

**UNIVERSIDADE FEDERAL DO PAMPA**

**MIRIAN MARCHEZAN LOPES**

**UM MODELO ESPECTRAL PARA ESTIMAR A ENERGIA DAS ONDAS DE  
GRAVIDADE NA MÉDIA ATMOSFERA**

**Alegrete  
2014**

**MIRIAN MARCHEZAN LOPES**

**UM MODELO ESPECTRAL PARA ESTIMAR A ENERGIA DAS ONDAS DE GRAVIDADE NA MÉDIA ATMOSFERA**

Dissertação apresentada ao programa de Pós-graduação *Strictu Senso* em Engenharia da Universidade Federal do Pampa, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Engenharia.

Orientador: Prof. Dr. Antonio Gledson Oliveira Goulart

**Alegrete  
2014**

Ficha catalográfica elaborada automaticamente com os dados fornecidos  
pelo(a) autor(a) através do Módulo de Biblioteca do  
Sistema GURI (Gestão Unificada de Recursos Institucionais) .

L864m Lopes, Mirian Marchezan

Um modelo espectral para estimar a energia das ondas  
de gravidade na média atmosfera / Mirian Marchezan  
Lopes.

55 p.

Dissertação (Mestrado)-- Universidade Federal do  
Pampa, MESTRADO EM ENGENHARIA, 2014.

"Orientação: Antonio Gledson Oliveira Goulart".

1. Espectro de ondas de gravidade. 2. Média atmosfera  
planetária. 3. Equação não linear. 4. Método da  
decomposição. I. Título.

MIRIAN MARCHEZAN LOPES

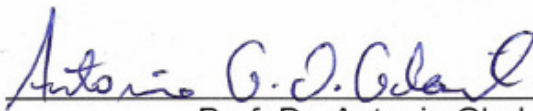
UM MODELO ESPECTRAL PARA ESTIMAR A ENERGIA DAS ONDAS DE GRAVIDADE NA MÉDIA ATMOSFERA

Dissertação apresentada ao programa de Pós-graduação *Strictu Senso* em Engenharia da Universidade Federal do Pampa, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Engenharia.

Área de concentração: Fenômenos de Transporte.

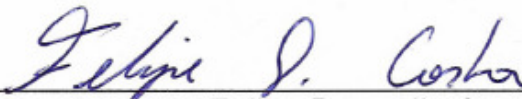
Dissertação defendida e aprovada em: 05 de junho de 2014.

Banca examinadora:



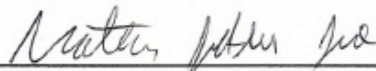
---

Prof. Dr. Antonio Gledson Oliveira Goulart  
Orientador  
(Unipampa)



---

Prof. Dr. Felipe Denardin Costa  
(Unipampa)



---

Prof. Dr. Matheus Jatkoske Lazo  
(FURG)

Dedico ao meu filho Gael, que nasceu durante o período do mestrado e tornou-se a razão do meu viver. Filho, tu mudaste a minha história, contigo sou completa, sou mais feliz, tu és a minha luz e inspiração.

## **AGRADECIMENTO**

Ao Prof. Dr. Antonio Gledson Oliveira Goulart pela sua excelente orientação, sua paciência e disponibilidade, pelos ensinamentos e pelo exemplo de profissionalismo.

Aos professores do programa de Pós-graduação em Engenharia pelos conhecimentos compartilhados.

A todos os colegas de curso pela aprendizagem e amizade.

À CAPES pelo suporte financeiro.

Aos colegas de trabalho, pelo apoio na conclusão deste trabalho.

Aos meus pais Marta e Milton, que sempre me incentivaram a estudar.

Em especial, ao meu marido Marcelo, por todo amor, compreensão, apoio constante e, principalmente, por cuidar de forma tão carinhosa do nosso Gael.

À todos os meus amigos e familiares que sempre me apoiaram.

À Deus.

“Na vida, não existe nada a se temer,  
apenas a ser compreendido”.

Marie Curie

## RESUMO

Ondas de gravidade atmosféricas são importantes no estudo da circulação e estrutura atmosférica planetária. Embora tenha efeito na baixa atmosfera, as maiores influências das ondas de gravidade ocorrem na média atmosfera, entre 10 e 100 km de altitude, devido ao decréscimo na densidade do ar e o crescimento da amplitude das ondas com a altitude. Neste trabalho, a equação para os espectros das ondas de gravidade é resolvida analiticamente pelo método da decomposição de Adomian. Como consequência, a natureza não linear do problema é preservada e os erros encontrados são devidos somente às parametrizações empregadas. Os resultados indicam que a solução da equação linearizada para o espectro das ondas de gravidade é uma boa aproximação somente para altitudes inferiores a 10 km, porque a linearização da equação conduz a uma solução que não descreve corretamente os espectros de energia cinética, comparando com a parametrização aplicada em simulações.

Palavras-Chave: espectro de ondas de gravidade, média atmosfera planetária, equação não linear, método da decomposição.



## **ABSTRACT**

Atmospheric gravity waves are important in the study of circulation and mean structure of planetary atmosphere. Although it has effect in the lower atmosphere, the major influences of gravity waves occur in the middle atmosphere, between 10 and 100 km altitude due to the decrease in air density and growth of wave amplitude with altitude. In this work, the equation for the spectra of gravity waves is analytically solved by Adomian decomposition method. As a result, the nonlinear nature of the problem is preserved and errors encountered are only due to the parameterization employed only. The results indicate that the solution of the linear equation for the wave spectrum of gravity is a good approximation only for altitudes below 10 km, as the linearization of the equation leads to a solution that does not correctly describe the spectra of kinetic energy compared with the parameterization applied in simulations.

Keywords: gravity wave spectra, planetary middle atmosphere, nonlinear equation, decomposition method.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Estrutura Vertical da Atmosfera Terrestre .....	16
Figura 2.2 – Evolução diária da Camada Limite Planetária.....	18
Figura 2.3 – Propagação de uma onda de gravidade .....	20
Figura 2.4 – Método de discretização para a solução da equação diferencial não linear das ondas de gravidade atmosférica.....	24
Figura 2.5 – Curvas da solução analítica da equação não linear e da solução pelo método da decomposição de Adomian .....	29
Figura 4.1 – Espectros de energia das ondas de gravidade com diferentes números de termos utilizados no método da decomposição de Adomian.....	34
Figura 4.2 – Espectro de energia obtido pelo método da decomposição de Adomian e pelo modelo linearizado para uma altitude $z = 1km$ . .....	35
Figura 4.3 – Espectro de energia obtido pelo método da decomposição de Adomian e pelo modelo linearizado para uma altitude $z = 5km$ .....	35
Figura 4.4 – Espectro de energia obtido pelo método da decomposição de Adomian e pelo modelo linearizado para uma altitude $z = 10km$ .....	36
Figura 4.5 – Espectro de energia obtido pelo método da decomposição de Adomian e pelo modelo linearizado para uma altitude $z = 20km$ .....	36
Figura 4.6 – Espectro de energia obtido pelo método da decomposição de Adomian e pelo modelo linearizado para uma altitude $z = 50km$ .....	37
Figura 4.7 – Espectro de energia obtido pelo método da decomposição de Adomian e pelo método numérico para uma altitude $z = 1km$ .....	38
Figura 4.8 – Espectro de energia obtido pelo método da decomposição de Adomian e pelo método numérico para uma altitude $z = 5km$ .....	39
Figura 4.9 – Espectro de energia obtido pelo método da decomposição de Adomian e pelo método numérico para uma altitude $z = 20km$ .....	39
Figura 4.10 – Espectro de energia obtido pelo método da decomposição de Adomian e pelo método numérico para uma altitude $z = 50km$ .....	40

## LISTA DE ABREVIATURAS

- AL – Atmosfera Livre
- CLA – Camada Limite Atmosférica
- CLC – Camada Limite Convectiva
- CLE – Camada Limite Estável
- CLP – Camada Limite Planetária
- CLR – Camada Limite Residual

## LISTA DE SÍMBOLOS

$a_0$	constante utilizada para obter a densidade espectral	
$c_v$	calor específico a volume constante	$[\text{J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}]$
$\vec{g}$	aceleração da gravidade	$[\text{m}/\text{s}^2]$
$\vec{F}$	vetor força	$[\text{N}]$
$k_h$	número de onda horizontal	
$m_R$	parte real do número de onda vertical	
$m_{RZ}$	número de onda associado ao máximo de espectros de onda de gravidade	
$N$	frequência de Brunt-Väisälä	$[\text{rad}/\text{s}]$
$p$	pressão	$[\text{N}/\text{m}^2]$
$R$	constante dos gases ideais	
$S$	densidade espectral de energia	$[\text{m}^3/\text{s}^2]$
$Q$	quantidade de calor por unidade de massa e tempo	$[\text{J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{s}^{-1}]$
$q_0$	campo de velocidade de perturbação	
$t$	tempo	$[\text{s}]$
$T$	temperatura	$[\text{K}]$
$\vec{v}$	campo da velocidade	$[\text{m}/\text{s}]$
$z$	altitude	$[\text{m}]$
$W$	solução do tipo onda plana	
$\beta$	coeficiente de amortecimento não linear	
$\rho$	densidade	$[\text{kg}/\text{m}^3]$
$\rho_0$	densidade média do ar na altura de referência	$[\text{kg}/\text{m}^3]$
$\rho_{0z}$	densidade média do ar na altura $z$	$[\text{kg}/\text{m}^3]$
$\sigma_u$	velocidade do vento horizontal	$[\text{m}/\text{s}^2]$
$\vec{\Omega}$	campo da velocidade angular da Terra	$[\text{m}/\text{s}]$
$\Omega_y$	velocidade angular na direção $y$	$[\text{m}/\text{s}]$
$\Omega_z$	velocidade angular na direção $z$	$[\text{m}/\text{s}]$
$\omega$	frequência angular ou aparente	$[\text{rad}/\text{s}]$

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO .....</b>	<b>13</b>
<b>2</b>	<b>FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA .....</b>	<b>15</b>
2.1	A atmosfera terrestre .....	15
2.2	Ondas de gravidade atmosféricas .....	18
2.2.1	Teoria linear .....	20
2.2.2	Espectros de Energia.....	22
2.3	A equação para os espectros de ondas de gravidade .....	24
2.4	Método da decomposição de Adomian .....	26
2.4.1	Aplicação do método da decomposição em uma equação não linear .....	28
<b>3</b>	<b>METODOLOGIA .....</b>	<b>31</b>
3.1	Solução da equação para os espectros de ondas de gravidade pelo método da decomposição de Adomian.....	31
<b>4</b>	<b>RESULTADOS E DISCUSSÕES.....</b>	<b>33</b>
4.1	Comparação da solução da equação para os espectros de energia das ondas de gravidade pelo método da decomposição de Adomian com a solução linearizada .....	34
4.2	Comparação da solução da equação para os espectros de energia das ondas de gravidade pelo método da decomposição de Adomian com a solução numérica .....	38
<b>5</b>	<b>CONCLUSÃO .....</b>	<b>41</b>
	<b>REFERÊNCIAS.....</b>	<b>43</b>
	<b>APÊNDICE.....</b>	<b>47</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Certamente a composição natural da atmosfera terrestre tem variado desde sua origem. A partir de meados do século XVIII, com a Revolução Industrial, aumentou muito a poluição do ar, atualmente, quase todas as grandes cidades do mundo sofrem com os seus efeitos. Essa poluição afeta diretamente à vida, prejudicando o ecossistema e afetando o clima. Sendo assim, é muito importante a realização de estudos de impacto ambiental para a instalação de novas fontes de emissão de poluentes, bem como para conhecer a real contribuição de fontes antigas na degradação da qualidade do ar em sua área de influência.

