

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO PAMPA  
CURSO DE MATEMÁTICA - LICENCIATURA**

**CLAUDIA PERLIN**

**CRESCIMENTO POPULACIONAL DE PALOMETAS NA  
FRONTEIRA OESTE GAÚCHA: UM PROBLEMA  
AMBIENTAL À LUZ DA MODELAGEM MATEMÁTICA**

**Itaqui  
2023**

Ficha catalográfica elaborada automaticamente com os dados fornecidos  
pelo(a) autor(a) através do Módulo de Biblioteca do  
Sistema GURI (Gestão Unificada de Recursos Institucionais) .

P615c Perlin, Cláudia

CRESCIMENTO POPULACIONAL DE PALOMETAS NA FRONTEIRA OESTE  
GAÚCHA: UM PROBLEMA AMBIENTAL À LUZ DA MODELAGEM MATEMÁTICA /  
Cláudia Perlin.

38 p.

Trabalho de Conclusão de Curso(Graduação)-- Universidade  
Federal do Pampa, MATEMÁTICA, 2023.

"Orientação: Alex Sandro Gomes Leão".

1. Modelagem matemática. 2. Dinâmica populacional. 3.  
Palometas. 4. Problema Ambiental. I. Título.

**CLAUDIA PERLIN**

**CRESCIMENTO POPULACIONAL DE PALOMETAS NA  
FRONTEIRA OESTE GAÚCHA: UM PROBLEMA  
AMBIENTAL À LUZ DA MODELAGEM MATEMÁTICA**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado  
ao curso de Licenciatura em Matemática-  
Licenciatura como requisito parcial para a  
obtenção do grau de Licenciada em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Alex Sandro Gomes Leão

Coorientadora: Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Silvia Barcelos  
Machado

**Itaqui  
2023**

CLAUDIA PERLIN

**CRESCIMENTO POPULACIONAL DE PALOMETAS NA FRONTEIRA  
OESTE GAÚCHA: UM PROBLEMA AMBIENTAL À LUZ DA  
MODELAGEM MATEMÁTICA**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado  
ao Curso de Matemática - Licenciatura da  
Universidade Federal do Pampa, como  
requisito parcial para obtenção do Título de  
Licenciado(a) em Matemática.

Trabalho de Conclusão de Curso defendido e aprovado em: 13 de julho de 2023.

Boas examinadora:

Documento assinado digitalmente



ALEX SANDRO GOMES LEAO  
Data: 25/07/2023 14:22:37-0300  
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

---

Prof. Dr Alex Sandro Gomes Leão  
Orientador

Universidade Federal do Pampa - Unipampa

Documento assinado digitalmente



SILVIA BARCELOS MACHADO  
Data: 25/07/2023 14:31:17-0300  
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

---

Prof. Dra. Silva Barcelos Machado  
Coorientadora

Universidade Federal do Pampa - Unipampa

Documento assinado digitalmente



CHARLES QUEVEDO CARPES  
Data: 25/07/2023 15:29:55-0300  
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

---

Prof. Charles Quevedo Carpes  
Universidade Federal do Pampa - Unipampa

## **DEDICATÓRIA**

Dedico esse trabalho, aos meus pais Lidia Terezinha Strack Perlin e Irineu Perlin e por fim a minha filha Sophia Perlin Hautter.

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço à minha família, que esteve me apoiando em todos os momentos, em especial aos meus pais, Lidia e Irineu.

Agradeço aos meus professores orientadores, Alex Sandro Gomes Leão e Silvia Barcelos Machado, por aceitarem conduzir este trabalho e por todo o apoio que me deram durante este período. Agradeço, também, aos demais professores que fizeram parte da minha formação, por todos os ensinamentos e inspirações.

Por fim, também gostaria de agradecer a Universidade Federal do Pampa - Campus Itaqui pela oportunidade de concluir esta graduação.

## RESUMO

Este trabalho apresenta uma pesquisa que traz a modelagem matemática empregada em um problema ambiental, cujo objetivo é de investigar o crescimento populacional e os possíveis problemas ambientais causados pela Palometa nos rios da fronteira oeste gaúcha. No estudo da proposta foram testados os modelos de Malthus, de Verhulst, de Gordon-Schaefer e o modelo de pesca com Efeito Allee. Podemos perceber que cada um desses modelos tem um viés que deve ser analisado e considerado. O modelo de Malthus, considerado pouco realístico, propõe que o crescimento populacional, se dá a uma taxa intrínseca de crescimento proporcional à população naquele instante de tempo. No caso das Palometas, podemos inferir que a população pode crescer rapidamente em um ambiente que forneça bons recursos. Já o modelo de Verhulst, é uma equação de crescimento logístico, onde a população cresce até um limite sustentável. Para as Palometas, interpretamos que durante seus encontros pode ocorrer a predação intraespecífica. Este modelo descreve satisfatoriamente o comportamento de populações com alto número de indivíduos, sendo adequado para descrever o comportamento das Palometas em locais onde ela é considerada espécie nativa. O modelo de Gordon-Schaefer, supõe a captura de indivíduos; e no caso das Palometas, podemos interpretar esta captura como pesca predatória para fins de controle populacional das Palometas. Por fim, o modelo de pesca com Efeito Allee, é adequado para situações que envolvam baixo número de indivíduos. O Efeito Allee descreve uma dificuldade da espécie em aumentar a sua população quando em número reduzido de indivíduos.

**Palavras-chave:** Modelagem matemática. Dinâmica populacional. Palometas. Problema Ambiental.

## ABSTRACT

This work presents a research that brings the mathematical modeling implicit in an environmental problem, whose objective is to investigate the population growth and the possible environmental problems caused by Palometa in the rivers of the western border of Rio Grande do Sul. In the study of the proposal, the models of Malthus, Verhulst, Gordon-Schaefer and the Fishing Model with Allee Effect were tested. We can see that each of these models has a bias that must be analyzed and considered. Malthus's model, considered unrealistic, proposes that population growth occurs at an intrinsic rate of growth proportional to the population at that instant of time. In the case of Palometas, we can infer that the population can grow quickly in an environment that provides good resources. The Verhulst Model, on the other hand, is a logistic growth equation, where the population grows up to a sustainable limit. For Palometas, we interpret that intraspecific predation may occur during their encounters. This model satisfactorily describes the behavior of populations with a high number of individuals, being adequate to describe the behavior of Palometas in places where it is considered a native species. Gordon-Schaefer's model assumes the capture of individuals; and in the case of the Palometas, we can interpret this capture as predatory fishing for the purposes of population control of the Palometas. Finally, the Gordon-Schaefer fishing model with the Allee Effect is suitable for situations involving a low number of individuals. The Allee Effect describes a species difficulty in increasing its population when in small number of individuals.

**Keywords:** Mathematical model; Population dynamics; Gold piranha; Environmental issues..

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Palometa jovem e adulta, respectivamente. ....	12
Figura 2	Peixes atacados por Palometas. ....	13
Figura 3	Reta de fase de um exemplo genérico, com soluções de equilíbrio $y_1^*$ e $y_3^*$ estáveis e $y_2^*$ , instável. ....	19
Figura 4	Comportamento populacional malthusiano, para certa população $P_0$ inicial, com: (a) $r > 0$ e (b) $r < 0$ . ....	21
Figura 5	Reta de fase da equação logística. ....	25
Figura 6	Evolução temporal da equação logística para diferentes valores iniciais. ....	25
Figura 7	Reta de fase da equação Gordon-Schaefer. ....	28
Figura 8	Diagrama de bifurcação da equação de Gordon-Schaefer. ....	28
Figura 9	Efeito Allee fraco e forte. ....	29
Figura 10	Reta de fase da equação de pesca com Efeito Allee, satisfazendo a condição de existência $\alpha < c$ . ....	31
Figura 11	Reta de fase da equação de pesca com Efeito Allee, quebrando a condição de existência, com (a): $\alpha = c$ e (b): $\alpha > c$ . ....	32
Figura 12	Diagrama de bifurcação da equação de pesca com Efeito Allee. ....	32

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1	Estabilidade das soluções de equilíbrio da equação logística. ....	24
Tabela 2	Estabilidade das soluções de equilíbrio da equação de Gordon-Schaefer. ....	27

## SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO .....</b>	<b>10</b>
<b>2 CARACTERÍSTICAS DA PALOMETA .....</b>	<b>12</b>
<b>3 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS.....</b>	<b>14</b>
<b>4 MODELOS MATEMÁTICOS PARA O COMPORTAMENTO POPULACIONAL DAS PALOMETAS .....</b>	<b>20</b>
<b>4.1 Modelo de Malthus .....</b>	<b>20</b>
<b>4.2 Modelo de Verhulst .....</b>	<b>21</b>
<b>4.3 Modelo de Gordon-Schaefer .....</b>	<b>26</b>
<b>4.4 Modelo de Pesca com Efeito Allee .....</b>	<b>28</b>
<b>5 CONSIDERAÇÕES FINAIS .....</b>	<b>33</b>
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....</b>	<b>35</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Estudos que se propõem a descrever e analisar o crescimento populacional de peixes nativos, exóticos e/ou invasores, em certa região, são de grande importância para compreender como a ictiofauna<sup>1</sup> local se desenvolve e, para garantir a preservação do ecossistema ao qual pertencem.

