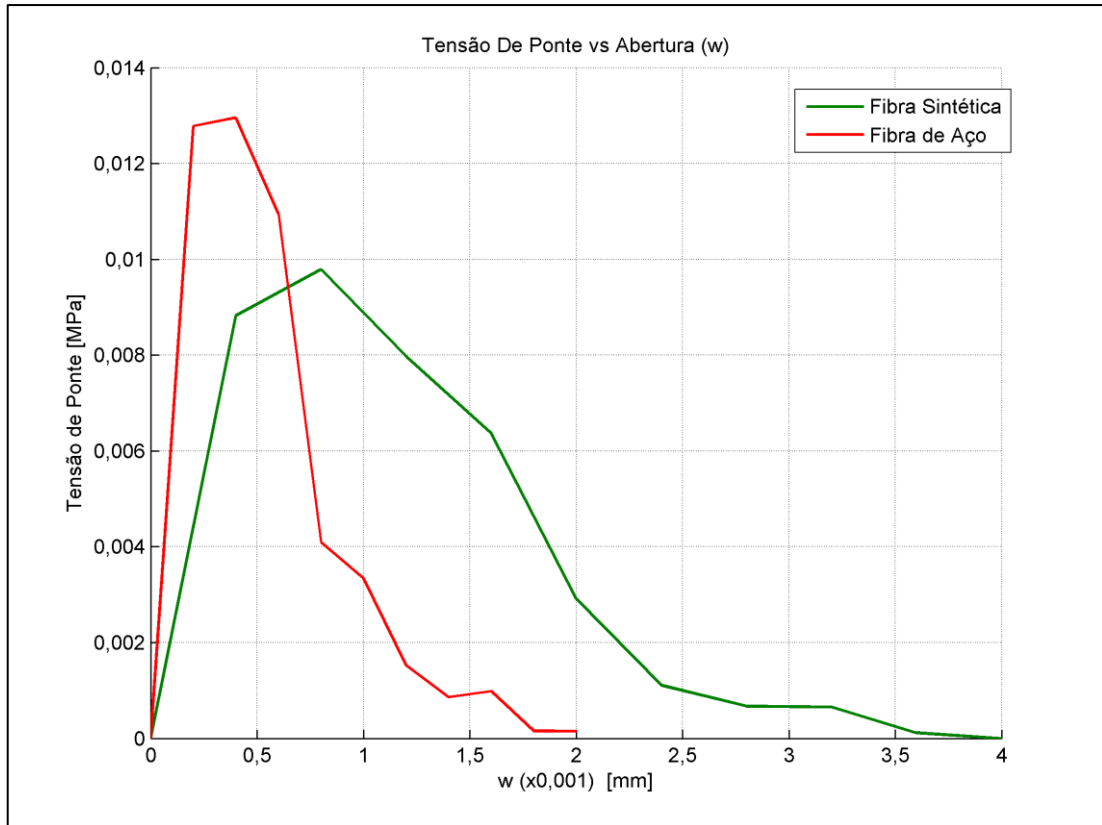


Figura 4.4 Tensão de Ponte para fibras com diâmetro de 0,1 mm

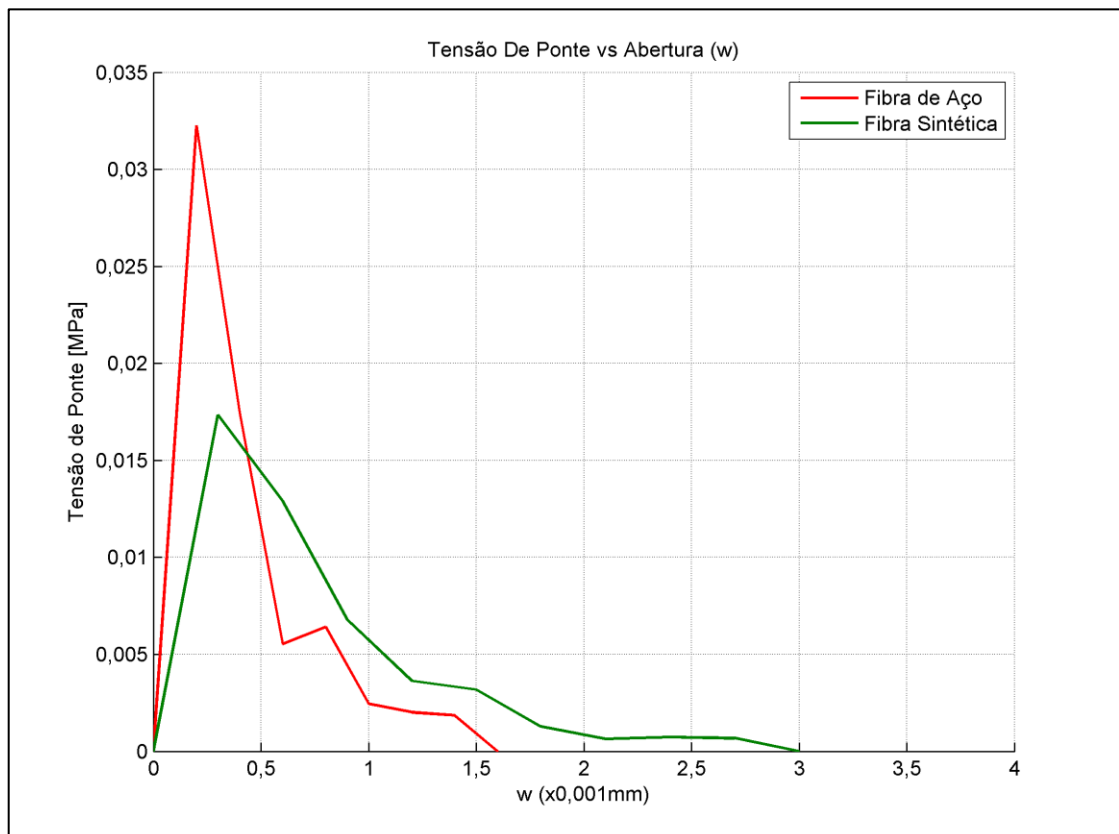
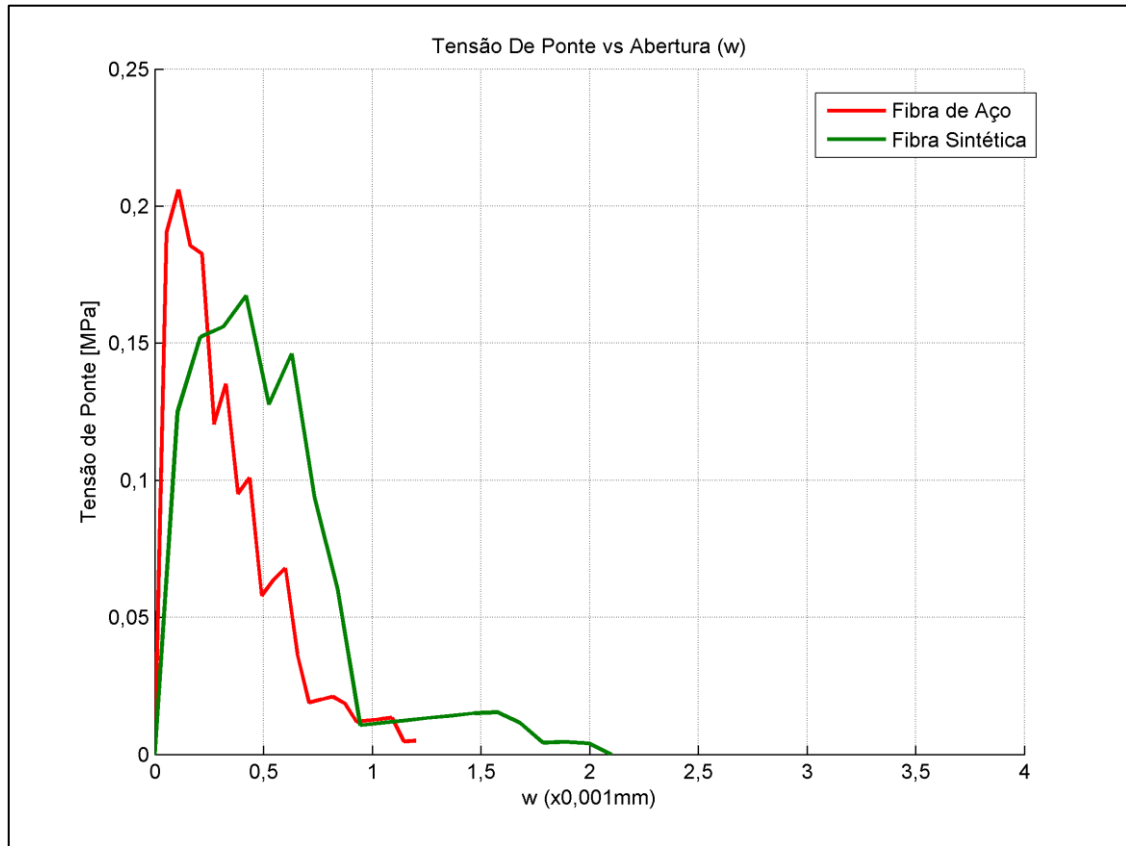


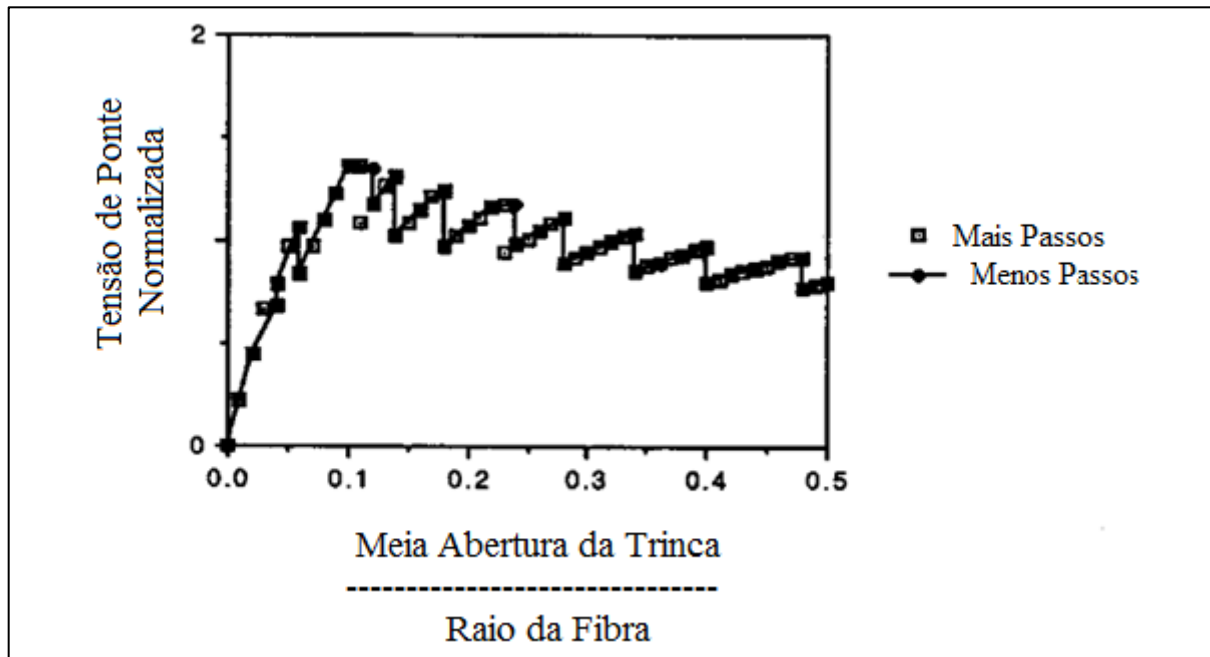
Figura 4.5- Tensão de Ponte para fibras com diâmetro de 0,5 mm



Em todos os casos as fibras sintéticas suportaram uma abertura muito maior que as fibras de aço, este fator pode ser associado ao baixo módulo de elasticidade deste tipo de fibra (60Gpa), desta forma a fibra consegue se deformar mais por ser mais flexível que as fibras de aço. Outro ponto importante é a tensão de ponte máxima, que em todos os casos é maior para fibras de aço, o que claramente é observado devido a alta resistência desta fibra em relação à outra. Entretanto comparando-se com trabalhos experimentais contidos na literatura as tensões ainda estão muito baixas. A não consideração de uma interface pode ser responsável por esse fator, devido a não introdução de uma interface no ANSYS as fibras não realizam o processo de descolagem não contribuindo para a tenacificação.

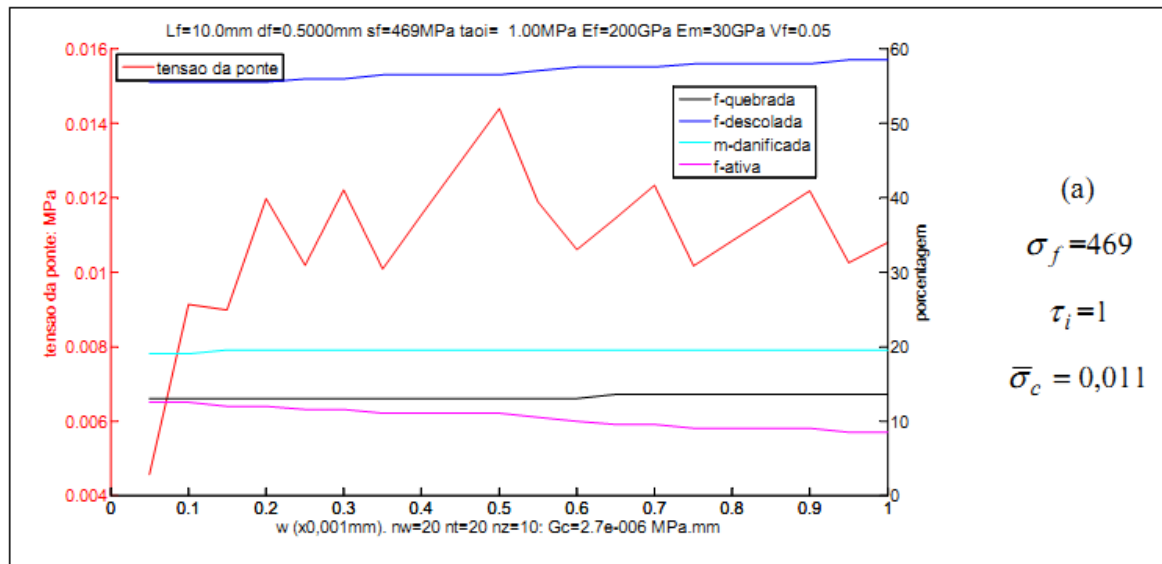
A Figura 4.5 aponta um resultado da tensão de ponte em forma de serra, subindo e caindo depois que alcançou sua tensão máxima, ou seja, a fibra está carregando e descarregando, como se estivesse escapando da matriz sobre o efeito do atrito até a abertura onde todas as tensões são zero. Outros trabalhos da literatura também mostram o mesmo efeito como em Piaciski (2009, p.118) e Leung e Li (1992).

Figura 4.6 -Tensão de ponte- Modelo Viga em Balanço, $E_f = E_m$



Fonte: Adaptado de Leung e Li (1992, p.1350).