A concentração de contaminantes no ar diminui à medida que esses são dispersos na atmosfera, o que depende de diversos fatores atmosféricos. A enorme variação das escalas espaciais e temporais dos fenômenos meteorológicos, a composição do ar atmosférico, as mudanças de fase, as reações químicas e fotoquímicas, os diferentes regimes de escoamento devem ser considerados nos estudos da atmosfera terrestre. O contorno exterior de limites, de fenômenos e trocas de propriedades pouco conhecidas, torna ainda mais complexo o fechamento dos modelos físico-matemáticos. Essas características diversificadas da crosta terrestre impedem o rigor de uma formulação matemática baseada em primeiros princípios.

Entre os diversos fenômenos que ocorrem na atmosfera terrestre, os oscilatórios possuem grande importância. Governadas por forças de compressibilidade do ar, forças rotacionais de escala planetária e força devido a aceleração da gravidade, as ondas na atmosfera são causadas por perturbações que provocam o desequilíbrio do meio e pelas forças restauradoras em sentido contrário à perturbação.

As ondas de gravidade atmosféricas se originam principalmente na baixa atmosfera, da superfície terrestre até aproximadamente 2 km de altitude, e propagam-se até a alta atmosfera. São importantes no estudo da estrutura, variabilidade e circulação atmosférica, além de contribuírem para o transporte de energia e quantidade de movimento e para a produção de turbulência (HODGES, 1967; FRITTS E DUNKERTON, 1985; HINES, 1988; FINNIGAN, 1988, 1999; EINAUDI E FINNIGAN, 1993; NAPPO, 2002; ZILITINKEVICH ET AL, 2009).

Neste trabalho, propõem-se uma solução analítica para a equação de onda de gravidade, resolvendo-a diretamente sem linearização através do método da decomposição (ADOMIAN, 1990, 1994a, 1994b). Assim, a natureza não linear do problema é preservada, permitindo que os erros encontrados sejam atribuídos apenas à parametrização utilizada.

Para resolver a equação da variação do espectro de onda de gravidade com a altura, foi desprezada a variação da amplitude da onda devido à variação da densidade do ar com a altitude. Os resultados obtidos com o modelo são comparados com a solução linear da equação para os espectros de onda de gravidade e com um método numérico já consolidado.

Este trabalho está estruturado em cinco capítulos. No capítulo 2 são apresentados os principais conceitos sobre a atmosfera terrestre e é feita uma fundamentação teórica sobre ondas de gravidade, método da decomposição e sobre a equação não linear para os espectros de onda de gravidade. O capítulo 3 trata da aplicação do método da decomposição de Adomian para encontrar a solução analítica dos espectros de onda de gravidade. Os resultados e discussões são descritos no capítulo 4, onde é apresentado a comparação do modelo proposto com a solução linearizada e com a solução numérica. Encerra-se com o capítulo 5, com algumas considerações finais.

## 2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo faz-se uma revisão teórica dos temas abordados nesta dissertação. São apresentados os conceitos fundamentais para a realização do trabalho: ondas de gravidade atmosféricas, método da decomposição de Adomian e a equação não linear para os espectros das ondas de gravidade.

### 2.1 A atmosfera terrestre

A atmosfera terrestre é a camada mais externa da Terra e fundamental para a existência de vida em nosso planeta. Composta por gases (em média, 78% de nitrogênio, 21% de oxigênio, 0,03% de gás carbônico e 0,01% de outras substâncias em suspensão), a atmosfera tem sua densidade máxima junto à Crosta Terrestre e vai ficando cada vez menos densa à medida que se afasta do solo, até confundir-se com os gases rarefeitos interplanetários, não tendo assim um limite superior bem definido.

Para estudar e compreender a atmosfera terrestre, muitos autores a dividem em camadas ou regiões, de acordo com os diversos processos físicos e químicos existentes. A Figura 2.1 apresenta a estrutura vertical da atmosfera terrestre até 110 km de altura, denominando suas camadas, em função do perfil de temperatura.

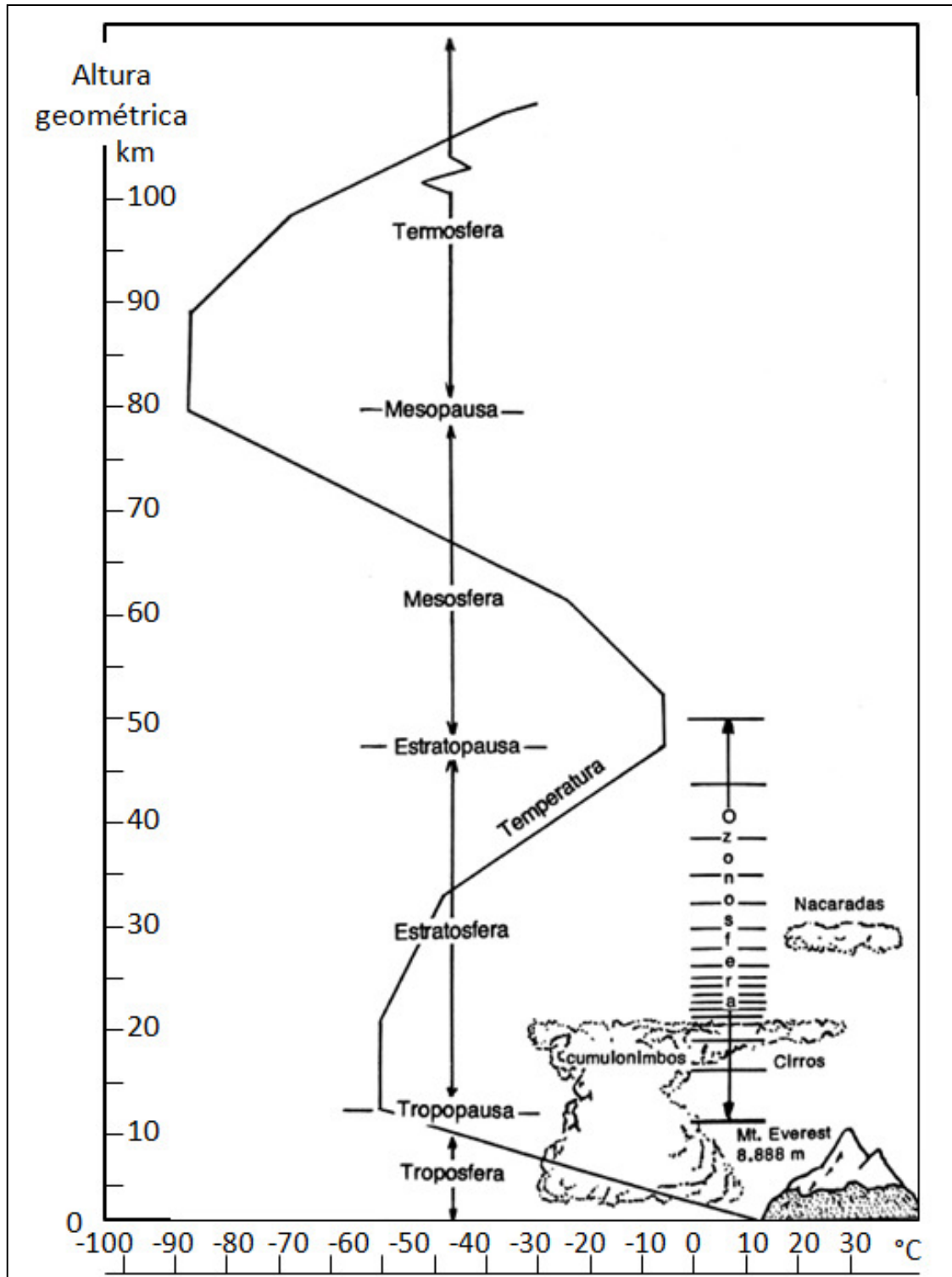
A troposfera é a camada que se encontra em contato com a superfície da Terra e vai até uma altitude de 11 km. A temperatura diminui com a altitude a partir da temperatura de 20°C até -50°C, aproximadamente. Os principais processos de transferência de energia nessa região são radiação e convecção. A maioria dos fenômenos meteorológicos de interesse prático acontece na troposfera, entretanto, é importante ressaltar que não existe limite físico entre as camadas, todas interagem entre si.

Acima da troposfera, encontra-se a estratosfera, que fica entre 15 km e 50 km de altitude e apresenta um gradiente positivo de temperatura. Ocasionalmente pela presença do ozônio que absorve a radiação ultravioleta solar, a temperatura chega perto de 0°C. Nessa região, o processo de radiação é o mecanismo de maior importância na dissipação de calor.



Entre 50 km e 90 km de altitude, encontra-se a região mais fria de toda atmosfera, a mesosfera. A temperatura diminui com a altitude atingindo em torno de  $-90^{\circ}\text{C}$ . A radiação continua sendo o principal processo de troca de energia.

Figura 2.1 – Estrutura Vertical da Atmosfera Terrestre



Fonte: Adaptada de ALVES, 2000.

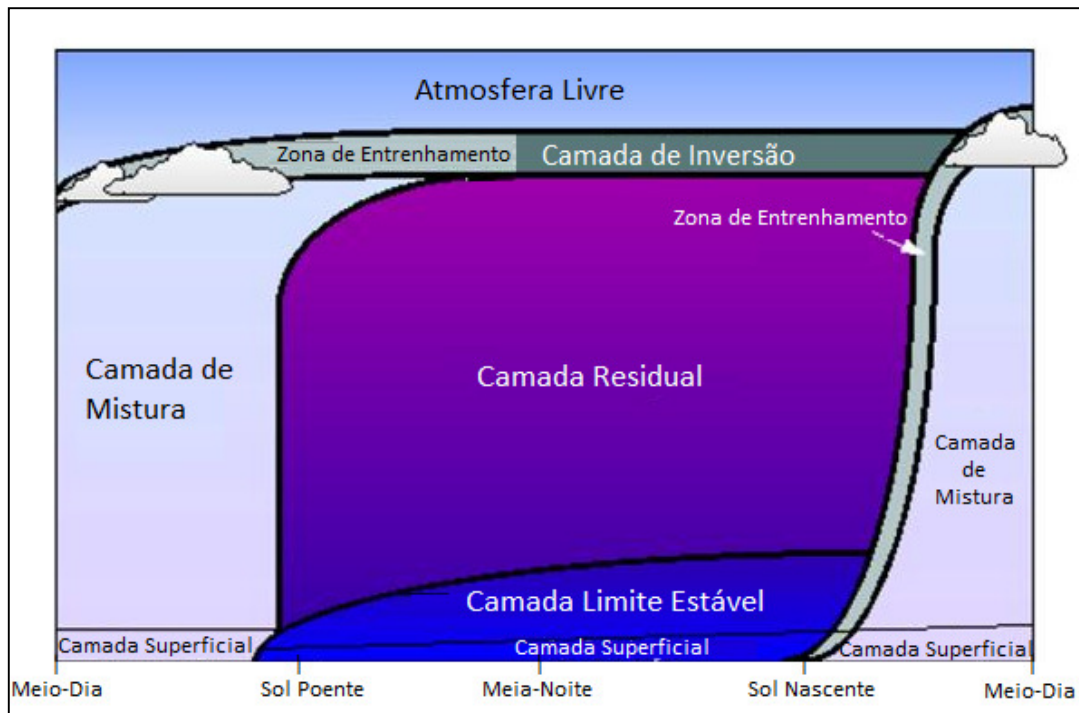
A termosfera inicia entre 90-100 km de altitude e se estende até aproximadamente 300 km. Essa região apresenta forte absorção da radiação ultravioleta, processo responsável pelas altas temperaturas da região, chegando a valores superiores a 1000°C, dependendo da atividade solar, porém ao medir essa temperatura o valor encontrado será próximo a 0°C, como mostra a figura.