A Palometa (ou Piranha-vermelha), de nome científico *Serrasalmus maculatus* (Kner, 1858), é uma espécie de peixe carnívoro de água doce. Sua distribuição natural contempla alguns rios da América do Sul, como a Bacia Amazônica, do Paraguai e do Paraná. Naturalmente encontrada, também, na bacia do Rio Uruguai, a Palometa é considerada espécie exótica invasora<sup>2</sup> nos demais rios do Rio Grande do Sul (RS).

Tanto no seu *habitat* natural quanto em regiões invadidas, as Palometas tendem a causar um desequilíbrio ambiental no ecossistema local e, além disso, causar prejuízos econômicos aos pescadores. Fatores como a velocidade de reprodução da espécie, baixo valor comercial e a falta de predadores naturais, que possam controlar a sua densidade populacional, colaboram para a dominância desta espécie sobre as demais.

Análises comportamentais e previsões sobre a dinâmica populacional das Palometas podem ser feitas por meio da modelagem matemática. A partir de informações que descrevam o comportamento vital, de distribuição e de interação destes animais com outras espécies, pode-se construir ou adaptar modelos matemáticos, com uma ou mais equações, e simular o comportamento desses sistemas para diferentes situações.

Justificamos a escolha da temática pelo entendimento de que a Palometa é um problema ambiental no Rio Grande do Sul, em especial na região da fronteira oeste, onde esta espécie é considerada nativa e há uma superpopulação, trazendo prejuízos econômicos aos pescadores. Nas demais regiões do estado, há a invasão biológica da Palometa, que causa além de danos econômicos, também desequilíbrio ao ecossistema invadido.

A temática do estudo é motivada pela estreita relação da autora com o trabalho de pesca local, pois é filha de pescadores profissionais. A escassa literatura sobre a dinâmica populacional e de distribuição das Palometas nos rios da fronteira oeste do RS dificulta a realização de ações que possam contribuir positivamente para o desenvolvimento da pesca local e para a preservação da biodiversidade.

Neste contexto a autora intenciona colaborar com a elaboração de novas pesquisas,

---

<sup>1</sup>Ictiofauna: conjunto de peixes de uma região ou ambiente.

<sup>2</sup>Espécie exótica invasora: espécie que avança sobre territórios externos à sua distribuição natural e causam impactos negativos na biodiversidade e ecossistema local.

que busquem respostas para este problema ambiental. Com efeito, foi definido o seguinte problema de pesquisa: "Quais são os possíveis modelos matemáticos que descrevem o comportamento de crescimento populacional de Palometas nos rios da fronteira oeste do Rio Grande do Sul?", assim o principal objetivo do trabalho é investigar o crescimento populacional e os possíveis problemas ambientais causados pelas Palometas nos rios da fronteira oeste.

Para dar conta de responder o problema da pesquisa foi pensado os seguintes procedimentos: a) mapear as produções acadêmicas nas principais plataformas de indexação que discutem estudos sobre a Palometa; b) identificar dentre as produções encontradas informações que possibilitem compreender a dinâmica populacional das Palometas e buscar modelos adequados; c) adaptar modelos matemáticos para inferir o comportamento populacional de Palometas nos rios da fronteira oeste gaúcha.

O trabalho encontra-se dividido em seis capítulos, sendo este o primeiro. No segundo capítulo, trazemos as características biológicas das Palometas. Enquanto que, no terceiro capítulo, apresentamos alguns conceitos de equações diferenciais ordinárias, importantes para o desenvolvimento deste trabalho.

No quarto capítulo, adaptamos alguns modelos matemáticos, já disponíveis na literatura, para descrever o comportamento populacional de indivíduos, incluindo a dinâmica populacional das Palometas. Por fim, no quinto capítulo fazemos as considerações finais do trabalho e, no sexto capítulo, apresentamos as referências utilizadas.

## 2 CARACTERÍSTICAS DA PALOMETA

A Palometa, *Serrasalmus maculatus*, é uma espécie de peixe carnívoro de água doce comumente encontrada na região da fronteira oeste do Rio Grande do Sul. As suas principais características são (LOPES *et al.*, 2008): a cabeça possui um perfil côncavo, há uma faixa preta na nadadeira caudal, as pontas das caudas são claras e a parte inferior de seu corpo é amarela. A figura (1) mostra a Palometa nas fases jovem e adulta, respectivamente.

Figura 1 – Palometa jovem e adulta, respectivamente.



Fonte: Lopes *et al.*, 2008.

Quando adulta, a palometa pode alcançar até 34,5 cm de comprimento. A sua expectativa de vida, em aquário, é de até 10 anos; no entanto, na natureza, devido à sua interação com o ambiente e com outras espécies, sua idade média pode reduzir à metade (SOUZA *et al.*, 2009). A sua reprodução é sexuada, com desova prolongada no inverno e na primavera (QUEROL *et al.*, 2013, p. 31), sendo assim considerada de fluxo contínuo.

A Palometa é nativa nos rios da bacia Amazônica, do Paraguai, do Paraná e do Uruguai, assim quando encontradas em qualquer outra bacia hidrográfica é considerada espécie exótica invasora. Pesquisas já apontam sua ocorrência na bacia do Rio Jacuí, RS (BERTACO, 2023, p. 3), onde a principal suspeita de entrada da espécie nesta bacia é através da irrigação do arroz (MALABARBA *et al.*, 2021).

Como a Palometa é um peixe carnívoro, possui dieta variada com estratégia alimentar altamente oportunista (WILDNER *et al.*, 2013. P. 713), alimentando-se principalmente de pedaços de nadadeiras, escamas e demais partes do corpo de peixes de outras espécies ou de sua própria espécie (VILLARES, 2008, P. 237).

A Palometa pode causar grandes prejuízos econômicos aos pescadores, uma vez que destrói seus materiais de pesca, perfurando redes, quebrando anzóis; ou ainda, atacando peixes já capturados em redes de pesca, tornando-os inviáveis para comercialização. A figura (2) mostra peixes atacados por palometas.

Figura 2 – Peixes atacados por Palometas.



Fonte: Canal Rural (2021).

Quando em períodos de verão e escassez de chuvas, as águas dos rios da fronteira oeste gaúcha ficam em um baixo nível, tornando-se lânticas e transparentes, sendo um ambiente propício para predação de variadas espécies pelas Palometas (BEHR e SIGNOR, 2008); além de, em algumas situações, ocorrer ataques a humanos.

O principal predador da Palometa nos rios da fronteira oeste é o *Salminus maxillosus*, popularmente conhecido na região pelo nome Dourado. Este é um peixe de água doce, carnívoro, com potencial de controlar a distribuição de Palometas nos rios; porém, nos últimos 20 anos o Dourado é uma espécie considerada ameaçada de extinção na região (FLORA *et al.*, 2010).

Dessa forma, não há um predador natural capaz de controlar a densidade populacional de Palometas, causando então uma superpopulação que afeta negativamente o ecossistema local. O crescimento populacional sem controle de Palometas pode trazer danos ambientais, como a redução de outras espécies nativas e de maior valor comercial.

Outra forma de controle das Palometas é a pesca predatória<sup>3</sup>, no entanto, essa possibilidade não tem grande aderência na região da fronteira oeste por pescadores, uma vez que as Palometas podem danificar as redes de pesca, além de possuírem pouca carne e baixo valor comercial agregado, sendo a sua captura pouco rentável.

---

<sup>3</sup>Pesca predatória: atividade pesqueira que consiste na retirada de espécies de uma população natural a uma velocidade maior, comparada à capacidade de recuperação do estoque.

### 3 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

Segundo Zill (2001), equações diferenciais são o suporte matemático para muitas áreas da ciência e da engenharia. Nelas, modelos matemáticos são desenvolvidos para auxiliar na compreensão de fenômenos físicos. Estes modelos frequentemente geram uma equação que contém algumas derivadas de uma função desconhecida. Tal equação é chamada de equação diferencial.

**Definição 1. Equação Diferencial Ordinária:** Uma equação diferencial é uma relação entre uma função  $y(t)$  e suas derivadas  $\frac{dy}{dt}$ ,  $\frac{d^2y}{dt^2}$ , ...

Na equação diferencial, a incógnita é uma função  $y(t)$ . Por exemplo:

- i)  $y'' + 3ty' + 4y = \cos(3t)$
- ii)  $\frac{dy}{dt} + y = e^t$
- iii)  $y'' - 3y' + 8y = 0$

A **solução de uma equação diferencial** se entende como uma função  $y(t)$  que, juntamente com as suas derivadas, satisfaz a equação.

