

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO PAMPA  
CURSO DE MATEMÁTICA - LICENCIATURA**

**ANNY ELISE SANTOS NUNES**

**INTRODUÇÃO À TEORIA DE GRAFOS E APLICAÇÕES**

**Itaqui  
2022**

**ANNY ELISE SANTOS NUNES**

## **INTRODUÇÃO À TEORIA DE GRAFOS E APLICAÇÕES**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Matemática-Licenciatura da Universidade Federal do Pampa, como requisito parcial para a obtenção do Título de Licenciada em Matemática.

Orientadora: Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Elisa Regina Cara

Coorientadora: Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Daiane C. Soares

**Itaqui  
2022**

ANNY ELISE SANTOS NUNES

## INTRODUÇÃO À TEORIA DE GRAFOS E APLICAÇÕES

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Matemática-Licenciatura da Universidade Federal do Pampa, como requisito parcial para a obtenção do Título de Licenciada em Matemática.

Trabalho de Conclusão de Curso defendido e aprovado em: 12 de agosto de 2022.

Banca examinadora:



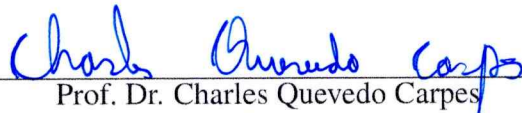
---

Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Elisa Regina Cara  
Orientadora



---

Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Daiane Campara Soares  
Universidade Federal do Pampa



---

Prof. Dr. Charles Quevedo Carpes  
Universidade Federal do Pampa

Ficha catalográfica elaborada automaticamente com os dados fornecidos  
pelo(a) autor(a) através do Módulo de Biblioteca do  
Sistema GURI (Gestão Unificada de Recursos Institucionais) .

NA615ii Nunes, Anny Elise Santos

Introdução à Teoria de Grafos e Aplicações / Anny Elise  
Santos Nunes.

53 p.

Trabalho de Conclusão de Curso(Graduação)-- Universidade  
Federal do Pampa, MATEMÁTICA, 2022.

"Orientação: Elisa Regina Cara".

1. Teoria de Grafos. 2. Problemas Clássicos. 3.  
Aplicações. 4. Teoria de Redes. 5. Centralidade. I. Título.

Dedico este trabalho a mim pelo que sou e realizo. E ao meu eu do futuro por tudo que serei e realizarei.

Este é apenas o primeiro passo.

## AGRADECIMENTOS

Aos meus pais, Nilton César e Cláudia, pelo amor inexaurível e apoio incondicional aos meus sonhos.

À minha irmã, Tayná, por existir e ser quem é na minha vida.

À minha avó, Rosa Amélia, pelo amor e devoção dedicados a mim.

Ao meu avô, Epaminondas – minha maior saudade – pelos incríveis momentos compartilhados.

Aos amigos que mantiveram minha lucidez durante a graduação. Em especial, a Leonardo Ferreira – meu par –.

Às minhas orientadoras, professoras Elisa Regina Cara e Daiane Campara Soares, pela oportunidade, assistência, atenção, dedicação e amizade demonstradas durante todo o período de orientação.

Ao matemático e engenheiro de *software*, Guilherme, pelas ideias e orientação.

Ao professor, Alisson Darós dos Santos, pelo incentivo à pesquisa e escrita científica.

À professora, Patrícia Pujól Goulart Carpes, a quem eu admiro e me inspiro devido a práxis pedagógica.

Ao professor, Charles Quevedo Carpes, pela participação na banca examinadora.

À UNIPAMPA, pelos professores, pelos funcionários, pelos colegas, pelos amigos, pela infraestrutura e ambiente favoráveis ao desenvolvimento da minha identidade discente e docente.

## RESUMO

O presente trabalho tem como foco uma introdução à Teoria de Grafos, apresentando definições e resultados importantes, bem como aplicações no contexto da cidade de Itaqui-RS e em âmbito mais geral. Além disso, abordamos alguns problemas clássicos como o Problema das Pontes de Königsberg e Problema das Quatro Cores. Por fim, desenvolvemos três aplicações: 1. Problema do Menor Caminho, na qual encontramos o menor caminho entre a UNIPAMPA e o Porto de Itaqui-RS através da utilização do Algoritmo de Dijkstra. 2. Roteamento de Veículos, na qual analisamos o processo de coleta de lixo realizado em Itaqui-RS. 3. Teoria de Redes: Rede de Coautoria, onde analisamos a rede de coautoria de um grupo de pesquisa considerando a Centralidade de seus elementos.

**Palavras-chave:** Teoria de Grafos. Problemas Clássicos. Aplicações. Teoria de Redes. Centralidade.

## ABSTRACT

The present work focuses on an introduction to Graph Theory, presenting important definitions and results, as well as applications in the context of the city of Itaqui-RS and in a more general scope. In addition, we address some classic problems such as the Königsberg Bridges Problem and the Four Colors Problem. Finally, we developed three applications: 1. Shortest Path Problem, in which we find the shortest way between UNIPAMPA and the Port of Itaqui-RS through the use of Dijkstra's Algorithm. 2. Vehicle Routing, in which we analyze the process of garbage collection carried out in Itaqui-RS. 3. Network Theory: Co-authorship Network, where we analyzed the co-authorship network of a research group considering the Centrality of its elements.

**Keywords:** Graph Theory. Classic Problems. Applications. Network Theory. Centralities.



## LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Ilustração das Pontes de Königsberg. ....	10
Figura 2	Exemplo de grafo e seus elementos.....	14
Figura 3	Exemplos de grafos.....	15
Figura 4	Exemplo de grafo com laços, arestas múltiplas e vértice isolado.....	15
Figura 5	Exemplo de grafo com vértices de graus diferentes. ....	16
Figura 6	Exemplo de cadeia.....	17
Figura 7	Exemplos de trilhas.....	17
Figura 8	Exemplos de caminho.....	18
Figura 9	Exemplos de ciclo.....	18
Figura 10	Exemplos de grafos completos: $K_3$ , $K_5$ e $K_7$ . ....	19
Figura 11	Exemplo de grafo conexo (1) e desconexo (2). ....	19
Figura 12	Exemplo de grafo regular.....	20
Figura 13	Ilustração dos grafos G e H. ....	22
Figura 14	Ilustração estilizada das Pontes de Königsberg. ....	23
Figura 15	Ilustração das Pontes de Königsberg por Euler. ....	24
Figura 16	Modelagem do Problema das Pontes de Königsberg via Grafos.....	24
Figura 17	Exemplos de grafo planar e grafos planos.....	27
Figura 18	Exemplo de grafo não-planar.....	27
Figura 19	Modelagem de um mapa arbitrário por um grafo planar. ....	27
Figura 20	Mapa da Fronteira Oeste do Rio Grande do Sul.....	28
Figura 21	Modelagem da Fronteira Oeste do Rio Grande do Sul via Grafos. ....	29
Figura 22	Modelagem colorida da Fronteira Oeste do Rio Grande do Sul via Grafos...30	
Figura 23	Mapa colorido da Fronteira Oeste do Rio Grande do Sul. ....	31
Figura 24	Quilometragem dos trajetos entre a UNIPAMPA e o Porto de Itaqui. ....	34
Figura 25	Qualidade dos trajetos entre a UNIPAMPA e o Porto de Itaqui. ....	34
Figura 26	Modelagem dos trajetos UNIPAMPA-PORTO via Grafos em KM X QUALI.35	
Figura 27	Modelagem dos trajetos UNIPAMPA-PORTO via Grafos em MENOR KM x QUALI.....	37
Figura 28	Mapa do município de Itaqui-RS.....	38
Figura 29	Setores de Coleta. ....	39
Figura 30	Trajeto Bairro-Centro com malha quadriculada completa. ....	40
Figura 31	Modelagem da rede de coautoria via grafos no CentiBiN.....	44
Figura 32	Modelagem da rede de coautoria via grafos no <i>Graph Online</i> .....	44

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1	Graus dos vértices do grafo ilustrado na Figura 5.....	16
Tabela 2	Descrição dos locais escolhidos .....	33
Tabela 3	Parâmetros de qualificação do asfalto. ....	33
Tabela 4	Quilometragem (KM) X Qualificação (QUALI).....	36
Tabela 5	Setores de coleta, dias e turnos.....	38
Tabela 6	Grupo de pesquisa .....	43
Tabela 7	Centralidade de Grau.....	45
Tabela 8	Centralidade de Aproximação .....	45
Tabela 9	Centralidade de Estresse.....	46
Tabela 10	Centralidade de Intermediação .....	46

## SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO .....</b>	<b>10</b>
<b>2 DEFINIÇÕES E RESULTADOS IMPORTANTES SOBRE GRAFOS .....</b>	<b>14</b>
<b>2.1 Definições Introdutórias .....</b>	<b>14</b>
<b>2.2 Tipos Especiais de Grafos.....</b>	<b>18</b>
<b>2.3 Principais Resultados .....</b>	<b>20</b>
<b>3 ALGUNS PROBLEMAS CLÁSSICOS DE GRAFOS.....</b>	<b>23</b>
<b>3.1 Problema das Pontes de Königsberg .....</b>	<b>23</b>
<b>3.2 Problema das Quatro Cores.....</b>	<b>25</b>
<b>4 APLICAÇÕES DA TEORIA DE GRAFOS.....</b>	<b>32</b>
<b>4.1 Problema do Menor Caminho .....</b>	<b>32</b>
<b>4.2 Roteamento de Veículos.....</b>	<b>37</b>
<b>4.3 Redes Sociais e Grafos .....</b>	<b>41</b>
4.3.1 Rede de Coautoria.....	43
<b>5 CONSIDERAÇÕES FINAIS .....</b>	<b>48</b>
<b>REFERÊNCIAS .....</b>	<b>50</b>

## 1 INTRODUÇÃO

O presente trabalho tem como foco uma introdução à Teoria de Grafos, ramo da Matemática Discreta que surgiu no século XVIII, quando o matemático Leonhard Euler<sup>1</sup> publicou um artigo intitulado *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis* (Solução de um problema pertinente à Geometria de situação, conforme a tradução de Lopes (2020, p. 24)), no qual elaborou e resolveu, com uma abordagem brilhante, “O problema das Pontes de Königsberg”, ilustradas na Figura 1.

Figura 1 – Ilustração das Pontes de Königsberg.



Fonte: Biggs, Lloyd e Wilson (1998, p. 2)

Segundo Lopes (2020, p. 23-24), o problema das Pontes de Königsberg é “frequentemente citado em livros de história de matemática e de matemática recreativa como o problema fundador [...] da teoria dos grafos”. A justificativa para este reconhecimento é a solução proposta por Euler, pois nesta, ele criou e utilizou estratégias que, posteriormente, motivaram alguns dos principais conceitos, resultados e teoremas relacionados à Teoria de Grafos que conhecemos e estudamos atualmente.

Essa contribuição científica de Euler, em 1736, torna a estagnação que ocorreu no campo da Teoria de Grafos nos próximos cem anos ainda mais incompreensível. Afinal, foi apenas a partir do século XIX que renomados cientistas como o físico alemão Gus-

<sup>1</sup>Leonhard Euler (1707-1783), aclamado como o matemático mais prolífico de todos os tempos. Para saber mais, ver James (2002, p. 1-8).

tav Kirchhoff e o matemático britânico Arthur Cayley começaram a utilizar conceitos e resultados da Teoria de Grafos a fim de aprimorar suas pesquisas em temáticas como circuitos elétricos e química orgânica, o que certamente contribuiu para o desenvolvimento da Teoria (BOAVENTURA NETTO, 2006).

Tendo em vista este cenário nada abundante, a publicação do primeiro livro completo sobre a Teoria de Grafos ocorreu somente no século XX, mais especificamente, em 1936, pelo matemático húngaro Denés König e intitulado *Theorie Der Endlichen Und Unendlichen Graphen* (Teoria dos Grafos Finitos e Infinitos). Uma reimpressão foi publicada nos Estados Unidos apenas em 1950, e sobre isso, Harary (1979, p. 5, tradução nossa) declara “Quando me interessei pela teoria dos grafos em setembro de 1950, este era o único livro disponível sobre o assunto”. Em síntese, essa obra de König foi o primeiro passo para a formalização da Teoria de Grafos.

O panorama histórico exposto até aqui, torna possível afirmar que a Teoria de Grafos, é indubitavelmente recente. Atualmente, seu desenvolvimento vem ocorrendo, principalmente, a partir do impulso de aplicações relacionadas a problemas práticos da sociedade contemporânea, como por exemplo: o Problema do Menor Caminho, o Problema Chinês do Carteiro, o Problema do Caixeiro Viajante, o Problema de Conexão de Peso Mínimo e o Problema das Quatro Cores. Para mais detalhes, ver Harary (1969), Jurkiewicz (2007) e Sá e Rocha (2012).

Mais recente ainda que a Teoria de Grafos temos a Teoria de Redes que será abordada em nossa última aplicação. A Teoria de Redes é, de acordo com Borba (2013, p.1), “a área do conhecimento que investiga a estrutura de uma rede a fim de obter informações importantes sobre seus elementos e suas interações”. Historicamente, a Teoria de Redes foi desenvolvida baseando-se parcialmente na Teoria de Grafos, portanto, também tem origem nas Ciências Exatas a partir das contribuições científicas de matemáticos, químicos e físicos. Entretanto, nas últimas décadas esta teoria vem tendo grande destaque nas Ciências Humanas, em áreas como Psicologia e Sociologia (HIGGINS E RIBEIRO, 2018).

Em se tratando de Teoria de Redes, podemos destacar algumas contribuições importantes: Wellman (1999) apresenta a fundamentação teórica da Análise Estrutural de Redes. Wellman (2001 e 2006) e Watts (2006) apresentam a Análise de Redes Sociais através de dois aspectos: O primeiro aspecto é focado na relação estrutural da rede com o grupo social. O segundo foco estaria no fato de que um elemento poderia ser compreendido não apenas através dos grupos (redes) a que ele pertence, mas também, através das

posições que ele assume nestas redes. Nos últimos anos, a atenção tem sido direcionada a análise de Redes Complexas, sejam sociais - Watts (2003), Newman (2004), Adamic e Adar (2004) ou redes em um aspecto geral - Barabási (2003). Na perspectiva abordada atualmente, os trabalhos recentes buscam desenvolver modelos, a fim de explicar características e propriedades das redes.