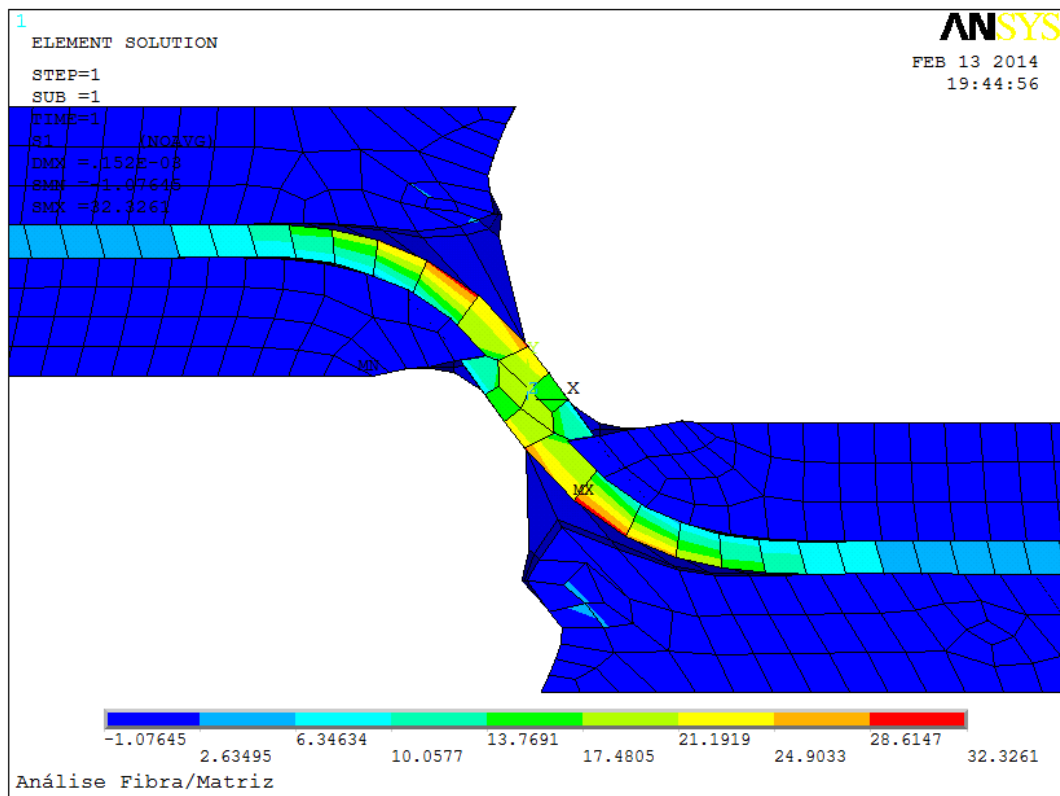
Figura 4.7- Tensão de ponte- Modelo considerando atrito da interface



4.3 Distribuição de Tensões nas Fibras

A partir do algoritmo implementado facilmente foi possível anotar o valor das tensões máximas na fibra (Figura 4.8). Assim foi possível realizar uma análise mais precisa e saber se em algum caso não haveria rompimento da fibra.

Figura 4.8- Análise de tensões na fibra. Fibra de aço, $d_f=0.1$, $\theta=30^\circ$ e $Le=5$



A fibra tem sua tensão máxima na região de saída da matriz, como mostrado na figura acima. Neste trabalho nenhuma fibra foi quebrada, ou seja, seu limite de resistência não foi ultrapassado antes da danificação completa na matriz. Como não foi usado nenhum elemento de contato entre fibra e matriz, a região de interface era formada pelas áreas paralelas de concreto e fibra, como se estivessem com uma aderência perfeita, não há controle do atrito, logo cada vez que acontecia uma solicitação muito grande de tensões o elemento concreto falhava não deixando a fibra chegar ao seu limite.

4.3.1 Influência do Diâmetro da Fibra

As Figuras 4.9 e 4.10 mostram o comportamento da tensão na fibra com o aumento da abertura da trinca relacionando os diferentes diâmetros.

Figura 4.9- Análise de tensões da matriz com fibras de aço

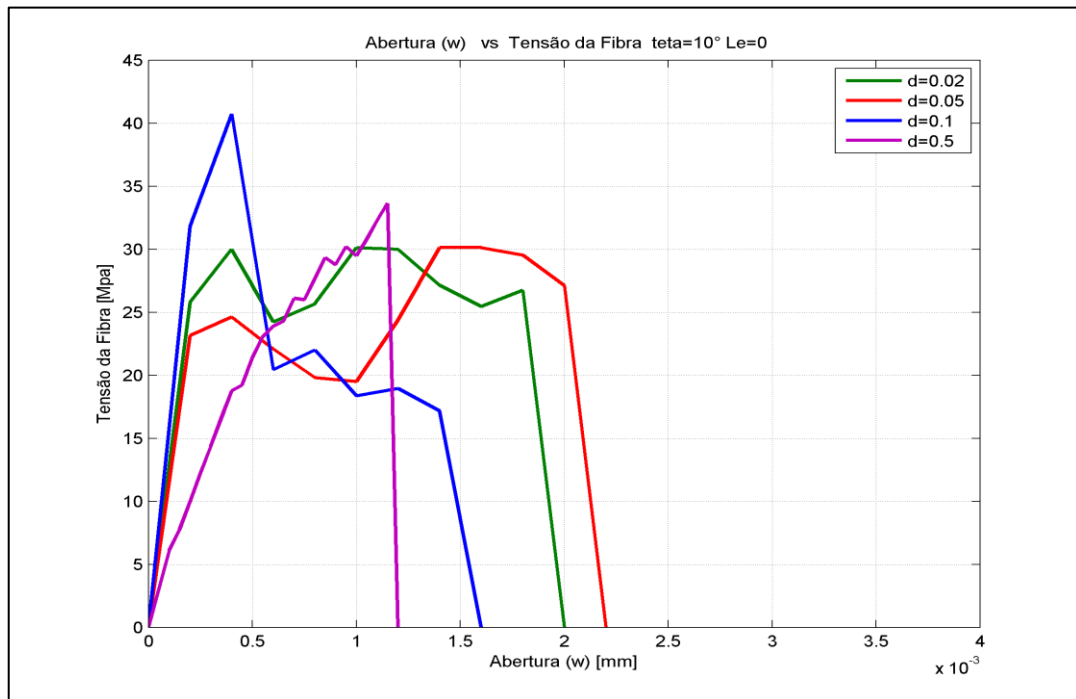
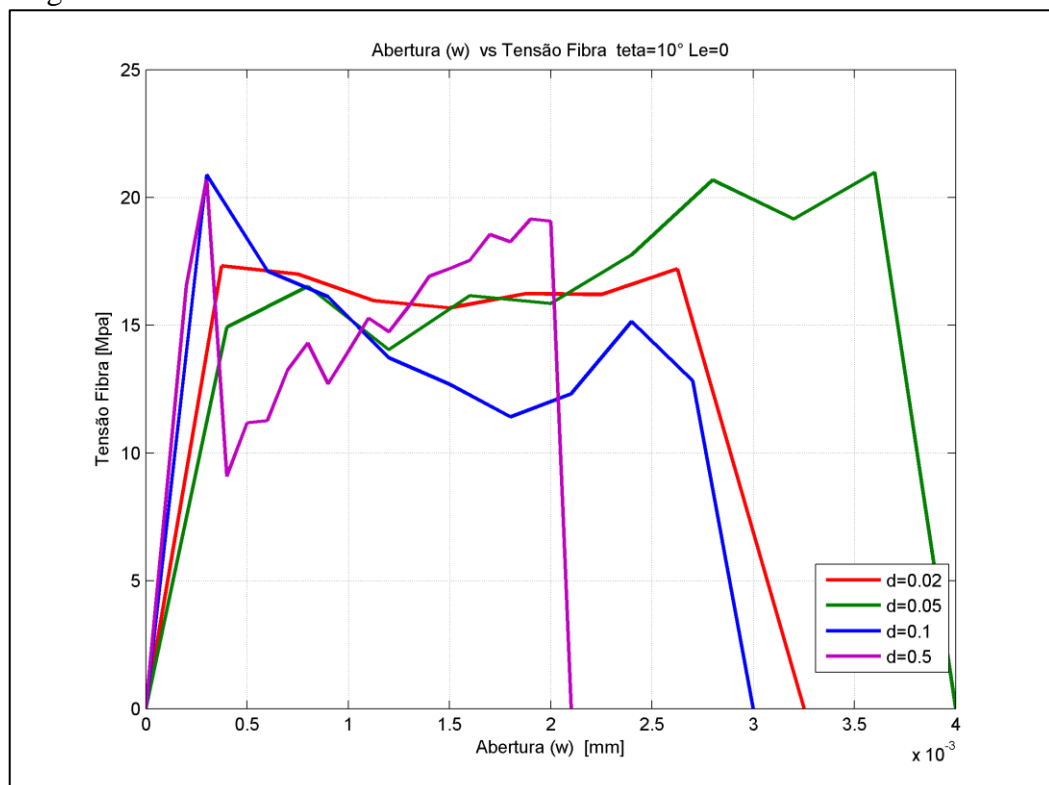


Figura 4.10- Análise de tensões da matriz com fibras sintética



As tensões encontradas não ultrapassaram 5% do valor da resistência das fibras adotado (aço-900 MPa, sintética-1200 MPa- dados retirados de Soares (2010)), nesse sentido a alta adesão da fibra com a matriz (concreto) é responsável por salvar a fibra, por assim dizer. Cada passo de abertura o concreto era danificado relaxando as tensões na fibra na área de contato da interface.

Como mostram as figuras acima, a maior parte dos casos, a fibra tem sua tensão máxima nas primeiras aberturas, caindo e depois subindo até o dano superar o comprimento enterrado.

Pelas suas propriedades mecânicas o aço teve uma tensão máxima maior que as fibras sintéticas. Quanto maior o diâmetro maior a força de carregamento da fibra, no entanto diminuindo as possibilidades de abertura.

As fibras sintéticas apresentam uma maior capacidade de deformação devido ao seu módulo de elasticidade menor, proporcionando um número maior de aberturas de trincas mantendo-se um valor de tensão.

4.3.2 Influência do Comprimento Enterrado (L_e)

As Figuras 4.11 e 4.12 mostram a variação de tensão em função da abertura da trinca variando o comprimento enterrado.

Para cada caso foi utilizada a maior tensão encontrada em cada abertura e nas variações do ângulo θ . Os resultados são similares com a tensão máxima ocorrendo nos dois maiores comprimentos enterrados, dentro de uma faixa maior de tensão para as fibras de aço e uma faixa menor para as fibras sintéticas, no entanto as fibras com menor comprimento enterrado tem uma média de tensões maior que as fibras com comprimento enterrado maior.

Figura 4.11- Tensões na matriz frágil reforçada com fibra de aço

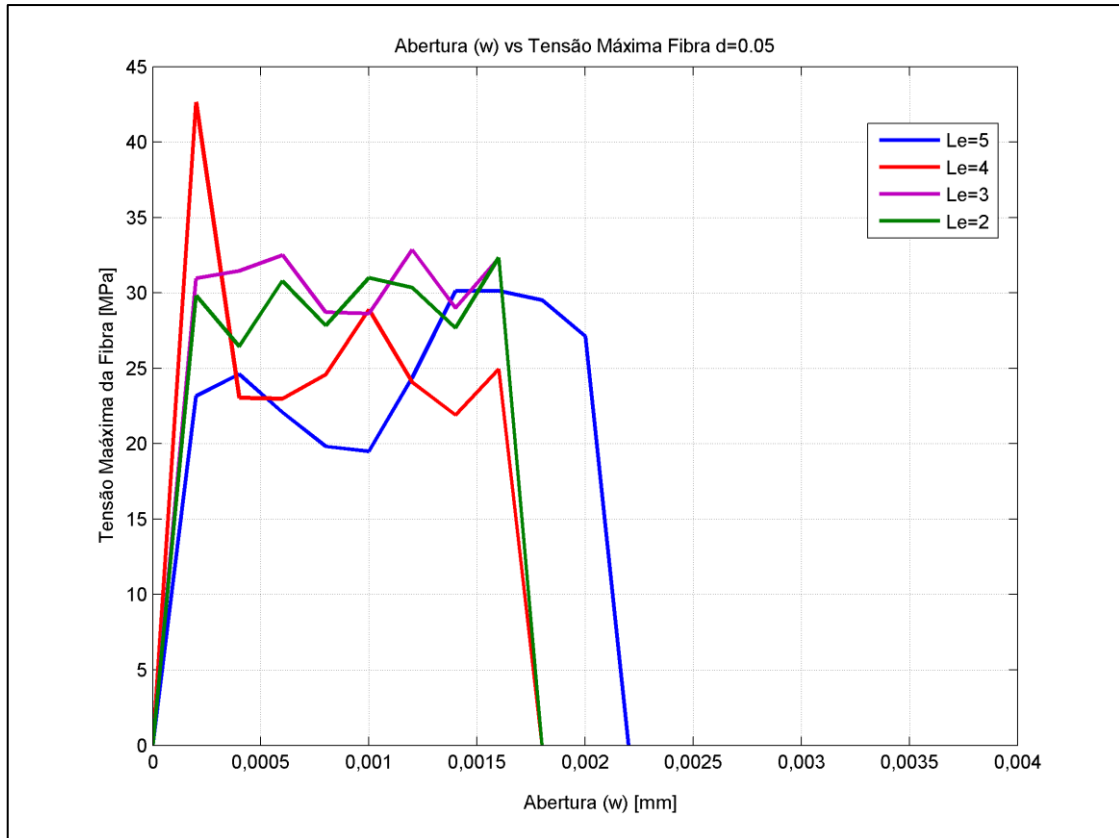
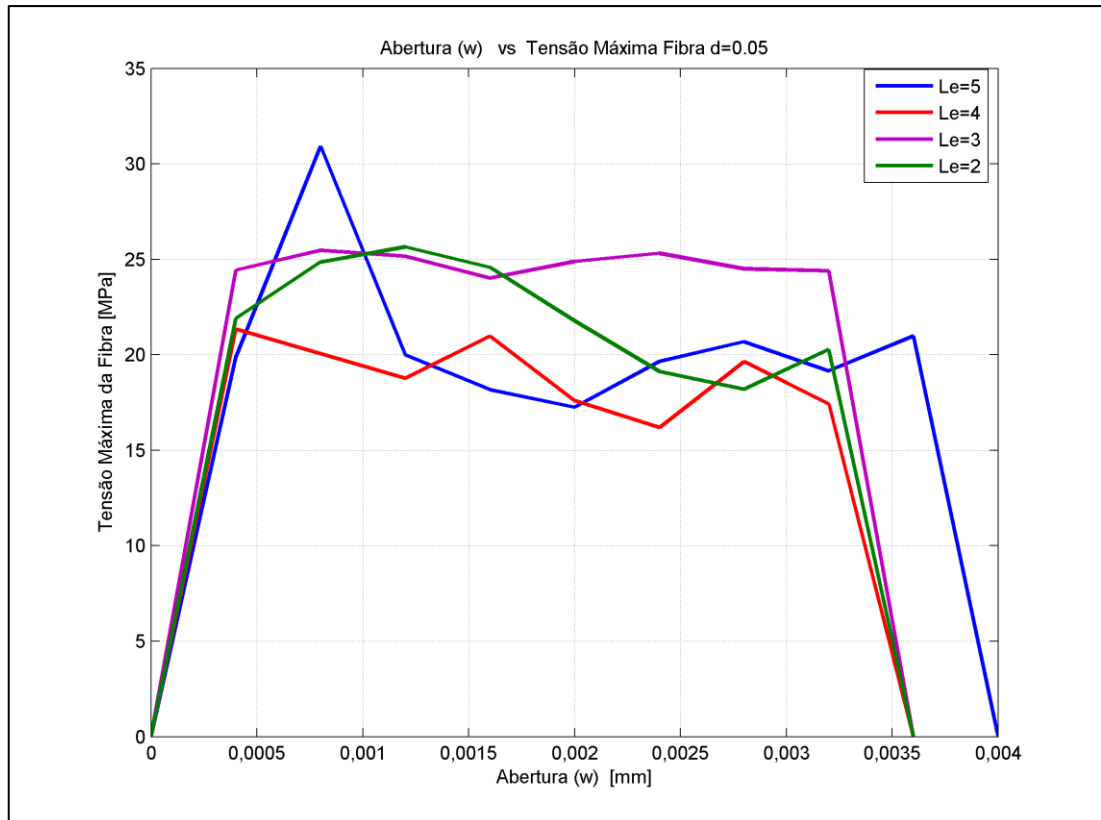