**Definição 2. Ordem:** A ordem de uma equação diferencial é a ordem da derivada de mais alta ordem que aparece na equação.

**Definição 3. Linearidade:** Uma equação diferencial ordinária pode ser escrita na forma  $F(t, y, y', y'', \dots, y^n) = 0$ . Dizemos que a equação diferencial é linear quando  $F$  for uma função linear das variáveis  $y, y', y'', \dots, y^n$ .

Assim, escrevemos uma EDO linear de ordem  $n$  na forma:

$$a_0(t)y^n + a_1(t)y^{n-1} + \dots + a_{n-2}(t)y'' + a_{n-1}(t)y' + a_n(t)y = g(t), \quad (1)$$

onde  $a_0(t), a_1(t), \dots, a_{n-2}(t), a_{n-1}(t), a_n(t)$  e  $g(t)$  são funções conhecidas, que dependem somente de  $t$ .

**Definição 4. Equação diferencial linear de 1ª ordem:** Uma equação diferencial linear de 1ª ordem é definida por:

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = g(t), \quad (2)$$

onde  $p(t)$  e  $g(t)$  são funções conhecidas e contínuas no intervalo aberto.

**Definição 5.** Se  $g(t) = 0$ , dizemos que a equação (2) é **homogênea**. Caso contrário, dizemos que a equação (2) é **não-homogênea**.

Buscamos a solução da equação (2). Consideramos, então, os seguintes casos:

i) se  $p(t) = 0$ , então  $\frac{dy}{dt} = g(t)$ .

Daí, integrando dos dois lados da igualdade com relação a  $t$ :

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= g(t) \\ \int \frac{dy}{dt} dt &= \int g(t) dt \\ y(t) &= \int g(t) dt + c;\end{aligned}$$

onde  $c$  é uma constante real.

Portanto,  $y(t) = \int g(t) dt + c$  é a solução geral da EDO  $\frac{dy}{dt} = g(t)$ .

ii) se  $g(t) = 0$ , então  $\frac{dy}{dt} + p(t)y = 0$ .

Note que  $y(t) = 0$  é uma solução. Buscamos, então, uma solução  $y(t) \neq 0$ . Fazemos:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= -p(t)y \\ \frac{1}{y} \frac{dy}{dt} &= -p(t)\end{aligned}$$

Da regra da cadeia, temos  $\frac{d}{dt}(\ln|y|) = \frac{1}{y}y'$ . Substituindo, então, temos:

$$\frac{d}{dt} \ln|y| = -p(t)$$

Daí, integrando dos dois lados da igualdade com relação a  $t$ :

$$\begin{aligned}\int \frac{d}{dt} \ln|y| dt &= - \int p(t) dt \\ \ln|y| &= - \int p(t) dt + c_1;\end{aligned}$$

onde  $c_1$  é uma constante real.

Tomando a exponencial em ambos os lados da igualdade, temos:

$$\begin{aligned} e^{\ln(y)} &= e^{-\int p(t)dt+c_1} \\ y &= e^{-\int p(t)dt} \cdot e^{c_1} \\ y &= c \cdot e^{-\int p(t)dt}; \end{aligned}$$

onde  $c$  é uma constante real.

Concluimos, portanto, que a solução geral da equação diferencial linear de 1ª ordem homogênea é:

$$y(t) = c \cdot e^{-\int p(t)dt}. \quad (3)$$

**Definição 6. Equação diferencial ordinária de 1ª ordem não-linear separável:** Uma equação diferencial de 1ª ordem da forma:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{g(t)}{f(y)}, \quad (4)$$

onde  $g(t)$  e  $f(y)$  são funções contínuas de  $t$  e  $y$ , é chamada de **separável**.

Para encontrar a solução da equação (4), multiplicamos os dois lados por  $f(y)$ :

$$f(y) \cdot \frac{dy}{dt} = g(t), \quad (5)$$

e observamos que  $f(y) \cdot \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(F(y))$ , onde  $F(y) = \int f(y)dy$  é uma primitiva de  $f(y)$ , pois

$$\frac{d}{dt}[F(y(t))] = \frac{dF}{dy} \cdot \frac{dy}{dt} = f(y) \cdot \frac{dy}{dt}.$$

Assim, a equação (5) fica na forma

$$\frac{d}{dt}F(y) = g(t).$$

Integrando os dois lados da igualdade com relação a  $t$ :

$$\begin{aligned} F(y) &= \int g(t)dt + c \\ \int f(y)dy &= \int g(t)dt + c, \end{aligned} \quad (6)$$

que é dita **solução implícita** da equação (4).

As soluções gerais de uma equação diferencial constituem uma família infinita de curvas no plano  $tOy$ . Muitas vezes é preciso selecionar uma dessas curvas, o que se faz pela determinação de um ponto  $(t_0, y_0)$  por onde a curva deve passar. Usualmente escrevemos:

$$y(t_0) = y_0 \quad (7)$$

conhecida como **condição inicial**.

A equação diferencial (2) juntamente com a condição inicial (7), constituem o chamado **problema de valor inicial** (PVI):

$$\begin{cases} y' + p(t)y = g(t) \\ y(t_0) = y_0. \end{cases} \quad (8)$$

Nem sempre é possível determinar a solução analítica de equações diferenciais não-lineares, devido à sua complexidade. Então, em alternativa, adotamos uma abordagem de análise qualitativa das equações. Assim, buscamos características mais gerais das equações, como por exemplo, a ausência de mudanças significativas em um sistema (EDELSTEIN-KESHET, 1988).

**Definição 7.** Consideremos  $\frac{dy}{dt} = f(y)$ . Dizemos que a equação está em equilíbrio quando  $\frac{dy}{dt} = 0$ , ou seja, quando a taxa de variação da função  $y(t)$  é igual a zero.

De modo geral, ao considerarmos uma equação diferencial na forma

$$\frac{dy}{dt} = f(y), \quad (9)$$

onde  $f(y)$  é uma função não-linear de  $y$ , então as soluções de equilíbrio, denotadas por  $y^*$ , são soluções constantes que satisfazem a equação  $\left. \frac{dy}{dt} \right|_{y^*} = \frac{dy^*}{dt} = f(y^*) = 0$ .

É interessante, agora, verificar como pequenas variações em  $y$  se comportam com o passar do tempo. Isto é, considerando uma solução de equilíbrio  $y^*$  e uma pequena perturbação  $0 < \varepsilon(t) \ll 1$ , em torno do ponto de equilíbrio, queremos determinar se a perturbação  $\varepsilon(t)$  irá crescer ou diminuir. Fazemos então:

$$y(t) = y^* + \varepsilon(t)$$

$$\varepsilon(t) = y(t) - y^*$$

Derivando ambos os lados da igualdade com relação a  $t$ :

$$\begin{aligned}\frac{d\varepsilon(t)}{dt} &= \frac{dy(t)}{dt} - \frac{dy^*}{dt} \\ &= \frac{dy(t)}{dt} + 0 \\ &= f(y^* + \varepsilon(t))\end{aligned}\tag{10}$$

Expandindo a função não-linear  $f$  em série de Taylor em torno de  $y^*$ , temos:

$$f(y^* + \varepsilon(t)) = f(y^*) + f'(y^*) \cdot \varepsilon + f''(y^*) \cdot \frac{\varepsilon^2}{2!} + \dots\tag{11}$$

Como  $\varepsilon$  é pequeno, então os termos  $O(\varepsilon^2)$  são desprezados. Daí, substituindo a equação (11) na equação (10), obtemos:

$$\begin{aligned}\frac{d\varepsilon(t)}{dt} &= f(y^*) + f'(y^*) \cdot \varepsilon \\ &= 0 + f'(y^*) \cdot \varepsilon \\ &= f'(y^*) \cdot \varepsilon\end{aligned}$$

Cuja solução é dada por

$$\varepsilon(t) = c \cdot e^{f'(y^*) \cdot t}$$

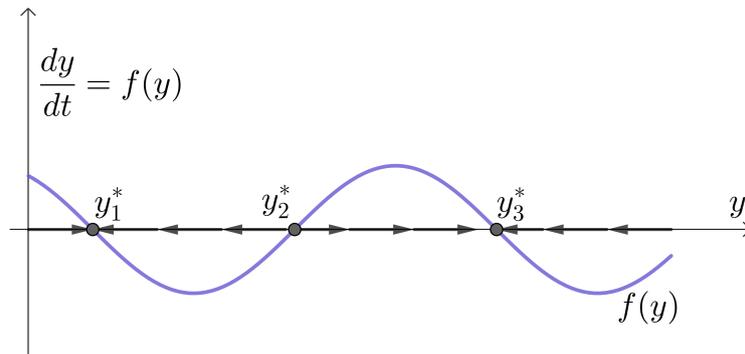
**Definição 8. Estabilidade das soluções de equilíbrio (MURRAY, 2003):** Se  $f'(y^*) > 0$ , então  $\varepsilon(t)$  cresce com o tempo, e dizemos que a solução de equilíbrio  $y^*$  é **localmente assintoticamente instável**. Se  $f'(y^*) < 0$ , então  $\varepsilon(t)$  decresce com o tempo, e dizemos que a solução de equilíbrio  $y^*$  é **localmente assintoticamente estável**. Se  $f'(y^*) = 0$ , então nada podemos afirmar.