Para além dos problemas específicos já citados, Lucchesi (1979, p. 19) afirma: “A teoria dos grafos tem sido utilizada em áreas tão díspares do conhecimento humano como análise de circuitos elétricos, pesquisa operacional, teoria da computação, análise numérica, química orgânica, física, topologia, genética e psicologia”. Devido às diversas possibilidades de aplicação, sabendo que os grafos podem ser considerados como uma conveniente ferramenta na análise de situações-problema, o objetivo geral deste trabalho é apresentar os conceitos básicos da Teoria de Grafos, bem como aplicações tanto no contexto da cidade de Itaqui-RS, quanto num âmbito mais geral.

O tema escolhido para este trabalho justifica-se, principalmente, por todas as argumentações expostas anteriormente, assim como pelo fato de que a Teoria de Grafos não é usualmente trabalhada nos componentes curriculares dos cursos de graduação em Matemática - Licenciatura. E ainda, cabe salientar que a Teoria de Grafos é uma das linhas de pesquisa em ascensão nos cursos de pós-graduação na área da Matemática Aplicada.

Para a construção da maioria dos grafos presentes neste trabalho foi utilizada a ferramenta *Graph Online* <<https://graphonline.ru/pt/>> que possui diversas funcionalidades visando a criação e facilitando a visualização de grafos no plano. Inicialmente, este projeto foi desenvolvido na Rússia, mas atualmente é disponibilizado em 11 idiomas e possui código aberto. A escolha desse recurso educacional tecnológico se justifica pela facilidade com que o mesmo pode ser utilizado na construção de grafos e também pelas diversas possibilidades que a ferramenta apresenta.

Para que o objetivo geral seja atingido, o trabalho é apresentado em capítulos como descritos a seguir. No segundo capítulo, são apresentadas as definições e resultados mais importantes da teoria, necessários para o desenvolvimento da segunda parte do trabalho. No capítulo três são apresentados e resolvidos dois problemas clássicos da Teoria de Grafos, que são o Problema das Pontes de Königsberg e o Problema das Quatro cores. No capítulo quatro, são apresentadas aplicações da Teoria de Grafos. A primeira aplicação é o Problema do Menor Caminho que foi adaptado para o contexto da cidade de Itaqui-RS. Em seguida, é apresentada uma proposta de problema envolvendo o Roteamento de Veículos, mais especificamente, a coleta de lixo na cidade de Itaqui-RS.

Para finalizar, é apresentado um problema da Teoria de Redes denominado Rede de Coautorias. Finalmente, dedicamos as considerações finais para dissertar sobre a importância da realização deste trabalho e perspectivas futuras.

## 2 DEFINIÇÕES E RESULTADOS IMPORTANTES SOBRE GRAFOS

Neste capítulo apresentaremos a **Teoria de Grafos** fundamentada em definições e resultados. Tal estudo é baseado em uma pesquisa bibliográfica realizada nos livros de Harary (1969), Clark e Holton (1996), Chartrand e Zhang (2012) e Diestel (2016).

### 2.1 Definições Introdutórias

**Definição 2.1.1.** Denominamos *vértices* de um grafo, e denotamos por  $V(G)$  a um conjunto  $V$  não vazio e finito de pontos.

**Definição 2.1.2.** Denominamos *arestas* de um grafo, e denotamos por  $A(G)$  a uma família  $A$  finita de conexões (segmentos) entre os vértices.

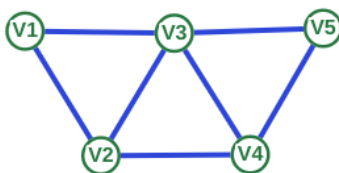
**Definição 2.1.3.** Denominamos *vértices adjacentes* quando esses são conectados por uma aresta. E nos referimos a essa aresta como uma **aresta incidente** aos respectivos vértices.

**Definição 2.1.4.** Um **grafo**  $G$  é a estrutura formada por um par  $(V, A)$ , onde  $V$  representa o conjunto de vértices de  $G$  e  $A$  representa a família de arestas de  $G$ . E denotamos por  $G(V, A)$ .

**Definição 2.1.5.** A **ordem**  $n$  de um grafo  $G$  é dada pela cardinalidade do conjunto de vértices. Além disso, o **tamanho**  $m$  de um grafo  $G$  é dado pela cardinalidade da família de arestas.

A Figura 2 a seguir ilustra essas definições através de um grafo  $G$  qualquer.

Figura 2 – Exemplo de grafo e seus elementos



Fonte: Autora.

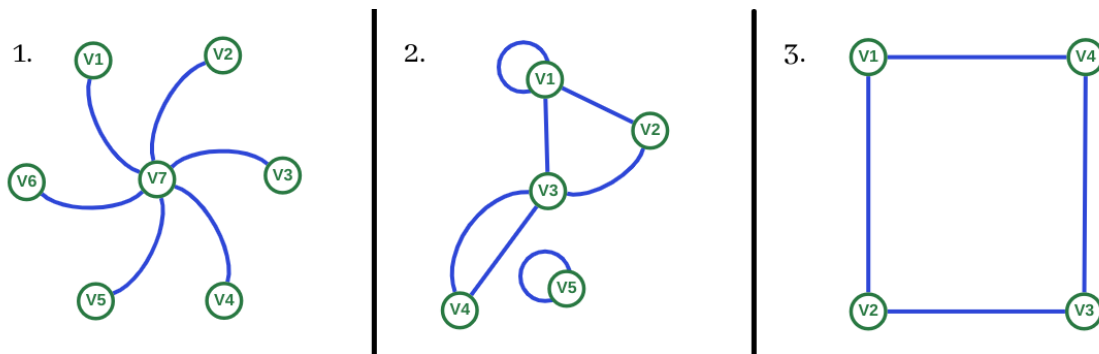
No grafo  $G(V, A)$  ilustrado na Figura 2, temos  $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ ,  $A(G) = \{v_1v_2, v_1v_3, v_2v_3, v_2v_4, v_3v_4, v_3v_5, v_4v_5\}$ . Seus *vértices adjacentes* são:  $v_1$  e  $v_2$ ,  $v_1$  e  $v_3$ ,  $v_2$  e  $v_3$ ,  $v_2$  e  $v_4$ ,  $v_3$  e  $v_4$ ,  $v_3$  e  $v_5$ ,  $v_4$  e  $v_5$ . E *arestas incidentes* são:  $v_1v_2$ ,  $v_1v_3$ ,  $v_2v_3$ ,  $v_2v_4$ ,  $v_3v_4$ ,



$v_3v_5$ ,  $v_4v_5$ . Por fim, o grafo possui ordem  $n = 5$  (número de vértices) e tamanho  $m = 7$  (número de arestas).

Na Figura 3, apresentamos mais alguns exemplos de grafos arbitrários.

Figura 3 – Exemplos de grafos.



Fonte: Autora.

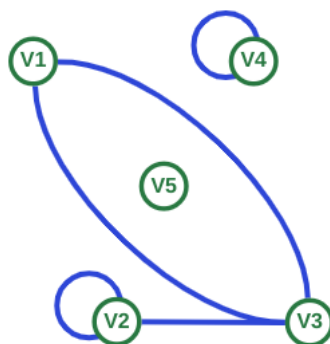
**Definição 2.1.6.** Denominamos *laço* à aresta que conecta um vértice a ele mesmo.

**Definição 2.1.7.** Denominamos *arestas múltiplas* às arestas distintas incidentes ao mesmo par de vértices.

**Definição 2.1.8.** Denominamos *vértice isolado* o vértice que não possui arestas incidentes.

Na Figura 4, ilustramos as definições anteriores através de um exemplo de grafo arbitrário.

Figura 4 – Exemplo de grafo com laços, arestas múltiplas e vértice isolado.



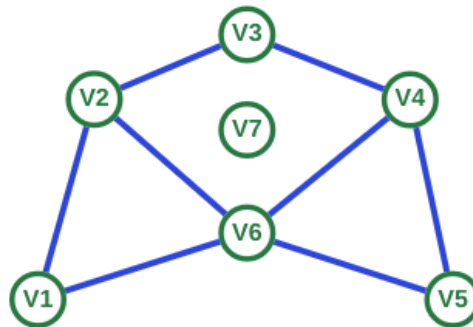
Fonte: Autora.

No grafo representado na Figura 4, os vértices  $v_2$  e  $v_4$  possuem laços; o par de vértices adjacentes  $v_1$  e  $v_3$  possui arestas múltiplas  $v_1v_3$ . Observe ainda que  $v_5$  não possui arestas que incidem sobre ele, portanto, é um vértice isolado.

No que segue, apresentamos mais algumas definições da Teoria de Grafos. Para isso, consideremos  $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_{k-1}, v_k\}$  e  $A(G) = \{v_i v_j\}$ , com  $i, j \in \{1, \dots, k\}$  vértices e arestas de um grafo  $G(V, A)$ , respectivamente.

**Definição 2.1.9.** Denominamos **grau do vértice**  $v_i$ , com  $1 \leq i \leq k$ , o número de arestas incidentes a  $v_i$ , denotando por  $d_G(v_i)$  ou simplesmente  $d(v_i)$ .

Figura 5 – Exemplo de grafo com vértices de graus diferentes.



Fonte: Autora.

Tabela 1 – Graus dos vértices do grafo ilustrado na Figura 5.

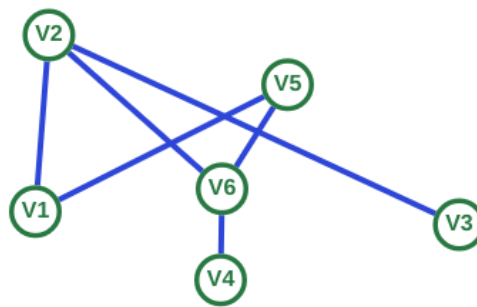
Vértices	Grau dos vértices
$v_1$	$d(v_1) = 2$
$v_2$	$d(v_2) = 3$
$v_3$	$d(v_3) = 2$
$v_4$	$d(v_4) = 3$
$v_5$	$d(v_5) = 2$
$v_6$	$d(v_6) = 4$
$v_7$	$d(v_7) = 0$

Fonte: Autora.

**Definição 2.1.10.** Denominamos **cadeia** uma sequência alternada, não vazia e finita de vértices e arestas, passando por suas respectivas arestas incidentes, de modo que os vértices consecutivos na sequência sejam adjacentes. Se  $v_1 = v_k$ , definimos **cadeia fechada**. Caso contrário, com  $v_1 \neq v_k$ , denomina-se **cadeia aberta**.

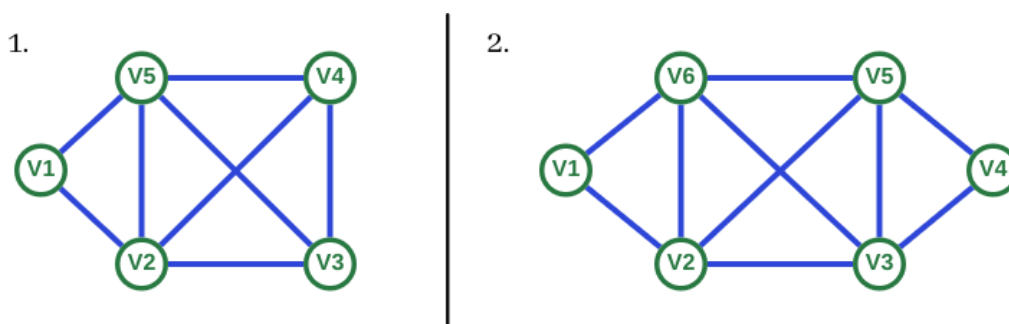
**Definição 2.1.11.** Denominamos **trilha** à cadeia em que as arestas são percorridas distintamente. Se  $v_1 = v_k$ , definimos **trilha fechada** ou **circuito**. Do contrário, com  $v_1 \neq v_k$ , definimos **trilha aberta**.

Figura 6 – Exemplo de cadeia.



Fonte: Autora.

Figura 7 – Exemplos de trilhas.



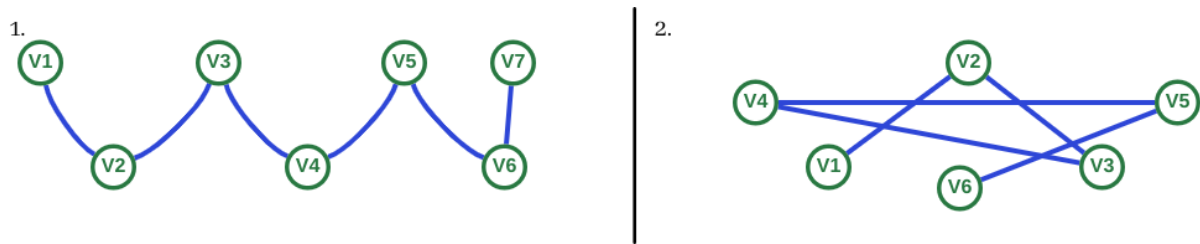
Fonte: Autora.

No primeiro grafo ilustrado na Figura 7, temos uma **trilha aberta** se, e somente se iniciamos o percurso no vértice  $v_3$  e terminamos em  $v_4$  ou iniciamos em  $v_4$  e terminamos em  $v_3$ . Já no segundo, temos uma **trilha fechada (circuito)** independentemente do vértice inicial (final).

**Definição 2.1.12.** Denominamos **caminho** à cadeia em que os vértices são percorridos distintamente. E se nenhum dos vértices pertencentes a uma cadeia é repetido (formando assim um caminho), então nenhuma aresta é repetida. Logo, todo caminho é uma trilha.

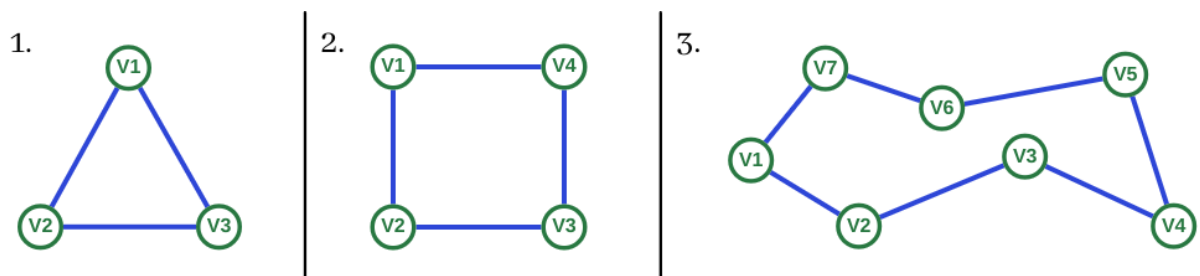
**Definição 2.1.13.** Denominamos **ciclo** a um circuito que não repete vértices, exceto  $v_1$  e  $v_k$ .