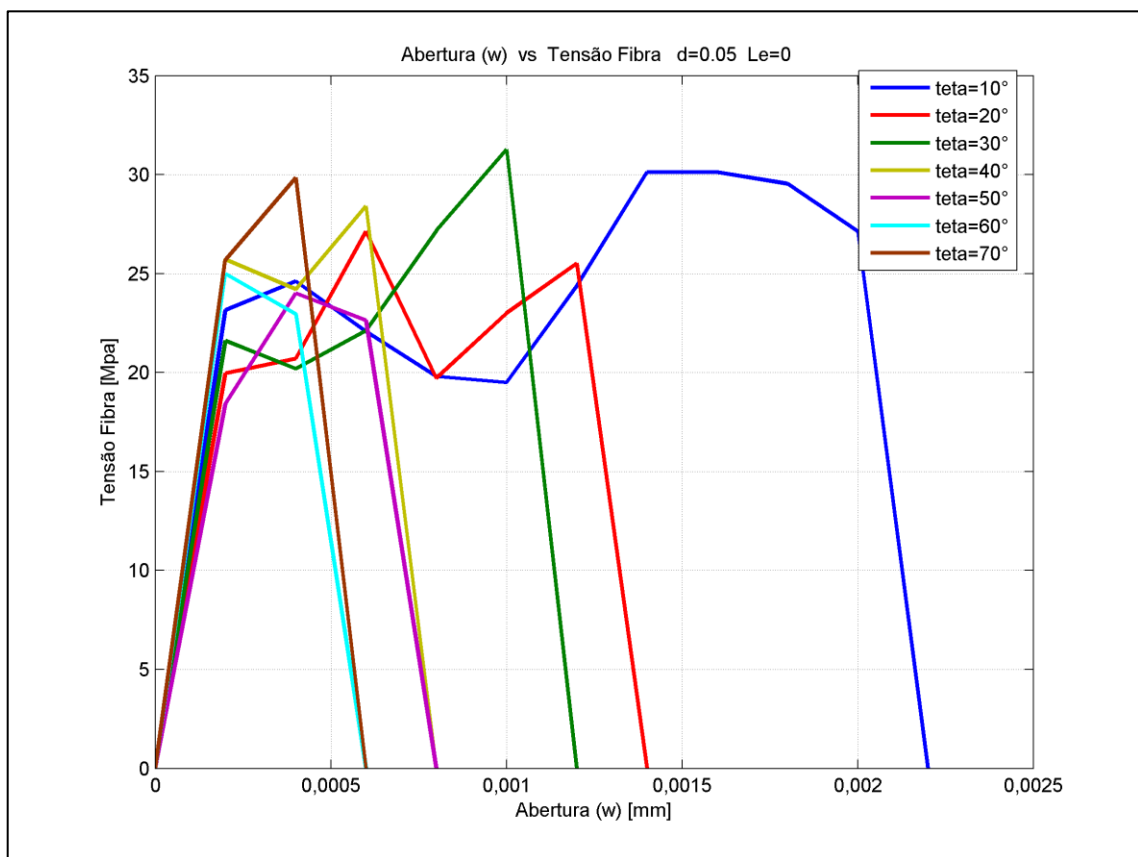
Figura 4.12- Tensões na matriz frágil reforçada com fibra sintética



4.3.3 Influência do Ângulo de Inclinação (θ)

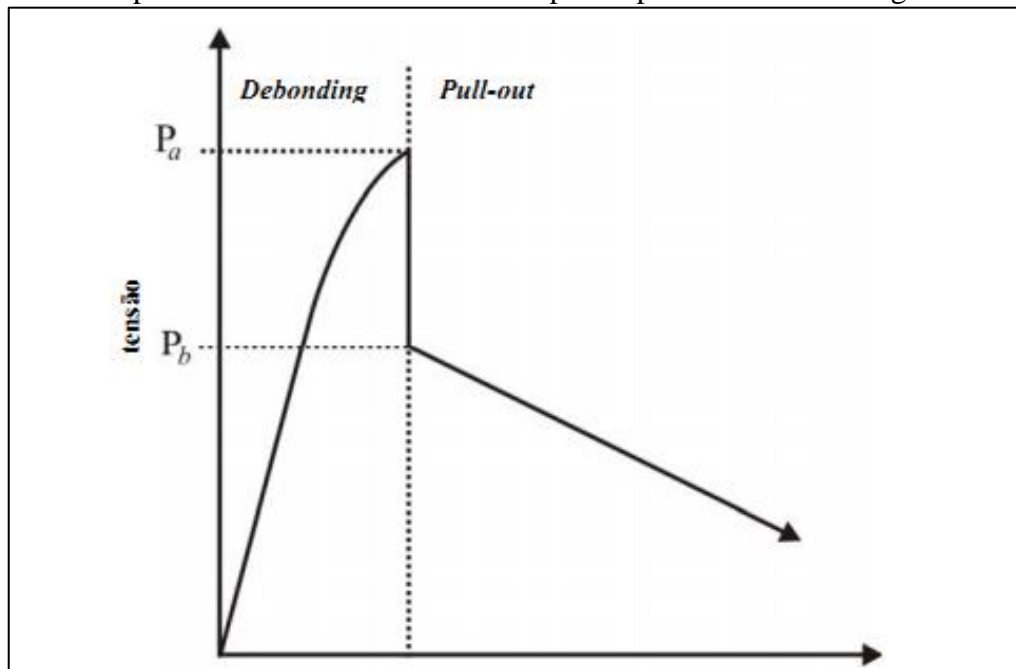
Os resultados apontam uma tensão mais constante na saída da fibra da matriz quando o ângulo de inclinação é menor do que 30° . Para a matriz reforçada com fibras de aço para as pequenas aberturas não há grandes mudanças na tensão máxima, já a matriz com fibras sintéticas alcançam sua tensão máxima nas primeiras aberturas diminuindo com o aumento da abertura e subindo novamente, efeito da carga e descarga sobre a fibra.

Figura 4.13- Tensões na matriz frágil reforçada com fibra aço



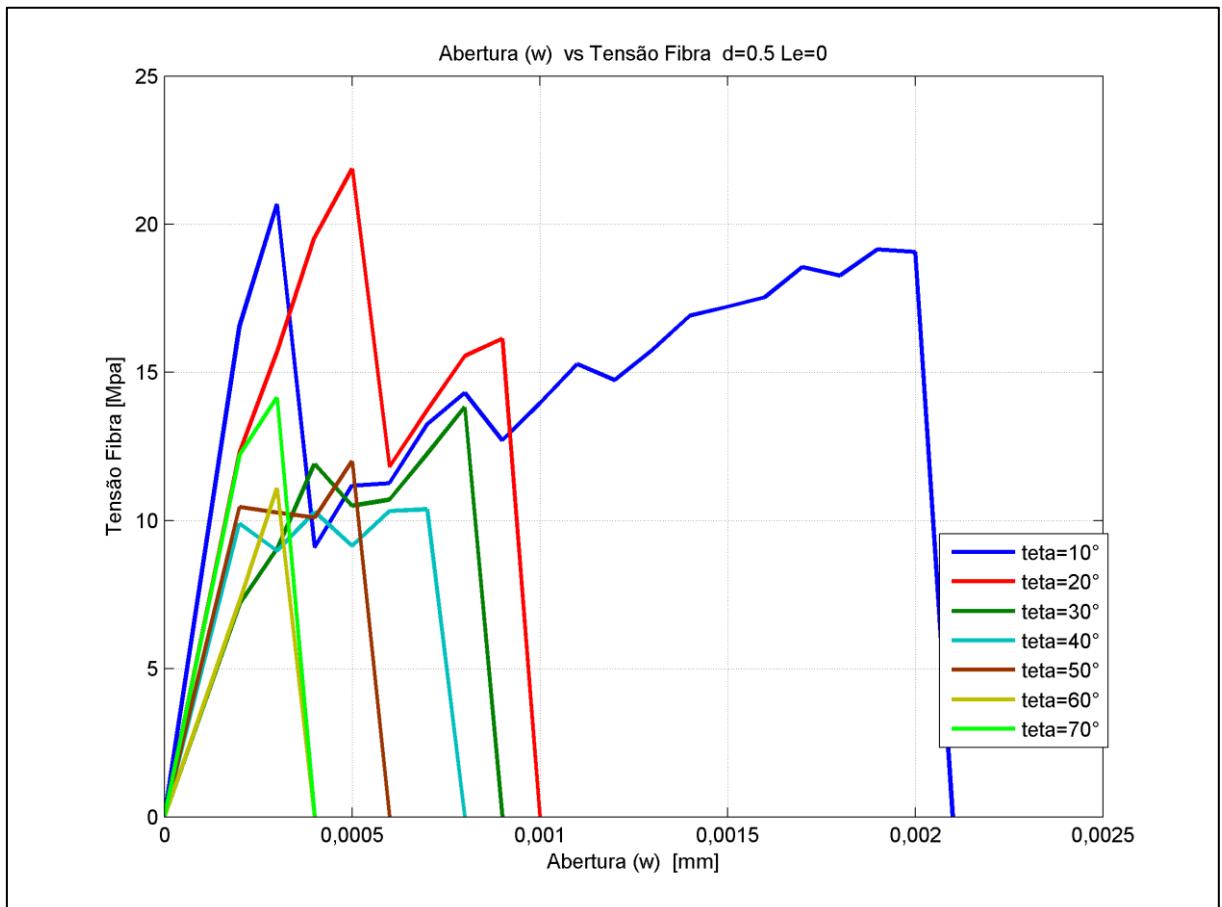
Para a matriz reforçada com fibras sintéticas (Figura 4.14) percebe-se que uma espécie de processo de descolagem e *pull-out* para inclinações da fibra menores que 30° o que deveria acontecer. No entanto não pode ser verdade neste modelo, o que acontece é simplesmente um relaxamento da fibra devido a dano na matriz de concreto na região da interface.

Figura 4.14-Típica curva tensão-deslocamento para o processo de descolagem e *Pull-out*



Fonte: Kanda e Li (1998, p.6).

Figura 4.15- Tensões na matriz frágil reforçada com fibra sintética



4.4 Evolução do Dano na Matriz

Para verificar o dano na matriz, no final de cada simulação era somado o volume de elementos mortos para quantificar esse fator.

As Figuras 4.16 e 4.17 mostram a evolução do dano na matriz. Primeiramente pode-se notar que para fibras sintéticas o dano na matriz é bem menor em comparação a mesma matriz com fibra de aço exposta ao mesmo deslocamento. O alto módulo de elasticidade do aço produz um dano maior na matriz devido a sua rigidez, enquanto a fibra sintética possui maior flexibilidade.

Figura 4.16- Dano causado na matriz com fibra sintética $d_f = 0,1$, $Le=5$, $\theta=30^\circ$, $w=0.0001$ mm

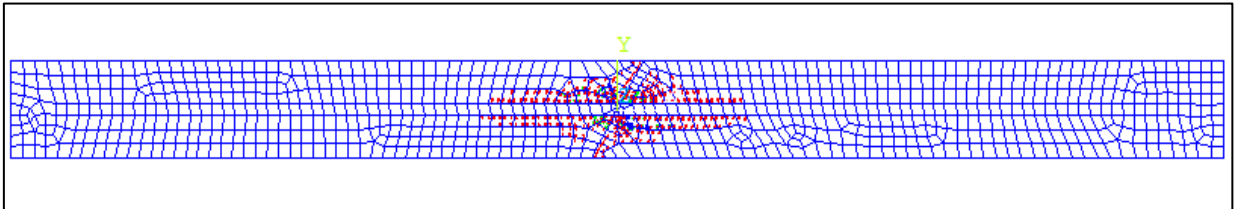
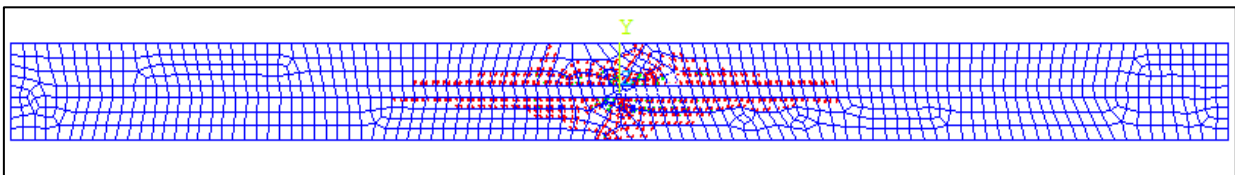


Figura 4.17- Dano causado na matriz com fibra de aço $d_f = 0,1$, $Le=5$, $\theta=30^\circ$, $w=0.0001$ mm



A seguir são mostrados os resultados das influências de parâmetros usados nas simulações em relação ao dano na matriz.

4.4.1 Influência do Comprimento Enterrado (Le)

Como visto nas Figuras 4.16 e 4.17 o dano começa localizado na região da abertura da trinca, e se propaga ao longo da interface fibra matriz, se espalhando rapidamente com o aumentar da abertura até que o dano seja maior que o comprimento enterrado, aonde então a fibra deixa de contribuir para a tenacidade.

As Figuras 4.18 e 4.19 mostram a influência do comprimento enterrado para determinado diâmetro e inclinação (θ), a escolha destes parâmetros esta associada pelo simples fato de que o ângulo de 10° é o ângulo que mais contribui, ou seja, o último ângulo a ter suas tensões zeradas, e o diâmetro independente de qualquer fator, foi escolhido aleatoriamente, sendo que os demais possuem o mesmo comportamento entre si.

Figura 4.18- Evolução do dano na matriz reforçada com fibra de aço

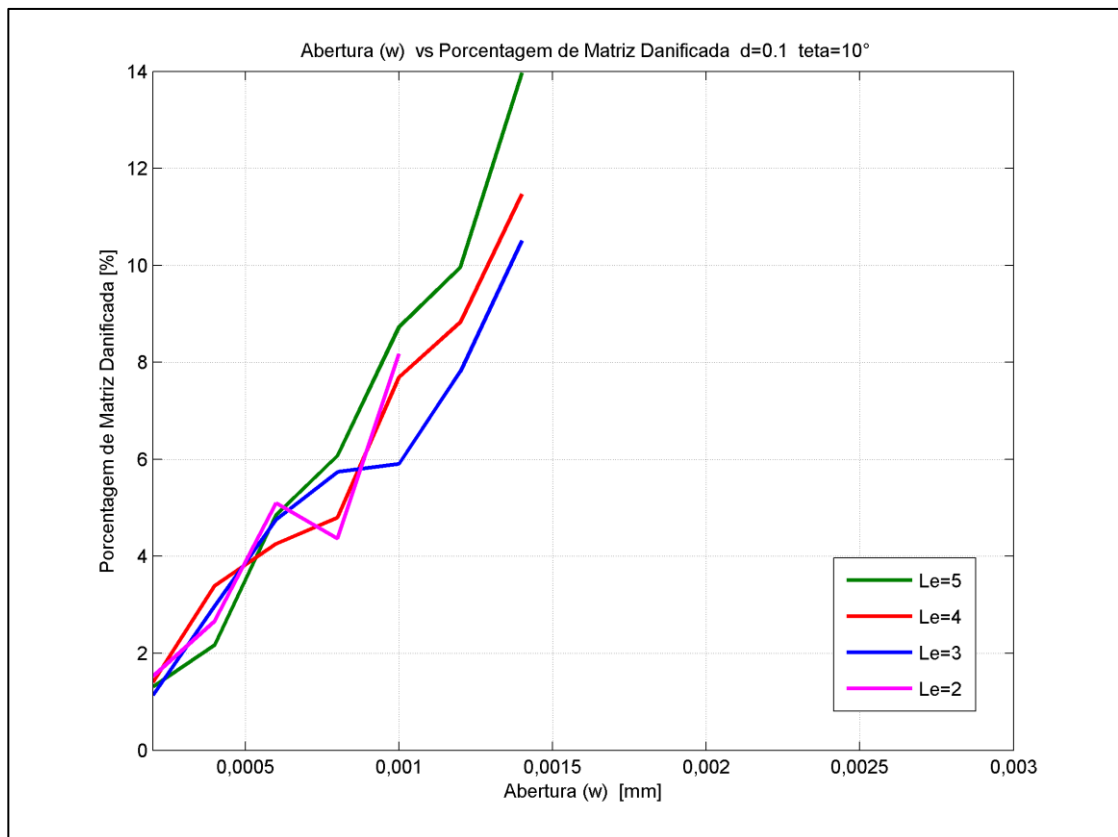
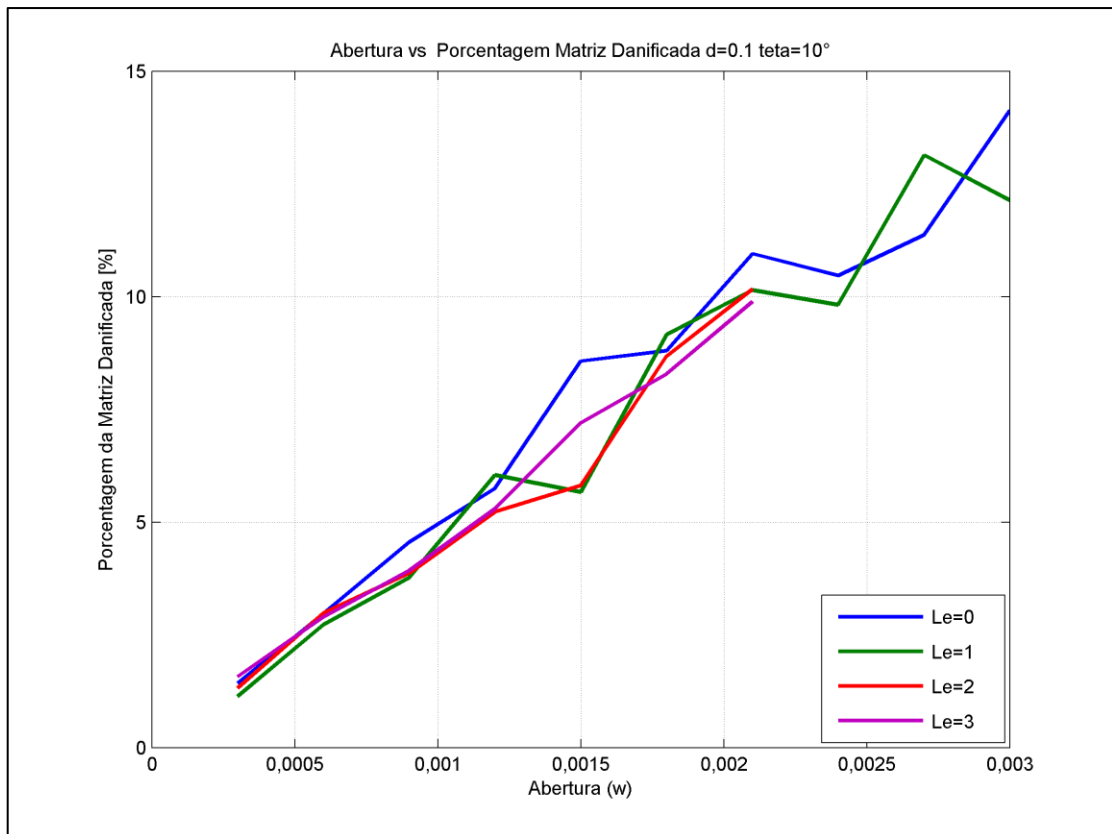


Figura 4.19- Evolução do dano na matriz reforçada com fibra sintética



Observando as Figuras 4.18 e 4.19 percebe-se uma linearização entre a propagação do dano e a abertura da trinca para matriz com fibras de aço e sintéticas. Fica claro que quanto maior o comprimento enterrado maior será o dano, pois a fibra precisa de uma força maior para ser arrancada causando mais danos na matriz. Embora a fibra sintética possibilite um maior número de aberturas o dano causado foi praticamente o mesmo, permitindo que a fibra carregue e descarregue mais lentamente que a fibra de aço.