Ao plotarmos o gráfico de  $\frac{dy}{dt} = f(y)$  com relação a  $y$ , verificamos as soluções de equilíbrio como as raízes da função não linear  $f(y)$ . Por exemplo, consideremos um caso genérico, em que  $\frac{dy}{dt} = f(y)$  possui as seguintes soluções de equilíbrio  $y_1^*$ ,  $y_2^*$  e  $y_3^*$ . O gradiente  $f'(y)$ , em cada solução de equilíbrio, determina então a sua estabilidade. Digamos que  $f'(y_1^*) < 0$ ,  $f'(y_3^*) < 0$  e, em contrapartida,  $f'(y_2^*) > 0$ ; então, as soluções  $y_1^*$  e  $y_3^*$  são localmente assintoticamente estáveis enquanto que  $y_2^*$  é localmente assintoticamente instável.

A figura (3) mostra a reta de fase desse exemplo; destacando as soluções de equi-

líbrio e a curva  $f(y)$ . Observamos, na reta de fase, os intervalos em  $y$  tais que  $f(y) > 0$  e  $f(y) < 0$ , que correspondem, respectivamente, aos intervalos em que  $f(y)$  é crescente ou decrescente. Assim, assinalamos setas no sentido crescente e decrescente de  $y$ , respectivamente, evidenciando quais são as soluções de equilíbrios estáveis e instáveis.

Figura 3 – Reta de fase de um exemplo genérico, com soluções de equilíbrio  $y_1^*$  e  $y_3^*$  estáveis e  $y_2^*$ , instável.



Fonte: da autora.

## 4 MODELOS MATEMÁTICOS PARA O COMPORTAMENTO POPULACIONAL DAS PALOMETAS

Neste capítulo apresentaremos algumas equações diferenciais ordinárias usualmente utilizadas para descrever o crescimento populacional de indivíduos, incluindo a dinâmica populacional de peixes. As equações de tempo contínuo são indicadas quando a reprodução das espécies são consideradas de fluxo contínuo, isto é, ocorrem em diferentes épocas do ano (MURRAY, 2003).

Os modelos apresentados são: de Malthus, de Verhulst, modelo de pesca de Gordon-Schaefer e, por fim, o modelo de pesca com Efeito Allee.

### 4.1 Modelo de Malthus

O primeiro modelo de crescimento populacional foi formulado pelo economista e matemático Thomas Malthus, em 1798, e propõe que o crescimento populacional, no instante  $t$ , se dá a uma taxa intrínseca de crescimento proporcional à população naquele instante de tempo.

Seja  $P(t)$  a população total de indivíduos no instante  $t$ , então a equação de Malthus é dada pela equação diferencial ordinária:

$$\frac{dP}{dt} = rP, \quad (12)$$

onde  $r = n - m$ , representa a taxa intrínseca de crescimento da população, dada pela diferença entre os nascimentos ( $n$ ) e mortes ( $m$ ) dos indivíduos.

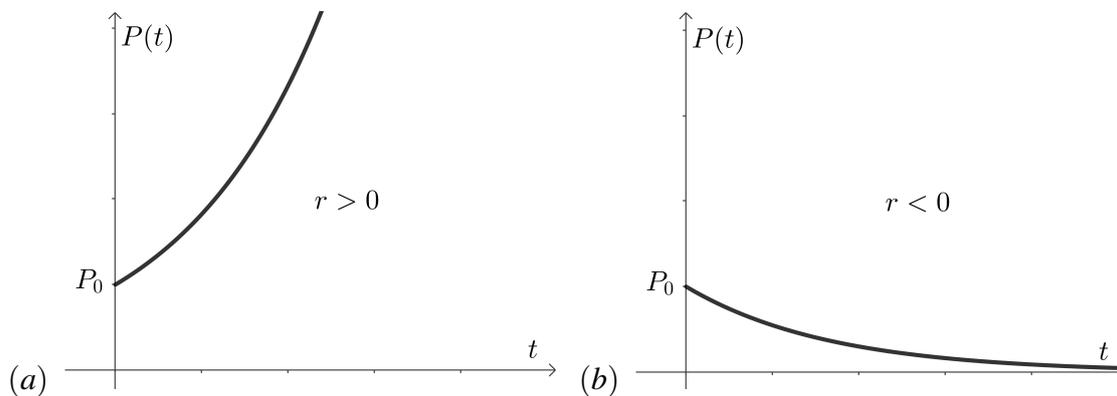
A solução da equação (12), condicionada à uma população inicial  $P(0) = P_0$ , é:

$$P = P_0 \cdot e^{rt_0}.$$

Notemos que se  $r > 0$ , a quantidade de indivíduos aumenta exponencialmente com o decorrer do tempo; enquanto que, se  $r < 0$ , a população decresce com o passar do tempo, tendendo à extinção. A figura (4) ilustra esse comportamento.

Considerando o modelo malthusiano para o caso das Palometas, podemos inferir que a população pode crescer rapidamente em um ambiente que forneça bons recursos, isto é, que tenha diversas espécies de peixes que sofrem predação por parte das Palome-

Figura 4 – Comportamento populacional malthusiano, para certa população  $P_0$  inicial, com: (a)  $r > 0$  e (b)  $r < 0$ .



Fonte: da autora.

tas, uma vez que elas não possuem seletividade alimentar. No entanto, a alta predação de outras espécies de peixes traz o desequilíbrio ambiental, diminuindo os recursos fornecidos pelo ambiente, e conseqüentemente, influenciando negativamente na população de Palometas.

De forma geral, modelo malthusiano projeta um crescimento exponencial para a população de indivíduos, o que não é considerado o mais adequado para aplicações reais, uma vez que o ambiente não fornece condições para que a população cresça ilimitadamente. Segundo Zill e Cullen (2001, p. 151), o modelo malthusiano pode ser considerado realístico para o crescimento de indivíduos em um intervalo de tempo curto.

## 4.2 Modelo de Verhulst

O matemático Pierre Verhulst propôs, em 1838, uma generalização do modelo de Malthus que leva em conta restrições ambientais, na tentativa de responder a questão “Quantos peixes um ecossistema realmente comporta?” (ZILL, 2016, p. xvii). O modelo de Verhulst é uma equação de crescimento logístico, onde a população cresce até um limite sustentável, ou seja, a taxa relativa do crescimento demográfico diminui com o aumento da população; tendendo a zero se uma dada população limite for alcançada.

O modelo de Verhulst, também chamado de modelo logístico, é dado pela equação diferencial ordinária:

$$\frac{dP}{dt} = rP \left( 1 - \frac{P}{k} \right), \quad (13)$$

com  $r > 0$  e  $k > 0$ , onde  $r \left( 1 - \frac{P}{k} \right)$  é a taxa intrínseca de crescimento. A equação está

condicionada à uma população inicial  $P(0) = P_0$ .

O que difere o modelo logístico do modelo malthusiano é o fator  $\left(1 - \frac{P}{k}\right)$ , que elimina a explosão demográfica. Este termo, faz com que a taxa de crescimento populacional torne-se zero quando a população  $P = k$  é atingida. O parâmetro  $k$  é a população máxima que pode ser sustentada pelo meio ambiente, também chamada de **capacidade de suporte**.

A equação (13) é uma EDO não-linear e para resolvê-la usamos o método de separação de variáveis, sendo assim, podemos escrever a equação (13) como:

$$\frac{1}{P\left(1 - \frac{P}{k}\right)} dP = r dt$$

usando a decomposição de frações parciais, temos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{P\left(1 - \frac{P}{k}\right)} &= \frac{A}{P} + \frac{B}{\left(1 - \frac{P}{k}\right)} \\ A\left(1 - \frac{P}{k}\right) + BP &= 1 \\ A - A\left(\frac{P}{k}\right) + BP &= 1 \\ P\left(B - \frac{A}{k}\right) + A &= 1 \end{aligned}$$

Temos que  $A = 1$  e  $B - \frac{A}{k} = 0$ , isto implica que  $B = \frac{1}{k}$ , logo:

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{P} + \frac{1}{k} \left(\frac{1}{1 - \frac{P}{k}}\right)\right] dP &= r dt \\ \left[\frac{1}{P} + \frac{1}{k - P}\right] dP &= r dt \end{aligned}$$

Integrando ambos os lados da igualdade,

$$\begin{aligned} \int \left[\frac{1}{P} + \frac{1}{k - P}\right] dP &= \int r dt \\ \ln|P| - \ln|k - P| &= rt + c_1 \\ \ln\left|\frac{P}{k - P}\right| &= rt + c_1 \end{aligned}$$