Figura 8 – Exemplos de caminho.



Fonte: Autora.

Figura 9 – Exemplos de ciclo.



Fonte: Autora.

Além das definições supracitadas, serão acrescentados ainda outras definições e resultados para, em seguida, tratarmos de uma breve explanação sobre dois dos problemas clássicos de grafos, a saber: Problema das Pontes de Königsberg e Problema das Quatro Cores. E por fim, realizarmos três aplicações da Teoria de Grafos voltadas para os âmbitos da cidade de Itaqui-RS e Teoria de Redes, respectivamente.

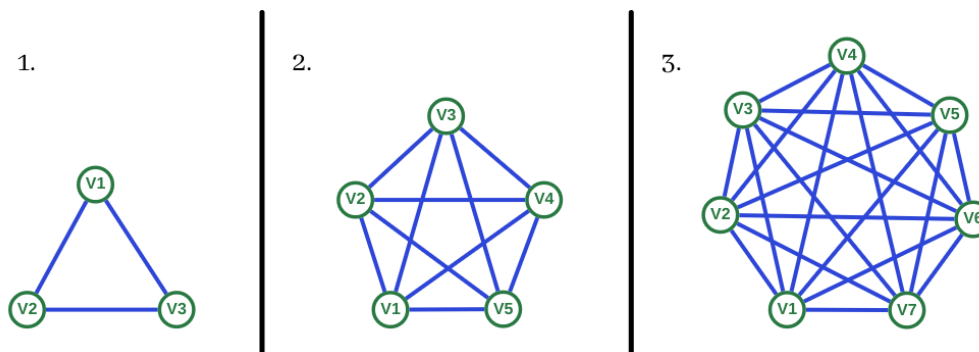
## 2.2 Tipos Especiais de Grafos

**Definição 2.2.1.** Denominamos **grafo direcionado** o grafo no qual as arestas possuem direção, ou seja, seus vértices adjacentes representam pontos de partida e chegada.

**Definição 2.2.2.** Denominamos **grafo simples** o grafo não direcionado que não possui laços nem arestas múltiplas.

**Definição 2.2.3.** Denominamos **grafo completo** e denotamos por  $K_n$  o grafo simples com  $n$  vértices no qual todos e quaisquer pares de vértices são adjacentes.

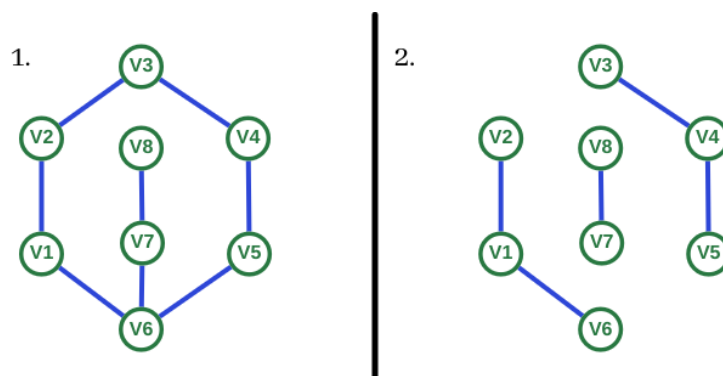
Figura 10 – Exemplos de grafos completos:  $K_3$ ,  $K_5$  e  $K_7$ .



Fonte: Autora.

**Definição 2.2.4.** Denominamos **grafo conexo** se existir pelo menos uma trilha entre cada par de vértices do grafo. Caso contrário, chamamos de **grafo desconexo**.

Figura 11 – Exemplo de grafo conexo (1) e desconexo (2).

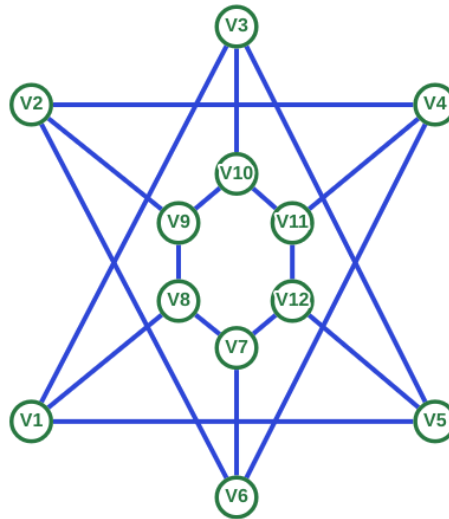


Fonte: Autora.

**Definição 2.2.5.** Denominamos **grafo regular** de grau  $d(v_i)$  (ou  $d(v_i)$ -regular) o grafo no qual todos os seus vértices  $(v_1, v_2, \dots, v_k)$  possuem o mesmo grau  $d(v_i)$ .

**Definição 2.2.6.** Denominamos **grafo euleriano** o grafo no qual é possível encontrar pelo menos um circuito para ser percorrido. Em outras palavras, se pudermos percorrer cada aresta, uma e uma só vez, partindo de um vértice e retornando para ele (veja Figura 7, grafo 2). Se o grafo não é euleriano, mas possui uma trilha aberta para ser percorrida, denominamos **grafo semieuleriano** (veja Figura 7, grafo 1).

Figura 12 – Exemplo de grafo regular.



Fonte: Autora.

## 2.3 Principais Resultados

**Proposição 2.3.1.** *Para todo grafo  $G$  de tamanho  $m$ , temos que:*

$$\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2 \cdot m$$

*Isto é, a soma dos graus dos vértices de um grafo  $G$  é sempre o dobro do seu tamanho.*

*Prova.* Ao contabilizar os graus dos vértices de  $G$  devemos observar que estamos contando toda e qualquer aresta de  $G$  **duas** vezes, uma vez para cada extremidade (vértice). Logo, o somatório dos graus dos vértices de  $G$  é igual ao dobro do tamanho de  $G$ .  $\square$

**Corolário 2.3.1.** *Todo Grafo  $G$  possui um número par de vértices de grau ímpar.*

*Prova.* Suponhamos, por um momento, que  $G$  possui um número ímpar de vértices de grau ímpar. E, se assim fosse, a soma dos graus resultaria em um número ímpar. Mas, pela Proposição 2.3.1, sabemos que a soma dos graus é o dobro do número de arestas e, portanto, um número par. Logo, obtemos uma contradição e concluímos assim a demonstração do resultado.  $\square$

**Lema 2.3.1.** *Seja  $G$  um grafo no qual o grau de todos os vértices é ao menos 2. Então  $G$  contém um ciclo.*

*Prova.* Se  $G$  contém laços e/ou arestas múltiplas, não há o que provar, pois  $G$  já contém pelo menos um ciclo. Consideramos, portanto, apenas grafos simples. Sem perda de

generalidade, vamos iniciar nossa trilha fechada em um vértice qualquer. Seguindo a trilha pelos seus vértices adjacentes, ou visitamos um vértice pela primeira vez e assim, podemos continuar; ou chegamos a um vértice já visitado e assim, produzimos um ciclo. Como o número de vértices é finito, o lema está provado.  $\square$

**Teorema 2.3.1 (Teorema de Euler).** *Todo grafo conexo  $G$  é euleriano se, e somente se, todos os seus vértices possuem grau par.*

*Prova.* ( $\implies$ ) Suponhamos que  $G$  seja um grafo euleriano. Seja  $C$  um circuito em  $G$ . Cada vez que o circuito passa por um vértice de  $G$ , percorre também duas arestas distintas, uma para entrar e outra para sair. Logo, o grau de todo e qualquer vértice de  $G$  deve ser obrigatoriamente **par**.

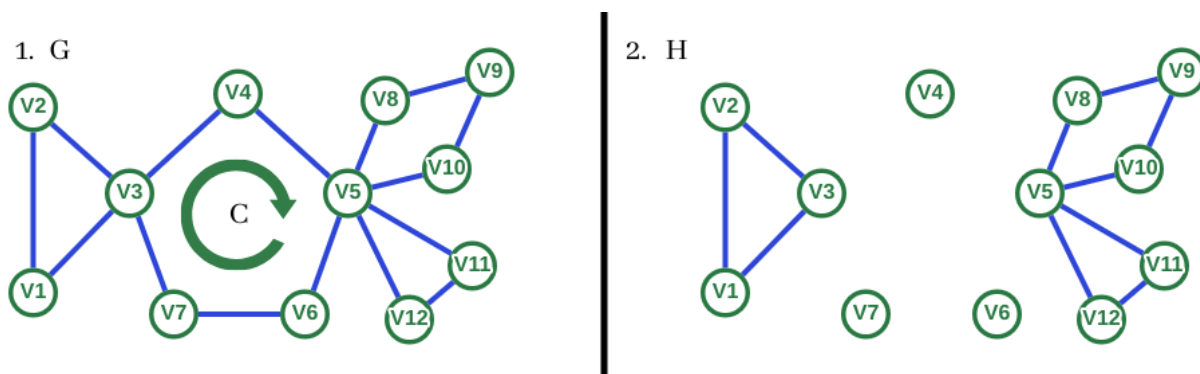
( $\impliedby$ ) Suponhamos que  $G$  seja um grafo conexo e que todos os seus vértices tenham grau par. Se no grafo  $G$  não existem arestas, ou seja  $m = 0$ , o teorema fica provado por vacuidade.

Seja  $m > 0$ . Como, por hipótese,  $G$  é um grafo conexo e, além disso,  $G$  possui apenas vértices de grau par, podemos concluir que  $d(v) \geq 2$ , para todo  $v \in V(G)$ . Logo, pelo Lema 2.3.1,  $G$  contém um ciclo  $C$ .

- Se  $C$  percorre todas as arestas de  $G$ , então temos um grafo euleriano e o Teorema está provado.
- Se  $C$  não percorre todas as arestas de  $G$ , vamos utilizar indução finita sobre o tamanho  $m$  do grafo  $G$  para mostrar que  $G$  é euleriano.

Vamos admitir agora a seguinte **Hipótese de Indução:** Todo grafo conexo  $G$  com  $k < m$  arestas, em que todos os vértices possuam grau par, é um grafo euleriano.

Como  $C$  não percorre todas as arestas de  $G$ , consideremos então um grafo  $H$  no qual retiramos todas as arestas de  $C$  do grafo  $G$ . Dessa forma, todos os vértices de  $H$  são os mesmos do grafo  $G$  e, conseqüentemente, possuem grau par. Considerando  $k$  o tamanho do grafo  $H$ , temos que  $k < m$ . Observe também que o grafo  $H$  não é necessariamente conexo então a hipótese de indução será utilizada para cada componente conexa de  $H$ . Concluimos assim (recursivamente, se necessário), pela hipótese de indução, que cada componente conexa do grafo  $H$  é um grafo euleriano. Observe a Figura 13.

Figura 13 – Ilustração dos grafos  $G$  e  $H$ .

Fonte: Autora.

Ademais, pela conexidade de  $G$ , cada componente de  $H$  tem ao menos um vértice em comum com  $C$ . Então, unindo cada grafo euleriano (oriundo de cada componente conexa de  $H$  pela hipótese de indução) com  $C$ , construímos um novo grafo euleriano.  $\square$

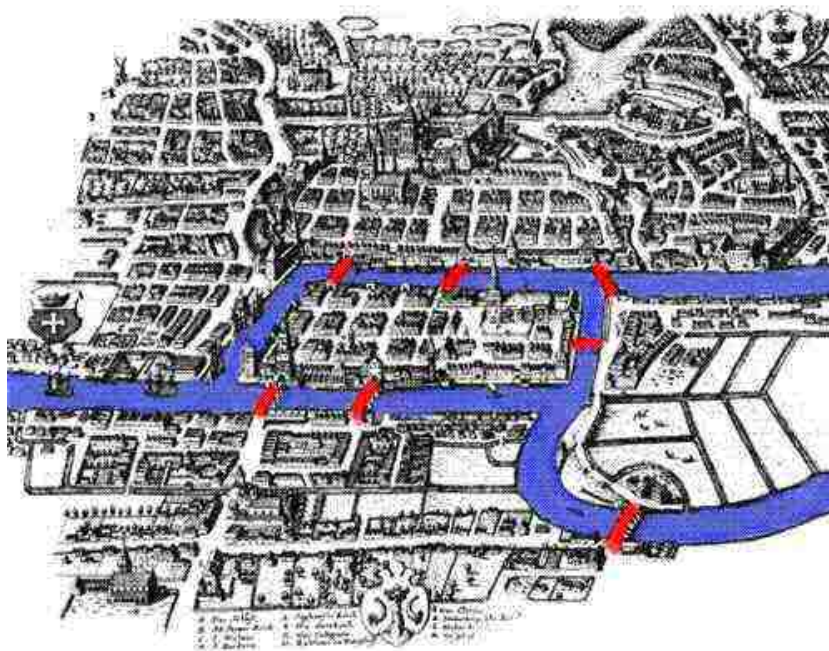


### 3 ALGUNS PROBLEMAS CLÁSSICOS DE GRAFOS

#### 3.1 Problema das Pontes de Königsberg

No século XVIII, Leonhard Euler solucionou “O problema das Pontes de Königsberg”. A cidade de Königsberg localizada na antiga Prússia (atual Kaliningrado, na Rússia), continha a ilha denominada *der Kneiphof*, que era ligada aos bairros da cidade através de sete pontes construídas sobre o rio Pregel. Observe na Figura 14 uma ilustração:

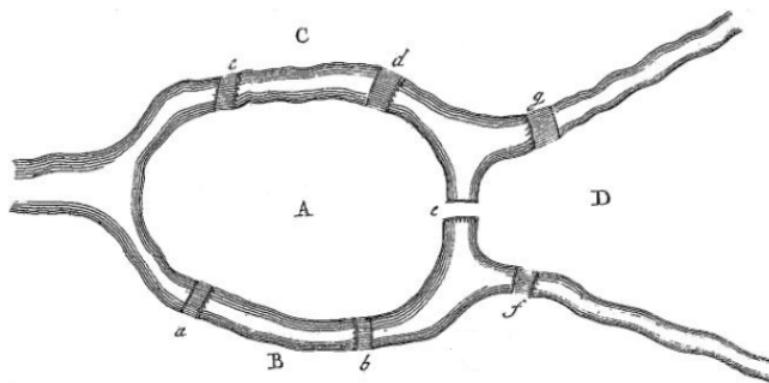
Figura 14 – Ilustração estilizada das Pontes de Königsberg.