Outra divisão comumente encontrada é a da troposfera, como mostra a Figura 2.2. A troposfera é dividida em duas partes: a parte mais baixa, da superfície terrestre até aproximadamente 3 km, é denominada de Camada Limite Atmosférica (CLA) ou Camada Limite Planetária (CLP). Nesta camada se encontra os principais contaminantes particulados criados como subproduto da tecnologia desenvolvida pelos seres humanos. Os contaminantes são transportados na horizontal pelo vento médio e na vertical pelo fluxo turbulento.

A Camada Limite Planetária possui diferentes características ao longo de sua extensão e pode ainda ser dividida em várias partes. A Camada Limite Convectiva (CLC), durante o dia com intensa turbulência, pois a CLA aumenta sua temperatura em virtude do aquecimento diurno da superfície e a dissipação do calor ocorre por convecção. As principais fontes convectivas responsáveis pela mistura desta camada são correntes ascendentes de ar quente, que se deslocam a partir da superfície, e as de ar frio que descem dos topos das nuvens convectivas (Stull, 1988).

A Camada Limite Estável (CLE), com a sua formação próximo ao pôr do sol estendendo até a noite, a superfície terrestre se esfria e a turbulência é menos intensa e é gerada mecanicamente pelo cisalhamento do vento na vertical, tem a tendência a dissipar pelo efeito da estabilidade estática da estratificação térmica vertical (inversão térmica). Acima da CLE se encontra a Camada Limite Residual (CLR), cuja principal fonte de turbulência é de origem mecânica. O restante da troposfera denomina-se Atmosfera Livre (AL), onde os processos meteorológicos associados aos sistemas atmosféricos são de larga escala.

Figura 2.2 – Evolução diária da Camada Limite Planetária



Fonte: Adaptada de Stull, 1988.

Particularmente, este estudo concentra-se na média atmosfera, região da troposfera superior e baixa termosfera, localizada entre 10–110 km, onde os efeitos das ondas de gravidade são mais intensos, como será discutido a seguir.

## 2.2 Ondas de gravidade atmosférica

A partir dos anos 50, as ondas de gravidade atmosférica começaram a ser investigadas. Hines (1960) explicou que as “irregularidades” nos perfis dos ventos na alta atmosfera estavam associadas aos modos de propagação de ondas de gravidade internas na atmosfera.

As ondas atmosféricas originam-se devido às forças restauradoras que surgem em sentido contrário às perturbações que causam desequilíbrio do meio, como em uma parcela de ar. No caso, as ondas de gravidade internas na atmosfera têm origem devido ao balanço entre as forças de gravidade, de Coriolis e o gradiente de pressão.

Na atmosfera quando uma “parcela de ar” é tirada da posição de equilíbrio surge uma força restauradora na parcela do fluido deslocado. O termo “onda de

gravidade” é devido à força da gravidade ser a força restauradora em questão. Quando a atmosfera se encontra em equilíbrio existe uma igualdade entre os módulos das forças devido ao gradiente de pressão e da força de gravidade. Se uma parcela de ar for deslocada deste equilíbrio hidrostático, aparecerá uma força restauradora em oposição a essa perturbação, de tal forma a retornar a parcela de ar deslocada da sua posição original. Assim, esta parcela de ar vai oscilar em torno da sua posição inicial com uma frequência característica. Esta frequência é denominada frequência de Brunt-Väisälä (NAPOO, 2002).

A geração das ondas de gravidade atmosféricas depende da condição de estabilidade atmosférica e da presença de distúrbios que possam gerar instabilidades. Na troposfera, as possíveis fontes são os fluxos de ar sobre montanhas, as tempestades convectivas, as atividades frontais, o cisalhamento de vento e as interações onda-onda. (FRITTS; ALEXANDER, 2003).

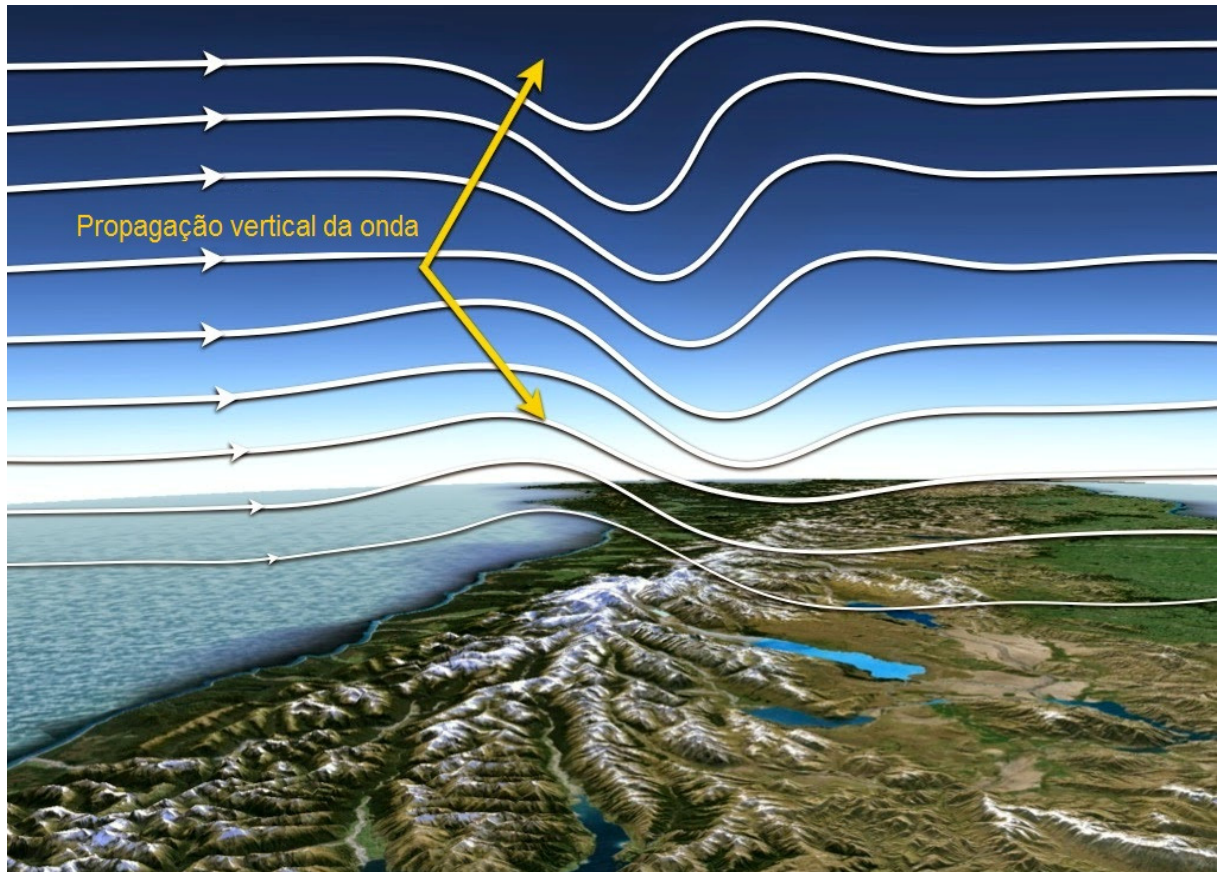
As ondas de gravidade podem ser classificadas como propagantes ou evanescentes, dependendo de suas características. As ondas que se propagam tanto na horizontal quanto na vertical são denominadas propagantes, já as ondas que se propagam somente na horizontal são chamadas de evanescentes. Neste trabalho, discute-se sobre as ondas de gravidade atmosféricas, que são ondas propagantes, sendo a propagação vertical o ponto de interesse, pois é devido a essa propagação que existe transferência de energia e momento de uma região mais baixa para uma região mais alta da atmosfera.

As ondas de gravidade atmosférica são ondas com períodos na ordem de minutos a horas e a maior influência está entre 10 e 110 km de altitude, devido ao decréscimo exponencial da densidade do ar e ao aumento da amplitude da onda com a altitude à medida que se propagam. (FRITTS; ALEXANDER, 2003).

Devido à densidade vertical decrescente da atmosfera neutra, as amplitudes das ondas de gravidade crescem com altitude a fim de manter o fluxo de energia constante, portanto a amplitude da onda de gravidade continua a crescer com a altitude até alcançar uma determinada altitude onde as ondas não suportam mais as oscilações e se quebram, pois a onda não suporta oscilações tão grandes devido às instabilidades, depositando energia e momentum na atmosfera e não contribuem no transporte de escalares. Portanto, estas ondas são responsáveis por transmitir energia e momentum, e assim, podem afetar a estrutura horizontal e vertical da atmosfera. (HINES, 1974b).

A Figura 2.3 ilustra a propagação de uma onda de gravidade. A amplitude da onda aumenta com a altitude à medida que a densidade da atmosfera diminui, mantendo o fluxo de energia constante.

Figura 2.3 – Propagação de uma onda de gravidade



Fonte: Adaptada de UCAR, 2014.

### 2.2.1 Teoria linear

Na literatura, a estrutura geral para o estudo de ondas de gravidade é a teoria de onda linear proposto por Hines (1960) e a principal expressão que a governa é a equação de Taylor-Goldstein. Chimonas (2002) e Meillier et al. (2008) analisaram algumas propriedades das ondas de gravidade na Camada Limite Estável a partir da equação de Taylor-Goldstein.

As equações básicas que descrevem o movimento atmosférico, de acordo com Gossard e Hooke (1975), no sistema de coordenada Cartesiano na qual  $x$ ,  $y$ , e  $z$  representam as coordenadas norte, leste e vertical, respectivamente, são:

1) A Equação 2.1 que descreve a conservação do momentum:

$$\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right) + 2\vec{\Omega} \times \vec{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \vec{g} + \frac{1}{\rho}\vec{F} \quad (2.1)$$

onde  $\vec{v} = (q, v, w)$  representa o campo de velocidade;  $\vec{\Omega} \times \vec{v}$  é a força de Coriolis,  $\vec{\Omega} = (0, \Omega_y, \Omega_z)$  representa a velocidade angular da Terra;  $\vec{g}$  é a aceleração da gravidade; as variáveis atmosféricas  $\rho$  e  $p$  são a densidade e a pressão atmosférica e  $\vec{F}$  representa uma força externa.

2) A Equação 2.2 que é a equação da continuidade que representa a conservação de massa dentro de um dado volume:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (2.2)$$

3) A Equação 2.3 que representa a conservação da energia:

$$Q = c_v \frac{dT}{dt} + p \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{\rho}\right) \quad (2.3)$$

onde o termo  $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla$  é o operador de Stokes, que representa a derivada total no sistema Euleriano. O parâmetro  $c_v$  é o calor específico a volume constante e  $Q$  é a quantidade de calor recebida por uma massa de ar por unidade de massa e por unidade de tempo. O termo  $p \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{\rho}\right)$  é o trabalho realizado pela massa de ar quando esta sofre expansão ou contração.

4) A Equação 2.4 que é a equação dos gases perfeitos que pode ser aplicada para a condição de ar seco:

$$p = \rho RT \quad (2.4)$$

onde  $R$  é a constante dos gases ideais e  $T$  a temperatura.

A teoria linear ou a teoria da perturbação de primeira ordem lineariza o conjunto dessas equações básicas para um fluido não viscoso, não rotativo e não compressível, obtendo assim a Equação 2.5, que é a expressão de Taylor-Goldstein (NAPPO, 2002),

$$\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + \left[ \frac{N^2}{(q_0 - c)^2} - \frac{q_0''}{q_0 - c} - k_h^2 \right] W = 0 \quad (2.5)$$

onde  $W$  é a suposta solução do tipo onda plana,  $t$  é o tempo em segundos,  $q_0$  é o campo de velocidade de perturbação,  $N$  a frequência de Brunt-Väisälä dada em radianos por segundo,  $c = \frac{\omega}{k}$  e  $\omega$  é a frequência angular ou aparente,  $k_h$  é o número de onda horizontal.