4.4.2 Influência do Diâmetro da Fibra

Com relação aos diâmetros as Figuras 4.20 e 4.21 mostram a evolução do dano das fibras de aço e sintética, respectivamente.

Figura 4.20- Evolução do dano na matriz reforçada com fibra aço

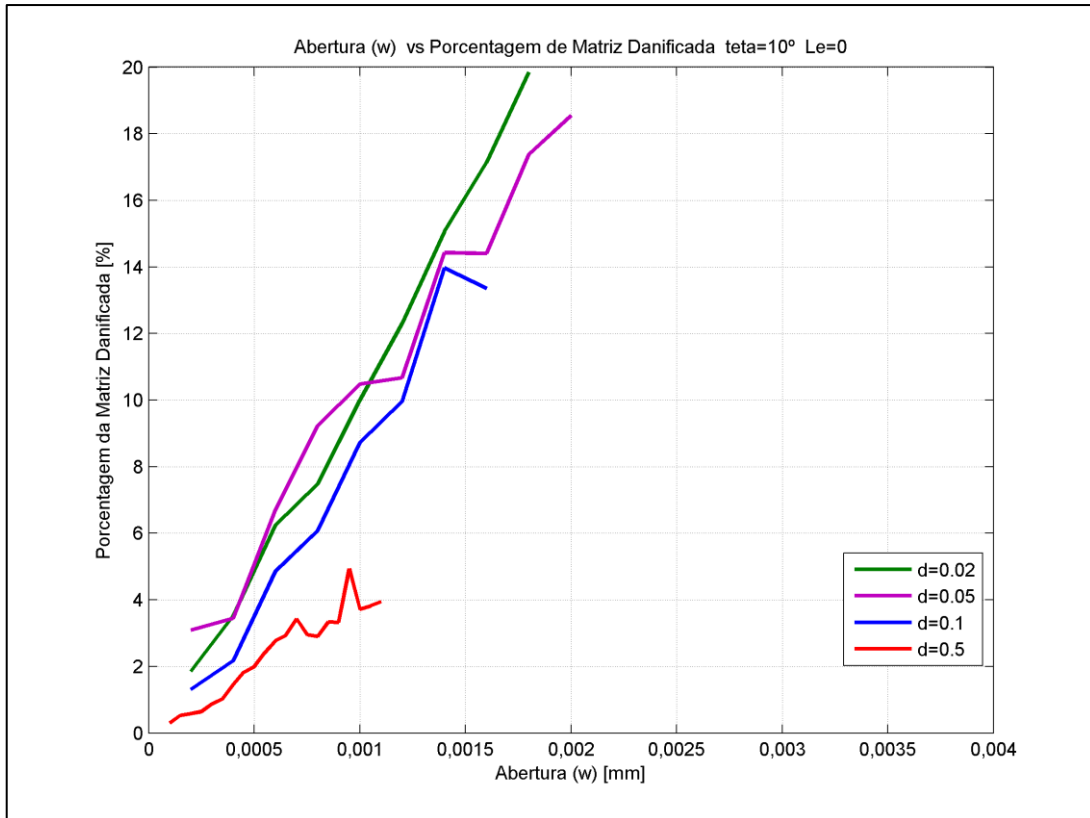
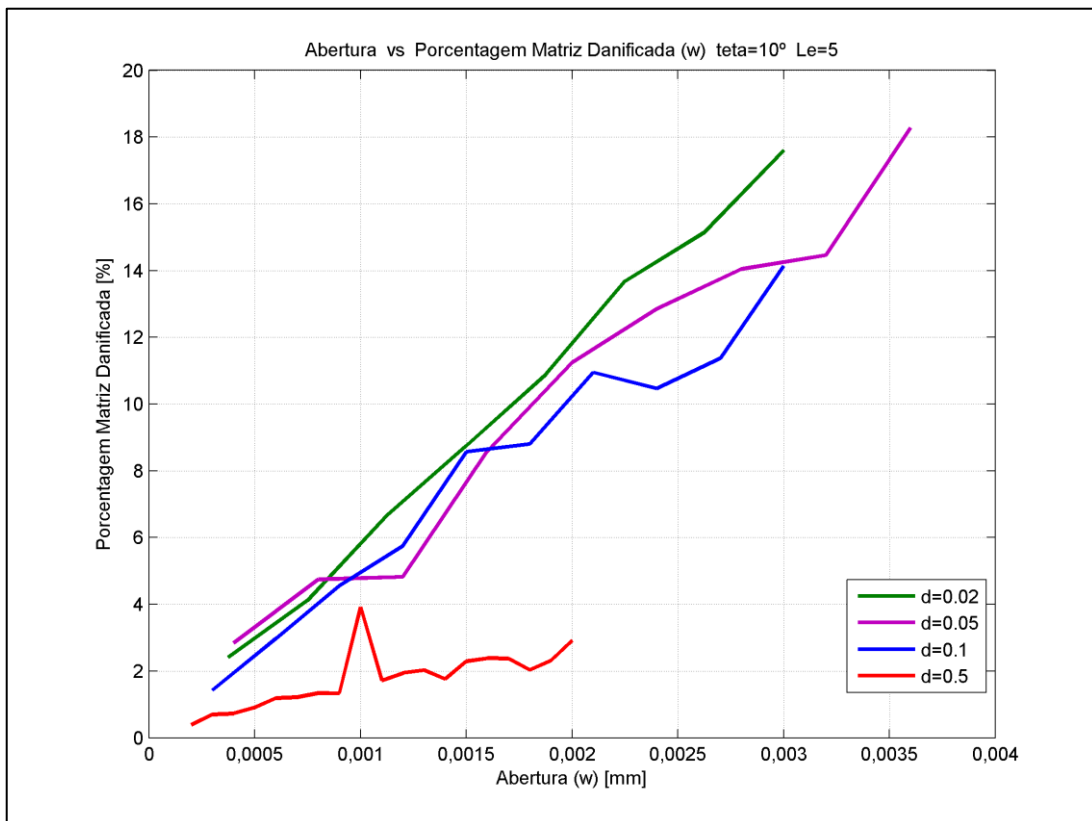


Figura 4.21- Evolução do dano na matriz reforçada com fibra sintética



Observando as figuras acima, o compósito com matriz de diâmetros menores para ambos os tipos de fibras, tiveram uma porcentagem de dano maior, isto pode ser explicado pelo fato de que em fibras mais grossas o dano ocorre devido a compressão, nas regiões logo a baixo da fibra, ou seja, o efeito *spalling* (esmagamento) é predominante, enquanto nas fibras menores a compressão atuante na fibra é menor ocorrendo o arracamento da fibra pela abertura (w^*), praticamente toda matriz é danificada superando o comprimento enterrado.

Pode-se associar a isso os resultados mostrados pela tensão de ponte, que foram menores para fibras sintéticas, admitindo uma força menor estas fibras necessitam de uma abertura maior comprometendo a integridade da matriz.

4.4.3 Influência do Ângulo de Inclinação (θ)

Através das Figuras 4.22 e 4.23 é possível notar a influência do ângulo de inclinação (θ) sobre o dano causado na matriz frágil.

Neste caso o aumento do ângulo de inclinação aumenta a porcentagem de dano na matriz, com exceções de alguns ângulos que não seguem essa afirmação, mas que tem valores muito próximos um dos outros. Este tipo de resultado também já foi comprovado no trabalho de Piaceski (2009). A partir das figuras tem-se uma ideia de quanto cada fibra em determinando ângulo contribui para a resistência do compósito, como por exemplo, os ângulos de 60° e 70° são os que menos contribuem não permitindo uma grande gama de aberturas, logo a fibra deixa de ser carregada, além disso, provocam danos notáveis na matriz mesmo com aberturas pequenas (Fibra de aço).

Figura 4.22- Evolução do dano na matriz reforçada com fibra aço

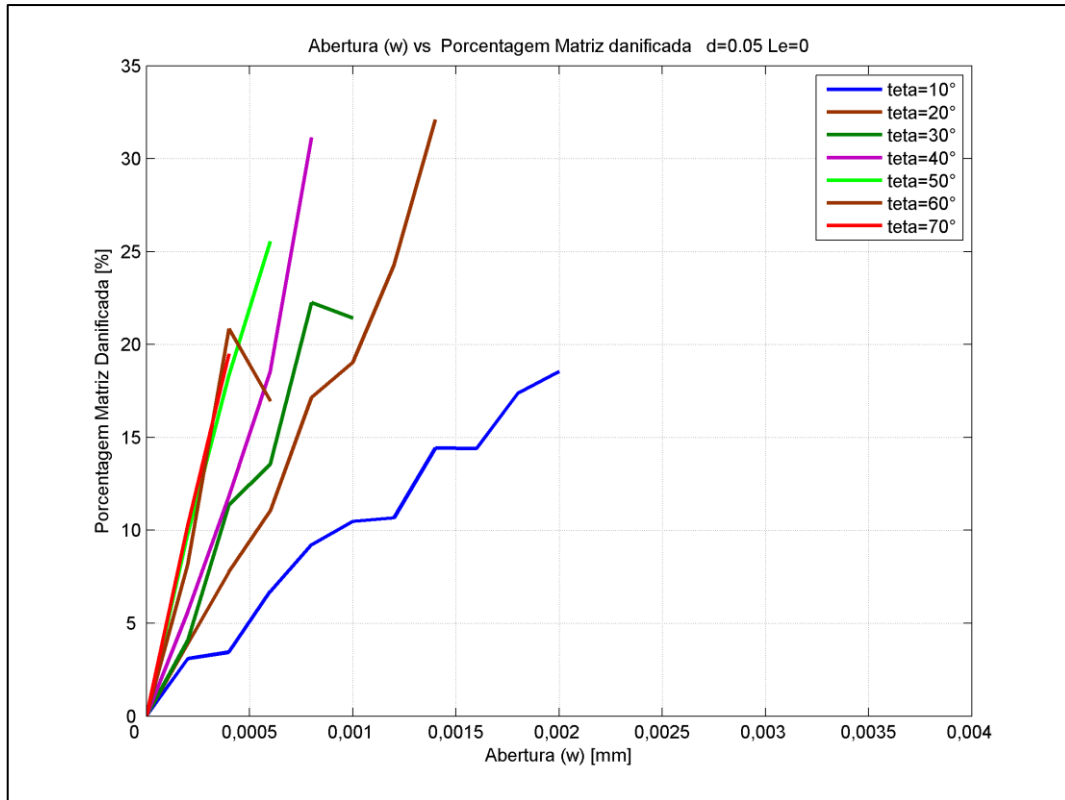
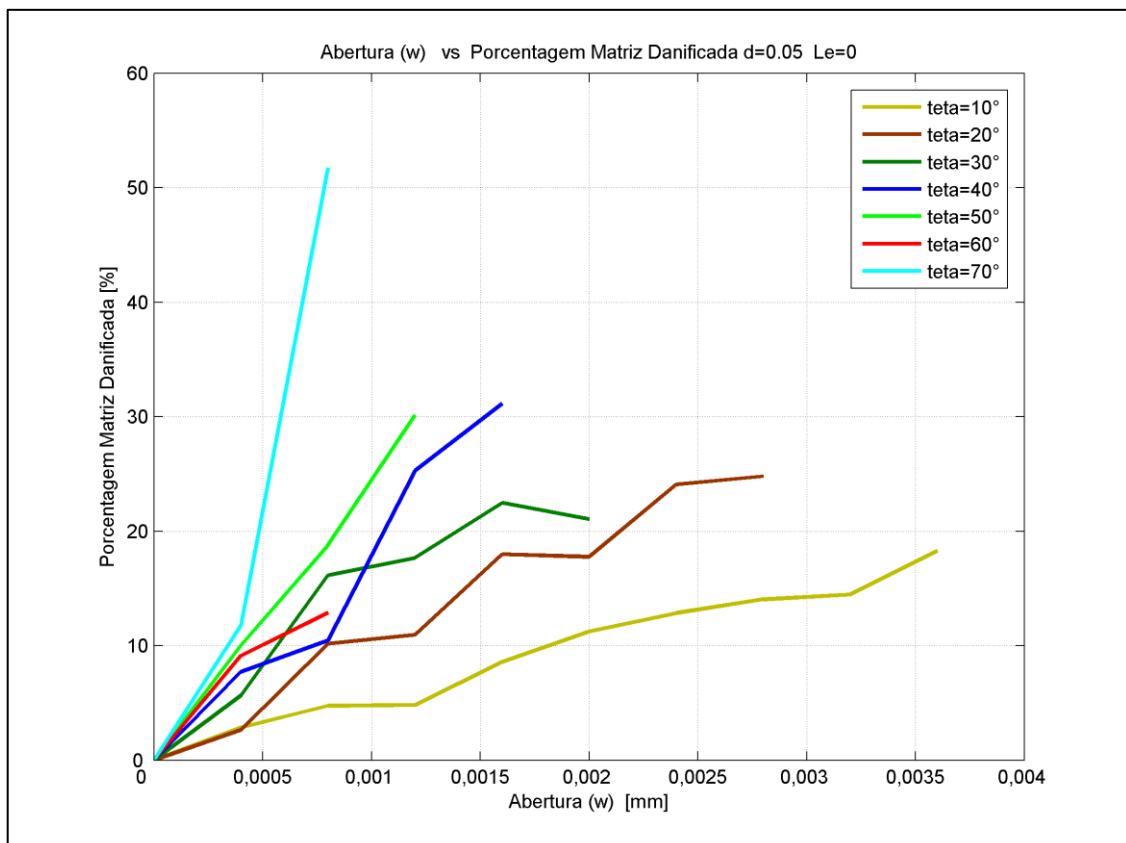


Figura 4.23- Evolução do dano na matriz reforçada com fibra sintética



De outro ponto de vista as Figuras 4.24 e 4.25 também quantificam o dano causado na matriz, mas mostrando o dano em relação ao aumento da abertura (w).