Tomando a exponencial em ambos os lados da igualdade, temos:

$$\frac{P}{k-P} = e^{rt+c_1} = c \cdot e^{rt}$$

Isolando a variável P:

$$P = k \cdot c \cdot e^{rt} - c \cdot P \cdot e^{rt}$$

$$P + c \cdot P \cdot e^{rt} = k \cdot c \cdot e^{rt}$$

$$P + c \cdot P \cdot e^{rt} = k \cdot c \cdot e^{rt}$$

$$P \cdot (1 + c \cdot e^{rt}) = k \cdot c \cdot e^{rt}$$

$$P(t) = \frac{k \cdot c \cdot e^{rt}}{1 + c \cdot e^{rt}}$$

Tomando a condição inicial  $P(0) = P_0$ , temos:

$$P(0) = \frac{k \cdot c}{1 + c} = P_0$$

$$k \cdot c = P_0(1 + c)$$

$$c \cdot (k - P_0) = P_0$$

$$c = \frac{P_0}{k - P_0}$$

Portanto, a solução da equação logística é:

$$\begin{aligned} P(t) &= \frac{kP_0e^{rt}}{(k-P_0) + P_0e^{rt}} \\ &= \frac{kP_0e^{rt}}{(k-P_0) + P_0e^{rt}} \cdot \frac{e^{-rt}}{e^{-rt}} \\ &= \frac{k \cdot P_0}{P_0 + (k - P_0)e^{-rt}}. \end{aligned}$$

A equação logística (13) pode ser reescrita na forma:

$$\frac{dP}{dt} = f(P) = rP - r\frac{P^2}{k}, \quad (14)$$

cujo segundo termo pode ser interpretado como competição intraespecífica, isto é, a disputa entre indivíduos de uma mesma espécie. O termo  $-P^2$  representa que o encontro entre indivíduos da mesma espécie diminui a taxa de crescimento da população.

No caso de peixes carnívoros, como as Palometas, interpretamos que durante seus

encontros pode ocorrer a predação intraespecífica, ou seja, as Palometas podem devorar umas às outras. Este fato promove a (auto)-regulação da população de Palometas.

Da equação do modelo, podemos verificar que:

- $\frac{dP}{dt} = f(P) > 0$ , significa que a população cresce com o passar do tempo;
- $\frac{dP}{dt} = f(P) < 0$ , significa que a população diminui ao longo do tempo;
- $\frac{dP}{dt} = f(P) = 0$ , indica que a população mantém-se constante.

Fazendo  $\frac{dP}{dt} = 0$ , isto é,  $rP\left(1 - \frac{P}{k}\right) = 0$ , obtemos as soluções de equilíbrio  $P_1 = 0$  e  $P_2 = k$ . Ao derivarmos a função logística, temos:

$$f'(P) = \frac{d}{dP} \left( rP - r\frac{P^2}{k} \right) = r - 2\frac{r}{k}P$$

Substituindo as soluções de equilíbrio, obtemos:

$$f'(P_1) = f'(0) = r, \text{ e}$$

$$f'(P_2) = f'(k) = r - 2\frac{r}{k}k = 2 - 2r = -r.$$

Considerando a condição de estabilidade,  $f'(P) < 0$ , obtemos as seguintes informações sobre a estabilidade das soluções de equilíbrio mostradas na tabela (1). Para que o modelo logístico faça sentido biológico, é necessário que  $r > 0$ , portanto, temos que  $P_1 = 0$  é instável e  $P_2 = k$  é estável (HASTINGS, 1997, p. 90).

Tabela 1 – Estabilidade das soluções de equilíbrio da equação logística.

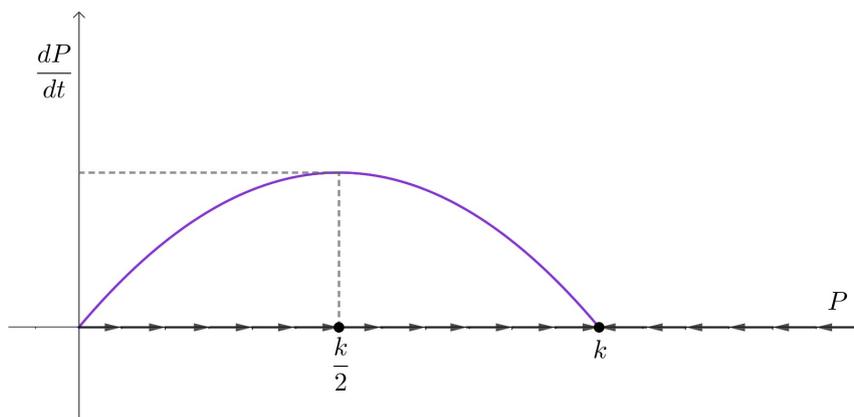
Soluções de Equilíbrio	$r < 0$	$r > 0$
$P_1 = 0$	Estável	Instável
$P_2 = k$	Instável	Estável

A figura (5) ilustra a reta de fase da equação logística, enquanto que a figura (6) mostra algumas curvas da solução da equação logística para diferentes condições iniciais  $P_0$ .

Considerando a população de Palometas, podemos observar que, quando a população inicial de indivíduos é pequena, menor que  $\frac{k}{2}$ , a espécie apresenta uma dificuldade em aumentar a sua população, mas passado certo período de tempo, a população aumenta tendendo a capacidade de suporte do meio. Já se considerarmos uma população inicial entre  $\frac{k}{2}$  e  $k$ , a tendência é que a população rapidamente aumente até a capacidade de suporte oferecido pelo ecossistema. No entanto, quando a população inicial de Palometas

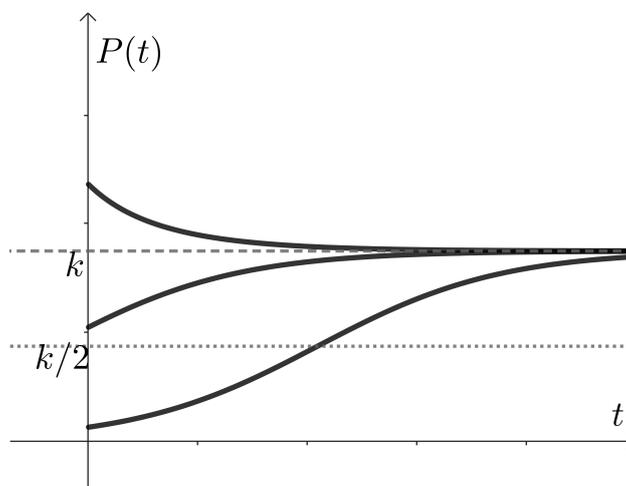
for maior que a capacidade de suporte  $k$ , ou seja, há uma superpopulação da espécie e o meio não oferece recursos suficientes, a população de Palometas diminui até a capacidade de suporte, seja por falta de alimentos, limitação espacial, competição intraespecífica, ou combinações destes.

Figura 5 – Reta de fase da equação logística.



Fonte: da autora.

Figura 6 – Evolução temporal da equação logística para diferentes valores iniciais.



Fonte: da autora.

O modelo de Verhulst pressupõe que a medida que a população diminui, os indivíduos têm melhor desempenho (de crescimento *per capita*). Conforme Zill (2016, p. xviii), o modelo logístico descreve satisfatoriamente o comportamento de populações com alto número de indivíduos; por exemplo, as Palometas ou, ainda, peixes apreciados para a pesca comercial, que são mantidos entre 20% a 50% da capacidade de suporte  $k$ .

Em contrapartida, quando estuda-se populações escassas ou em vias de extinção, o modelo logístico não é o mais adequado, pois é arriscado afirmar que os indivíduos continuam a ter melhor desempenho conforme a população diminui.

### 4.3 Modelo de Gordon-Schaefer

O modelo logístico não supõe a captura de indivíduos, como a pesca, por exemplo. Gordon-Schaefer (1948) propuseram uma modificação ao modelo de Verhulst, quando aplicado à população de peixes, que supõe uma taxa de retirada proporcional a quantidade de indivíduos (BOYCE e DIPRIMA, 2015, p. 134), ou seja, supõe-se que quanto maior for o número de peixes, mais fácil será pescá-los.

O modelo de pesca, proposto por Gordon-Schaefer, é descrito pela equação diferencial ordinária dada por:

$$\frac{dP}{dt} = f(P) = rP \left(1 - \frac{P}{k}\right) - \alpha P, \quad (15)$$

onde  $r > 0$ ,  $k > 0$  e  $\alpha > 0$ . O parâmetro  $\alpha$  representa a taxa de captura (ou esforço de pesca) e o termo  $-\alpha P$  representa a retirada/pesca de números de indivíduos (ALLEN, 1997, p. 238). A equação está condicionada à uma população inicial  $P(0) = P_0$ .