A equação de Taylor-Goldstein é ponto de partida para a análise dos efeitos do cisalhamento e gradientes térmicos sobre o regime de propagação das ondas de gravidade.

A teoria linear, em muitos casos é suficiente para o estudo das ondas de gravidade devido à maior simplicidade de descrever e resolver tais sistemas, como foi discutido por Hunt, Kaimal, e Gaynor (1985) e Finnigan (1988). Entretanto, não é o procedimento mais adequado, pois despreza aspectos importantes da atmosfera, tais como a turbulência, a variação temporal das amplitudes das ondas, variações térmicas, variação da aceleração da gravidade, ausência de movimento rotacional, entre outros.

Para uma descrição completa do sistema atmosférico perturbado pelas ondas de gravidade, os termos não lineares devem ser considerados.

### 2.2.2 Espectros de energia

Outra metodologia de estudo das propriedades das ondas de gravidade é através dos espectros de energia. Um espectro nada mais é que uma representação das amplitudes ou intensidades de uma grandeza, neste caso a energia, em função da frequência ou comprimento de onda.

Modelos de espectros de ondas de gravidade têm evoluído muito com o tempo. Várias teorias vinculam os espectros de onda de gravidade a um

determinado comportamento, sobre um intervalo particular de comprimento de onda ou frequência.

Esses modelos observacionais ou teóricos levaram a uma universalidade dos espectros das ondas de gravidade, e demonstram bons resultados na análise das propriedades médias das ondas de gravidade e suas variações com a altitude, como encontrados em Van-Zandt (1982); Balsley and Carter (1982); Nakamura et al. (1993); Collins et al. (1994); Smith et al. (1987); Tsuda et al. (1989, 1990); Wilson et al. (1991a, 1991b).

Um componente crítico de praticamente todos os modelos de grande escala atmosférica são as parametrizações adotadas. Dependendo da parametrização utilizada para uma determinada grandeza, o modelo será tão próximo do comportamento real. Além das deficiências teóricas, até mesmo os mais poderosos computadores disponíveis ainda não são o suficiente para resolver todas as escalas relevantes do movimento atmosférico planetário.

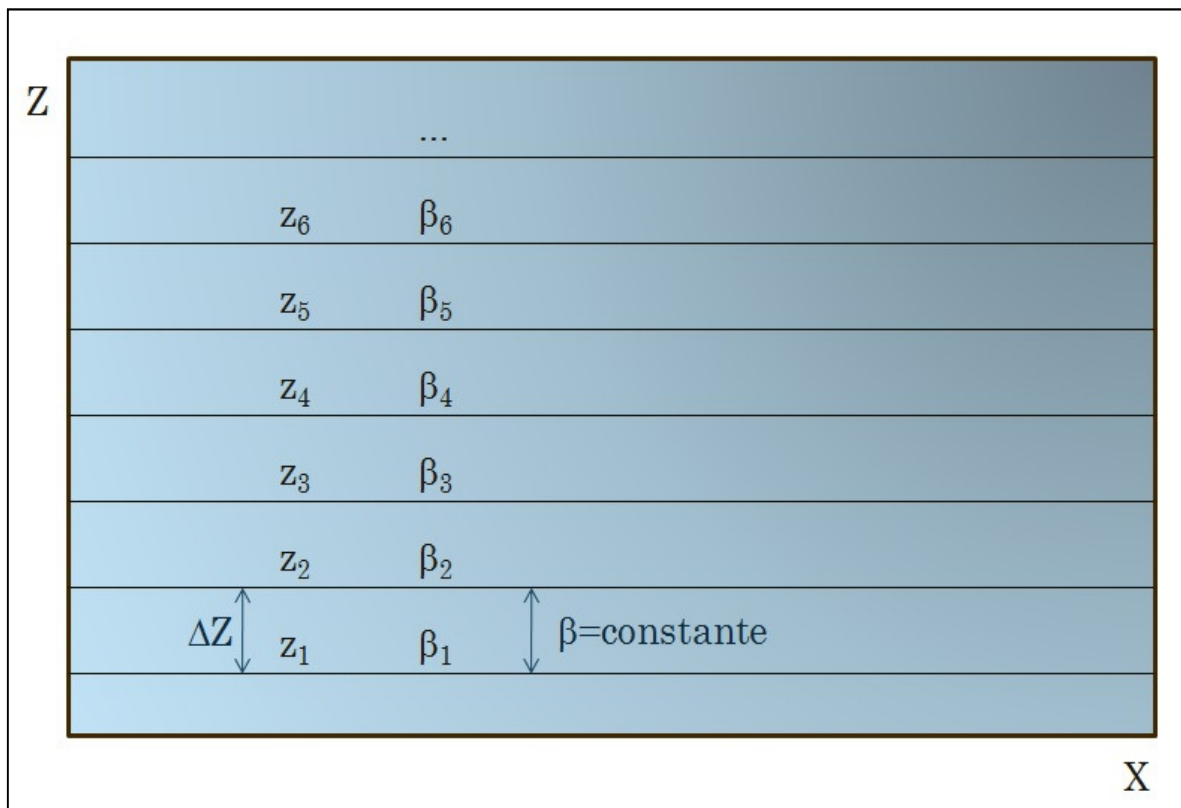
Medvedev e Klaassen (1995, 2000) obtiveram uma equação para as ondas de gravidade a partir da definição do transporte de momento de onda produzido por um harmônico e apresentaram um método de parametrização para calcular o transporte de momento das ondas de gravidade na média atmosfera. A equação obtida é uma equação diferencial não linear e não é resolvida diretamente.

Medvedev e Klaassen (1995, 2000) em seu trabalho utilizaram a altura da camada  $Z$  aproximadamente 100 km, discretizando em subintervalos de 500m. Totalizando assim, duzentas equações.

A Figura 2.4 ilustra o método de solução da equação proposto por Medvedev e Klaassen (1995, 2000), onde a altura da camada  $Z$  é discretizada em subintervalos de maneira que, em cada intervalo, uma equação linear é resolvida considerando os valores médios das grandezas, sendo que  $\beta$  é o coeficiente de amortecimento não linear devido a interações entre a componente da onda com outras componentes do espectro e da interação da onda com o meio.



Figura 2.4 – Método de discretização para a solução da equação diferencial não linear das ondas de gravidade atmosférica



Este procedimento é bastante utilizado quando não é possível resolver diretamente as equações diferenciais envolvidas. O método é adequado para a solução do problema, entretanto é um método muito trabalhoso, pois são necessárias tantas equações quantos forem os subintervalos.

Para descrever e compreender um fenômeno, é extremamente conveniente obter a solução analítica das equações envolvidas, pois a importância de cada um dos parâmetros é facilmente identificada (Moreira et al, 2006; Goulart et al, 2008). Por solução analítica, entende-se que nenhuma aproximação é feita ao longo da derivação da solução, exceto para o truncamento da série.

### 2.3 A equação para os espectros de ondas de gravidade

Uma equação para a evolução dos espectros de ondas de gravidade em função da altitude foi deduzida por Medvedev e Klaassen (1995, 2000) a partir da divergência de fluxo de momento,

$$\frac{\partial S(m_R, z)}{\partial z} - \left( -\frac{\rho_{0z}}{\rho_0} + \frac{m_{Rz}}{m_R} - \beta(m_R, z) \right) S(m_R, z) = 0 \quad (2.19)$$

onde  $S$  é a densidade espectral de energia do vento horizontal associada com as ondas de gravidade na altura  $z$ ,  $\rho_0$  é a densidade média do ar na altura de referência,  $\rho_{0z}$  é a densidade do ar em altitude  $z$ ,  $m_R$  é a parte real do número de onda vertical ( $m = m_R + im_I$ ),  $m_{Rz}$  é o número de onda associado ao máximo de espectros de onda de gravidade e  $\beta$  é o coeficiente de amortecimento não linear devido as interações entre o componente com outras ondas no espectro.

Para resolver a Equação 2.19, é necessária a parametrização do coeficiente  $\beta$  em função da densidade espectral de energia  $S$ , como foi sugerida por Medvedev e Klaassen (1995, 2000),

$$\beta(m_R, z) = \frac{\sqrt{2\pi}N(z)}{\sigma_u(z)} e^{\left(-\frac{N^2(z)}{2m_R\sigma_u^2(z)}\right)} \quad (2.20)$$

onde  $N$  é a frequência Brunt-Väisälä e a equação 2.21 é a variância da velocidade do vento horizontal criada por todas as ondas no espectro com números de onda verticais maiores do que um determinado  $m_R$ .

$$\sigma_u^2(z) = \int_{m_R}^{\infty} S(m_R', z) dm_R' \quad (2.21)$$

Substituindo as Equações 2.20 e 2.21 na Equação 2.19, obtém-se a equação:

$$\frac{\partial S(m_R, z)}{\partial z} + \left( \frac{\rho_{0z}}{\rho_0} - \frac{m_{Rz}}{m_R} \right) S(m_R, z) + \frac{\sqrt{2\pi}N(z)}{\sqrt{\int_{m_R}^{\infty} S(m_R, z) dm_R}} e^{\left(-\frac{N^2(z)}{2m_R\sqrt{\int_{m_R}^{\infty} S(m_R, z) dm_R}}\right)} S(m_R, z) = 0 \quad (2.22)$$

A evolução dos espectros das ondas de gravidade atmosférica com a altitude é dada pela Equação 2.22, uma equação integro-diferencial não linear, que não tem uma solução analítica simples.

## 2.4 Método da decomposição de Adomian

O método da decomposição de Adomian (ADOMIAN, 1990, 1994a, 1994b), é um método eficiente para a resolução de equações diferenciais não lineares de vários tipos. Nos últimos anos, o método da decomposição de Adomian tem sido aplicado com sucesso para resolver muitas equações não lineares em várias ciências aplicadas, por exemplo, ver Babolian e Biazar (2002); Goulart, et al (2008); Basak et al (2009); Azreg-Ainou (2010).

O método da decomposição obtém a solução de equações não lineares como uma série, em que cada termo pode ser facilmente determinado. Os termos da série são denominados de polinômios de Adomian.

Considerando a seguinte equação diferencial não linear

$$Lu + Ru + Nu = g \quad (2.6)$$

onde  $L$  é a derivada de mais alta ordem,  $R$  é o restante do operador linear,  $Nu$  é o termo não linear e o  $g$  é um termo conhecido.

Isolando o operador de mais alta ordem  $L$  e aplicando o operador inverso  $L^{-1}$  na Equação 2.6 temos,

$$L^{-1}Lu = -L^{-1}Ru - L^{-1}Nu + L^{-1}g \quad (2.7)$$

Para problemas de valor inicial podemos definir o operador  $L$  como  $L = \frac{d^n}{dt^n}$ . Neste caso,  $L^{-1}$  é o operador de integração  $n$  vezes definida de 0 a  $t$ . Para o operador  $L = \frac{d}{dt}$ , temos  $L^{-1}Lu = u - u(0)$  e portanto a Equação 2.7 torna-se,

$$u = u(0) - L^{-1}Ru - L^{-1}Nu + L^{-1}g \quad (2.8)$$

O método de Adomian consiste em decompor o termo linear em uma soma infinita de componentes,

$$u = \sum_{n=0}^M u_n \quad (2.9)$$

e o termo não linear pode ser representado pela série,

$$Nu = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(u_0, u_1 \dots u_n) \quad (2.10)$$

onde  $A_n$  são os polinômios de Adomian. Estes são obtidos a partir de uma expansão em série de Taylor do termo não linear em torno do primeiro termo da série  $u_0$ .