Figura 4.24- Evolução do dano na matriz reforçada com fibra aço

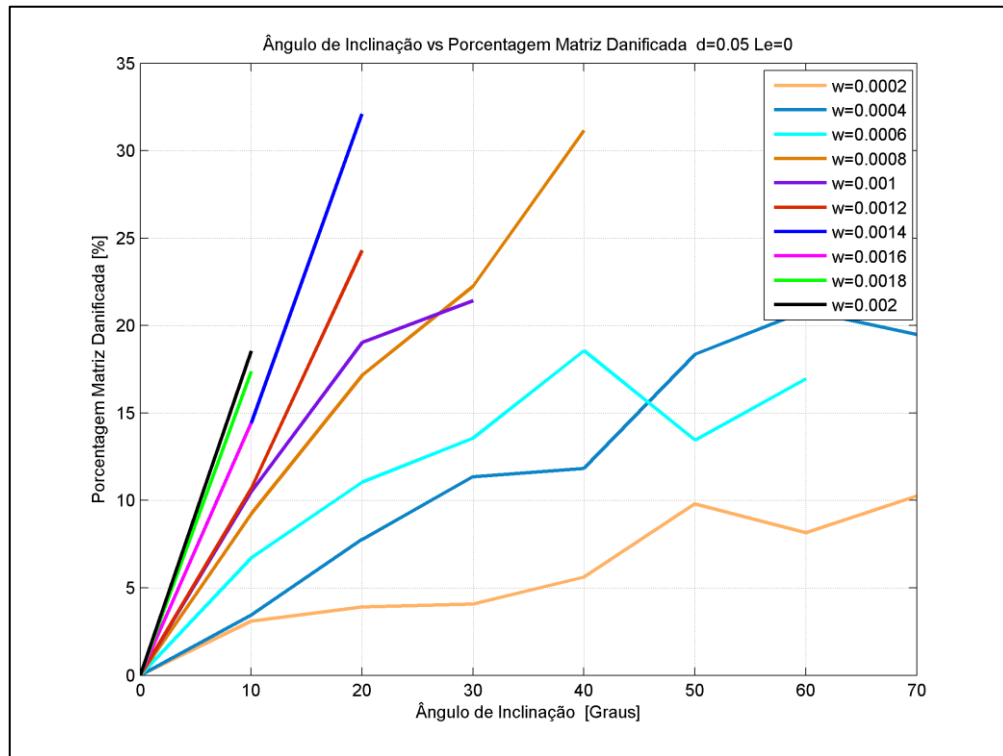
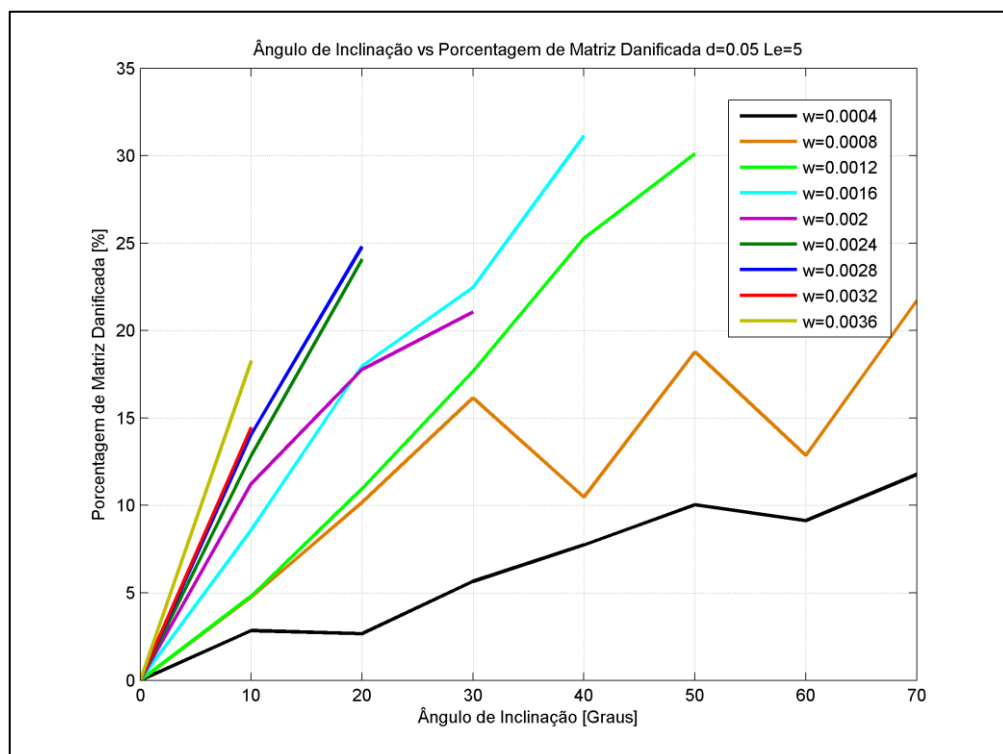


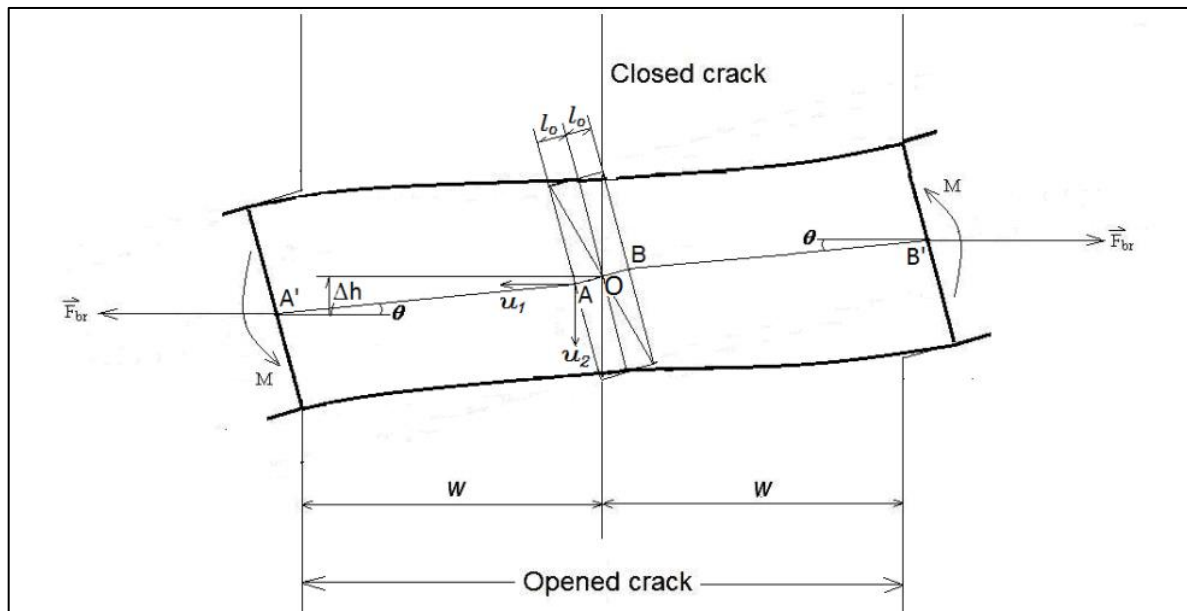
Figura 4.25- Evolução do dano na matriz reforçada com fibra sintética



Desta outra maneira, nota-se que com o aumento da abertura somente ângulos de 10° e 20° permanecem até o arracamento total da fibra da matriz, são nestes ângulos que estão toda a força responsável por fazer a fibra resistir e contribuir para a tenacidade do material.

Durante as simulações surgiram casos onde as forças resultantes do contorno da matriz (Equação 3.19 e 3.20) tiveram sua direção no sentido contrário ao mostrado na Figura 3.10. Estes casos eram registrados em vários ângulos de inclinação diferentes, entretanto apareciam com mais frequência em ângulos de 10°, 20° e 30°, Friedrich e Wang (2013) propõem um modelo mecânico matemático para reforço com fibras onde pode-se encontrar um explicação para tal situação. Observando a Figura 4.26 temos a atuação de um momento M que sofre a influência do ângulo de inclinação θ .

Figura 4.26- Diagrama de copo livre estático fibra descolando



Este momento pode ser escrito como,

$$M = F_{br} \left[\left(\frac{N}{E_f A_f} + 1 \right) r \cdot \text{tg} \theta \cdot \text{sen} \theta + u_2^e \right] \quad \dots(4.1)$$

Onde F_{br} é a força de ponte, N a força axial da fibra, E_f o módulo de elasticidade da fibra, A_f área da secção transversal da fibra, r o raio da fibra, θ o ângulo de inclinação e u_2 o deslocamento do ponto A. Desta forma supõem-se que para ângulos muito pequenos o deslocamento u_e^2 seja muito grande, influenciando na componente Y de cada reação, e assim

mudando esta direção. Entretanto não se pode afirmar tal questão, para isso precisa-se de um trabalho mais detalhado procurando investigar estes casos.

4.5 Aumento da Tenacidade G_c

A Tabela 4.1 mostra os resultados para o aumento de tenacidade da matriz reforçada com fibras. A partir da Equação 3.22 temos o aumento da tenacidade a fratura. Da mesma forma que a tensão de ponte utilizou-se o *Software* Matlab para a resolução da integral empregando a regra do trapezoide para o cálculo da área sobre o gráfico da tensão de ponte pela abertura da trinca.

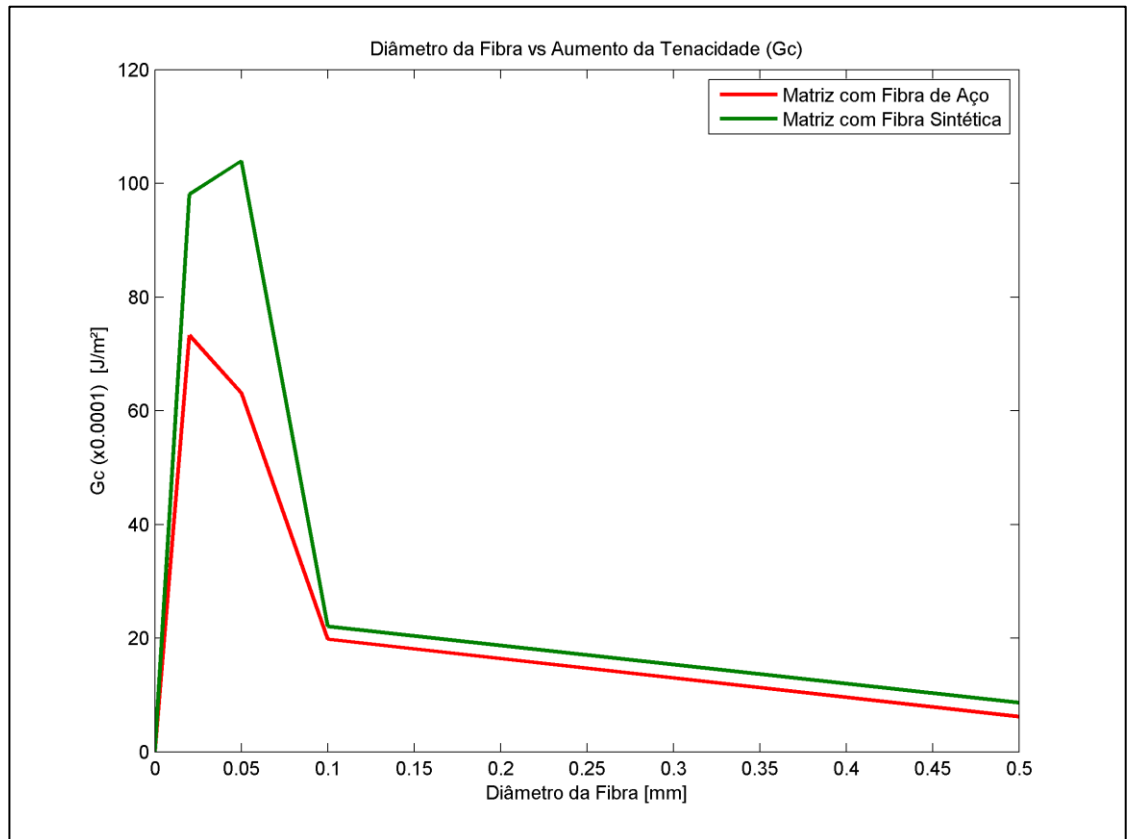
Tabela 4.1-Comparação do aumento da tenacidade

Diâmetro Fibra (mm)	Tipo	Tenacidade G_c (10^{-3} J/m²)
0,02	Aço	73,285
	Sintética	98,087
0,05	Aço	63,162
	Sintética	103,93
0,1	Aço	19,803
	Sintética	22,065
0,5	Aço	6,1802
	Sintética	8,6849

Os valores não mostram a real contribuição da fibra no compósito. Mesmo com aberturas suficientemente grandes para que a fibra seja puxada para fora da matriz, estas por sua vez não possuem um mecanismo para a questão da interface fibra/matriz. Como mencionado anteriormente não foi utilizando nenhum elemento de contato, ficando a fibra como se estivesse extremamente colada na matriz de concreto, não podendo simular os processos de *pull-out* ou descolagem e sim verificando somente o dano na matriz. Estes dois processos são de fundamental importância e não podem ser ignorados. Contudo podemos comparar valores obtidos e obter noção relativa.

Como mostra a Figura 4.27 para todos os diâmetros a tenacificação é maior para a fibra sintética.

Figura 4.27- Aumento da tenacidade a fratura matriz frágil reforçada com fibras



Nota-se que para valores de diâmetros menores que 0,1 tem-se um grande aumento na tenacidade do material, muito próximo dos valores de Kerans e Parthasarathy (1991) e Pavan (2006), sugerindo que mesmo com valores abaixo do normal para o aumento da tenacidade os resultados mostram-se coerentes.

Ainda observando as figuras da tensão de ponte, pode-se afirmar que para até pequenas aberturas as fibras de aço tem mais efeito na tenacificação, logo depois as fibras sintéticas passam a ter uma influência maior devido ao seu baixo módulo de elasticidade, ductilidade. Logo, as fibras de alta resistência são sempre uma ótima opção, estes resultados também são confirmados por Soares (2010).

5 CONCLUSÕES

Neste trabalho, baseando-se em um modelo mecânico matemático que em conjunto com o método dos elementos finitos calculou-se o aumento da tenacidade do compósito de matriz cerâmica reforçada por fibras, buscando prever o comportamento do mesmo.

Através da implementação de um algoritmo na linguagem *APDL* do ANSYS foi possível obter as forças de reações, dano na matriz e tensão máxima na fibra. Com a programação numérica foi então calculada o aumento a tenacidade a fratura do material compósito, e analisada a influência de parâmetros como, diâmetro da fibra, comprimento enterrado, ângulo de inclinação e módulo de elasticidade da fibra. Pelos resultados podemos concluir que:

- I- Fibras de alta resistência e baixo módulo de elasticidade aumentam a tenacidade do material;
- II- Fibras de aço suportam uma tensão de ponte maior que as sintéticas para aberturas de trincas pequenas;
- III- O ângulo de inclinação tem forte influência sobre o dano causado na matriz, a alta inclinação da fibra (70°) aumenta o dano, inclinações menores que 30° não alteram muito.
- IV- Quanto maior o comprimento enterrado maior é o dano na matriz, e maior é a contribuição para o aumento da tenacidade;
- V- Fibras com diâmetros menores aumentam a tenacidade.

A utilização do método dos elementos finitos e o script em *APDL* otimizam o tempo de simulação trazendo vantagens. Este método se mostrou eficiente na caracterização do dano na matriz. A utilização de ferramentas computacionais como o *Software* ANSYS e Matlab é fundamental para o aprimoramento do caso em estudo.

O problema da tenacificação da cerâmica com fibras é complexo e envolve muitas variáveis e propriedades de fibra, matriz e interface. Os processos de *pull-out* e descolagem são fundamentais e não podem ser ignorados. Comparando-se os resultados encontrados neste trabalho como os apresentados na literatura ainda apresentam considerável diferença. Ainda há vários fatores a serem estudados como o efeito *Spalling* e a plasticidade da fibra, o que certamente aumentaria a contribuição para o aumento da tenacidade, ainda há poucos

trabalhos sobre isso. Nesse sentido a simulação numérica se torna importante e imprescindível, pois de forma otimizada e de baixo custo busca os parâmetros ideais.

6 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Ficou claro que o processo de descolagem e *pull-out* influenciam fortemente no cálculo da tenacidade. A inserção de elementos de contato através do ANSYS possibilitando introduzir propriedades da interface ajudará a contornar este problema. A influência de um momento alterando as resultantes das reações no contorno da matriz precisa de uma investigação maior. A utilização de métodos como dos elementos discretos (MED) e de contorno (MEC) ou a criação de um *Software* específico baseado em determinado método numérico podem ser uma alternativa. Dessa forma pode-se prever parâmetros ótimos para o aumento da tenacidade da cerâmica reforçada com fibras.

REFERÊNCIAS

AWAJI, H.; CHOI, M.S.; YAGI E. Mechanisms of toughening and strengthening in ceramic-based nanocomposites. **Mechanics of Materials**. v. 34, p. 411–422, 2002.

BRANDT, A. M. On the optimal direction of short metal fibers in brittle matrix composites. **Journal of Materials Science**, v. 20, p. 3831-3841, 1985.

BORGES, Pedro Augusto Pereira. **Modelagem e Simulação do Estado Tensotérmico em Coptpos Elásticos bidimensionais**. Dissertação de Mestrado na UNIJRS, 1997.

CHODOUNSKY, Marcel A. **Revista Pisos Industriais**. Ed. VI, Trima Engenharia e Consultoria, 2008.

FANTILLI, P. Alessandro; VALLINI, Paolo. A Cohesive Interface Model for the Pull-out of Inclined Steel Fibers in Cementitious Matrixes. **Journal of Advanced Concrete Technology**. Japan Concrete Institute. Vol. 5, N. 2,247-258. 2007.