Fonte: Disponível em: <<http://www.mat.uc.pt/~alma/escolas/pontes/>>

Considerando essa situação geográfica, os moradores da cidade de Königsberg viveram durante muitos anos à sombra da seguinte questão: é possível fazer um passeio por todas as regiões da cidade de modo que cada ponte seja percorrida uma e uma só vez? Alguns dos moradores negavam, outros simplesmente duvidavam, mas nenhum morador afirmou que esse trajeto era realizável. E a partir dessas informações, Euler reformulou o problema com generalidade: é possível (ou não) passar sobre cada ponte, uma e uma só vez, quaisquer que sejam a figura do rio e seus respectivos ramos distribuídos pela cidade e o número de pontes sobre ele? Para resolver esse problema, Euler desenhou a seguinte ilustração representando o rio Pregel e as Pontes de Königsberg:

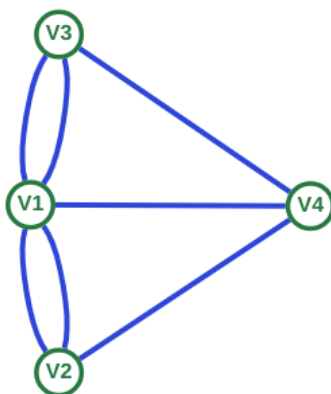
Figura 15 – Ilustração das Pontes de Königsberg por Euler.



Fonte: Biggs, Lloyd e Wilson (1998, p. 3)

Empregando a Teoria de Grafos, podemos modelar este problema através do grafo ilustrado na Figura 16, no qual os vértices correspondem às regiões da cidade de Königsberg e as arestas correspondem às sete pontes localizadas sobre o Rio Pregel.

Figura 16 – Modelagem do Problema das Pontes de Königsberg via Grafos.



Fonte: Autora.

Os resultados construídos na seção 2.3, principalmente o Teorema 2.3.1, permitem-nos responder a questão proposta pelos moradores da cidade de Königsberg e Euler. Em suma: a resposta é negativa, pois não existe um circuito a ser percorrido no grafo representado na Figura 16. Tal resposta justifica-se pelo fato de que todos os seus vértices possuem grau ímpar, conseqüentemente, não satisfazem o Teorema 2.3.1.

### 3.2 Problema das Quatro Cores

O problema clássico apresentado nessa subseção teve origem no século XIX, em 1852, quando Francis Guthrie se propôs a colorir os condados do mapa da Inglaterra de modo que dois condados vizinhos não tivessem a mesma cor. Após perceber um determinado padrão, neste e em outros mapas, Francis conjecturou que é possível colorir com no máximo quatro cores qualquer mapa de modo que condados com fronteira comum tenham cores distintas. Porém, Francis não conseguiu elaborar uma prova que validasse tal conjectura. Por isso, Frederick Guthrie, seu irmão mais novo, foi autorizado a compartilhar a conjectura com seu professor, o matemático e lógico britânico Augustus De Morgan.

A partir desses fatos, o agora conhecido como Teorema das Quatro Cores nasceu. Vejamos agora um pouco do histórico em busca de uma prova para esse resultado. Começamos por 1879, quando Alfred Bray Kempe divulgou uma “prova” completa para o Teorema das Quatro Cores que, após ser estudada criteriosamente por diversos matemáticos, foi refutada por Percy John Heawood em 1890, quando este notou uma falácia que invalidou a demonstração de Kempe. E, de acordo com Biggs et al. (1998, p. 94), a prova de Kempe “é provavelmente a prova falaciosa mais famosa em toda a Matemática”.

Já no século XX, no ano de 1976, exatamente 124 anos após a Conjectura das Quatro Cores proposta por Guthrie, os matemáticos Kenneth Appel e Wolfgang Haken apresentaram uma prova do Teorema das Quatro Cores construída com o auxílio de um *IBM System/360*. Assim que a notícia desse êxito foi propagada, um *frisson* começou, obrigando muitos pesquisadores, professores e estudantes da Ciência Matemática a pausarem suas atividades para verificar por si próprios os processos empregados e veracidade da nova demonstração. Mas esse *frisson* durou pouco. Terminou tão logo todos descobriram que a demonstração era baseada em mais de mil horas de cálculos realizados por computadores de alta performance da época (Sousa, 2001).

Ainda citando Sousa (2001, p. 10) “hoje em dia a validade da demonstração é aceita na generalidade da comunidade matemática, mas continua a ser polêmica”. Considerando essa controvérsia, muitos matemáticos seguem buscando demonstrações para esse Teorema. Devido a essa busca, em 1994, Paul D. Seymour, Neil Robertson, Daniel P. Sanders e Robin Thomas divulgaram uma prova para o Teorema das Quatro Cores também baseada na utilização de computadores, mas relativamente mais simples e com notável redução no tempo de execução.

Atualmente, no século XXI, em 2005, Georges Gonthier apresentou uma nova prova para o Teorema das Quatro Cores totalmente verificada pelo assistente de provas *Coq v7.3.1*. Esta prova é amplamente baseada na prova mista matemática/computacional apresentada por Robertson e seus colaboradores em 1994 mas contém contribuições originais, removendo os dois elos mais fracos da prova: a verificação manual de argumentos e a verificação manual de que *scripts*/programas de computadores – desenvolvidos especificamente para a solução deste problema – não contenham erros (de programação, lógica, compilação, etc.).

Contudo, para a área mais formal da Matemática, a Matemática Pura, provas realizadas com auxílio de recursos que não só a mente humana, em determinados contextos, são passíveis de contestação. Assim sendo, uma demonstração analítica para este Teorema segue em aberto!

Uma curiosidade que podemos destacar é que, embora o problema das quatro cores tenha sido descoberto no processo de coloração de um mapa real, raramente é utilizado (ou mesmo mencionado) em livros de cartografia. Visto que, usualmente, a maior preocupação dos cartógrafos é colorir mapas, principalmente políticos, de forma equilibrada, de modo que nenhuma cor ganhe destaque. Logo, se eles utilizam quatro, cinco ou mais cores, é indiferente sob suas perspectivas.

A fim de compreendermos melhor esse problema clássico, seguem algumas definições:

**Definição 3.2.1.** *Denominamos **grafo planar** o grafo que admite representação(ões) no plano de modo que não haja cruzamento de arestas, exceto nos vértices aos quais elas são incidentes. Caso contrário, denomina-se **grafo não-planar**.*

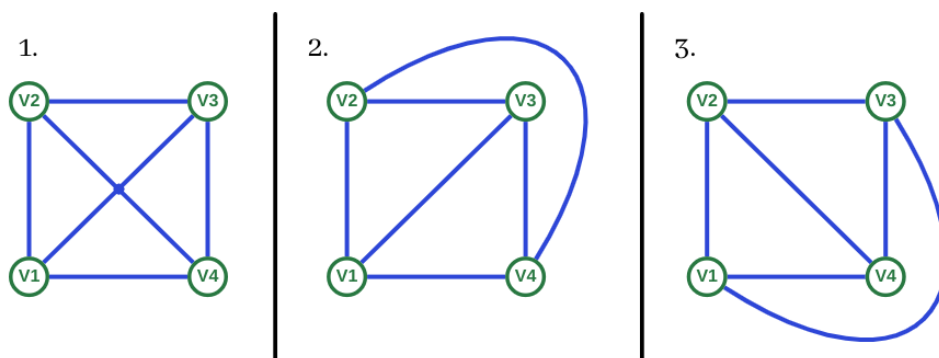
**Definição 3.2.2.** *Denominamos **grafo plano** às distintas representações no plano de um grafo planar.*

**Definição 3.2.3.** *Denominamos **número cromático** e denotamos por  $\chi(G)$  o menor número de cores necessárias para colorir distintamente todos os vértices adjacentes de um grafo.*

No primeiro grafo ilustrado na Figura 17, temos um grafo planar  $K_4$ . Já no segundo e terceiro grafos temos dois de seus grafos planos, respectivamente.

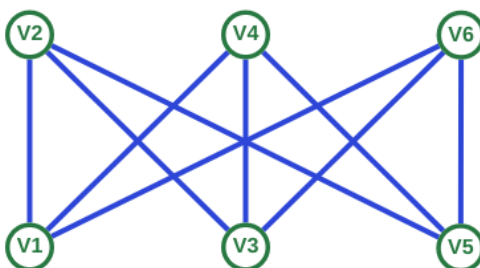
O grafo ilustrado na Figura 18 não admite representações no plano de modo que não haja interceptação entre arestas.

Figura 17 – Exemplos de grafo planar e grafos planos.



Fonte: Autora.

Figura 18 – Exemplo de grafo não-planar.



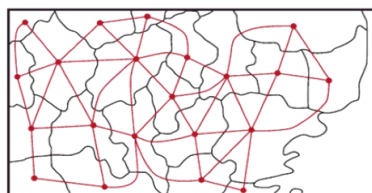
Fonte: Autora.

**Teorema 3.2.1 (Teorema das Quatro Cores).** *Todo grafo simples e planar possui número cromático  $\chi(G) \leq 4$ .*

*Prova.* Ver Gonthier, G. (2005). □

Ao colorirmos qualquer mapa e, mesmo em outros contextos de coloração de vértices, podemos empregar o Teorema 3.2.1 para garantir que utilizaremos no máximo quatro cores. Note que, em geral, para problemas envolvendo coloração de mapas, por exemplo, utilizamos da seguinte modelagem: Vértices correspondem a países/estados da região analisada. Já as arestas correspondem as fronteiras comuns entre essas localidades.

Figura 19 – Modelagem de um mapa arbitrário por um grafo planar.



Fonte: SÁ, C. C.; ROCHA, J. (2012).

No que segue, apresentamos um problema de coloração de mapas voltado para o contexto da Fronteira Oeste do Rio Grande do Sul e sua solução, obtida através da utilização de um algoritmo.

**PROBLEMA:** Qual o menor número de cores necessárias para colorir o mapa da Fronteira Oeste do Rio Grande do Sul de modo que cidades com fronteira comum tenham cores distintas?

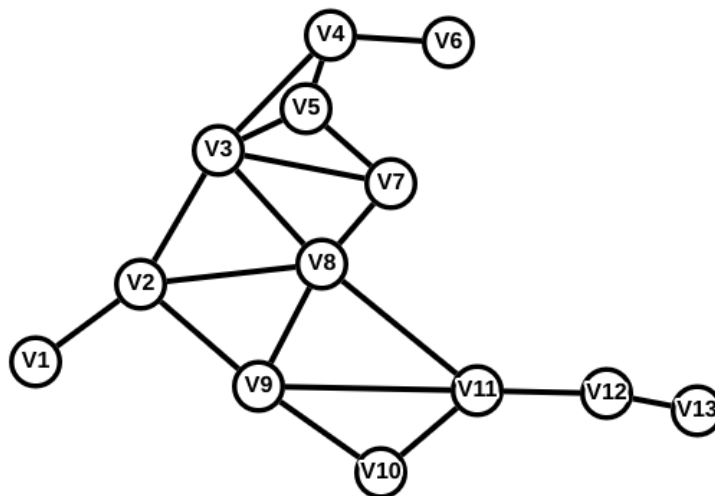
Figura 20 – Mapa da Fronteira Oeste do Rio Grande do Sul.



Fonte: Autora.

**MODELAGEM DO PROBLEMA:** Os vértices representam as cidades que compõem a Fronteira Oeste do Rio Grande do Sul. Já as arestas representam as fronteiras comuns entre essas cidades.

Figura 21 – Modelagem da Fronteira Oeste do Rio Grande do Sul via Grafos.



Fonte: Autora.

**ALGORITMO:** Considerando os conjuntos  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_{k-1}, v_k\}$  e  $C = \{c_1, c_2, \dots, c_{k-1}, c_k\}$  como vértices e cores possíveis para colorir um grafo  $G$ , respectivamente. Podemos criar o seguinte algoritmo:

- **Passo 1** – Determinar o grau  $d(v)$  de cada vértice do grafo e listar os vértices em ordem decrescente com relação ao grau. Caso existam vértices com o mesmo grau, eles podem ser listados aleatoriamente.
- **Passo 2** – Associar a cor  $c_1$  ao primeiro vértice listado no *Passo 1*, ao próximo vértice da lista que não seja adjacente a este primeiro vértice e, sucessivamente, para cada vértice que não seja adjacente a nenhum outro vértice previamente colorido com  $c_1$ .
- **Passo 3** - Associar a cor  $c_2$  ao próximo vértice da lista que ainda não esteja colorido (conforme a ordem dos graus) e, sucessivamente, ao próximo vértice da lista que não seja adjacente aos vértices para os quais foi atribuída a cor  $c_2$  e que ainda não tenha sido colorido.
- **Passo 4** – Continuar o processo repetindo o *Passo 3* até que todos os vértices estejam coloridos.

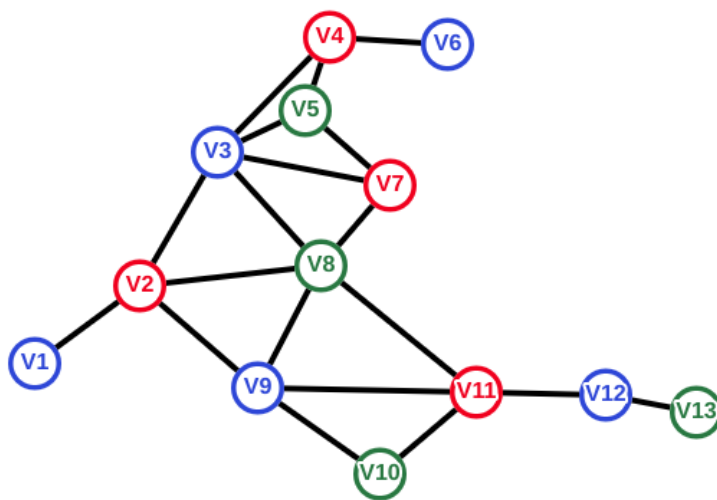
**APLICAÇÃO DO ALGORITMO:** No modelo de grafo da Fronteira Oeste do Rio Grande do Sul, temos:  $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}, v_{11}, v_{12}, v_{13}\}$  e determinamos  $C = \{azul, verde, vermelho\}$ .