Considerando a população de Palometas e seu impacto negativo nos ecossistemas, em situações de superpopulação, a pesca predatória pode controlar a sua população. Matematicamente, buscamos descrever uma situação em que a taxa de retirada seja tão grande quanto possível, sem levar a espécie a extinção. Assim, podemos considerar uma aproximação da forma:

$$r \left(1 - \frac{P}{k}\right) \approx \alpha.$$

Buscando as soluções de equilíbrio da equação (15), temos:

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt} = 0 \implies P \left[ r \left(1 - \frac{P}{k}\right) - \alpha \right] &= 0 \\ P = 0 \quad \text{ou} \quad P &= k \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) \end{aligned}$$

Logo, as soluções de equilíbrio são:

$$P_1^* = 0 \quad \text{e} \quad P_2^* = k \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)$$

Para verificarmos a estabilidade das soluções de equilíbrio, fazemos:

$$f(P) = rP \left(1 - \frac{P}{k}\right) - \alpha P = rP - \frac{r}{k}P^2 - \alpha P$$

$$\implies f'(P) = r - 2\frac{r}{k}P - \alpha$$

Substituindo as soluções de equilíbrio, obtemos:

$$f'(P_1^*) = f'(0) = r - \alpha, \text{ e}$$

$$f'(P_2^*) = f' \left[ k \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) \right] = r - 2\frac{r}{k}k \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right) - \alpha$$

$$= r - 2(r - \alpha) - \alpha = r - 2r + 2\alpha - \alpha = \alpha - r$$

Considerando a condição de estabilidade,  $f'(P^*) < 0$ , obtemos as seguintes informações sobre a estabilidade das soluções de equilíbrio mostradas na tabela (2). Para que o modelo de Gordon-Schaefer faça sentido biológico, isto é, para que as Palometas não tendam à extinção, é necessário que  $r > \alpha$ , portanto, temos que  $P_1^* = 0$  é instável e  $P_2^* = k$  é estável.

Tabela 2 – Estabilidade das soluções de equilíbrio da equação de Gordon-Schaefer.

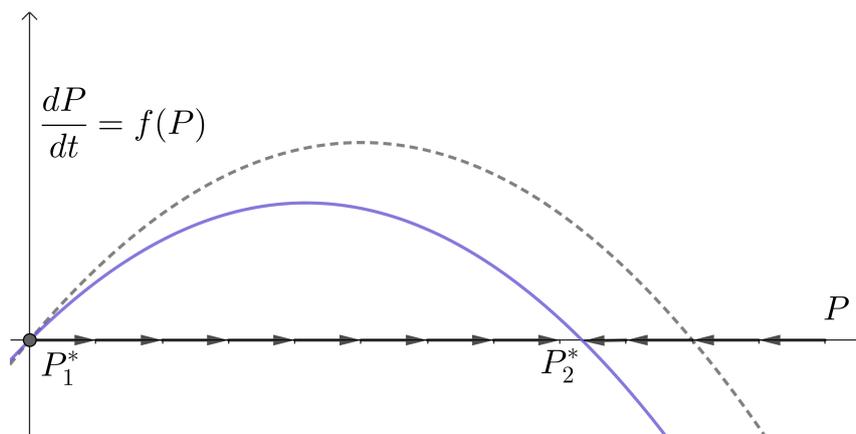
Soluções de Equilíbrio	$\alpha > r$	$r > \alpha$
$P_1^* = 0$	Estável	Instável
$P_2^* = k \left(1 - \frac{\alpha}{r}\right)$	Instável	Estável

A figura (7) ilustra a reta de fase da equação de Gordon-Schaefer, enquanto que a figura (8) mostra o comportamento das soluções de equilíbrio em função do parâmetro  $\alpha$ . O valor  $\alpha = r$  é chamado de ponto de bifurcação, onde ocorre uma mudança qualitativa no sistema.

A pesca predatória influencia na taxa de mortalidade das Palometas. Se  $\alpha < r$ , a população diminui, mas a espécie se ajusta e se estabelece em um novo estado de equilíbrio populacional, conforme a capacidade de suporte do meio. Se  $r \approx \alpha$ , a população começa a entrar em colapso, e, se  $\alpha > r$ , que ocorre quando a taxa de captura é maior do que a taxa de crescimento da população, a espécie tende à extinção. (MURRAY, 2003, p. 31).

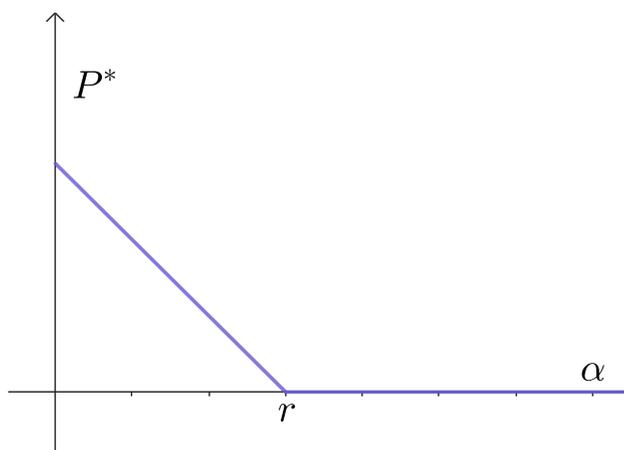
Consideramos, agora, uma situação na qual um pequeno número de Palometas invadem uma região externa ao seu *habitat* natural. Buscamos descobrir se a população aumentará nessa região ou tenderá a extinção. Essa situação pode ser descrita como um

Figura 7 – Reta de fase da equação Gordon-Schaefer.



Fonte: da autora.

Figura 8 – Diagrama de bifurcação da equação de Gordon-Schaefer.



Fonte: da autora.

Efeito Allee.

#### 4.4 Modelo de Pesca com Efeito Allee

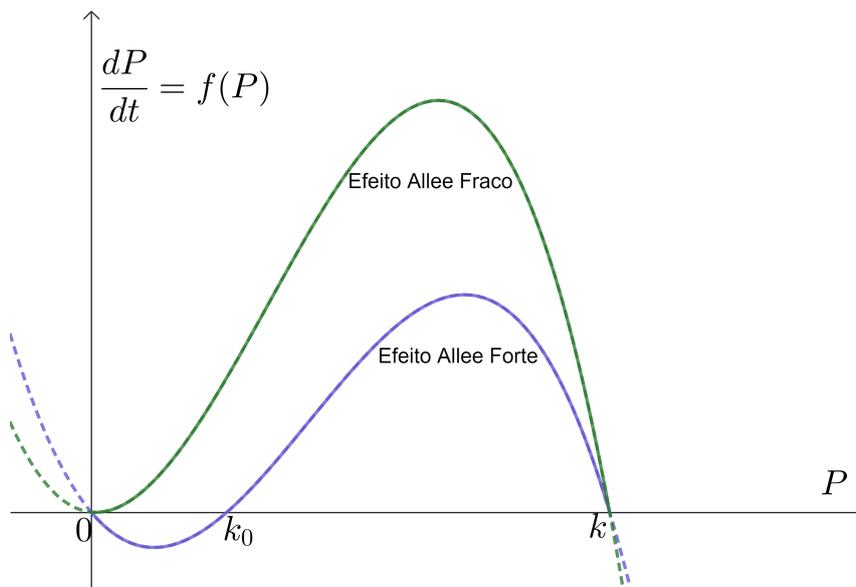
O Efeito Allee é uma característica que algumas espécies apresentam, em que a taxa de crescimento específica é crescente para densidades baixas (ALLEN, 1997). W. C. Allee (1885 – 1955), observou que certas espécies com número de indivíduos baixo não competiam entre si. Se a população é pequena, não há disputas acirradas por recursos, o que diminui a competição intraespecífica e assim, conseqüentemente, pode-se supor que a taxa de crescimento da espécie é uma função crescente de densidade.

O Efeito Allee pode ser definido como fraco ou forte. O Efeito Allee fraco garante que a população não vai a extinção, mas apresenta crescimento lento em baixas densida-

des. Já o Efeito Allee forte supõe que há um limiar crítico abaixo do qual a população vai à extinção. Chamamos  $k_0$  o limiar Allee ou limiar de extinção (MURRAY, 2011, p. 71).

A Figura 9 mostra a variação da população com relação ao número de indivíduos, considerando-se os dois tipos de Efeito Allee. A variação dos parâmetros da taxa intrínseca de crescimento da espécie determina se o Efeito Allee é fraco ou forte.

Figura 9 – Efeito Allee fraco e forte.



Fonte: da autora.

O modelo de pesca com Efeito Allee é adequado para descrever um cenário em que as Palometas invadem uma região da qual não são nativas. Essa invasão pode ser, por exemplo, em um afluente do rio Uruguai, em uma barragem com ligação direta com o rio Uruguai, ou ainda em outras bacias hidrográficas das proximidades.

Neste cenário, a invasão ocorre por um número baixo de Palometas, que busca sobreviver nesse novo ambiente, que possui recursos, como a diversidade de espécies de peixes para alimentação. No entanto, o número reduzido de indivíduos dificulta o crescimento populacional, e, além disso, supomos a pesca predatória com finalidade de controle, para que a invasão não desequilibre o ecossistema.