Neste trabalho, foram usados os oito primeiros polinômios de Adomian, sendo que através das Equações 2.11 à 2.15 que segue, pode-se obter cada polinômio.

$$f(u_0) = N(u_0) \quad (2.11)$$

$$A_0 = f(u_0) \quad (2.12)$$

$$A_1 = u_1 f'(u_0) \quad (2.13)$$

$$A_2 = u_2 f'(u_0) + \frac{1}{2} u_1^2 f''(u_0) \quad (2.14)$$

$$A_3 = u_3 f'(u_0) + u_1 u_2 f''(u_0) + \frac{1}{6} u_1^3 f'''(u_0) \quad (2.15)$$

Até o  $n$ -ésimo termo:

$$A_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n} [N(\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i u_i)]_{\lambda=0} \quad n = 0,1,2, \dots \quad (2.16)$$

Observa-se que com a Equação 2.16 pode-se obter formalmente os termos  $A_n$ . (ADOMIAN, 1994b).

### 2.4.1 Aplicação do método da decomposição em uma equação não linear

A seguir, aplica-se o método da decomposição de Adomian para a Equação 2.17, que é um caso mais simples de uma equação diferencial não linear.

$$\frac{\partial u(t)}{\partial t} + [u(t)]^2 = 0 \quad (2.17)$$

Neste caso, a Equação (2.6) será  $Lu + Nu = 0$  e com  $u(0) = 2$ .

Da Equação 2.16, foram encontrados os seis primeiros polinômios de Adomian para a Equação 2.17, sendo eles:

$$A_0 = u_0^2$$

$$A_1 = -2u_0^3 t$$

$$A_2 = 3u_0^4 t^2$$

$$A_3 = -4u_0^5 t^3$$

$$A_4 = 5u_0^6 t^4$$

$$A_5 = 6u_0^7 t^5$$

$$A_6 = 7u_0^8 t^6$$

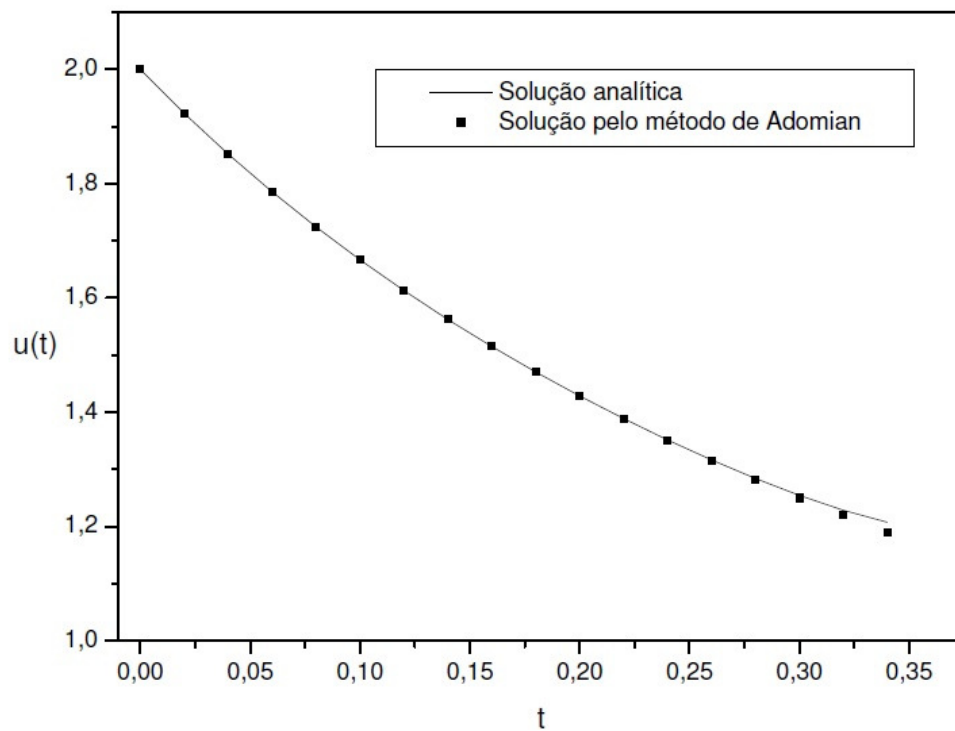
Como  $u_0 = 2$ , obtém-se a Equação 2.18 como solução para a equação proposta. O critério de truncamento da série no sexto termo se deu em função de que os valores já convergiram para o mesmo resultado da forma analítica em duas casas decimais.

$$u(t) = 2 + 4t + 8t^2 - 16t^3 + 32t^4 - 64t^5 + 128t^6 - 256t^7 \quad (2.18)$$

A solução analítica da equação é  $u(t) = \frac{2}{1+2t}$ .

A Figura 2.5 a seguir, mostra a comparação entre os gráficos da equação dada de forma analítica com a equação encontrada pelo método de Adomian (Equação 2.18), mostrando que os resultados são semelhantes.

Figura 2.5 – Curvas da solução analítica da equação não linear e da solução pelo método da decomposição de Adomian





### 3 METODOLOGIA

Neste capítulo a solução da equação para os espectros das ondas de gravidade pelo método da decomposição de Adomian é apresentada.

#### 3.1 Solução da equação para os espectros de onda de gravidade pelo método da decomposição de Adomian

Para resolver a Equação 2.22 é considerado o método da decomposição de Adomian (Adomian, 1990, 1994a, 1994b) descrito no capítulo 2. Identificando os termos na Equação 2.6 da Equação 2.22, temos:

$$S(m_R, z) \Rightarrow u \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \Rightarrow L \quad (3.2)$$

$$\left( \frac{\rho_{0z}}{\rho_0} - \frac{m_{Rz}}{m_R} \right) \Rightarrow R \quad (3.3)$$

$$\frac{\sqrt{2\pi}N(z)}{\sqrt{\int_{m_R}^{\infty} S(m_R, z) dm_R}} e^{\left( -\frac{N^2(z)}{2m_R \sqrt{\int_{m_R}^{\infty} S(m_R, z) dm_R}} \right)} \Rightarrow N \quad (3.4)$$

$$g = 0 \quad (3.5)$$

A Equação 2.6 pode ser escrita como segue,

$$Lu + Ru + Nu = 0 \quad (3.6)$$

A solução da Equação 2.22 é dada pela Equação 2.8, sendo que neste caso  $L^{-1} \rightarrow \int dz$ ,

$$u = u(0) - L^{-1}Ru - L^{-1}Nu \quad (3.7)$$

Agora, aplica-se o método da decomposição e substitui as Equações 2.9 e 2.10 na expressão 3.7, pode-se identificar:



$$u_0 = u(0) \quad (3.8)$$

$$u_1 = -(RL^{-1}u_0 + L^{-1}A_0) \quad (3.9)$$

$$u_2 = -(RL^{-1}u_1 + L^{-1}A_1) \quad (3.10)$$

$$u_3 = -(RL^{-1}u_2 + L^{-1}A_2) \quad (3.11)$$

...

$$u_n = -(RL^{-1}u_{n-1} + L^{-1}A_{n-1}) \quad (3.12)$$

onde  $A_n$  são os polinômios de Adomian calculados pela Equação 2.16. Os termos da solução estão descritos nos apêndices deste trabalho.

Então, a solução da Equação 2.22 é,

$$S(m_R, z) = \sum_{n=0}^{n=8} u_n \quad (3.13)$$

sendo que  $u_n$  foi calculado pela Equação 3.12.

Para o somatório na Equação 3.13, foram necessários oito termos para uma boa convergência, considerando erro a partir da segunda casa decimal.

## 4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Como na literatura não é encontrada a solução analítica do problema, a solução obtida neste trabalho, que considera a não linearidade da equação, é comparada com a solução da equação linearizada e também com a solução numérica.

A solução da Equação 3.13 é dada pelo espectro de energia para uma altitude de referência da onda. Assume-se que os espectros de ondas de gravidade consistem de uma forma geral no espectro de Desaubies (Desaubies, 1976), em  $z = 0$  com  $S(m_R, 0) = S_0$ ,

$$S_0 = a_0 \frac{N^2}{m_{RZ}^3} \frac{m_R/m_{RZ}}{1 + (m_R/m_{RZ})^4} \quad (4.1)$$

onde  $a_0$  é uma constante,  $m_{RZ}$  é o número de onda associado ao máximo dos espectros de onda de gravidade,  $N$  é a frequência de Brunt-Väisälä.

Para a comparação do espectro de onda de gravidade calculado a partir da Equação 3.13 com a solução linearizada da Equação 2.22, foram considerados os valores utilizados por Medvedev e Klaassen (2000) para  $a_0$ ,  $m_{RZ}$  e  $N$ , sabendo  $a_0 = \frac{1}{6}$ ,  $m_{RZ} = 0,006m^{-1}$  e  $N = 0,02s^{-1}$ . Na Equação 3.3 é considerado  $\frac{m_{RZ}}{m_R} = \frac{m_R}{\sqrt{R_i}}$ , onde  $R_i$  é o número de Richardson (Medvedev e Klaassen, 1995). Neste trabalho é considerado  $R_i = 1$ .

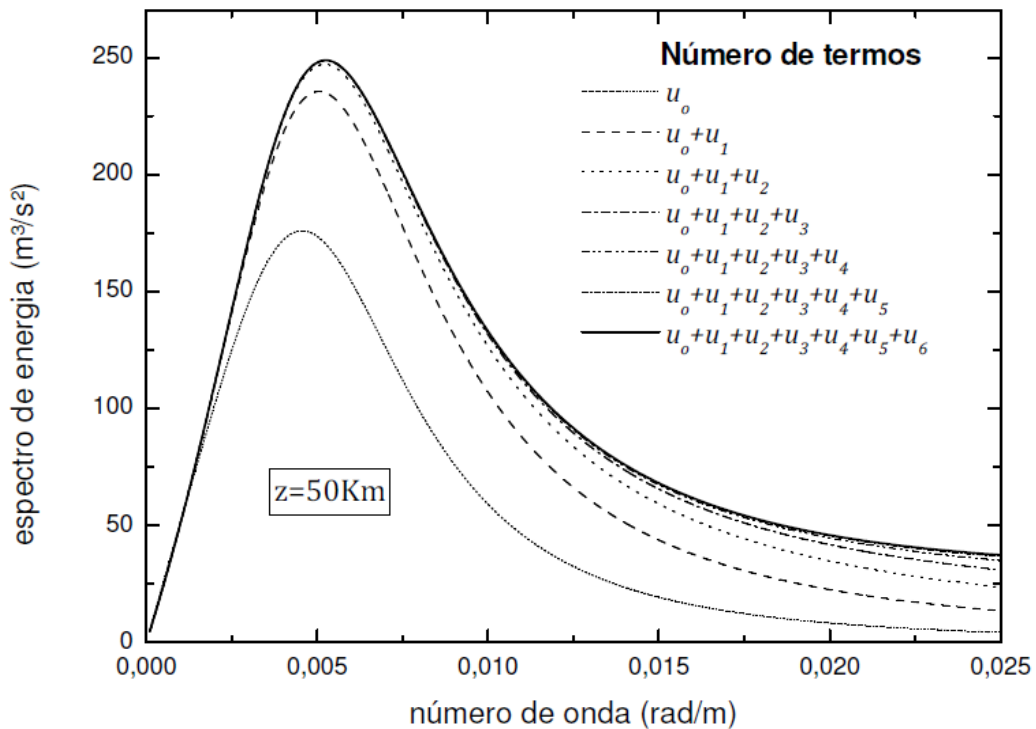
Considerando que o espectro inicial para a Equação 2.22 é dado pelo espectro de Desaubies (Desaubies, 1976) (Equação 4.1), é possível calcular analiticamente as integrais da Equação 3.13:

$$\int_{m_R}^{\infty} a_0 \frac{N^2}{m_{RZ}^3} \frac{m_R/m_{RZ}}{1 + (m_R/m_{RZ})^4} dm_R = a_0 \frac{N^2}{m_{RZ}^2} \tan^{-1} \left( \frac{m_{RZ}^2}{m_R^2} \right), \quad \text{para } m_R > 0. \quad (4.2)$$

Substituindo a Equação 4.2 na Equação 3.13, obtém-se uma expressão algébrica simples que, apesar de trabalhosa, requer um tempo de máquina extremamente pequeno.