Então, realizando o **Passo 1**, ordenamos os vértices de acordo com a ordem decres-

cente dos seus graus, obtendo a seguinte sequência:  $d(v_3) = d(v_8) = 5$ ,  $d(v_2) = d(v_9) = d(v_{11}) = 4$ ,  $d(v_4) = d(v_5) = d(v_7) = 3$ ,  $d(v_{10}) = d(v_{12}) = 2$ ,  $d(v_1) = d(v_6) = d(v_{13}) = 1$ .

Agora, realizando os **Passos 2, 3 e 4**, atribuímos a cor *azul* aos vértices não adjacentes  $v_3, v_1, v_6, v_9, v_{12}$ . Continuando, atribuímos a cor *verde* aos vértices não adjacentes  $v_8, v_5, v_{10}, v_{13}$ . E concluímos atribuindo a cor *vermelho* aos vértices não adjacentes  $v_2, v_4, v_7, v_{11}$ . Desse modo, obtemos o grafo colorido ilustrado na Figura 22.

Figura 22 – Modelagem colorida da Fronteira Oeste do Rio Grande do Sul via Grafos.



Fonte: Autora.

Note que colorimos o grafo que modela a Fronteira Oeste do Rio Grande do sul utilizando apenas 3 cores. Logo, o número cromático desse grafo é 3, ou seja,  $\chi(G) = 3$ . O resultado de  $\chi(G) \leq 4$  era esperado visto que o grafo obtido é simples e planar, logo deve satisfazer o Teorema das Quatro Cores. Consequentemente, constatamos que o mapa da Fronteira Oeste do Rio Grande do Sul pode ser colorido como o exposto na Figura 23.



Figura 23 – Mapa colorido da Fronteira Oeste do Rio Grande do Sul.



Fonte: Autora.

## 4 APLICAÇÕES DA TEORIA DE GRAFOS

### 4.1 Problema do Menor Caminho

Nesta aplicação, trataremos de um problema relativamente simples. Por exemplo: alguém precisa se deslocar de um ponto a outro da cidade e para isso dispõe de vários trajetos. Como saber qual caminho oferece uma trajetória minimizante? Salientamos que os parâmetros estabelecidos para encontrar a(o) trajetória(custo) mínima(mínimo) serão definidos ao longo da modelagem.

Considerando esse tipo de problema e suas possíveis modelagens via Teoria de Grafos, a seguinte definição se faz necessária:

**Definição 4.1.1.** Denominamos **grafo valorado** o grafo no qual o conjunto de arestas é associado a um conjunto de valores numéricos através de uma função  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^+$ .

Uma solução para problemas envolvendo menor caminho foi descoberta por Edsger Wybe Dijkstra (1930 - 2002) apenas no século XX. Dijkstra foi um renomado pesquisador na área da Ciência da Computação que em 1959 publicou um artigo de duas páginas intitulado *A note on two problems in connexion with graphs*, onde descreveu detalhadamente sua contribuição científica mais famosa, o algoritmo para encontrar o menor caminho entre quaisquer par de vértices pertencentes a um grafo conexo, valorado e/ou direcionado. Atualmente, esse algoritmo é mundialmente reconhecido como Algoritmo de Dijkstra<sup>2</sup> e de acordo com Jurkiewicz (2007), é também a melhor forma para solucionar problemas de menor caminho.

No que segue, apresentamos um problema de menor caminho voltado para o contexto da cidade de Itaqui-RS.

**PROBLEMA:** Qual o menor caminho, considerando o produto entre distâncias e qualidade dos trajetos, a ser percorrido da UNIPAMPA até o Porto, ambos localizados na cidade de Itaqui-RS?

**MODELAGEM DO PROBLEMA:** Determinamos os vértices a partir de pontos característicos/relevantes/turísticos/atrativos da cidade que conectam a UNIPAMPA ao Porto. As arestas representam as ruas que fazem tais conexões e os valores atribuídos às arestas foram determinados a partir da quilometragem e qualidade dessas ruas.

Na Tabela 2 apresentamos a relação entre os vértices e os pontos relevantes/atrativos escolhidos pela autora para a construção da modelagem via grafos.

<sup>2</sup>Para saber mais, ver M. Goldbarg e E. Goldbarg (2012, p. 200-207).

Tabela 2 – Descrição dos locais escolhidos

	Locais	Vértices
1	Universidade Federal do Pampa - UNIPAMPA	$v_1$
2	Escola Municipal de Educação Infantil Rosa Soles de Matas	$v_2$
3	Supermercado Dato	$v_3$
4	Mercado Rio-Grandense	$v_4$
5	Posto de Combustíveis Ipiranga	$v_5$
6	Companhia Riograndense de Saneamento - CORSAN	$v_6$
7	Cemitério Municipal	$v_7$
8	Posto de Saúde da Família Vila Nova	$v_8$
9	Posto de Combustíveis Saara	$v_9$
10	Comercial Buffon - Posto de Combustíveis 51	$v_{10}$
11	Posto de Combustíveis Petrobras	$v_{11}$
12	Lojas Colombo	$v_{12}$
13	Praça Marechal Deodoro da Fonseca	$v_{13}$
14	Porto de Itaqui	$v_{14}$

Fonte: Autora.

Destacamos que a quilometragem dos trajetos foi obtida através da utilização do *Google Maps*<sup>3</sup>, um serviço *online* de pesquisa e visualização de mapas desenvolvido e disponibilizado pela empresa estadunidense *Google*. Além disso, destacamos que a qualificação destas ruas foi elaborada a partir das percepções da autora durante passeios recorrentes pelos trajetos analisados.

Na Tabela 3 apresentamos os parâmetros de qualificação que consideram o tipo de pavimentação da rua, existência de buracos, lombadas e semáforos e volume de tráfego.

Tabela 3 – Parâmetros de qualificação do asfalto.

Ótimo	1,0
Bom	1,5
Ruim	2,0
Péssimo	2,5

Fonte: Autora.

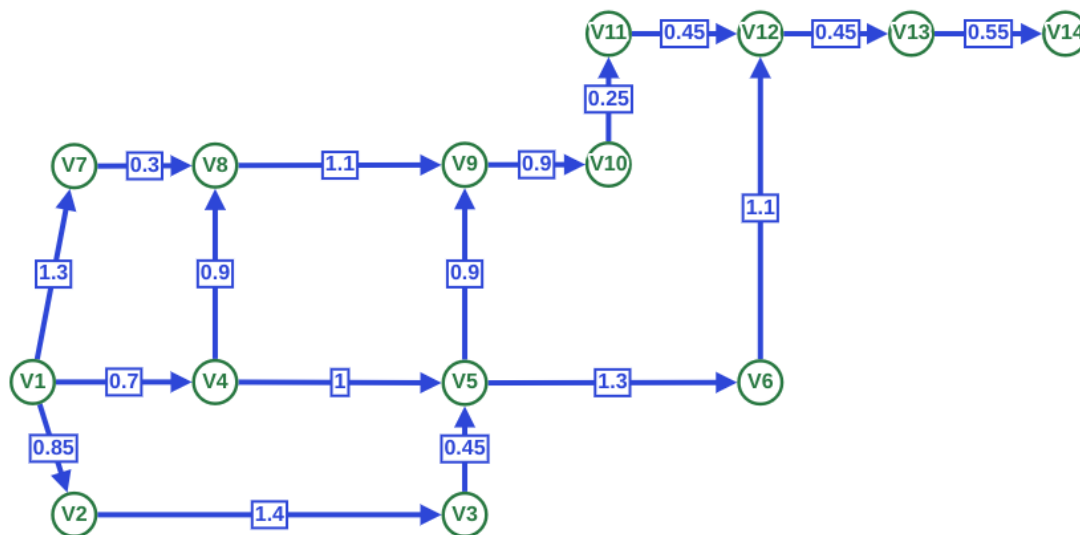
O peso atribuído ao trajeto ótimo se deve ao fato de ser possível desenvolver a velocidade máxima permitida pela via neste trajeto, minimizando o tempo gasto no percurso. Os demais pesos foram tomados considerando os parâmetros avaliados e, segundo nossas medições (percursos realizados pela autora com automóvel próprio) que indicaram que, no pior cenário, o tempo gasto foi de aproximadamente duas vezes e meia se

<sup>3</sup><<https://www.google.com.br/maps/@-29.1348559,-56.5534574,14z>>. Acesso em: 23 jun. 2022.

comparado ao trajeto ótimo.

Na Figura 24, apresentamos a modelagem dos trajetos UNIPAMPA-PORTO via Grafos e os valores atribuídos às arestas correspondem a quilometragem destes trajetos.

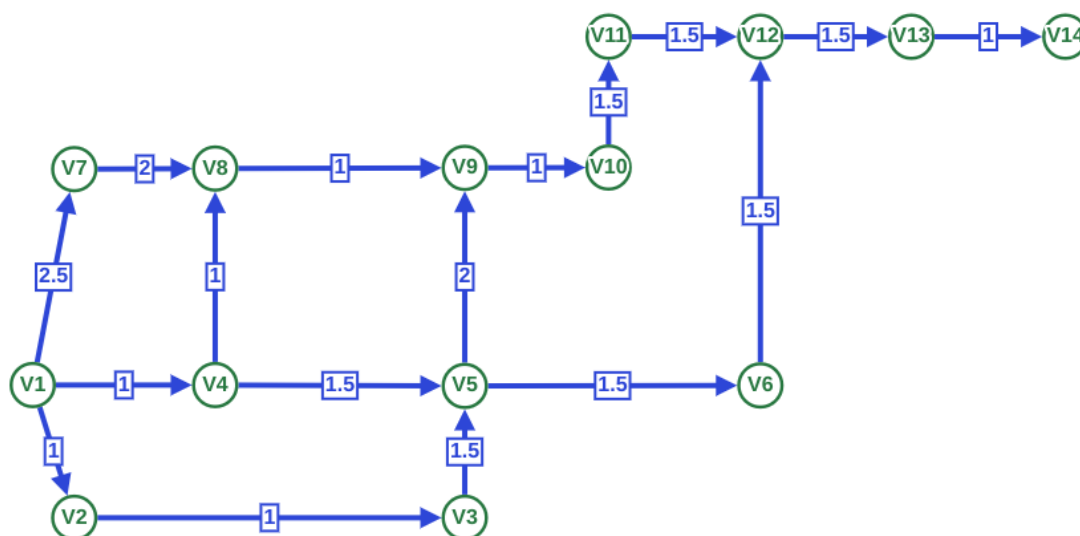
Figura 24 – Quilometragem dos trajetos entre a UNIPAMPA e o Porto de Itaqui.



Fonte: Autora.

Na Figura 25, apresentamos a modelagem dos trajetos UNIPAMPA-PORTO via Grafos e os valores atribuídos às arestas correspondem a sua qualificação.

Figura 25 – Qualidade dos trajetos entre a UNIPAMPA e o Porto de Itaqui.



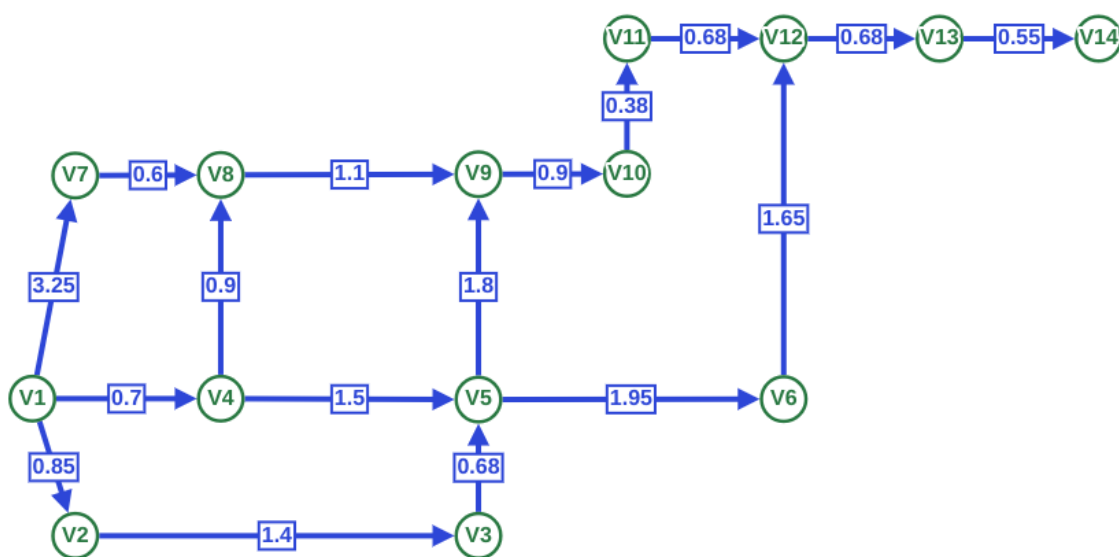
Fonte: Autora.

Contextualizando, o trajeto  $v_1 \rightarrow v_2$  recebeu peso 1, pois é asfaltado, não possui

buracos, lombadas nem semáforos e tem baixo volume de tráfego, o que faz com que o percorramos em velocidade constante e por isso, sem alterações no tempo gasto. Já o trajeto  $v_1 \rightarrow v_7$  recebeu peso 2,5, pois sua pavimentação é de terra batida com pedregulhos e possui inúmeros buracos, o que gera danos no automóvel e faz com que o percorramos em velocidade não constante e isso altera significativamente o tempo gasto para percorrê-lo.

Na Figura 26, apresentamos a modelagem via grafos onde os valores atribuídos às arestas correspondem ao produto entre quilometragem e qualificação dos trajetos.

Figura 26 – Modelagem dos trajetos UNIPAMPA-PORTO via Grafos em KM X QUALI.



Fonte: Autora.

A seguir, apresentamos o funcionamento do Algoritmo de Dijkstra, assim como, sua aplicação na busca por uma solução do problema de menor caminho aqui proposto.

**ALGORITMO:** Considerando os conjuntos  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_{k-1}, v_k\}$  e  $S = \{v_i, v_j, \dots, v_f\}$  como vértices e o menor caminho a ser percorrido em um grafo  $G$ , respectivamente. Sendo  $v_i$  (vértice inicial) o ponto de partida e  $v_f$  (vértice final) o ponto de chegada do trajeto.

- **Passo 1** – Determinar o ponto de partida –  $v_i$  – e o ponto de chegada –  $v_f$  – do trajeto a ser percorrido. E iniciar a construção do menor caminho a partir da adição de  $v_i$  ao conjunto  $S$ .
- **Passo 2** – Analisar as arestas incidentes a  $v_i$  e selecionar a que possui menor peso. Após, adicionar ao conjunto  $S$  o vértice  $v_j$  adjacente a  $v_i$  através da aresta de menor peso.