O modelo de pesca com Efeito Allee é uma equação diferencial ordinária dada por:

$$\frac{dP}{dt} = rP \left( \frac{P}{k_0} - 1 \right) \left( 1 - \frac{P}{k} \right) - \alpha P, \quad (16)$$

onde  $r > 0$ ,  $k_0 > 0$ ,  $k > 0$  e  $\alpha > 0$ , com  $k_0 < k$ . A equação está condicionada à uma população inicial  $P(0) = P_0$ .

Quando  $P(t) = k_0$ , dizemos que o tamanho da população está em um nível crítico.

Se a população diminuir, a taxa de crescimento da população se torna negativa, devido a um efeito Allee. Portanto, quando  $0 < P(t) < k_0$ , então temos que  $\frac{dP}{dt} < 0$ , e assim, a espécie vai à extinção.

Buscando soluções de equilíbrio da equação (16), temos:

$$\frac{dP}{dt} = 0 \implies rP \left( \frac{P}{k_0} - 1 \right) \left( 1 - \frac{P}{k} \right) - \alpha P = 0$$

Fazendo

$$P \cdot \left[ r \left( \frac{P}{k_0} - 1 \right) \left( 1 - \frac{P}{k} \right) - \alpha \right] = 0$$

Então,  $P = 0$  ou  $r \left( \frac{P}{k_0} - 1 \right) \left( 1 - \frac{P}{k} \right) - \alpha = 0$ . Para o segundo caso, temos:

$$\begin{aligned} \left( \frac{rP}{k_0} - r \right) \left( 1 - \frac{P}{k} \right) - \alpha &= 0 \\ \frac{rP}{k_0} - \frac{rP^2}{k_0k} - r + \frac{rP}{k} - \alpha &= 0 \\ -\frac{rP^2}{k_0k} + rP \left( \frac{1}{k_0} + \frac{1}{k} \right) - r - \alpha &= 0 \end{aligned}$$

Multiplicando todos os termos pelo fator  $\frac{-k_0k}{r}$ , temos:

$$P^2 - (k_0 + k)P + k_0k + \alpha \frac{k_0k}{r} = 0,$$

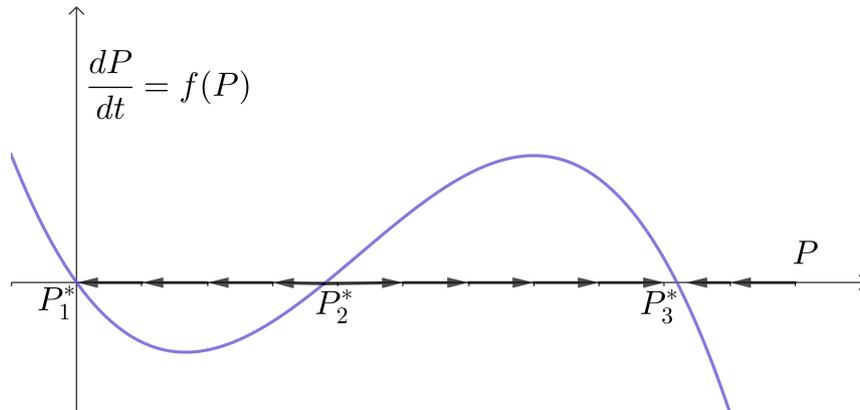
cuja solução é da forma

$$P = \frac{(k_0 + k) \pm \sqrt{(k_0 + k)^2 - 4 \cdot (k_0k + \alpha \frac{k_0k}{r})}}{2}.$$

Portanto, os pontos de equilíbrio são:

$$\begin{aligned} P_1^* &= 0, \\ P_2^* &= \frac{(k_0 + k) + \sqrt{(k_0 + k)^2 - 4 \cdot (k_0k + \alpha \frac{k_0k}{r})}}{2} \\ \text{e } P_3^* &= \frac{(k_0 + k) - \sqrt{(k_0 + k)^2 - 4 \cdot (k_0k + \alpha \frac{k_0k}{r})}}{2}. \end{aligned}$$

Figura 10 – Retas de fase da equação de pesca com Efeito Allee, satisfazendo a condição de existência  $\alpha < c$ .



Fonte: da autora.

Notemos que, para que ambos os pontos  $P_2$  e  $P_3$  sejam reais e distintos, é necessário que (SUN, 2016):

$$\begin{aligned} (k_0 + k)^2 - 4 \cdot \left( k_0 k + \alpha \frac{k_0 k}{r} \right) &> 0 \\ k_0^2 + 2k_0 k + k^2 - 4k - 0k - 4k_0 k \frac{\alpha}{r} &> 0 \\ k_0^2 - 2k_0 k + k^2 - 4k_0 k \frac{\alpha}{r} &> 0 \\ (k_0 - k)^2 > 4k_0 k \frac{\alpha}{r} &\implies \alpha < \frac{r(k_0 - k)^2}{4k_0 k} = c, \end{aligned}$$

chamada de condição de existência das soluções de equilíbrio  $P_{2,3}$ .

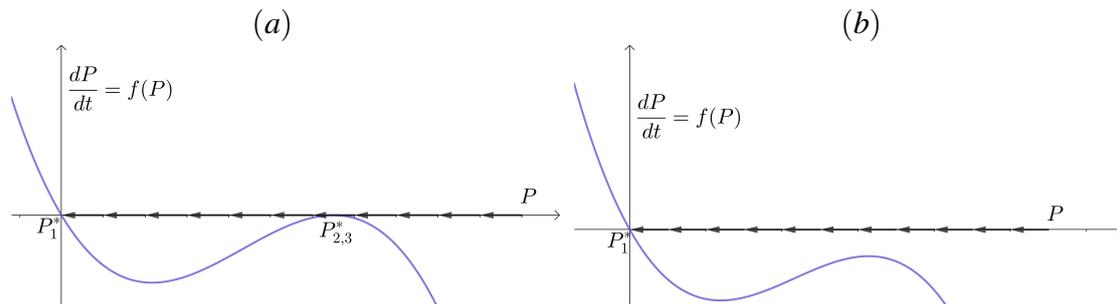
As figuras (10) e (11) ilustram diferentes retas de fase da equação de pesca com Efeito Allee, para variadas combinações dos parâmetros. Na figura (10), verificamos a existência das três soluções de equilíbrio, uma vez que satisfazemos a condição  $\alpha < c$ , encontrando  $P_1^*$  e  $P_3^*$  estáveis e  $P_2^*$ , instável.

Na figura 11.(a), consideramos  $\alpha = c$ , e neste caso, as soluções de equilíbrios  $P_2^*$  e  $P_3^*$  são repetidas, isto é,  $P_2^* = P_3^*$ , instáveis. Já figura 11.(b), consideramos  $\alpha > c$ , e neste caso, as soluções de equilíbrios  $P_2^*$  e  $P_3^*$  não existem, e a única solução de equilíbrio  $P_1^* = 0$  é estável, levando a população à extinção para qualquer população inicial considerada.

A figura (12) mostra o comportamento das soluções de equilíbrio em função do parâmetro de interesse  $\alpha$ . Na região (I), a solução de equilíbrio  $P_3^*$  (representado pela curva contínua) é estável e a população de Palometas tende a diminuir a medida que  $\alpha$  aumenta se aproximando da constante  $c$ .

A região (II) consiste exatamente do valor  $\alpha = c$ , onde as soluções  $P_2^*$  (representadas

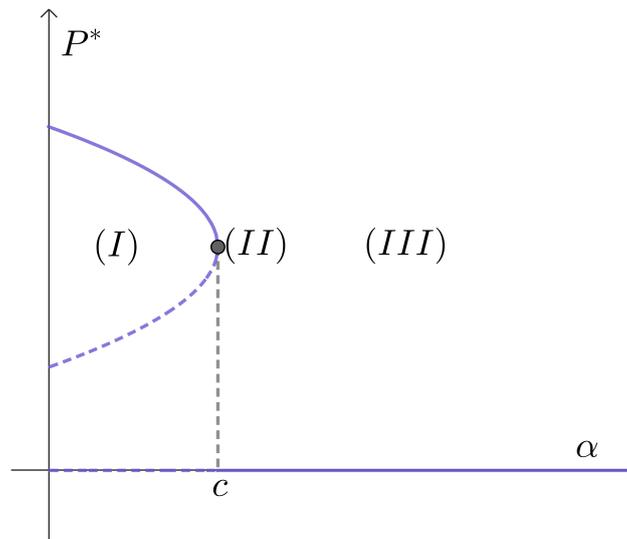
Figura 11 – Reta de fase da equação de pesca com Efeito Allee, quebrando a condição de existência, com (a):  $\alpha = c$  e (b):  $\alpha > c$ .



Fonte: da autora.

tado pela curva tracejada) e  $P_3^*$  se igualam. Aqui, ocorre uma catástrofe na população de Palometas, devido a alta taxa de pesca, e a população rapidamente decai a zero, indo à extinção. A região (III) contempla esse caso, em que  $\alpha > c$  e a população extingue-se (reta contínua em  $N^* = 0$ ).