A Figura 4.1 que segue, mostra que os espectros de energia de ondas de gravidade pelo método da decomposição de Adomian convergem a um mesmo espectro quando se tem cinco ou mais termos na série.

Figura 4.1 – Espectros de energia das ondas de gravidade com diferentes números de termos utilizados no método da decomposição de Adomian



#### 4.1 Comparação da solução da equação para os espectros de energia das ondas de gravidade pelo método da decomposição de Adomian com a solução linearizada

A seguir, mostra-se a comparação dos espectros de energia das ondas de gravidade atmosféricas, obtidos através da solução da Equação 2.22, pelo método da decomposição de Adomian (Equação 3.13) com a solução da equação pelo modelo linearizado.

As Figuras 4.2 a 4.5 mostram esses espectros para diferentes altitudes  $z$ , sendo pelo método de Adomian o espectro de linha contínua e o do modelo linearizado o espectro de linha pontilhada.

Figura 4.2 – Espectro de energia obtido pelo método da decomposição de Adomian e pelo modelo linearizado para uma altitude  $z = 1km$ .

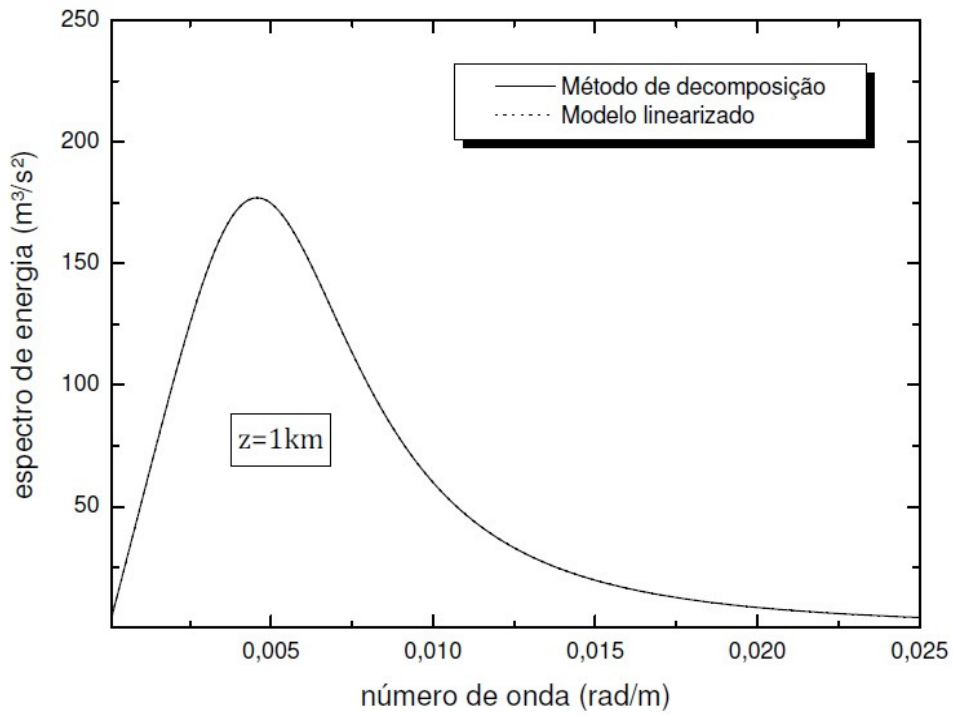


Figura 4.3 – Espectro de energia obtido pelo método da decomposição de Adomian e pelo modelo linearizado para uma altitude  $z = 5km$ .

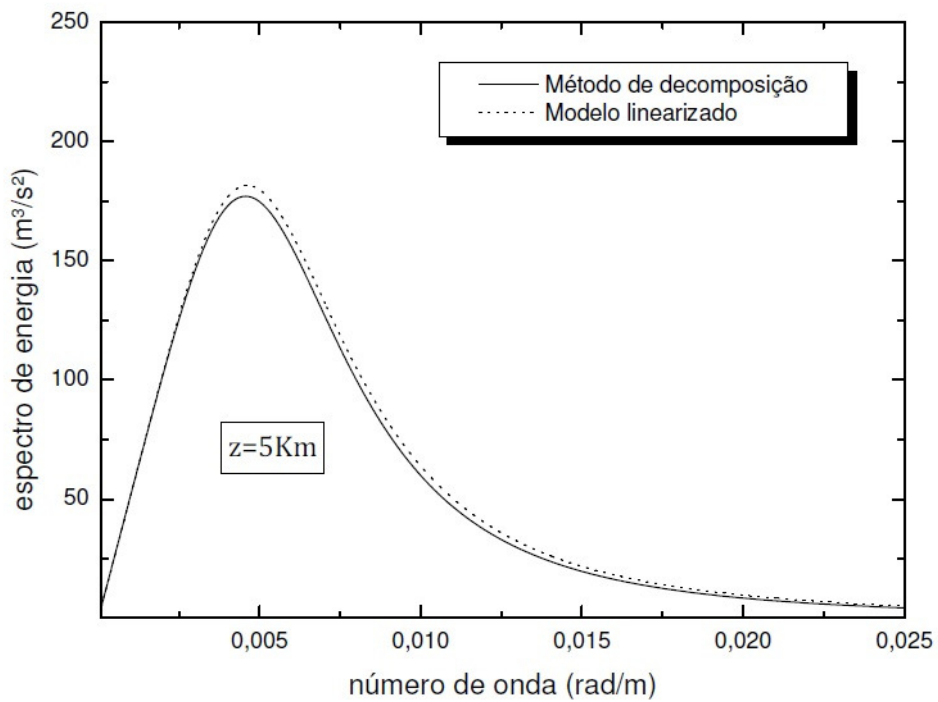


Figura 4.4 – Espectro de energia obtido pelo método da decomposição de Adomian e pelo modelo linearizado para uma altitude  $z = 10\text{km}$ .

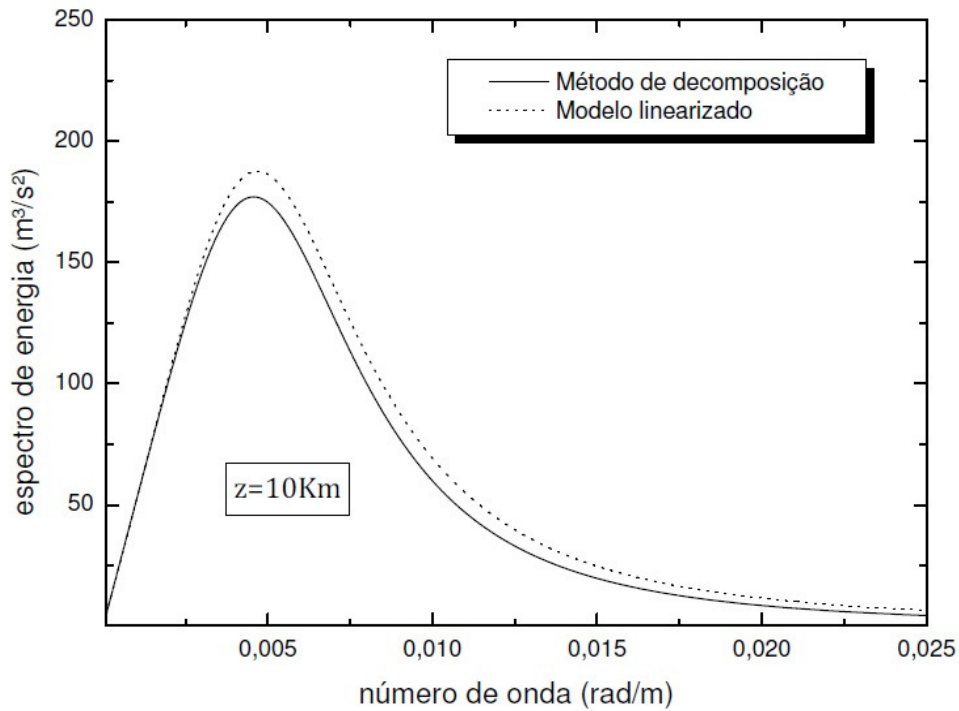


Figura 4.5 – Espectro de energia obtido pelo método da decomposição de Adomian e pelo modelo linearizado para uma altitude  $z = 20\text{km}$ .

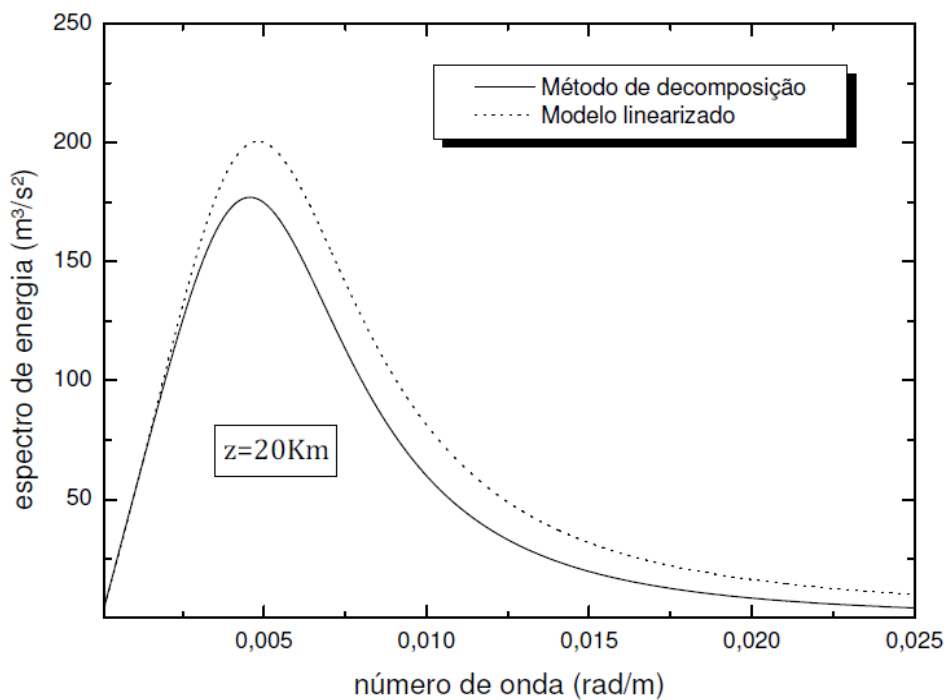
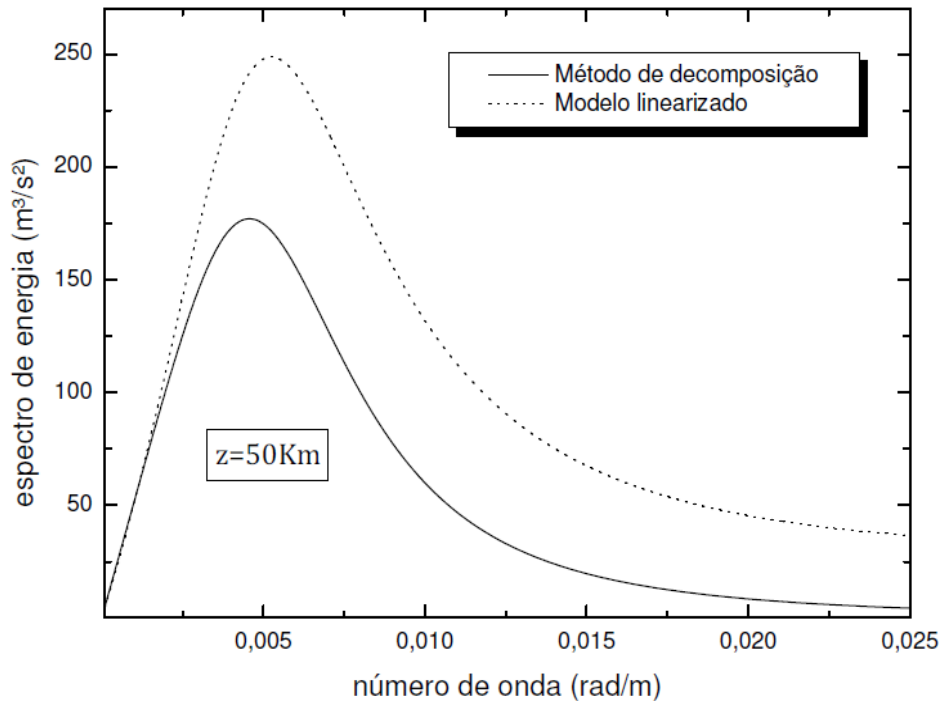


Figura 4.6 – Espectro de energia obtido pelo método da decomposição de Adomian e pelo modelo linearizado para uma altitude  $z = 50\text{km}$ .