FRANCO, José S. Gomes. **Introdução ao Método dos Elementos Finitos**. Dissertação de mestrado na Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, 1970.

FRIEDRICH L.F.; WANG. C. Computational model of spalling and effective fibers on toughening in fiber reinforced composites at early stage of crack formation. **Latin American Journal of Solids and Structures**, n.10, p.797-811, 2013.

GAO, Yu-Chen; WING, Yiu. COTTERELL, Brian. Fracture of fiber-reinforced materials. **International Journal of Applied Physics and Mathematics**, v.39, p. 550-572, 1988.

JOHNSTON, C. D.; Fiber-reinforced cement and concrete. In: V. M. Malhorta. **Advances in concrete technology**. 2 ed. Ottawa: V. M. Malhotra, p. 603-673, 1994.

KACHLAKEV, D.I.; Miller, T.; Yim, S.; Chansawat, K.; Potisuk, T. “**Finite Element Modeling of Reinforced Concrete Structures Strengthened With FRP Laminates**” California Polytechnic State University, San Luis Obispo, CA and Oregon State University, Corvallis, OR for Oregon Department of Transportation, May, (2001).

KANDA, Testsushi.; LI, Vitor C. Interface property and apparent strength of high-strength hydrophilic fiber in cement matrix. **ASCE Journal of Materials in Civil Engineering** , v. 10, n.1, p.5-13, 1998.

KATZ, A. LI V.C, KAZMER, A. Bond properties of carbon fibers in cementitious matrix. **ASCE Journal of Materials in Civil Engineering**, v.2, p.125-128, 1995.

KATZ, Amnon; LI, Victor C. Inclination angle effect of carbon fibers in cementations composites. **ASCE Journal of Engineering Mechanics**, v.12, p.1340-1348, 1995.

KERANS, Ronald J.; PARTHASARATHY, Triplicane A. Theoretical analysis of the fiber pullout and pushout tests. **Journal of The American Ceramic Society**. V.74, n.7, p.1585-1596, 1991.

KINGERY, W.D, **Introduction to ceramics**, John Wiley & Sons Inc. New York, London, 1960.

LEUNG, Christopher K. Y.; LI, Victor C. Effect of fiber inclination on crack bridging stress in brittle fiber reinforced brittle matrix composites. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, v.40, n.6, p.1333-1362, 1992.

LI, Victor C.; CHAN, Yin-Wen. Determination of interfacial debond mode for fiber-reinforced cementitious composites. **Journal of Engineering Mechanics**, v.120, n.4, p.707-719, 1993.

LI, Victor C. On Engineered Cementitious Composites (ECC). A Review of the Material and Its Applications. **Journal of Advanced Concrete Technology**. V.1, N.3, p. 215-230, 2003.

LIN, Z ; LI, C. Victor. Crack bridging in fiber reinforced cementitious composites with slip-hardening interfaces. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, v.45, n.5, p.763-787, 1997.

LIN, Z.; KANDA, T.; LI, V. C. On interface property characterization and performance of fiber-reinforced cementitious composites. **Concrete Science and Engineering**, v.1, p.173-174, 1999.

LI, Victor C.; MAALEJ, Mohamed. Toughening in cement based composites. Part II: Fiber reinforced cementitious composites. **Cement & Concrete Composites**, v.18, p. 239-249, 1996.

LI Victor. C.; WANG, Youjiang.; BACKER, Stanley. A micromechanical model of tension softening and bridging toughening of short random fiber reinforced brittle matrix composites. **Journal of the Mechanics and Physics of Solids**, v.39, n.5, p.607- 625, 1991.

LI, Victor C.; WU, Hwai-Chung. Conditions for pseudo strain-hardening in fiber reinforced brittle matrix composites. **Journal of Applied Mechanics**, v.45, n.8, p.390-399, 1992.

LIKE. Q.; XIKUN. L.; GUANMING. Q.; WEIMIN. M.; YANBIN. S.; HUADONG. Y. Study on Toughness Mechanism of Ceramic Cutting Tools. **Journalo Frareearths**, v.25, p. 309, 2007.

LIU, PEng-fei; TAO, Wei-ming, GUO, Yi-mu. **Properties of frictional bridging in fiber pull-out for fiber-reinforced composites**. Dep. of Eng. Mechs. Zhejiang University, Hangzhou, China, 2005.

MACCAFERRI.; Empresa do Grupo Industrial Maccaferri. Maccaferri América Latina. 2002-2007.

MARSHALL, D. B.; COX B. N. Tensile fracture of brittle matrix composites influence of fiber strength. **Acta metal**, v.35, n.11, p.2607-2619, 1987.

MEGUID. A.S.; Mechanics and Mechanisms of Toughening of Advanced Ceramics. **Journal of Materials Processing Technology**, v. 56 , p. 978-989, 1996.

MOBASHER B.; OUYANG, C.; SHAH, S. P. Modeling of fiber toughening in cementitious materials using an R-curve approach. **International Journal of Fracture**, v.50, p.199-219, 1991.

MORTON, J.; GROVES, G.W. The cracking of composites consisting of discontinuous ductile fibres in a brittle matrix – effect of fibres orientation. **Journal of Materials Science**, v.9, p.1436-1445, 1974.

NELSON, Patricia Kim; LI, Victor C.; KAMADA, Toshiro. Fracture Toughness of Microfiber Reinforced Cement Composites, **Journal of Materials in Civil Engineering**, v.14, n.5, p.384- 391, 2002.

NÓBREGA. R.J.M.; FRITZ. M.; SOUZA. C.G. **Inovações tecnológicas: aplicação de materiais cerâmicos na indústria automobilística**. XXIV Encontro Nac. de Engenharia de Produção, Florianópolis, SC, Brasil, 2004.

PAVAN, Alcione R. **Modelagem Matemática de tenacificação de materiais cerâmicos através da adição de microfibras**. 2006. 155 f. Dissertação (Mestrado em Modelagem Matemática) - Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul, Ijuí 2006.

PIACESKI, N. F. **Modelagem Matemática do efeito de spalling à tenacificação de materiais compostos reforçados por fibras**. 2009. 156 f. Dissertação (Mestrado em Modelagem Matemática) - Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul, Ijuí 2009.

SEGERLIND, Larry J. **Applied Finite Element Analysis**. New York, John Wiley & Sons, 1976.

SHAH, Surendra P.; OUYANG, Chengsheng. Mechanical Behavior of fiber-reinforced cement-based composites. **Journal of the American Ceramic Society**, v.71, n.11, p.2947-2953, 1991.

SOARES, K. M. **Simulação e análise de tenacificação de materiais compostos reforçados por fibras através do método de elementos discretos**. Dissertação (Mestrado em Modelagem Matemática) - Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul, Ijuí 2010.

TAYLOR, G. D. *Materials in construction*. London: Longman Scientific & technical. 2^a ed., p.284, 1994.

TIMOSHENKO, S.P. & GERE, J.E. **Mecânica dos Sólidos V2**. Ed. LTC-RJ (Brasil), 1999.

WANG, Shuxin; LI, Victor C. High-Early-Strength Engineered Cementitious Composites. **ACI Materials Journal**,; v.103, n.2, p.97-105, 2006.

WILLIAM, D.; CALLISTER, JR. *Ciência e engenharia de materiais: uma introdução*. 5^a ed. LTC. Rio de Janeiro, 2002.

WILLIAM, K. J; WARNKE, E. P. *Constitutive model for the triaxial behavior of concrete*. In: Proceedings of international association for bridge and structure engineering, vol.19, ISMES, Bergamo; p. 174-86, 1975.

ZIENKIEWICZ, O. C. **El metodo de los elementos finitos**. Barcelona, Editora Reverté, 1980.

ZHANG, Jun.; LI, Victor C. Effect of inclination angle on fiber rupture load in fiber reinforced cementations composites. **Composites Science and Technology**, v.62, p.775-781, 2002.

APÊNDICE A- Algoritmo ANSYS

```

!                               Universidade Federal do Pampa-UNIPAMPA
!                               Curso de Graduação em Engenharia Mecânica
!                               Leandro Friedrich
!
!   MODELAGEM NUMERICA DO AUMENTO DA TENACIDADE A FRATURA DE
!   MATERIAIS DE BASE FRAGIL REFORÇADO POR FIBRAS
!
FINISH
/clear
!=====
!                               IDENTIFICAÇÃO DO PROJETO
/FILENAME,Projetofibras,on
/TITLE,Análise Fibra/Matriz
/STITLE,1,Friedrich
/PREP7
!=====
!
!                               DEFINIÇÃO DOS DADOS DE ENTRADA E COMPLEMENTARES
!
!DADOS DE ENTRADA
!
df=0.5                !diametro da fibra.
Lf=10                 !comprimento da fibra
teta= 80*3.1415/180  !ângulo de inclinação
Le= 5                 !comprimento enterrado em
W= 0.0005             !Abertura 2w
!
!DADOS COMPLEMENTARES
!
x=Lf/2-Le
fi=(90*3.1415/180)-teta
dm=7.85*df !diametro da matriz.
Lm=Lf+8*df !comprimento da matriz.
!
!=====
!
!                               OBTENÇÃO DOS KEYPOINTS
!
! PONTOS EXTERNOS
!
k,1, -Lm/2, -dm/2    ! keypoint, #, x, y
k,2, Lm/2, -dm/2
k,3, Lm/2, dm/2
k,4, -Lm/2, dm/2
k,5, -Lf/2, -df/2
k,6, Lf/2, -df/2
k,7, Lf/2, df/2
k,8, -Lf/2, df/2
!

```

! PONTOS CENTRAIS

!

k,9, $(-\tan(\text{fi}) * \text{dm}/2) - x$, $-\text{dm}/2$

k,10, $((-\tan(\text{fi}) * \text{dm}/2) + 0.001) - x$, $-\text{dm}/2$

k,11, $(\tan(\text{fi}) * \text{dm}/2) - x$, $\text{dm}/2$

k,12, $((\tan(\text{fi}) * \text{dm}/2) + 0.001) - x$, $\text{dm}/2$

k,13, $(-\tan(\text{fi}) * \text{df}/2) - x$, $-\text{df}/2$

k,14, $(\tan(\text{fi}) * \text{df}/2) - x$, $\text{df}/2$

k,15, $(-\text{df} * \tan(\text{fi})) - x$, $\text{df}/2$

k,16, $(\text{df} * \tan(\text{fi})) - x$, $-\text{df}/2$

k,17, $(-\tan(\text{fi}) * \text{df}/2) - x$, $(-\text{df}/2) - 0.001$

k,18, $(\tan(\text{fi}) * \text{df}/2) - x$, $(\text{df}/2) + 0.001$

!

!=====

!

DEFINE LINES

! MATRIZ ESQUERDA

!

L,1,9

L,9,13

L,13,5

L,5,8

L,8,15

L,15,18

L,18,11

L,11,4

L,4,1

!

! MATRIZ DIREITA

!

L,2,10

L,10,17

L,17,16

L,17,16

L,16,6

L,6,7

L,7,14

L,14,12

L,12,3

L,3,2

!

! FIBRA

!

L,16,13

L,14,15

!

!=====

!

!

DEFINE ÁREAS

! MATRIZ ESQUERDA

!

AL,1,2,3,4,5,6,7,8,9

!

! MATRIZ DIREITA

!

AL,10,11,12,13,14,15,16,17,18

!

! FIBRA

!

AL,3,4,5,20,15,14,13,19

!

=====

!

DEFINE ELEMENT TYPE

!

et,1,solid65

!

et,2,solid45

!

!

et,3,mesh200

KEYOPT,3,1,7

KEYOPT,3,2,0

!

=====

!

!

DEFINE MATERIALS PROPERTIES

!

MP,EX,1,30e3

! Material Properties, Young's Modulus, Material 1, 30 Gpa

MP,PRXY,1,0.2

! Material Properties, Major Poisson's Ratio, Material 1, 0.2

TB,concr,1

!Aplicação do critério de falha de Willam and Warnik

tldata,1,0.2,0.7,3.7,36.6

TB,KINH,1,1,10

!Definição de material multilinear isotrópico.

TBPT,, 240E-6, 7.2

TBPT,, 960E-6,23.69

TBPT,,1600E-6,32.41

TBPT,,2080E-6,35.69

TBPT,,2360E-6,36.5

TBPT,,2590E-6,36.5

TBPT,,2880E-6,35.699

TBPT,,3200E-6,34.25

TBPT,,5400E-6,20.49

!

!Fibra

!

MP,EX,2,200e3

! Material Properties, Young's Modulus, Material 2, 200/60 Gpa

MP,PRXY,2,0.3

! Material Properties, Major Poisson's Ratio, Material 2, 0.3/0.35

!

=====

!

!

CRIANDO MESHING

! PARA DIAMETRO=0.02

```

!
*if,df,eq,0.02,THEN
!   Condição   teta   menor que   30   graus
*IF,teta,LT,0.55,THEN
LESIZE,15, , ,20,, , , ,
LESIZE,3, , ,30,, , , ,
LESIZE,4, , ,4, , , , ,
LESIZE,14, , ,4, , , , ,
LESIZE,19, , ,6, , , , ,
LESIZE,20,,6,,,,
LESIZE,13,,22,,,,
LESIZE,5,,30,,,,
LESIZE,6,,8,,,,
LESIZE,12,,8,,,,
LESIZE,7,,12,,,,
LESIZE,16,,12,,,,
LESIZE,2,,12,,,,
LESIZE,11,,12,,,,
LESIZE,9,,9,,,,
LESIZE,18,,9,,,,
LESIZE,10, , ,20,, , , ,
LESIZE,17, , ,12,, , , ,
LESIZE,8, , ,31,, , , ,
LESIZE,1, , ,12,, , , ,
!
*ENDIF
!
!   Condição   teta   maior que   30   graus
*IF,teta,GE,0.55,THEN
LESIZE,15, , ,20,, , , ,
LESIZE,3, , ,30,, , , ,
LESIZE,4, , ,4, , , , ,
LESIZE,14, , ,4, , , , ,
LESIZE,19, , ,6, , , , ,
LESIZE,20,,6,,,,
LESIZE,13,,22,,,,
LESIZE,5,,30,,,,
LESIZE,6,,8,,,,
LESIZE,12,,8,,,,
LESIZE,7,,6,,,,
LESIZE,16,,6,,,,
LESIZE,2,,6,,,,
LESIZE,11,,6,,,,
LESIZE,9,,9,,,,
LESIZE,18,,9,,,,
LESIZE,10, , ,20,, , , ,
LESIZE,17, , ,20,, , , ,
LESIZE,8, , ,31,, , , ,
LESIZE,1, , ,30,, , , ,
*ENDIF

```

```

*ENDIF
!
! PARA DIAMETRO=0.1
!
*if,df,eq,0.1,THEN
!      Condição      teta      menor que      30      graus
*IF,teta,LT,0.55,THEN
LESIZE,15, , , ,20,, , , ,
LESIZE,3, , , ,30,, , , ,
LESIZE,4, , , ,4, , , , ,
LESIZE,14, , , ,4, , , , ,
LESIZE,19, , , ,6, , , , ,
LESIZE,20,,,6,,,,
LESIZE,13,,,22,,,,
LESIZE,5,,,30,,,,
LESIZE,6,,,8,,,,
LESIZE,12,,,8,,,,
LESIZE,7,,,12,,,,
LESIZE,16,,,12,,,,
LESIZE,2,,,12,,,,
LESIZE,11,,,12,,,,
LESIZE,9,,,9,,,,
LESIZE,18,,,9,,,,
LESIZE,10, , , ,20,, , , ,
LESIZE,17, , , ,12,, , , ,
LESIZE,8, , , ,31,, , , ,
LESIZE,1, , , ,12,, , , ,
!
*ENDIF
!
!      Condição      teta      maior que      30      graus
*IF,teta,GE,0.55,THEN
LESIZE,15, , , ,20,, , , ,
LESIZE,3, , , ,30,, , , ,
LESIZE,4, , , ,4, , , , ,
LESIZE,14, , , ,4, , , , ,
LESIZE,19, , , ,6, , , , ,
LESIZE,20,,,6,,,,
LESIZE,13,,,22,,,,
LESIZE,5,,,30,,,,
LESIZE,6,,,8,,,,
LESIZE,12,,,8,,,,
LESIZE,7,,,6,,,,
LESIZE,16,,,6,,,,
LESIZE,2,,,6,,,,
LESIZE,11,,,6,,,,
LESIZE,9,,,9,,,,
LESIZE,18,,,9,,,,
LESIZE,10, , , ,20,, , , ,
LESIZE,17, , , ,20,, , , ,