- **Passo 3** – Repetir o *Passo 2* para cada aresta incidente ao último vértice  $v_j$  adicionado ao conjunto  $S$  até que  $v_{j+1} = v_f$ .

**APLICAÇÃO DO ALGORITMO:** No modelo de grafo dos trajetos que ligam a UNIPAMPA ao Porto, ambos localizados em Itaquí-RS, temos:  $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}, v_{11}, v_{12}, v_{13}, v_{14}\}$  e o conjunto  $S$  a ser construído.

Então, realizando o **Passo 1**, determinamos a UNIPAMPA – ( $v_1$ ) – e o Porto de Itaquí –  $v_{14}$  – como ponto de partida e chegada do trajeto a ser percorrido, respectivamente. Após, adicionamos o vértice  $v_1$  ao conjunto  $S$  do menor caminho. Assim, obtemos  $S = \{v_1\}$ .

Agora, realizando os **Passos 2 e 3**, analisamos as arestas incidentes a  $v_1$ :  $v_1v_2$  com peso 0,85,  $v_1v_4$  com peso 0,7 e  $v_1v_7$  com peso 3,25. Portanto, selecionamos  $v_1v_4$  e adicionamos  $v_4$  ao conjunto  $S$  do menor caminho. Assim, obtemos  $S = \{v_1, v_4\}$ . Dando seguimento ao algoritmo, analisamos as arestas incidentes a  $v_4$ :  $v_4v_5$  com peso 1,5 e  $v_4v_8$  com peso 0,9. Portanto, selecionamos  $v_4v_8$  e adicionamos  $v_8$  ao conjunto  $S$  do menor caminho. Assim, obtemos  $S = \{v_1, v_4, v_8\}$ . Continuando, analisamos as arestas incidentes a  $v_8$ :  $v_8v_9$  com peso 1,1. Portanto, selecionamos  $v_8v_9$  e adicionamos  $v_9$  ao conjunto  $S$  do menor caminho. Assim, obtemos  $S = \{v_1, v_4, v_8, v_9\}$ . Note que a partir de  $v_8$  temos uma situação semelhante para todos os vértices: existe um único caminho a ser percorrido. Consequentemente, obtemos  $S = \{v_1, v_4, v_8, v_9, v_{10}, v_{11}, v_{12}, v_{13}, v_{14}\}$ , com  $v_{j+1} = v_f$ .

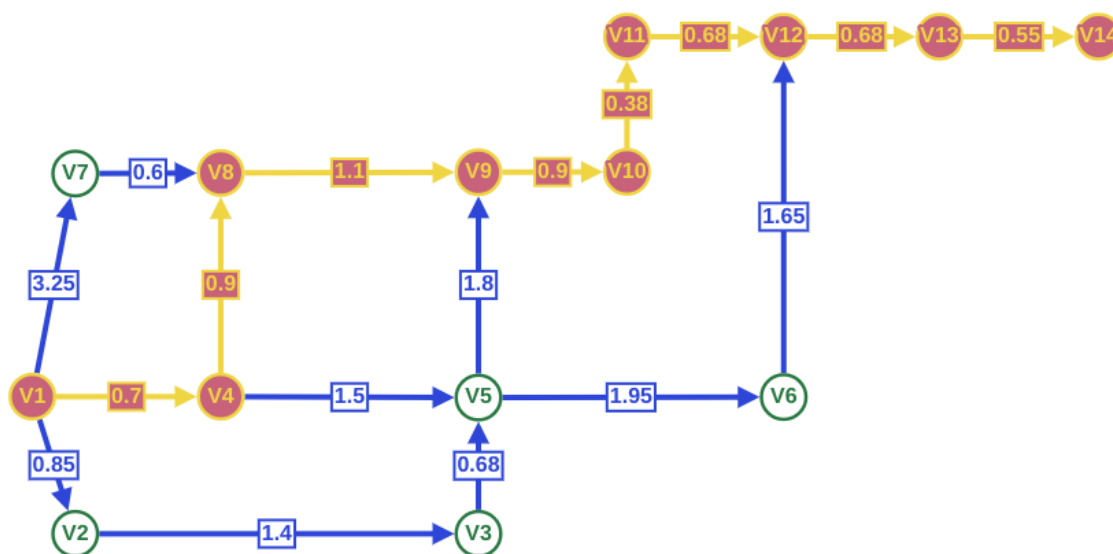
Desse modo, finalizamos a construção do conjunto  $S$  do menor caminho entre a UNIPAMPA e o Porto de Itaquí. Este resultado é ratificado pela tabela que contém o valor final analisado para determinar o caminho de menor custo e também pela utilização da funcionalidade “Encontrar o caminho mais curto usando o algoritmo de Dijkstra” presente no *Graph Online*. Observe estas verificações na Tabela 4 e Figura 27.

Tabela 4 – Quilometragem (KM) X Qualificação (QUALI)

	Trajetos	KM X QUALI
1	$v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow v_3 \rightarrow v_5 \rightarrow v_6 \rightarrow v_{12} \rightarrow v_{13} \rightarrow v_{14}$	7,76
2	$v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow v_3 \rightarrow v_5 \rightarrow v_9 \rightarrow v_{10} \rightarrow v_{11} \rightarrow v_{12} \rightarrow v_{13} \rightarrow v_{14}$	7,92
3	$v_1 \rightarrow v_4 \rightarrow v_5 \rightarrow v_6 \rightarrow v_{12} \rightarrow v_{13} \rightarrow v_{14}$	7,03
4	$v_1 \rightarrow v_4 \rightarrow v_5 \rightarrow v_9 \rightarrow v_{10} \rightarrow v_{11} \rightarrow v_{12} \rightarrow v_{13} \rightarrow v_{14}$	7,19
5	$v_1 \rightarrow v_4 \rightarrow v_8 \rightarrow v_9 \rightarrow v_{10} \rightarrow v_{11} \rightarrow v_{12} \rightarrow v_{13} \rightarrow v_{14}$	5,89
6	$v_1 \rightarrow v_7 \rightarrow v_8 \rightarrow v_9 \rightarrow v_{10} \rightarrow v_{11} \rightarrow v_{12} \rightarrow v_{13} \rightarrow v_{14}$	8,14

Fonte: Autora.

Figura 27 – Modelagem dos trajetos UNIPAMPA-PORTO via Grafos em MENOR KM x QUALI.



Fonte: Autora.

## 4.2 Roteamento de Veículos

Para Ballou (2006), no que se refere a transportes, um dos problemas frequentes é a redução dos custos e o aprimoramento dos serviços, podendo ser investigado sob esses critérios, por exemplo, os melhores roteiros para veículos ao longo de uma rede rodoviária. Considerando a diversidade de problemas desse tipo, investigamos um dos principais serviços prestados à comunidade itaquense, a coleta de lixo.

Durante a investigação, descobrimos que a prefeitura de Itaquí-RS terceiriza este serviço a uma empresa especializada em serviços de engenharia que realiza algumas atividades econômicas secundárias, por exemplo, coleta, tratamento e disposição de resíduos não-perigosos. Ao entrarmos em contato com esta empresa, obtivemos acesso ao Plano de Coleta de Resíduos Sólidos Urbanos Domiciliares elaborado especificamente para Itaquí-RS por um engenheiro civil.

O plano refere-se somente à área urbana de Itaquí-RS, excluindo assim as áreas rurais do município, que é a maior parte de seu território, conforme pode ser visto no mapa apresentado na Figura 28. Na ilustração representamos a área total do município de Itaquí-RS, em que a área rural aparece colorida em verde e a cidade (área urbana) colorida em vermelho.

Figura 28 – Mapa do município de Itaqui-RS.



Fonte: Autora.

No que segue, apresentamos a área contemplada pela coleta de lixo em Itaqui-RS. No plano de coleta de lixo a área urbana do município foi dividida em setores de coleta que respeitam a proximidade entre os bairros da cidade, exceto o setor roxo que integrou os bairros distantes Vila Nova e União. A implementação dessa exceção tornou-se necessária devido ao aumento de residentes nestes bairros, motivo que – inicialmente – impossibilitou sua permanência no setor azul. Na Figura 29, ilustramos os setores vigentes na coleta de lixo realizada em Itaqui-RS.

E o processo de coleta de lixo nestas regiões é realizado respeitando três critérios: setor de coleta, dias e turnos, conforme representado na Tabela 5.

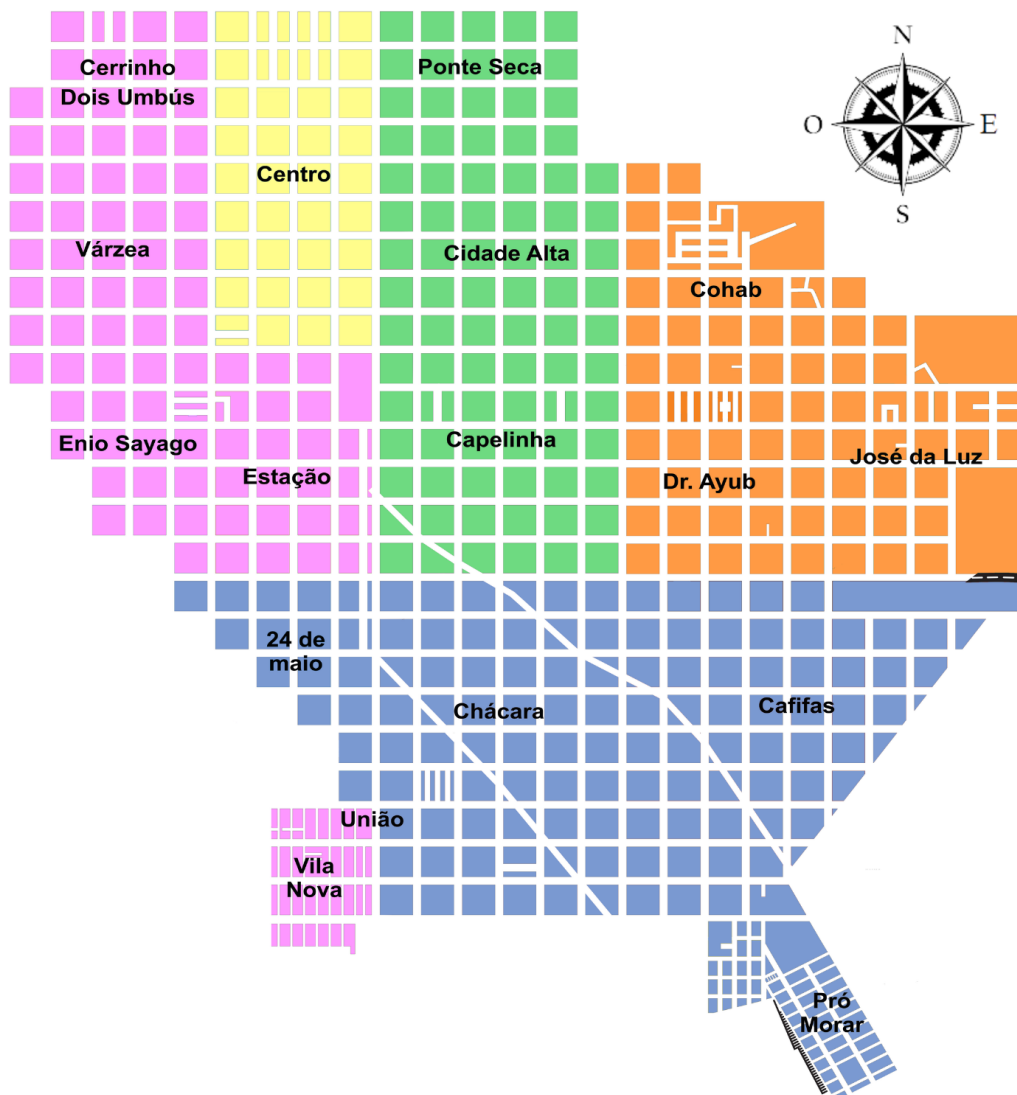
Tabela 5 – Setores de coleta, dias e turnos.

Setor	Dias	Turno
Amarelo	Segundas à Sábados	Diária (19h às 23h)
Laranja	Segundas, Quartas e Sextas	Alternada Par - Manhã (6h às 14h)
Verde	Segundas, Quartas e Sextas	Alternada Par - Tarde (15h às 19h)
Azul	Terças, Quintas e Sábados	Alternada Ímpar - Manhã (6h às 14h)
Rosa	Terças, Quintas e Sábados	Alternada Ímpar - Tarde (15h às 19h)

Fonte: Autora.



Figura 29 – Setores de Coleta.

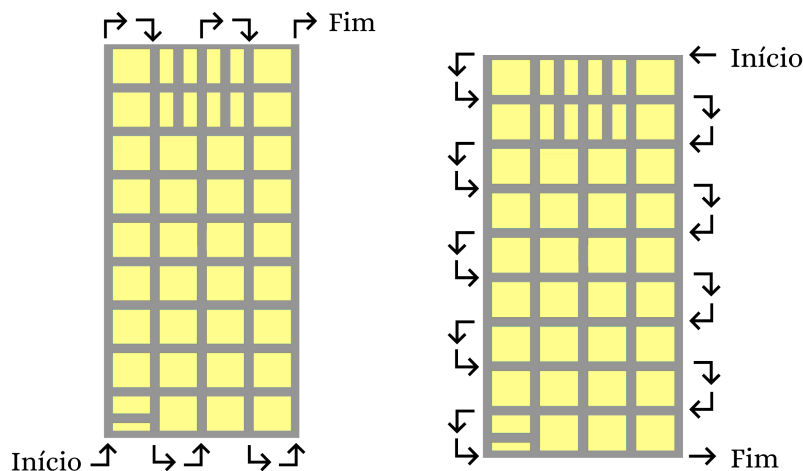


Fonte: Autora.

Considerando o Plano de Coleta de Resíduos Sólidos Urbanos Domiciliares apresentado, a empresa instrui seus funcionários a formarem uma “malha quadriculada” em cada setor, de modo que na primeira etapa da coleta, as ruas no sentido norte-sul sejam percorridas e na segunda e última etapa, as ruas no sentido leste-oeste. Observe na Figura 30 a ilustração do trajeto realizado pelo caminhão compactador de lixo no Bairro Centro.