Figura 12 – Diagrama de bifurcação da equação de pesca com Efeito Allee.



Fonte: da autora.

## 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A Palometa é uma espécie de peixe que tem potencial de causar desequilíbrios ambientais, prejuízos a pescadores e ameaças à biodiversidade aquática, tanto em locais onde é uma espécie nativa como em regiões invadidas.

Esta pesquisa entende que a superpopulação de Palometas pode gerar um grave problema ambiental, para isso, buscamos em modelos matemáticos já construídos analisar a dinâmica populacional desta espécie. Sendo estes modelos o de Malthus, de Verhulst, de Gordon-Schaefer e, por fim, o modelo de pesca com Efeito Allee; onde cada modelo analisado se adequa às situações diferentes.

O modelo de Malthus, propõe que o crescimento populacional, no instante  $t$ , se dá a uma taxa intrínseca de crescimento proporcional à população naquele instante de tempo. No caso das Palometas, podemos inferir que a população pode crescer rapidamente em um ambiente que forneça bons recursos, isto é, que tenha diversas espécies de peixes que sofrem predação por parte das Palometas, uma vez que elas não possuem seletividade alimentar.

No entanto, a alta predação de outras espécies de peixes traz o desequilíbrio ambiental, diminuindo os recursos fornecidos pelo ambiente, e conseqüentemente, influenciando negativamente na população de Palometas. Este modelo é considerado pouco realístico, porque há uma limitação, uma vez que ele projeta um crescimento exponencial para a população de indivíduos. No entanto, isto não é considerado adequado para aplicações reais a longo prazo, em razão de que o ambiente não fornece condições para que a população cresça ilimitadamente.

Já o modelo de Verhulst, é uma equação de crescimento logístico, onde a população cresce até um limite sustentável, ou seja, a taxa relativa do crescimento demográfico diminui com o aumento da população, tendendo a zero se uma dada população limite for alcançada.

O modelo pode ser interpretado como competição intraespecífica, isto é, a disputa entre indivíduos de uma mesma espécie, onde o encontro entre indivíduos da mesma espécie diminui a taxa de crescimento da população. Para as Palometas, interpretamos que durante seus encontros pode ocorrer a predação intraespecífica, ou seja, as Palometas podem devorar umas às outras. Este fato promove a (auto)-regulação da população de Palometas.

Este modelo descreve satisfatoriamente o comportamento de populações com alto

número de indivíduos, sendo adequado para descrever o comportamento das Palometas em locais onde ela é considerada espécie nativa, e que há uma superpopulação.

Também analisamos o modelo de Gordon-Schaefer. Este modelo, diferentemente do modelo de Verhult, supõe a captura de indivíduos; e no caso das Palometas, podemos interpretar esta captura como pesca predatória para fins de controle populacional das Palometas. Verificamos que quando a taxa de captura é menor do que a taxa de crescimento a espécie, a pesca predatória diminui a população de Palometas, mas ainda assim, a espécie se ajusta e se estabelece em um novo estado de equilíbrio populacional; já quando a taxa de captura é maior do que a taxa de crescimento da população, a espécie tende à extinção.

Por fim, trazemos o modelo de pesca de Gordon-Schaefer com Efeito Allee. O Efeito Allee é adequado para situações que envolvam baixo número de indivíduos. Aqui, descrevemos um cenário em que a Palometa é invasora, tentando sobreviver em um ambiente não-nativo, e ainda, no qual pode ocorrer a pesca predatória para fins de controle da população.

O Efeito Allee descreve uma dificuldade da espécie em aumentar a sua população quando em número reduzido de indivíduos. Considerando um certo limiar crítico, se a população de Palometas for maior que este limiar verificamos que, embora apresente um crescimento inicial lento, as Palometas conseguem se sobressair e crescer neste ambiente invadido. Já se a população de Palometas for menor que este limiar, a população de Palometas não se estabelecer nesta região invadida, indo à extinção.

Com a análise e interpretação dos modelos descritos neste trabalho, acreditamos ter esclarecido a questão norteadora da pesquisa "Quais são os modelos matemáticos que melhor descrevem o comportamento de crescimento populacional de palometas nos rios da fronteira oeste gaúcha?", considerando diferentes cenários para as Palometas.

Esperamos que as considerações aqui discutidas tragam à luz o problema ambiental que pode ser causado pelas Palometas, seja pela superpopulação ou pela invasão, visando incentivar o seu controle populacional na intenção de proporcionar melhorias econômicas e ambientais.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ALLEN, L. J. S. **An Introduction to mathematical biology**. Pearson Education, 2007. 365p.
- BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia**. 3 ed. Contexto, 2011. 389p.
- BEHR, E. R., SIGNOR, C. A. Distribuição e alimentação de duas espécies simpátricas de piranhas *Serrasalmus maculatus* e *Pygocentrus nattereri* (Characidae, *Serrasalminidae*) do rio Ibicuí, Rio Grande do Sul, Brasil. **Iheringia: Série Zoologia**, 98. 2008. DOI: S0073-47212008000400014
- BERTACO, V. A. The record and threats of the invasion of palometa *Serrasalmus maculatus* (Characiformes: *Serrasalminidae*) in the Patos Lagoon drainage, Southern Brazil. **Pap. Avulsos Zool**, 2023; v.63: e202363003. 17p.
- BOYCE, W. E.; DE PRIMA, R. C. **Equações Diferenciais Elementares e problemas de valores de contorno**. 10. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2015.
- EDELSTEIN-KESHET, L. **Mathematical Models in Biology**. New York: SIAM, 1988.
- FLORA, M. A. D. ; MASCHKE, F.; FERREIRA, C.C.; PEDRON, F. Biologia e Cultivo do Dourado (*Salminus brasiliensis*). **Acta Veterinaria Brasilica**. vol 4, n.1, 7-14 p. 2010. DOI: 10.21708/avb.2010.4.1.1492
- HASTINGS, A. **Population Biology Concepts and Models**. Springer, 1997. 227p.
- LOPES, D.; BARBOSA, T.; SEVERO-NETO, F.; STRIETMAN, M. PEIXE DA VEZ - *Serrasalmus maculatus* Kner, 1858. **Boletim Sociedade Brasileira de Ictiologia**, vol. 126. 2018.
- MALABARBA, L. R.; AZEVEDO, M. A.; BECKER, F. G. BERTACO, V. A. **Invasão de palometas no Rio Jacuí - as lagoas do litoral são as próximas?**. Departamento de Zoologia, UFRGS, 9 abr. 2021. Disponível em: <<https://www.ufrgs.br/peixesrs/2021/04/09/invasao-de-palometas-no-rio-jacui-as-lagoas-do-litoral-sao-as-proximas/>>. Acesso em: 20 nov. 2022.

MURRAY, J. D. **Mathematical Biology I: An Introduction**. 3ed. Springer Verlag, 2003. 551p.

QUEROL, M. V.; PESSANO, E. F. C.; BRASIL, L. G.; CHIVA, E. Q.; GRALHA, T. S. **Tecnologia de Reprodução de Peixes em sistemas de cultivo: indução hormonal através do extrato hipofisario da Palometa**. Uruguaiana: Universidade Federal do Pampa, 2013. 81p.

SOUZA, F.B.; SOARES, M.G.; PRESTES, L. Estimativa de parâmetros de crescimento, relação peso-comprimento e mortalidade da Piranha-Amarela, *Serrasalmus spilopleura* (Kner, 1860) do Complexo Lago Grande, Manacapuru, Amazonas, Brasil. **XVIII Jornada de Iniciação Científica**, Manaus, 2009. Disponível em: <<https://repositorio.inpa.gov.br/handle/1/3431>>. Acesso em: 21 nov. 2022.

SUN, G.-Q. Mathematical modeling of population dynamics with Allee effect. **Nonlinear Dynamics**. n. 85. 2016. DOI:10.1007/s11071-016-2671-y.

VILLARES, G. A. J. Alimentação de *Serrasalmus maculatus* (Kner,1858) (Characiformes; *Serrasalminidae*) no trecho inferior bacia do rio Sorocaba, São Paulo, Brasil. **Acta Scientiarum. Biological Sciences**, v. 30, n. 3, p. 267-273, 2008. DOI: 10.4025/actasci-biolsci.v30i3.5011

WILDNER, D. D.; GRIERC, H.; GRASSIOTTO, I. Q. Female germ cell renewal during the annual reproductive cycle in Ostariophysians fish. **Theriogenology**, v. 79, n. 4, p. 709–724, 2013. DOI: 10.1016/j.theriogenology.2012.11.028

ZILL, D. G. **Equações Diferenciais com Aplicações em Modelagem**. 3. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2016.

ZILL, D. G.; CULLEN, M. R. **Equações Diferenciais**. 3. ed. São Paulo: Pearson Makron Books, 2001.