As Figuras 4.2 e 4.3 indicam que a solução da equação através do modelo linearizado é uma boa aproximação da solução da Equação 2.22. No entanto, as Figuras 4.4 a 4.6 mostram que a solução linear não é uma boa para altitudes superiores a 10 km, sendo neste caso, o espectro de energia obtido pelo método de Adomian mais adequado.

A Equação 2.22 é não linear devido à parametrização do coeficiente  $\beta$ , expresso na Equação 2.20, que é o coeficiente de amortecimento não linear, devido às interações das componentes com outras ondas no espectro. Esse termo é essencialmente não linear, por isso sua linearização leva a uma solução incorreta, como mostrado nas Figuras 4.4 a 4.6, onde para altitudes superiores a 10 km, os espectros não coincidem. Portanto, a solução não linear pode ser utilizada para descrever corretamente o espectro de energia cinética quando consideradas altitudes inferiores a 10 km.

## 4.2 Comparação da solução da equação para os espectros de energia das ondas de gravidade pelo método da decomposição de Adomian com a solução numérica

As Figuras 4.7 a 4.10 mostram a boa concordância entre a solução da Equação 2.22 pelo método da decomposição de Adomian (linha contínua), solução dada pela Equação 3.13, e o espectro obtido pelo método das linhas com um passo de 0,005 (linha pontilhada em vermelho). O método numérico é tido como a melhor solução para a equação não linear dos espectros de energia de ondas de gravidade atmosféricas. Observa-se que o método de Adomian empregado para resolver a equação, gerou um espectro de energia coincidente com o modelo numérico, validando o modelo desenvolvido neste trabalho.

Figura 4.7 – Espectro de energia obtido pelo método da decomposição de Adomian e pelo método numérico para uma altitude  $z = 1\text{ km}$ .

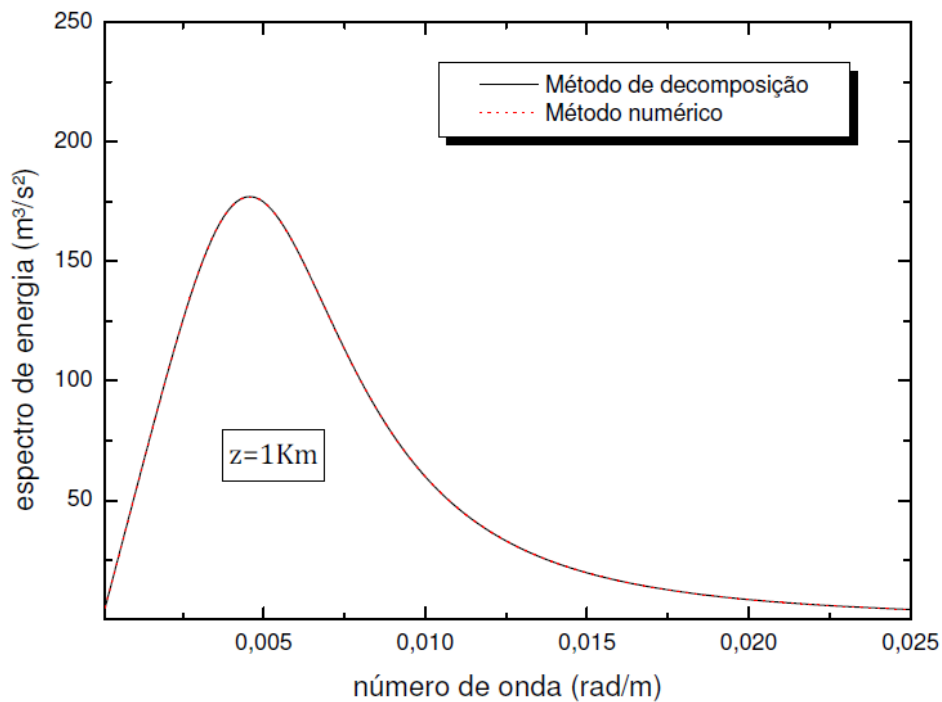


Figura 4.8 – Espectro de energia obtido pelo método da decomposição de Adomian e pelo método numérico para uma altitude  $z = 5km$ .

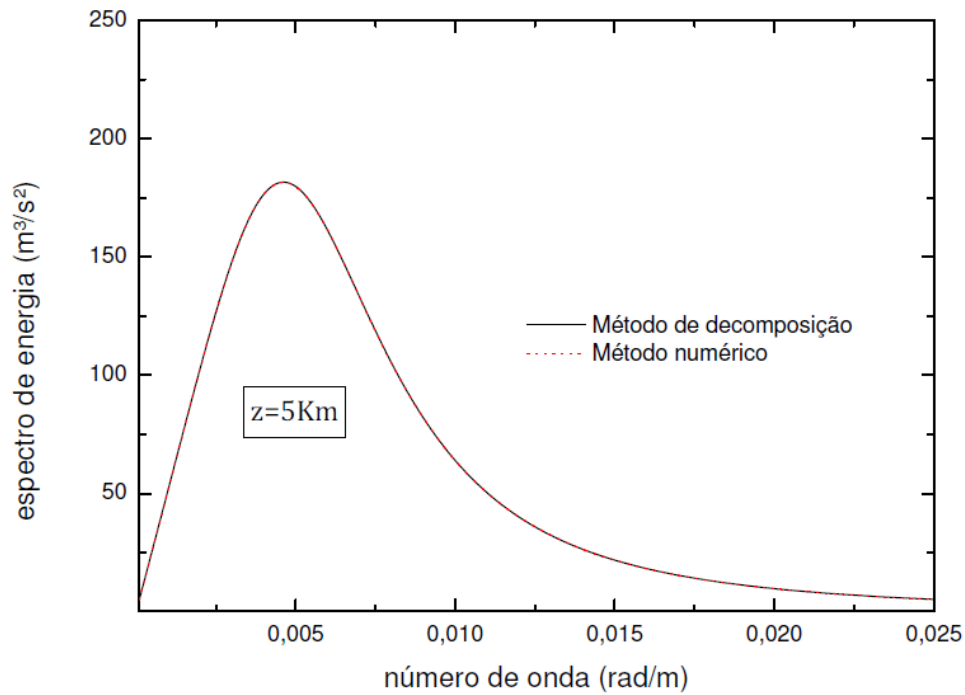


Figura 4.9 – Espectro de energia obtido pelo método da decomposição de Adomian e pelo método numérico para uma altitude  $z = 20km$ .

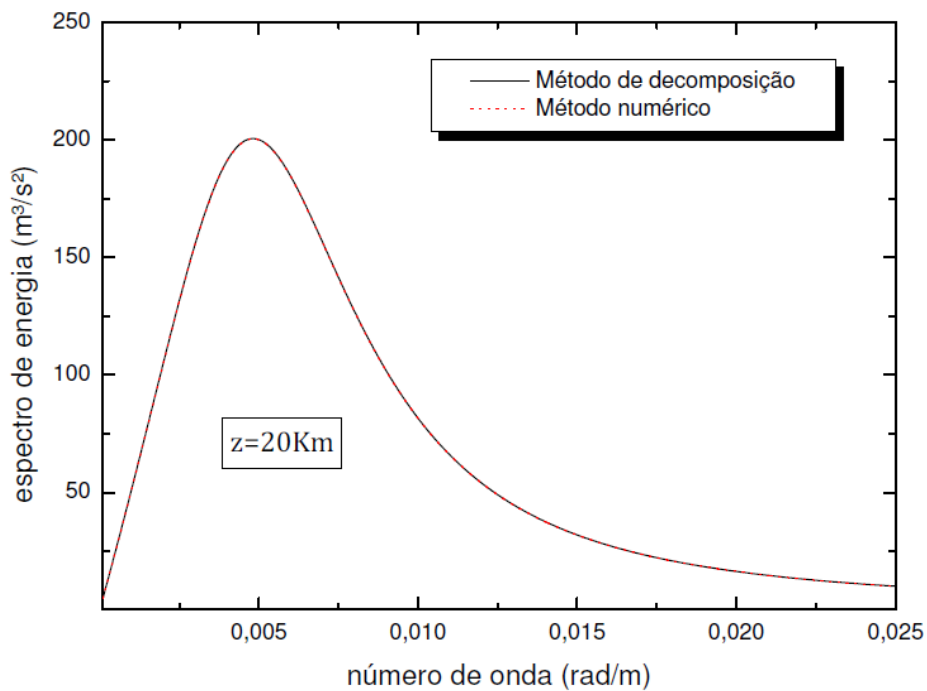
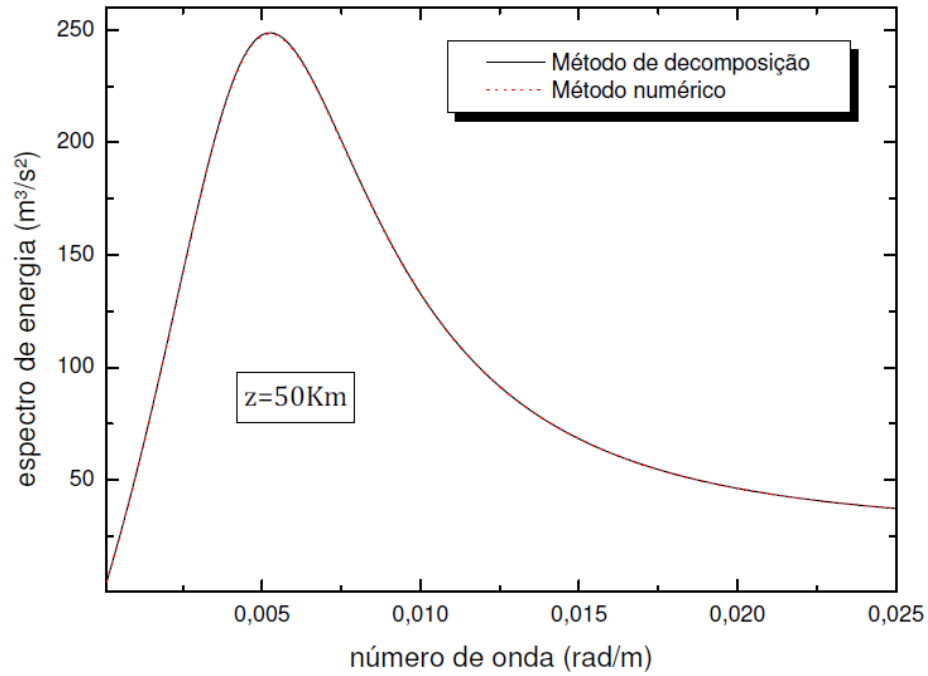




Figura 4.10 – Espectro de energia obtido pelo método da decomposição de Adomian e pelo método numérico para uma altitude  $z = 50km$ .