Nesta ilustração é notável que o caminhão compactador de lixo não percorre todas as ruas do Bairro Centro. E isto só é possível, pois em algumas ruas, como becos e vielas, a coleta é realizada manualmente pelos coletores e agrupada em pontos estratégicos, como esquinas, pelos quais o caminhão passa. Este processo é respeitado em todos os setores de coleta.

Figura 30 – Trajeto Bairro-Centro com malha quadriculada completa.



Fonte: Autora.

Concluimos, após uma análise criteriosa de todas as informações obtidas, que o serviço de coleta de lixo realizado em Itaqui-RS está completamente otimizado, podendo, inclusive, ser realizado por um único caminhão compactador de lixo devido aos setores e turnos pré-determinados no Plano de Coleta de Resíduos Sólidos Urbanos Domiciliares. Além disso, podemos ressaltar que o fato dos coletores – e não o caminhão – percorrerem exatamente todas as vias da cidade contribui para a otimização do processo, considerando os altos custos empregados na utilização e manutenção de veículos de grande porte.

Em outras palavras, novas soluções para problemas como redução de custos e/ou aprimoramento de serviços são dispensáveis, visto que o plano desenvolvido pelo engenheiro civil da empresa responsável supre as necessidades da comunidade itaquense urbana de forma satisfatória.

Por fim, observamos que a simplicidade do mapa da cidade de Itaqui-RS possibilita que, se não todos, a grande maioria dos serviços que englobam roteamento de veículos sejam realizados de forma otimizada, dado que as quadras na cidade são, em sua maioria, retangulares, existem apenas duas vias que possuem (em partes) mão única, não existem viadutos ou córregos, dentre outros fatores.

Claro que, nem todos os serviços que envolvem roteamento de veículos se utilizam disso e prestam o atendimento realizando as malhas. Porém, neste trabalho não iremos abordar outros fatores (como por exemplo: dinâmica proposta pela empresa, número de funcionários, transporte, etc.) que possam impactar na não otimização dos serviços prestados na cidade.

### 4.3 Redes Sociais e Grafos

Com o advento da internet, a partir dos anos 2000, o fenômeno das redes sociais atraiu milhares de pessoas e é temática de muitas pesquisas científicas recentes em diversas áreas do conhecimento. As redes sociais que podem ser modeladas por grafos nos quais os vértices e arestas correspondem aos elementos e interações da rede, respectivamente. Salientamos que estes elementos (ou vértices) podem representar indivíduos, organizações, localidades, etc; e as interações (ou arestas) podem representar as relações existentes entre os elementos, por exemplo, relações de parentesco / amizade / amorosa / comerciais / trabalhistas, etc. Podemos destacar algumas pesquisas como: Santos (2014), Laranjeiras e Cavique (2014) e Sousa Netto (2019).

Na análise estrutural de redes, principalmente, das redes sociais, podemos encontrar diferentes tipos de critérios, dentre os quais destacamos as Medidas de Centralidade, pois estas quantificam a importância de um elemento na estrutura da rede considerando suas interações. Isto é, a centralidade estabelece um ranqueamento de *status* para todo e qualquer elemento baseando-se no seu nível de atividade dentro da rede.

O conceito de centralidade em redes sociais foi fundamentado, inicialmente, no fato de que em uma rede dada, um elemento localizado em uma posição mais favorável para a comunicação entre pares de elementos pode ser remodelado como um elemento central da rede. Ou seja, o elemento central detém maiores possibilidades de criar, modificar, compartilhar e/ou reter as informações presentes na rede. Logo, quanto mais central for o elemento, mais influência ele possui (BAVELAS, 1950).

A fim de compreendermos melhor as centralidades, alguns conceitos são necessários, por exemplo, em grafos não valorados as distâncias são contabilizadas considerando o número de arestas entre os vértices; denominamos geodésicas aos possíveis caminhos mais curtos entre um par de vértices; e para calcular centralidades que envolvem geodésicas, assumimos que as atividades ocorrem na rede, preferencialmente, através de geodésicas. A seguir, apresentamos as medidas de centralidade que utilizamos nesta aplicação.

- A Centralidade de Grau pode ser considerada a mais simples e intuitiva dentre todas as medidas de centralidade, visto que as interações entre os elementos de uma rede são explícitas. Para mais detalhes, veja Freeman (1978/79) e Freitas (2010).
- A Centralidade de Aproximação pode ser considerada a mais natural dentre as medidas de centralidade que analisam a proximidade de um vértice em relação aos demais vértices do grafo, visto que considera as distâncias – sem restrições – entre

os vértices. Para mais detalhes, veja Freeman (1978/79) e Freitas (2010).

- A Centralidade de Estresse calcula as geodésicas de todos os pares de vértices que passam por um terceiro vértice pré-determinado, objetivando medir o estresse que este terceiro vértice sofre durante as atividades da rede. Para mais detalhes, veja Shimbel (1953).
- A Centralidade de Intermediação calcula a razão das geodésicas de todos os pares de vértices que passam por um terceiro vértice pré-determinado e as geodésicas de todos os pares de vértices que não passam pelo terceiro vértice pré-determinado, objetivando medir a capacidade de intermediação deste terceiro vértice. Para mais detalhes, veja Freeman (1978/79) e Freitas (2010).

A seguir, apresentamos as definições formais das Medidas de Centralidade de Grau, Proximidade, Estresse e Intermediação. Para isso, consideremos um grafo  $G(V, A)$ , sendo  $V(G) = \{v_1, \dots, v_{n-1}, v_n\}$  e  $A(G) = \{v_i v_j\}$ , com  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ .

**Definição 4.3.1.** Denominamos **Centralidade de Grau** de  $v_k$  o grau de  $v_k$ , ou seja, o número de arestas incidentes a  $v_k$ . E denotamos por

$$C_d(v_k) = d(v_k).$$

**Definição 4.3.2.** Denominamos **Centralidade de Proximidade** de  $v_k$  a soma das distâncias de  $v_k$  em relação a todos os outros vértices contidos no grafo. E denotamos por

$$C_c(v_k) = \frac{1}{\sum_{i=1}^n dis(v_k, v_i)}.$$

**Definição 4.3.3.** Denominamos **Centralidade de Estresse** de  $v_k$  a soma das geodésicas entre  $v_i$  e  $v_j$  que passam por  $v_k$ , sendo  $i \neq j$ ,  $i \neq k$  e  $j \neq k$ . E denotamos por

$$C_{str}(v_k) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n g_{ij}(v_k).$$

**Definição 4.3.4.** Denominamos **Centralidade de Intermediação** de  $v_k$  a soma da razão entre as geodésicas de  $v_i$  a  $v_j$  que passam por  $v_k$  e as geodésicas de  $v_i$  a  $v_j$  que não passam por  $v_k$ , sendo  $i \neq j$ ,  $i \neq k$  e  $j \neq k$ . E denotamos por

$$C_b(v_k) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{g_{ij}(v_k)}{g_{ij}}.$$

### 4.3.1 Rede de Coautoria

No que segue, apresentamos uma análise da rede de coautoria proveniente do grupo de pesquisa intitulado Núcleo de Estudos e Pesquisa do Envelhecimento, pertencente ao curso de Medicina da Universidade Federal do Pampa - Campus Uruguaiiana. Os dados necessários para esta análise foram retirados da Plataforma Lattes <sup>1</sup>. Destacamos que a coleta foi realizada manualmente e buscamos – um a um – trabalhos científicos publicados conjuntamente pelos pesquisadores do grupo analisado.

Para a construção e análise desta rede de coautoria a partir dos dados coletados, utilizamos o CentiBiN 1.3, *software* que possui diversas funcionalidades objetivando a construção e visualização de modelagens de redes via grafos, além do cálculo de suas centralidades. A inserção dos dados neste *software* se deu através das seguintes etapas: Criação de arquivo no formato .net em bloco de notas preenchido com os vértices – autores – e as arestas – coautorias – e abertura do arquivo no *software* CentiBiN.

Na Tabela 6, apresentamos os pesquisadores e seus vértices correspondentes na rede.

Tabela 6 – Grupo de pesquisa

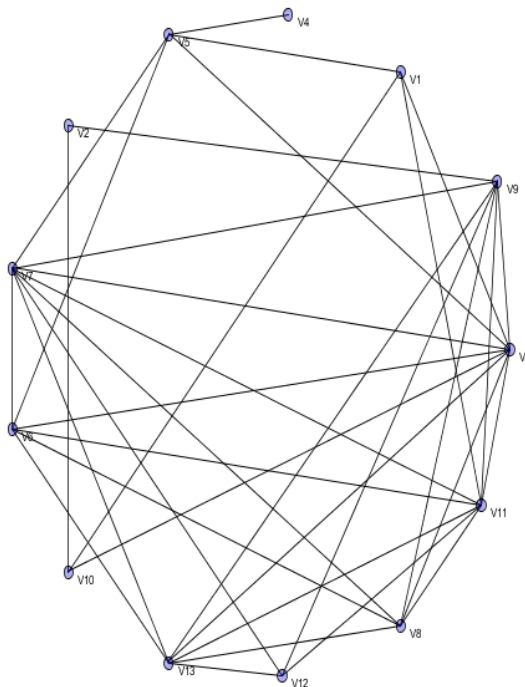
Núcleo de Estudos e Pesquisa do Envelhecimento	
Pesquisadores	Vértices correspondentes
Pesquisador(a) 1	$v_1$
Pesquisador(a) 2	$v_2$
Pesquisador(a) 3	$v_3$
Pesquisador(a) 4	$v_4$
Pesquisador(a) 5	$v_5$
Pesquisador(a) 6	$v_6$
Pesquisador(a) 7	$v_7$
Pesquisador(a) 8	$v_8$
Pesquisador(a) 9	$v_9$
Pesquisador(a) 10	$v_{10}$
Pesquisador(a) 11	$v_{11}$
Pesquisador(a) 12	$v_{12}$
Pesquisador(a) 13	$v_{13}$

Fonte: Autora.

<sup>1</sup>Sistema brasileiro de currículos virtuais desenvolvido e disponibilizado pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) que armazena dados de docentes e discentes, grupos de pesquisa e instituições acadêmicas em um único repositório.

Na Figura 31 apresentamos a rede de coautoria construída no CentiBiN.

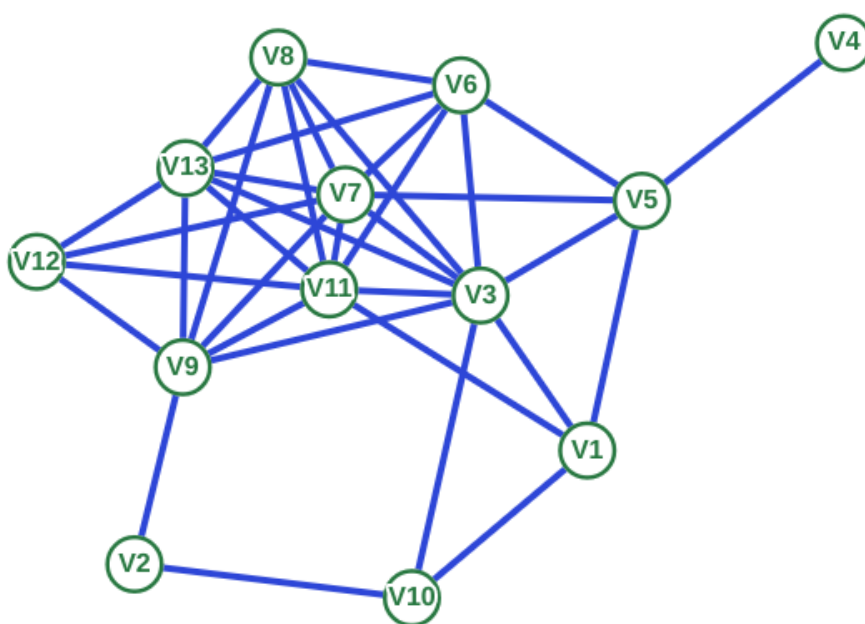
Figura 31 – Modelagem da rede de coautoria via grafos no CentiBiN.



Fonte: Autora.

Na Figura 32 apresentamos a rede de coautoria construída no *Graph Online*.

Figura 32 – Modelagem da rede de coautoria via grafos no *Graph Online*.



Fonte: Autora.

Na Tabela 7 apresentamos as Medidas de Centralidade de Grau para cada vértice presente na rede de coautoria resultantes dos cálculos realizados pelo *software* CentiBiN 1.3.

Tabela 7 – Centralidade de Grau

Classificação	Vértice	Centralidade de Grau
1º	$v_3$	9
2º	$v_7$	8
-	$v_{11}$	8
3º	$v_9$	7
-	$v_{13}$	7
4º	$v_6$	6
-	$v_8$	6
5º	$v_5$	5
6º	$v_1$	4
-	$v_{12}$	4
7º	$v_{10}$	3
8º	$v_2$	2
9º	$v_4$	1

Fonte: Autora.

Na Tabela 8 apresentamos as Medidas de Centralidade de Aproximação para cada vértice presente na rede de coautoria resultantes dos cálculos realizados pelo *software* CentiBiN.

Tabela 8 – Centralidade de Aproximação

Classificação	Vértice	Centralidade de Aproximação
1º	$v_3$	0,067
2º	$v_7$	0,063
3º	$v_{11}$	0,059
4º	$v_9$	0,056
-	$v_{13}$	0,056
5º	$v_6$	0,053
-	$v_8$	0,053
6º	$v_1$	0,050
-	$v_5$	0,050
7º	$v_{12}$	0,045
8º	$v_{10}$	0,043
9º	$v_2$	0,038
10º	$v_4$	0,032

Fonte: Autora.

Na Tabela 9 apresentamos as Medidas de Centralidade de Estresse para cada vértice presente na rede de coautoria resultantes dos cálculos realizados pelo *software* CentiBiN.

Tabela 9 – Centralidade de Estresse

Classificação	Vértice	Centralidade de estresse
1º	$v_3$	64
2º	$v_5$	50
3º	$v_9$	38
4º	$v_7$	36
5º	$v_{11}$	26
6º	$v_1$	16
7º	$v_{10}$	14
8º	$v_6$	12
-	$v_{13}$	12
9º	$v_2$	4
-	$v_8$	4
10º	$v_4$	0
-	$v_{12}$	0

Fonte: Autora.

Na Tabela 10 apresentamos as Medidas de Centralidade de Intermediação para cada vértice presente na rede de coautoria resultantes dos cálculos realizados pelo *software* CentiBiN.