```

```

LESIZE,8, , ,31,, , , ,
LESIZE,1, , ,30,, , , ,
*ENDIF
*ENDIF
!
! PARA DIAMETRO=0.5
!
*if,df,eq,0.5,THEN
! Condição teta menor que 30 graus
*IF,teta,LT,0.55,THEN
LESIZE,15, , ,20,, , , ,
LESIZE,3, , ,30,, , , ,
LESIZE,4, , ,4, , , , ,
LESIZE,14, , ,4, , , , ,
LESIZE,19, , ,6, , , , ,
LESIZE,20,,6,,,,
LESIZE,13,,22,,,,
LESIZE,5,,30,,,,
LESIZE,6,,8,,,,
LESIZE,12,,8,,,,
LESIZE,7,,12,,,,
LESIZE,16,,12,,,,
LESIZE,2,,12,,,,
LESIZE,11,,12,,,,
LESIZE,9,,9,,,,
LESIZE,18,,9,,,,
LESIZE,10, , ,20,, , , ,
LESIZE,17, , ,12,, , , ,
LESIZE,8, , ,31,, , , ,
LESIZE,1, , ,12,, , , ,
!
*ENDIF
!
! Condição teta maior que 30 graus
*IF,teta,GE,0.55,THEN
LESIZE,15, , ,20,, , , ,
LESIZE,3, , ,30,, , , ,
LESIZE,4, , ,4, , , , ,
LESIZE,14, , ,4, , , , ,
LESIZE,19, , ,6, , , , ,
LESIZE,20,,6,,,,
LESIZE,13,,22,,,,
LESIZE,5,,30,,,,
LESIZE,6,,8,,,,
LESIZE,12,,8,,,,
LESIZE,7,,6,,,,
LESIZE,16,,6,,,,
LESIZE,2,,6,,,,
LESIZE,11,,6,,,,
LESIZE,9,,9,,,,

```



```

LESIZE,18,,9,,,,
LESIZE,10, , ,20,, , , ,
LESIZE,17, , ,20,, , , ,
LESIZE,8, , ,31,, , , ,
LESIZE,1, , ,30,, , , ,
*ENDIF
*ENDIF
!
! PARA DIAMETRO=0.05
!
*if,df,eq,0.05,THEN
!   Condição teta menor que 30 graus
*IF,teta,LT,0.55,THEN
LESIZE,15, , ,20,, , , ,
LESIZE,3, , ,30,, , , ,
LESIZE,4, , ,4, , , , ,
LESIZE,14, , ,4, , , , ,
LESIZE,19, , ,6, , , , ,
LESIZE,20,,6,,,,
LESIZE,13,,22,,,,
LESIZE,5,,30,,,,
LESIZE,6,,8,,,,
LESIZE,12,,8,,,,
LESIZE,7,,12,,,,
LESIZE,16,,12,,,,
LESIZE,2,,12,,,,
LESIZE,11,,12,,,,
LESIZE,9,,9,,,,
LESIZE,18,,9,,,,
LESIZE,10, , ,20,, , , ,
LESIZE,17, , ,12,, , , ,
LESIZE,8, , ,31,, , , ,
LESIZE,1, , ,12,, , , ,
!
*ENDIF
!
!   Condição teta maior que 30 graus
*IF,teta,GE,0.55,THEN
LESIZE,15, , ,20,, , , ,
LESIZE,3, , ,30,, , , ,
LESIZE,4, , ,4, , , , ,
LESIZE,14, , ,4, , , , ,
LESIZE,19, , ,6, , , , ,
LESIZE,20,,6,,,,
LESIZE,13,,22,,,,
LESIZE,5,,30,,,,
LESIZE,6,,8,,,,
LESIZE,12,,8,,,,
LESIZE,7,,6,,,,
LESIZE,16,,6,,,,

```

```

LESIZE,2,,6,,,,
LESIZE,11,,6,,,,
LESIZE,9,,9,,,,
LESIZE,18,,9,,,,
LESIZE,10, , ,20,, , , ,
LESIZE,17, , ,20,, , , ,
LESIZE,8, , ,31,, , , ,
LESIZE,1, , ,30,, , , ,
*ENDIF
*ENDIF
!
!
!
MESH AREAS
!
MSHAPE,0,2D
MSHKEY,0
AMESH,ALL
!
EXTOPT,ESIZE,2,0,
EXTOPT,ACLEAR,1
EXTOPT,ATTR,0,0,0
MAT,1
REAL,1
ESYS,0
!ASEL,S,AREA,,1,2 Extrudar area 1 e 2 => Matriz
vext,1,2,1,0,0,df,,,
!
!
EXTOPT,ESIZE,2,0,
EXTOPT,ACLEAR,1
EXTOPT,ATTR,0,0,0
MAT,2
ESYS,0
!ASEL,S,AREA,,1,2 Extrudar area 3 => Fibra
vext,3,,0,0,df,,,
!
!
!
=====
!
!
!
DEFINIÇÃO DESLOCAMENTOS
!
!
! A DIREITA
DA,15,UX,w*cos(teta),
DA,22,UX,w*cos(teta),
DA,23,UX,w*cos(teta),
DA,15,UY,-w*sin(teta),
DA,22,UY,-w*sin(teta),
DA,23,UY,-w*sin(teta),
DA,15,UZ,0,
DA,22,UZ,0,
DA,23,UZ,0,
!

```

! A esquerda

!

DA,5,UX,-w*cos(teta),
 DA,12,UX,-w*cos(teta),
 DA,13,UX,-w*cos(teta),
 DA,5,UY,w*sin(teta),
 DA,12,UY,w*sin(teta),
 DA,13,UY,w*sin(teta),
 DA,5,UZ,0,
 DA,12,UZ,0,
 DA,13,UZ,0,

!

!

!

=====

! SOLUÇÃO

/SOL

!/SOLU

!OUTRES,ALL,ALL !Quando necessário mudar convergência aberturas muito grande

!TIME,1

!NSUBST,21,0,21

!

SOLVE

FINISH

!

=====

! POSTPROc

!

! /post1

! /DEVICE,VECTOR,ON !VISUALIZAÇÃO DO DANO NO CONCRETO

! PLCRACK,0,0

!

!

! CRIANDO ETABLE, esta tabela nos diz o status de cada element(esmagado, trincado...)

!

!AVPRIN,0, ,

ETABLE,1,NMISC, 53

!

!AVPRIN,0, ,

ETABLE,2,NMISC, 60

!

!AVPRIN,0, ,

ETABLE,3,NMISC, 67

!

!AVPRIN,0, ,

ETABLE,4,NMISC, 74

!

!AVPRIN,0, ,

ETABLE,5,NMISC, 81

!

```

!AVPRIN,0, ,
ETABLE,6,NMISC, 88
!
!AVPRIN,0, ,
ETABLE,7,NMISC, 95
!
!AVPRIN,0, ,
ETABLE,8,NMISC, 102
!
PRETAB,1,2,3,4,5,6,7,8 !Imprime a tabela
!
!=====FIM do LOOP=====
!
! A partir daqui o loop tem que ser manual, ou seja, a cada solução e impressão da tabela, esta
!deve ser lida pelo matlab que imprimirá a lista de elementos que deveram ser mortos.
!Quando jogar esta lista no prompt de comando do ANSYS ele selecionará os elementos e
!imprimirá o volume de elementos mortos.
!
!Exemplo de lista impressa pelo Matlba!
!FLST,5,4,2,ORDE,4  Cria um componente de elementos
!FITEM,5,953
!FITEM,5,955
!FITEM,5,1653
!FITEM,5,1655
!
!ESEL,S, , ,P51X
!eplot
!AVPRIN,0, ,
!ETABLE, ,VOLU,
!SSUM
!
! FIM DO EXEMPLO
!
/PREP7
ekill,all  !Mata todos os elementos selecionados, rigidez do element=0.
allsel
FINISH  !soluciona novamente
/SOLU
! /STATUS,SOLU
SOLVE
FINISH
!
!=====Reinicia o loop até que não haja mais nenhum elemento danificado.=====
!
!=====ENTREGA DADOS DE SAIDA=====
!
!=====REACAO MATRIZ ESQUERDA=====
!
!
VSEL,S, , , 1

```

```

! VPLOT
NSLV,S,1
! NPLOT
!/SOLU
!FINISH
!/POST1
PRRSOL,
!
!=====REACAO MATRIZ DIREITA =====
!
ALLSELL,
!
VSEL,S, , , 2 !seleciona os nos dentro do volume selecionado
! VPLOT
NSLV,S,1
! NPLOT
!/SOLU
!FINISH
!/POST1
PRRSOL,      ! reaction solution
!
!=====TENSAO MAXIMA FIBRA=====
/device,vector,off
!*
VSEL,S, , , 1 !SELECIONA O VOLUME DA FIBRA
PLESOL, S,1, 0,1.0
!
!
!===== FIM =====

```

APÊNDICE B- Programa para calcular a tensão de ponte e o aumento da tenacidade a fratura

```

% Programa_tenacificação.m
% PROGRAMA PARA CALCULAR A TENSÃO DE PONTE E TENACIDADE A FRATURA
%
%           UNIVERSIDADE FEDERAL DO PAMPA-UNIPAMPA
%           CURSO DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA
%           MODELAGEM NUMERICA DO AUMENTO DA TENACIDADE A FRATURA DE
%           MATERIAIS DE BASE FRÁGIL REFORÇADOS POR FIBRAS
%
% ALUNO:Leandro Ferreira Friedrich
% ORIENTADOR: Prof Dr. WANG CHONG
%-----%
%-----Dados de Entrada-----%
clc;
clear all
global df Af ks kd Lf sf Ef niuf taoi niu Em Gm nw nt nz Nforca
global estados wk aesp
% tic
df=0.1; %em mm
rf=0.02*df;
Af=pi*df*df/4;
I=pi/4*rf^4;
sf=2254; % sf - resistencia de fibras em N/mm^2=MPa
Ef=60000; % em N/mm^2
niuf=0.35;
Lf=10; % em mm
taoi=3; % em N/mm^2=MPa (dado de En-Hua Yang, Victor C. Li)
Fc=sf*Af;
volf=Lf*Af;
vf=0.015; % percentagem volumetrica de fibras

niu=0.2; % matriz
Em=30000; % =30 GPa
Gm=Em/(2*(1+niu));
kd=1/(16*pi*(1-niu)*Gm);
ks=1/(8*pi*(1-niu));

tic
nw=8; % controle dw na integral Gc
dw=0.0018/nw; % abertura maxima = 0,001 mm
nt=4; % controle dteta, divisões para teta.
nz=4; % controle dz
estados=ones(nt,nz);
aesp=0.000001; % tolerancia para controlar se area danificada deve
ser registrada

Nforca=dados(nt,nz,nw); % entregue os dados

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% O aumento da tenacidade Gc=Integral sigc por dw:

intgw=0;
p=zeros(nw,4);
sc=zeros(nw,1);
% for wk=1:1
for wk=1:nw
    w=wk*dw;

v1=swk(wk);

```

```

intgw=intgw+v1;
    if wk==1, sa=v1; end
    sc(wk)=v1;
    if wk==nw; sb=v1; end

end
Gc=vf*(intgw-(sa+sb)*0.5)*dw/af; % usa regra de trapezoide na integral
fprintf('Aumento da tenacidade Gc=%12.4e MPa.mm\n',Gc)
% plotar as figuras
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Aumentar a qualidade de impressao das figuras
width = 7; % Width in inches
height = 4; % Height in inches
alw = 0.75; % AxesLineWidth
fsz = 11; % Fontsize
lw = 1.5; % LineWidth
msz = 8; % MarkerSize
figure(1);
pos = get(gcf, 'Position');
set(gcf, 'Position', [pos(1) pos(2) width*100, height*100]); %<- Set size
set(gca, 'FontSize', fsz, 'LineWidth', alw); %<- Set properties
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
x1=1:nw;
x1=dw*1000*x1;
x1=[0 x1];
sc=[0
    sc];
h11 = line(x1,sc,'Color','r','LineWidth',lw,'MarkerSize',msz);
xs=sprintf('w (x0,001mm)');
xlabel(xs);
ylabel('Tensão de Ponte [MPa]','Color','k');
title('Tensão De Ponte vs Abertura (w)')
print('Figura atual','-dpng','-r500'); %salva a figura no diretório
toc

% Esta função realiza os laços para theta
%
function y1 = swk(wk)
global df Lf nt
at=0.01; %limite inferior theta em radiano
bt=atan(Lf/df); %limite superior, theta máximo que contribui Literatura
dteta=(bt-at)/nt;
inteta=0;
% Integral sigc por theta:
for ti=1:nt
%     ti
%     pause
    teta=ti*dteta;
    v2=gtetai(wk,ti,teta);
    inteta=inteta+v2;
    if ti==1, sa=v2; end
    if ti==nt, sb=v2; end
end
y1=(inteta-(sa+sb)*0.5)*dteta;

```

```

% Esta função realiza os laços para o comprimento enterrado
function y2=gtetai(wk,ti,teta)
global df Lf nz Nforca
rf=df*0.5;
cz=0.001*df; %limite inferior de z
supz=(Lf*cos(teta)-df*sin(teta))/2; % limite superior de z
dz=(supz-cz)/nz; %passo de z
if supz<cz
    error ('supz eh menor que infz')
end
L0=rf*tan(teta);
intgh=0;
% Integral sigc por theta:
for zj=1:nz % laço por Z
%     zj
%     pause
    z=zj*dz;
    le=0.5*Lf-z/cos(teta)-L0;
    if le<=0
        error('le é negativo')
    end
    v3=Nforca(ti,zj,wk);
    intgh=intgh+v3;
    if zj==1, sa=v3; end
    if zj==nz, sb=v3; end
end
y2=(intgh-(sa+sb)*0.5)*dz*sin(teta)*2/Lf;

% Esta função é responsável pela entrega correta dos dados para o calculo
do aumento da tenacidade.
function Nforca = dados(nt,nz,nw)
Nforca=zeros(nt,nz,nw);
% Nforca guarda os modulos do resultante das forcas nos nós de
%contorno da parte direta da matriz; cada linha corresponde um certo
%angulo teta.
% Por exemplo, a primeira linha (teta=0) contem os módulos %correspondendo
diferentes
% comprimentos enterrados; o número de linhas corresponde quantos %angulos
% foram calculados (nt); o número de colunas correspondentes quantos
% comprimentos foram calculados (nz); nw representa quantas aberturas
%foram calculadas
%
%No exemplo abaixo formatação dos dados para diâmetro fibra de aço %d=0.02,
nt=4, nz=4 e nw=8.

Nforca(:,:,1)=[0.0040    0.0032    0.0037    0.0034
                0.0045    0.0044    0.0043    0.0043
                0.0041    0.0043    0.0034    0.0038
                0.0018    0.0030    0.0037    0.0000];
Nforca(:,:,2)=[0.0050    0.0048    0.0043    0.0039
                0.0063    0.0059    0.0047    0.0060
                0.0043    0.0067    0.0044    0.0000
                0.0025    0.0028    0.0000    0.0000];
Nforca(:,:,3)=[0.0047    0.0045    0.0053    0.0050
                0.0061    0.0053    0.0111    0.0134
                0.0047    0.0000    0.0000    0.0000
                0.0000    0.0000    0.0000    0.0000];
Nforca(:,:,4)=[0.0057    0.0059    0.0065    0.0052
                0.0062    0.0072    0.0000    0.0000
                0.0000    0.0000    0.0000    0.0000

```



```
0.0000    0.0000    0.0000    0.0000];
Nforca(:, :, 5)=[0.0062    0.0056    0.0059    0.0071
0.0072    0.0000    0.0000    0.0000
0.0000    0.0000    0.0000    0.0000
0.0000    0.0000    0.0000    0.0000];
Nforca(:, :, 6)=[0.0068    0.0065    0.0092    0.0070
0.0000    0.0000    0.0000    0.0000
0.0000    0.0000    0.0000    0.0000
0.0000    0.0000    0.0000    0.0000];
Nforca(:, :, 7)=[0.0084    0.0000    0.0000    0.0000
0.0000    0.0000    0.0000    0.0000
0.0000    0.0000    0.0000    0.0000
0.0000    0.0000    0.0000    0.0000];
Nforca(:, :, 8)=[0.0000    0.0000    0.0000    0.0000
0.0000    0.0000    0.0000    0.0000
0.0000    0.0000    0.0000    0.0000
0.0000    0.0000    0.0000    0.0000];
```

ANEXO A – Critério de falha de William e Warnke

O modelo prevê a falha no material concreto, material frágil. Ambos, trinca e quebra são modos de falha considerados. Este modelo avalia o reforço do material sólido concreto.