Tabela 10 – Centralidade de Intermediação

Classificação	Vértice	Centralidade de Intermediação
1º	$v_3$	13,200
2º	$v_5$	11,667
3º	$v_9$	8,167
4º	$v_7$	6,700
5º	$v_{11}$	4,700
6º	$v_1$	2,667
-	$v_{10}$	2,667
7º	$v_6$	1,833
8º	$v_{13}$	1,367
9º	$v_2$	0,667
10º	$v_8$	0,367
11º	$v_4$	0,000
-	$v_{12}$	0,000

Fonte: Autora.



As quatro Medidas de Centralidade apontam, principalmente, que o vértice  $v_3$  é o elemento central desta rede de coautoria, visto que publicou com a maioria de seus colegas, de acordo com a Centralidade de Grau. Consequentemente, é também o elemento com maior proximidade aos demais pesquisadores do grupo, conforme a Centralidade de Aproximação. E o elemento que sofre maior estresse durante a realização das pesquisas e publicações conjuntas, de acordo com a Centralidade de Estresse. Além de ter maiores possibilidades de intermediar a comunicação entre seus colegas, segundo a Centralidade de Intermediação.

Os vértices  $v_7$  e  $v_{11}$  também são elementos importantes na rede de coautoria, conforme as Centralidades de Grau e Aproximação, pois publicaram com 8 de seus 12 colegas, e assim, têm grande proximidade dos demais pesquisadores do grupo. Entretanto, são os vértices  $v_5$  e  $v_9$  que possuem destaque nas Centralidades de Estresse e Intermediação, logo, são elementos que sofrem grande estresse durante as pesquisas e publicações conjuntas e têm evidente relevância na intermediação da comunicação entre pares de colegas.

Outros resultados exigem atenção. Note que o vértice  $v_5$  não possui grande relevância na rede de coautoria de acordo com a Centralidade de Grau, isto é, não publicou com a maioria de seus colegas. Porém, como vimos, é um importante intermediador para seus pares de colegas. Esta situação ocorre, pois  $v_5$  é o único responsável por intermediar a comunicação entre o vértice  $v_4$  e os demais vértices do grafo. Logo, todas as geodésicas de  $v_4$  passam por  $v_5$ .

Sob outra perspectiva, analisamos os vértices – não centrais –  $v_2$ ,  $v_4$ ,  $v_{10}$  e  $v_{12}$ . Isto é, as quatro Medidas de Centralidade apontam estes como elementos que têm baixa produtividade no grupo de pesquisa, visto que publicaram com poucos colegas. Logo, não possuem grande proximidade com a maioria dos pesquisadores do grupo, também não sofrem grande estresse durante as pesquisas e publicações e por fim, não são bons intermediadores para pares de colegas.

Com base nas análises apresentadas, podemos concluir que as informações mais relevantes sobre a topologia da rede para esse caso, em particular, provém das centralidades de grau e proximidade, pois elas indicam quais pesquisadores mais publicam, possuem mais contatos e que, justamente por isso, tem maiores possibilidades de se manterem publicando ativamente e, consequentemente, permanecerem como vértices centrais da rede.

## 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Na pesquisa aqui apresentada, modelamos matematicamente alguns problemas do cotidiano utilizando a Teoria de Grafos. Essa temática não é muito explorada nos cursos de Matemática - Licenciatura e, por essa razão, foi necessário estudar e se apropriar de novos conhecimentos, definições, teoremas e resultados clássicos, que nortearam o referencial teórico e a seleção das aplicações que seriam realizadas.

Destacamos que a Teoria de Grafos é relativamente recente como linha de pesquisa – se comparada à outras teorias científicas – e que, justamente por sua aplicabilidade em diversos problemas práticos de diferentes áreas, como matemática, informática, engenharia, química, psicologia, indústria, entre outras, existem cada vez mais trabalhos acadêmicos utilizando desta teoria para resolver situações-problema. O que, com certeza, nos motiva na realização de novas aplicações, ampliando principalmente o último tópico trabalhado, visto que é um assunto atual e existem ainda muitos contextos a serem explorados.

Poderiam ser desenvolvidas em trabalhos futuros algumas aplicações semelhantes à de rede de coautorias, buscando codificar relacionamento entre pares de objetos. Na modelagem dos problemas podemos escolher os vértices do grafo para representar os objetos e as arestas dos grafos para representar relacionamentos. Alguns exemplos práticos seriam:

- Selecionadas algumas cidades do Brasil, analisar os vôos comerciais que conectem duas a duas, cada uma das cidades;
- Selecionados alguns atores e atrizes, analisar quais atuaram em um mesmo filme;
- Selecionadas algumas páginas na *web*, analisar quais possuem *link* que redirecionam para alguma das outras páginas escolhidas.

De modo geral, é possível explorar relações de redes e Teoria de Grafos, realizando uma análise de dados do ponto de vista computacional (utilizando *softwares* e algoritmos) a fim de mapear comportamentos ou informações sobre a rede, sendo relevante para questões como: explorar o comportamento entre os indivíduos ao disseminar ou armazenar informações (observando elementos psicológicos/sociais) ou explorar relações comerciais (como *marketing*, propagandas em mídias sociais ou sites de *e-commerces*, engajamento em campanhas), dentre outros cenários.

A escolha por aplicações que pudessem incluir o contexto da cidade de Itaquí - RS foi motivada pela autora deste trabalho ser natural da cidade, para trazer à esta pesquisa características originais e também para, se possível, de alguma forma, apresentar informações que possam ser interessantes à comunidade como um todo.

Quanto a minha trajetória acadêmica, posso dizer que este trabalho contribuiu significativamente para minha formação visto que foram adquiridos, aprimorados e aplicados diversos conceitos que, se não fosse esse TCC eu, possivelmente, não teria tido oportunidade de trabalhar. Além disso, este estudo inicial sugere potenciais caminhos para uma futura pós-graduação seja nesta mesma linha de aplicações em Teoria de Grafos ou em alguma área afim à Matemática, como a computação ou engenharia de produção, por exemplo. Do início desta pesquisa até este momento, acredito ter adquirido maturidade na busca por referências (sejam elas históricas ou teóricas) e um olhar atento e curioso aos detalhes, características que acredito serem de fundamental importância na continuidade dos estudos.

Como futura professora, acho possível trabalhar o conceito de grafos em sala de aula visto que, principalmente no ensino médio, eles se fazem presentes na construção de sólidos geométricos em Geometria Espacial ou nas representações de ligações de química orgânica. No ensino fundamental, podem ser, por exemplo, trabalhados trajetos pensando de forma simples em como encontrar o menor caminho (como apresentado em uma das aplicações), utilizar a Teoria de Grafos para modelar os jogos de uma gincana escolar ou mesmo organizar (utilizando grafos) os horários das provas finais de uma determinada turma.

Penso que a Teoria de Grafos, se introduzida no Ensino Básico – selecionando algumas aplicações simples e objetivas – pode ser uma grande aliada, por exemplo, para trabalhar temas contemporâneos e transversais, conforme as orientações da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs). No tema saúde, podemos utilizar de grafos para construir, por exemplo, redes e avaliar o contágio de determinada doença entre indivíduos.

Por fim, é possível observar que a teoria aqui apresentada possui não só a sua origem, mas grande parte do seu desenvolvimento, motivada por problemas práticos (alguns dos quais foram apresentados na forma de problemas clássicos) e que novos problemas cotidianos motivam até hoje aplicações. A pesquisa desenvolvida foi satisfatória pois permitiu visualizar a matemática não apenas como área teórica mas também prática, possibilitando o conhecimento de uma ferramenta potente na resolução de situações-problema.

## REFERÊNCIAS

ADAMIC, L. ADAR, E. **How to Search a Social Network**. Social Networks. v. 27, n. 3, pp. 187-203, jul. 2005. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0378873305000109>>. Acesso em: 05 ago. 2022.

BALLOU, R. H. **Gerenciamento da cadeia de suprimentos/logística empresarial**. Tradução de Raul Rubenich. - 5. ed. Porto Alegre: Bookman, 2006.

BARABÁSI, A. L. **Linked. How Everything is Connected to Everything else and What it means for Business, Science and Everyday Life**. Cambridge: Plume, 2003.

BAVELAS, A. **Communication patterns in task oriented groups**. Journal of the Acoustical Society of America, v. 22, pp. 725-30, 1950.

BIGGS, Norman L.; LLOYD, E. Keyth; WILSON, Robin J. **Graph Theory 1736 - 1936**. New York: Oxford University Press Inc., 1998.

BOAVENTURA NETTO, P. O. **Grafos: Teoria, Modelos e Algoritmos**. São Paulo: E. Blucher, 2006.

BORBA, E. M. **Medidas de Centralidade em Grafos e Aplicações em redes de dados**. Porto Alegre: PPGMAp da UFRGS, 2013.

CHARTRAND, Gary; ZHANG, Ping. **A First Course In Graph Theory**. New York: Dover Publications, 2012.

CLARK, John; HOLTON, Derek A. **A First Look At Graph Theory**. Singapore: World Scientific, 1996.

DEMO, P. **Introdução à metodologia da ciência**. 2. ed. 21. reimpr. São Paulo: Atlas, 2013.

DIESTEL, R. **Graph Theory**. Graduate Texts in Mathematics, v. 173. Heidelberg: Springer-Verlag, 2016.

FREEMAN, L. C. **Centrality in Social Networks: Conceptual Clarification**. Social Networks. v. 1, n. 3, pp. 215-239, 1978–1979. <[https://doi.org/10.1016/0378-8733\(78\)90021-7](https://doi.org/10.1016/0378-8733(78)90021-7)>. Acesso: 05 ago. 2022.

FREITAS, L. Q. **Medidas de Centralidade em Grafos**. Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2010.

GIL, A. C. **Como Elaborar Projetos de Pesquisa**. 6. ed. São Paulo: Atlas, 2018.

GOLDBARG, Marco C.; GOLDBARG, Elizabeth F. G. **Grafos : conceitos, algoritmos e aplicações**. Rio de Janeiro: Elsevier, 2012.

GONTHIER, G. **A computer-checked proof of the Four Colour Theorem**. 2005.

Disponível em: <<http://audentia-gestion.fr/MICROSOFT/4colproof.pdf>>. Acesso em: 10 mar. 2022.

HARARY, F. **Graph Theory**. Reading: Addison-Wesley, 1969.

HARARY, F. **The explosive growth of Graph Theory**. Topics in Graph Theory. Annals of the New York Academy of Sciences, v. 328, n. 1, pp. 5-11, jun. 1979.

HIGGINS, S. S. RIBEIRO, A. C. A. **Análise de redes em Ciências Sociais**. Brasília: Enap, 2018.

JAMES, I. M. **Remarkable Mathematicians : from Euler to von Neumann**. Spectrum Series of the Mathematical Association of America. New York: Cambridge University Press, 2002.

JURKIEWICZ, S. **Grafos: Uma Introdução**. Programa de Iniciação Científica da OBMEP 2007. N. 5. Disponível em <<http://obmep.org.br/apostilas.htm>>. Acesso em: 10 mar. 2022.

LARANJEIRA, Paula Alexandra, CAVIQUE, L. **Métricas de Centralidade em Redes Sociais**. Revista de Ciências da Computação v.9, 2014. <<https://doi.org/10.34627/rcc.v9i0.20>>. Acesso em: 5 ago. 2022.

De Sousa Netto, M. C. **Prevenção criminal por meio de grafos e análise de redes sociais**. Florianópolis, 2019. 81 f. Dissertação (mestrado) - UFSC, Centro de Ciências da Educação, Programa de Pós-graduação em Ciência da Informação, 2019. Disponível em: <<https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/215460>>. Acesso em: 05 ago. 2022.

LOPES, F. J. A. **Euler e As Pontes de Königsberg**. Revista Brasileira de História da Matemática, [S. l.], v. 15, n. 30, pp. 23-32, 2020. Disponível em: <<https://rbhm.org.br/index.php/RBHM/article/view/82>>. Acesso em: 10 mar. 2022.

LUCCHESI, C. L. **Introdução à Teoria dos Grafos**. XII Colóquio Brasileiro de Matemática. Rio de Janeiro: IMPA, 1979.

NEWMAN, M. E. J. **Small Worlds. The Structure os Social Networks**.

Disponível em: <<https://www.santafe.edu/research/results/working-papers/small-worlds-the-structure-of-social-networks>>. Acesso em: 05 ago. 2022.

SÁ, Carlos C. de (ed.); ROCHA, Jorge (ed.). **Treze Viagens pelo Mundo da Matemática**. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

SANTOS, A. M. **Aplicações de modelos de grafos na análise de conflitos e de redes sociais**. Recife, 2014. 162 f. Tese (doutorado) - UFPE, Centro de Ciências Exatas e da Natureza, Programa de Pós-graduação em Estatística, 2014. Disponível em: <<https://repositorio.ufpe.br/handle/123456789/12300>>. Acesso em: 05 ago. 2022.

SHIMBEL, A. **Structural parameters of communication networks**. **Bulletin of Mathematical Biophysics**. Bulletin of Mathematical Biophysics 15, pp. 501–507, 1953. <<https://doi.org/10.1007/BF02476438>>. Acesso em: 05 ago. 2022.

SOUSA, L. **O Teorema das Quatro Cores**. Revista Millenium, RE n. 24, out. 2001. Disponível em: <<http://hdl.handle.net/10400.19/647>>. Acesso em: 10 mar. 2022.

WATTS, D. J. **Six Degrees. The Science of a Connected Age**. New York: W. W. Norton & Company, 2003.

WELLMAN, B. **Structural Analysis: from method and metaphor to theory and substance**. In : WELLMAN, B. e BERKOWITZ, S. D. (editores). *Social Structures: A Network Approach*. Cambridge: Cambridge Press, 1998.

WELLMAN, B. **Physical Place and CyberPlace: The Rise of Personalized Networking**. *International Journal of Urban and Regional Research*, v. 25, n. 2, pp. 227-252, jun. 2008. Disponível em: <<https://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1111/1468-2427.00309>>. Acesso em: 05 ago. 2022.

WELLMAN, B. et. al. **The Social Affordances of Internet for Networked Individualism**. In: *Journal of Computer-Mediated Communication*, v. 8, n. 3, jun. 2006. Disponível em: <<https://onlinelibrary.wiley.com/doi/full/10.1111/j.1083-6101.2003.tb00216.x>>. Acesso em: 05 ago. 2022.