O critério de falha do concreto devido ao multiaxial estado de tensão pode ser expressado na forma

$$\frac{F}{f_c} - S \geq 0 \quad \text{A.1}$$

Onde:

F = uma função (para ser discutida) do principal estado de tensão ($\sigma_{xp}, \sigma_{yp}, \sigma_{zp}$)

S = superfície de falha (para ser discutida) expressada em termos da principal tensão e inclui cinco parâmetros f_f, f_c, f_{cb}, f_1 e f_2 definidos na tabela B.1

f_c = resistência de quebra uniaxial

$\sigma_{xp}, \sigma_{yp}, \sigma_{zp}$ = principais tensões na direção principal

Se a equação A.1 não é satisfeita, então não ocorre à trinca ou quebra. Senão o material vai trincar se qualquer tensão principal atuar sob tração, enquanto a quebra vai ocorrer se todas as tensões principais forem de compressão.

Um total de cinco parâmetros de tensão são introduzidos (cada qual pode ser a temperatura dependente) são necessários para definir a superfície fraturada bem como o estado de tensão no ambiente hidrostático. Estes são representados na tabela A.1.

Tabela A.1 -Tabela do Material Concreto

Parâmetro	Descrição	Constante
f_t	Última resistência de tração uniaxial	3
f_c	Última resistência de compressão uniaxial	4
f_{cb}	Última resistência de compressão biaxial	5
σ_h^a	Estado de tensão no ambiente hidrostático	6
f_1	Última resistência de compressão para um estado de compressão biaxial sobreposto sobre o estado de tensão hidrostático σ_h^a	7
f_2	Última resistência de compressão para um estado uniaxial de compressão sobreposto sobre o estado de tensão hidrostático σ_h^a	8

Porém, a falha na superfície pode ser especificada com um mínimo de duas constantes, f_t e f_c . As outras três constantes faltam para William e Warnke

$$f_{cb} = 1.2f_c \quad \text{A.2}$$

$$f_1 = 1.45f_c \quad \text{A.3}$$

$$f_2 = 1.725f_c \quad \text{A.4}$$

Porém, estes valores são validos somente para estados de tensão onde a condição

$$|\sigma_h| \leq \sqrt{3}f_c \quad \text{A.5}$$

$$(\sigma_h = \text{estado de tensão hidrostática} = (\sigma_{xp}, \sigma_{yp}, \sigma_{zp})/3) \quad \text{A.6}$$

é satisfeita. Esta condição A.5 aplica as situações de tensões com uma componente de tensão hidrostática baixa. Todos os cinco parâmetros devem ser especificados quando é esperada uma componente de tensão hidrostática grande. Se a condição B.5 não é satisfeita e descuidos nos valores mostrado nas equações A.2 e A.4 são assumidos, a resistência do material concreto pode ser incorretamente avaliada.

Ambas as funções F e a superfície fraturada S são expressos em termos da principal tensão denotada como $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.

onde:

$$\sigma_1 = \text{máx}(\sigma_{xp}, \sigma_{yp}, \sigma_{zp}) \quad \text{A.7}$$

$$\sigma_3 = \text{min}(\sigma_{xp}, \sigma_{yp}, \sigma_{zp}) \quad \text{A.8}$$

e $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$. A fratura do concreto é caracterizada em quatro domínios:

1. $0 \geq \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ (compressão – compressão – compressão)
2. $\sigma_1 \geq 0 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ (tração – compressão – compressão)
3. $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq 0 \geq \sigma_3$ (tração – tração – tração)
4. $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \geq 0$ (tração – tração – tração)

Em cada domínio, independentes funções descritas F e a superfície fraturada S . As quatro funções descritas à função geral F são denotadas com F_1, F_2, F_3, F_4 enquanto as funções descritas S são denotadas como S_1, S_2, S_3, S_4 . As funções $S_i (i = 1, 4)$ tem as propriedades que a superfície dela descrita é contínua enquanto a superfícies gradientes não são contínuas quando qualquer uma das principais tensões mudam de sinal. A superfície vai ser mostrada na Figura A.1 e Figura A.3. Estas funções são discutidas em detalhes abaixo para cada domínio.

1. O Domínio $0 \geq \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$

No regime compressão – compressão – compressão o critério de falha de William e Warnke é implementado. Neste caso, F leva a forma

$$F = F_1 = \sqrt{[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} / \sqrt{15} \quad \text{A.9}$$

e S é definida como

$$S = S_1$$

$$S_1 = \frac{\{2r_2(r_2^2 - r_1^2) \cos \eta + r_2(2r_1 - r_2) \sqrt{[4(r_2^2 - r_1^2) \cos^2 \eta + 5r_1^2 - 4r_1 r_2]}\}}{[4(r_2^2 - r_1^2) \cos^2 \eta + (r_2 - 2r_1)^2]} \quad \text{A.10}$$

Termos usados para definir S são:

$$\cos \eta = 2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3 / \sqrt{[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \cdot \sqrt{2} \quad \text{A.11}$$

$$r_1 = a_0 + a_1 \xi + a_2 \xi^2 \quad \text{A.12}$$

$$r_2 = b_0 + b_1 \xi + b_2 \xi^2 \quad \text{A.13}$$

$$\xi = \sigma_h / f_c$$

σ_h é definido pela equação B.6 e os coeficientes indeterminados $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2$ são discutidos abaixo.

Esta falha na superfície é mostrada na Figura A.1. O ângulo de semelhança η descrito é relativo à magnitude das tensões principais. Da equação A.11, $\eta = 0^\circ$ refere-se a qualquer estado de tensão tais que $\sigma_3 = \sigma_2 > \sigma_1$ (compressão uniaxial, tração biaxial).

Enquanto $\xi = 60^\circ$ para qualquer estado de tensão onde $\sigma_3 > \sigma_2 = \sigma_1$ (tração uniaxial, compressão biaxial). Todos os outros multiaxiais estados de tensões têm ângulos de semelhança tais que $0^\circ \leq \eta \leq 60^\circ$. Quando $\eta = 0^\circ$, S_1 equação A.10 igual r_1 enquanto se $\eta = 60^\circ$, S_1 é igual a r_2 . Entretanto, a função r_1 representa a superfície fraturada de todos os estados de tensões com $\eta = 0^\circ$. As funções r_1, r_2 e o ângulo η são descritos na Figura A.1.

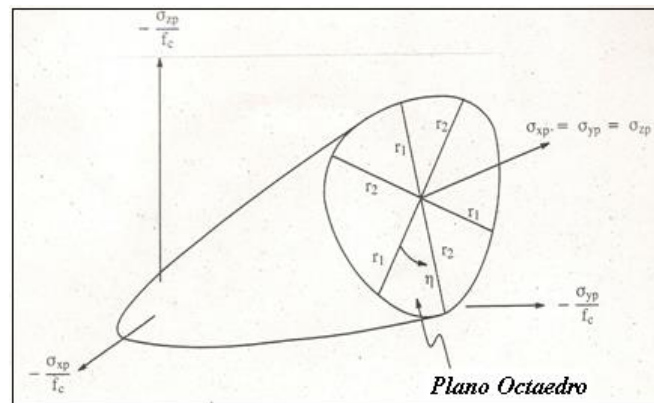


Figura A.1- 3-D Superfície Fraturada no Espaço de Tensão Principal

Isto pode ser visto que o cruzamento da seção fraturada tem simetria cíclica sobre cada 120° do setor do plano octaedro devido à extensão $0^\circ \leq \eta \leq 60^\circ$ do ângulo similar. A função r_1 é determinada por ajuste a_0, a_1, a_2 tais que f_f, f_{cb}, f_1 perto de toda fratura na superfície. Os valores propostos por estes coeficientes são determinados por solução direta de equações simultâneas:

$$\begin{bmatrix} F_1 / f_c (\sigma_1 = f_t, \sigma_2 = \sigma_3 = 0 \\ F_1 / f_c (\sigma_1 = 0, \sigma_2 = \sigma_3 = f_{cb} \\ F_1 / f_c (\sigma_1 = -\sigma_h^a, \sigma_2 = \sigma_3 = -\sigma_h^a - f_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \xi_t & \xi_t^2 \\ 1 & \xi_{cb} & \xi_{cb}^2 \\ 1 & \xi_1 & \xi_1^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} \quad \text{A.14}$$

com

$$\xi_t = f_t / 3f_c, \quad \xi_{cb} = -2f_{cb} / 3f_c, \quad \xi_1 = -\sigma_h^a / f_c - 2f_1 / 3f_c \quad \text{A.15}$$

A função r_2 é calculada ajustando b_0, b_1, b_2 para satisfazer as condições:

$$\begin{bmatrix} F_1 / f_c (\sigma_1 = \sigma_2 = 0, \sigma_3 = -f_c) \\ F_1 / f_c (\sigma_1 = \sigma_2 = -\sigma_h^a, \sigma_3 = -\sigma_h^a - f_2) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1/3 & 1/9 \\ 1 & \xi^2 & \xi^2 \\ 1 & \xi_0 & \xi_0^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{Bmatrix} \quad \text{A.16}$$

ξ_2 é definido por:

$$\xi_2 = \frac{-\sigma_h^a}{f_c} - \frac{f_2}{3f_c} \quad \text{A.17}$$

e ξ_0 é o ponto positivo da equação

$$r_2(\xi_0) = a_0 + a_1 \xi_0 + a_2 \xi_0^2 = 0 \quad \text{A.18}$$

Onde, a_0, a_1, a_2 são avaliados pela equação (A.14).

Então a superfície fraturada deve permanecer convexa, a relação $\frac{r_1}{r_2}$ é restrita para a extensão

$$0.5 < \frac{r_1}{r_2} < 1.25 \quad \text{A.19}$$

embora o limite superior não seja considerado restritivo então $\frac{r_1}{r_2} < 1$ para a maioria dos

materiais. Também os coeficientes $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2$ devem satisfazer as condições:

$$a_0 > 0, a_1 \leq 0, a_2 \leq 0 \quad \text{A.20}$$

$$b_0 > 0, b_1 \leq 0, b_2 \leq 0 \quad \text{A.21}$$

Então, a superfície fraturada é fechada e prevê fratura superior pela alta pressão hidrostática ($\xi > \xi_2$). Este fechamento da superfície fraturada não tem sido verificado experimentalmente e isto tem sido sugerido que o tipo de cilindro Von Mises o mais válido para fratura na superfície com grande compressão. Consequentemente, isto é recomendado

que valores de f_1 e f_2 são selecionados para um nível de tensão hidrostática (σ_h^a) nos arredores ou sobre a máxima tensão hidrostática esperada encontrada na estrutura.

Equação A.18 expressa a condição que a falha na superfície tem um ápice para $\xi = \xi_0$. Um perfil de r_1 e r_2 como uma função de ξ é mostrado na Figura A.2.

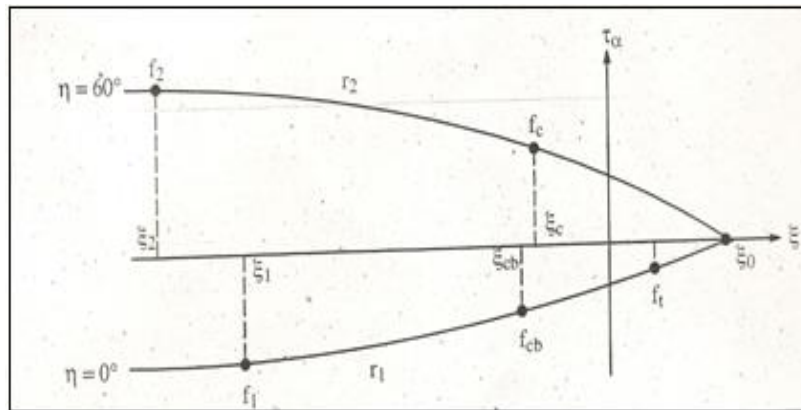


Figura A.2 O perfil da falha na superfície como uma função de ξ_a

A diminuição da curva representa todos estados de tensões tais que $\eta = 0^\circ$ enquanto a curva superior representa os estados de tensões tais que $\eta = 60^\circ$. Se o critério de fratura é satisfeito, é assumida a quebra do material.

2. O Domínio $\sigma_1 \geq 0 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$

No regime tração – compressão – compressão, F tem a forma

$$F = F_2 = \sqrt{[(\sigma_2 - \sigma_3)^2 + \sigma_2^2 - \sigma_3^2]} / \sqrt{15} \quad \text{A.22}$$

e S é definido como

$$S = S_2 = \left(\frac{1 - \sigma_1}{f_t} \right) \cdot \frac{\{2p_2(p_2^2 - p_1^2) \cos \eta + p_2(2p_1 - p_2) \cdot \sqrt{[4(p_2^2 - p_1^2) \cos \eta + 5p_1^2 - 4p_1 \cdot p_2]}\}}{[4(p_2^2 - p_1^2) \cos^2 \eta + (p_2 - 2p_1)^2]} \quad \text{A.23}$$

onde $\cos \eta$ é definido pela equação A.11 e

$$P_1 = a_0 + a_1x + a_2x^2 \quad \text{A.24}$$

$$P_2 = b_0 + b_1x + b_2x^2 \quad \text{A.25}$$

Os coeficientes $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2$ são definidos pelas equações A.14 e A.16 enquanto

$$x = \frac{(\sigma_2 + \sigma_3)}{3} \quad \text{A.26}$$

Se o critério de fratura é satisfeito, ocorre a quebra no plano perpendicular a principal tensão σ_1 .

3. O Domínio $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq 0 \geq \sigma_3$

No regime tração – tração – compressão, F tem a forma

$$F = F_3 = \sigma_i; \quad i = 1, 2 \quad \text{A.27}$$

e S é definido como

$$S = S_3 = \frac{f_t}{f_c} \cdot [1 + (\frac{\sigma_3}{s_2(\sigma_i, 0, \sigma_3)})]; i = 1, 2 \quad \text{A.28}$$

Se o critério de falha para ambos $i = 1, 2$ é satisfeito, a trinca ocorre no plano perpendicular às principais tensões σ_1 e σ_2 . Se o critério de falha é satisfeito somente para $i = 0$, a trinca ocorre somente no plano perpendicular à principal tensão σ_1 .

4. O Domínio $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \geq 0$

No regime tração – tração – tração, F tem a forma

$$F = F_4 = \sigma_i; i = 1, 2 \quad \text{e } S \text{ é definido como} \quad \text{A.29}$$

$$S = S_4 = f_t / f_c$$

A.30

Se o critério de falha é satisfeito nas direções 1, 2 e 3 ocorre a trinca nos planos perpendiculares as principais tensões $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.

Se o critério de falha é satisfeito nas direções 1 e 2, ocorre a trinca nos planos perpendiculares as principais tensões σ_1 e σ_2 . Se o critério de falha é satisfeito somente na direção 1, ocorre a trinca a fratura no plano perpendicular a principal tensão σ_1 .

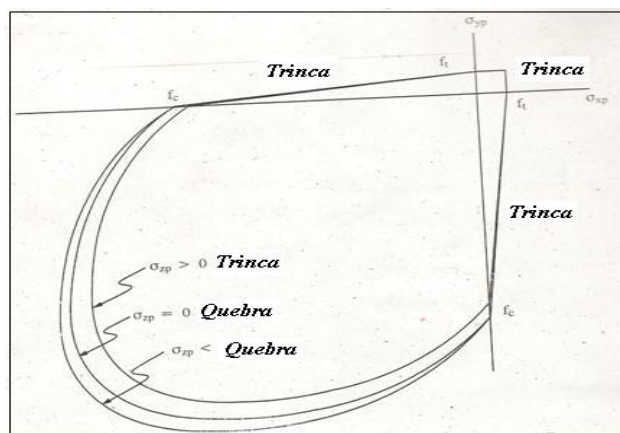


Figura A.3 Falha na Superfície no Espaço Principal de tensão σ_{zp} Fechado a zero

Figura A.3 representada à falha na superfície 3-D para estados de tensão que são biaxial ou quase biaxial. Se a maioria significativa de tensões principais não são zero nas direções σ_{xp} e σ_{yp} , a terceira superfície apresentada é σ_{zp} ligeiramente maior que zero, σ_{zp} é igual a zero e σ_{zp} ligeiramente menor que zero. Embora as três superfícies, mostradas nas projeções sobre o plano $\sigma_{xp} - \sigma_{yp}$, são quase equivalentes e a falha na superfície 3-D é contínua, o modo de o material falhar é uma função do sinal de σ_{zp} .

Por exemplo, se σ_{xp} e σ_{yp} ambos são negativos e σ_{zp} é ligeiramente positivo, a trinca vai ser projetada na direção perpendicular a direção σ_{zp} . Porém se σ_{zp} é zero ou ligeiramente negativo, o material assume a quebra.