## 5 CONCLUSÃO

Neste trabalho, a equação não linear da evolução dos espectros de energia cinética das ondas de gravidade com a altura vertical foi resolvida analiticamente, empregando-se o método da decomposição. Como nenhuma linearização foi necessária para a solução da equação, a natureza não linear do problema foi preservada. Portanto os erros encontrados são apenas devido às parametrizações utilizadas no modelo.

Como um teste, foi utilizado um esquema de parametrização para calcular os espectros de energia cinética das ondas de gravidade na média atmosfera (Medvedev e Klaassen, 1995; 2000). A parametrização empregada no modelo envolve interações não-lineares entre as componentes das ondas de gravidade. A fim de avaliar a solução encontrada para a equação não linear da evolução dos espectros de energia cinética das ondas de gravidade com a altura vertical, empregando-se o método da decomposição, os resultados obtidos foram confrontados com uma solução numérica onde é usado o método numérico das linhas.

Os resultados obtidos neste trabalho indicam que a solução que não emprega linearização é uma boa aproximação da solução da equação resultante em todas as alturas. Já a solução da equação resultante quando linearizada é uma boa aproximação, até uma altura vertical menor do que 4 km.

As discrepâncias não dependem da solução matemática da equação não linear, mas das parametrizações empregadas nos termos não lineares desconhecidos.

No modelo proposto por Medvedev e Klaassen (1995 , 2000), a altura da camada foi discretizada em subintervalos de 0,5 km, de tal maneira que no interior de cada subintervalo uma equação linear é obtida, por considerar o valor médio dos parâmetros envolvidos. Esta é uma aproximação utilizada quando não é possível resolver analiticamente as equações resultantes da parametrização empregada. Esta metodologia resolve o problema desde que os subintervalos sejam suficientemente estreitos. Esta condição pode levar à solução de um número muito grande de equações acopladas.

Considerando que a solução pelo método da decomposição é analítica, contínua e de rápida convergência, além do fato de que este tipo de solução não é encontrada na literatura para este problema, podemos afirmar que a solução proposta é uma técnica promissora para tratar problemas geofísicos realistas que envolvam equações diferenciais não lineares.

Como projetos futuros podemos afirmar que esta metodologia pode ser empregada na solução de outras equações diferenciais não lineares resultantes de modelos que descrevam fenômenos geofísicos.

## REFERÊNCIAS

- ADOMIAN, G. **A review of the decomposition method and some recent results for nonlinear equations.** Mathematical and Computer Modelling 13 (7), 17-43, 1990.
- ADOMIAN, G. **Solution of physical problems by decomposition.** Computers and Mathematics with Applications 27 (9-10), 145-154, 1994a.
- ADOMIAN, G. **Solving frontier problems of physics: the decomposition method.** Kluwer Academic Publishers, Boston, 354pp, 1994b.
- ALVES, Adil Rainier; VIANELLO, Rubens Leite. **Meteorologia Básica e Aplicações.** Viçosa: UFV, 2000.
- AZREG-AINO, M. **Developed Adomian method for quadratic Kaluza-Klein relativity.** Classical and quantum gravity 27 (1), 015012, 2010.
- BABOLIAN, E; BIAZAR, J. **Solving the problem of biological species living together by Adomian decomposition method.** Applied Mathematics and Computation 129, 339–343, 2002.
- BALSLEY, B. B; CARTER, D. A. **The spectrum of atmospheric velocity fluctuations at 8 and 86 km.** Geophys. Res. Lett. 9, 465-468, 1982.
- BASAK, K. C; RAY, P. C; BERA, R. K. **Solution of non-linear Klein-Gordon Equation with a quadratic non-linear term by Adomian decomposition method.** Communications in nonlinear science and numerical simulation 14 (3), 718-723, 2009.
- CHIMONAS, G. **On internal gravity waves associated with the stable boundary layer.** Bond-Layer Meteor. 102, 139-155, 2002.
- COLLINS, R. L; NOMURA, A; GARDNER, C. **Gravity waves in the upper mesosphere over Antarctica: Lidar observations at the South Pole and Syowa.** J. Geophys. Res. 99, 5475-5485, 1994.
- EINAUDI, F; FINNIGAN, J. J. **Wave-turbulence dynamics in the stably stratified boundary layer.** J. Atmos. Sci. 50, 1841-1864, 1993.
- FINNIGAN, J. J; EINAUDI, F. **The interaction between an internal gravity wave and the planetary boundary layer. Part II: effect of the wave on the turbulence structure.** Q.J. Roy. Met. Soc. 107, 807–832, 1981.
- FINNIGAN, J. J; EINAUDI, F; FUA, D. **The interaction between an internal gravity wave and turbulence in the stably-stratified nocturnal boundary layer.** J. Atmos. Sci. 41, 2409–2436, 1984.

FINNIGAN, J. J. **Kinetic energy transfer between internal gravity waves and turbulence.** J. Atmos. Sci. 45, 486-505, 1988.

FRITTS, D. C; ALEXANDER, M. J. **Gravity wave dynamics and effects in the middle atmosphere.** Rev. Geophys. 41(1), 2003.

FRITTS, D. C; DUNKERTON, T.J. **Fluxes of heat and constituents due to convectively unstable gravity waves.** J. Atmos. Sci. 42, 549-556, 1985.

GOSSARD, E; HOOKE, W. **Waves in the Atmosphere**, Elsevier Science, New York, 456 pp, 1975.

GOULART, A; VILHENA, M. T; BODMANN, B; MOREIRA, D. **An analytical solution for the nonlinear energy spectrum by the decomposition method.** Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical 41, 425205, 2008.

HARGREAVES, J. K. **The solar-terrestrial environment.** London: Cambridge University Press, 1992.

HINES, C. O. **A modeling of atmospheric gravity waves and wave drag generated by isotropic and anisotropic terrain.** J. Atmos. Sci, 45, 309–322, 1988.

HODGES, R.R. **Generation of turbulence in the upper atmosphere by internal gravity waves.** J. Geophys. Res. 72, 3455-3458, 1967.

LINDZEN, R; TUNG, K. **Banded convective activity and ducted gravity waves.** Mon. Wea. Rev. 104, 1602-1617, 1976.

MEDVEDEV, A; KLAASSEN, G. **Vertical evolution of gravity wave spectra and the parameterization of associated wave drag.** J. Geophys. Res. 100, 25841-25853, 1995.

MEDVEDEV, A; KLAASSEN, G. **Parameterization of gravity wave momentum deposition based on nonlinear wave interactions: basic formulation and sensitivity tests.** Journal Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics 62, 1015-1033, 2000.

MEILLIER, R; FREHLICH, J; BASLEY, B. **Modulation of small-scales turbulence by ducted gravity waves in the nocturnal boundary layer.** J. atmos. sci. 65, 1414-1427, 2008.

MOREIRA, D. M; VILHENA, M. T; BUSKE, D; TIRABASSI, T. **The GILTT solution of the advection-diffusion equation for an inhomogeneous and nonstationary PBL.** Atmospheric Environment 40 (17), 3186-3194, 2006.

NAKAMURA, T., TSUDA, T., FUKAO, S., KATO, S., MANSON, A. AND MEEK, C. **Comparative observations of short-period gravity waves (10–100 min) in the mesosphere in 1989 by Saskatoon MF radar (52\_N), Canada and the MU radar (35\_N), Japan.** Radio Sci. 28, 729–746, 1993.

NAPPO, C.J. **An introduction to atmospheric gravity waves.** Academic Press, London, 276pp, 2002.

SMITH, S.A; FRITTS, D.C; VANZANDT, T.E. **Evidence for a saturated spectrum of atmospheric gravity waves.** J. Atmos. Sci. 44, 1404–1410, 1987.

SALMOND, J.A. AND MCKENDRY, I.G. **A review of turbulence in the very stable nocturnal boundary layer and its implications for air quality.** Progress in Physical Geography 29(2), 171-188, 2005.

STULL, Roland. B. **An Introduction to Boundary Layer Meteorology.** Dordrecht, Holanda: Kluwer Academic Publishers, 1988.

TJERNSTROM, M., BALSEY, B., SVENSSON, G. AND NAPPO, C. The effects of critical layers on Residual Layer Turbulence. J. Atmos. Sci. 66, 468-480, 2009.

TSUDA, T., INOUE, T., FRITTS, D.C., VANZANDT, T.E., KATO, S., SATO, T. AND FUKAO, S. **MST radar observations of a saturated gravity wave spectrum.** J. Atmos. Sci. 46, 2440-2447, 1989.

UCAR – **University Corporation for Atmospheric Research.** Disponível em <<http://www2.ucar.edu>>. Acesso em maio de 2014.

VANZANDT, T.E. **A universal spectrum of buoyancy waves in the atmosphere.** Geophys. Res. Lett. 9, 575-578, 1982.

VIANELLO, R.L. AND ALVES, A.R. **Meteorologia Básica e Aplicações.** Viçosa: UFV, 2002.

ZILINTIKEVICH, S.S., ELPERIN, T., KLEERIN, N., L'VOV, V. AND ROGACHEVSKII, I. **Energy- and Flux-Budget Turbulence Closure Model for Stably Stratified Flows. Part II: The Role of Internal Gravity Waves.** Boundary-Layer Meteorology 133, 139-164, 2009.



**APÊNDICE** – Primeiros termos da série do método da decomposição de Adomian, obtidos pelo *software Mathematica*.

Observações:

$$k = m_R$$

$$n = N$$

$$m = m_{Rz}$$

$$\rho = \rho_{0z}$$

$$A_{00} = a_0$$

$\text{int}_{\text{resultado}}$  é o resultado da integração analítica de  $\int_k^\infty S_0 dk$

$f1_{u_0}$  é a derivada primeira de  $f_{u_0}$ ,  $f2_{u_0}$  é a derivada segunda de  $f_{u_0}$ , e assim por diante. Para obter os espectros de energia foi necessário expandir a série até o termo  $u_6$  na solução por decomposição.

$$S_0 = A_{00} \frac{n^2}{m^3} \frac{\frac{k}{m}}{1 + \left(\frac{k}{m}\right)^4}$$

$$\text{int} = \int_k^\infty S_0 dk$$

$$\text{int}_{\text{resultado}} = \frac{1}{4} A_{00} n^2 \left( \sqrt{\frac{1}{m^4}} \pi - \frac{2 \text{ArcTan}\left[\frac{k^2}{m^2}\right]}{m^2} \right)$$

$$f_{u_0} = \frac{\sqrt{2\pi} n}{\sqrt{\text{int}}} \text{Exp}\left[-\frac{n^2}{2k^2(\text{int})}\right]$$

$$f1_{u_0} = \left( \frac{e^{-\frac{n^2}{2k^2(\text{int})}} n^3 \sqrt{\frac{\pi}{2}}}{k^2(\text{int})^{5/2}} - \frac{e^{-\frac{n^2}{2k^2(\text{int})}} n \sqrt{\frac{\pi}{2}}}{(\text{int})^{3/2}} \right) (k_{\text{max}} - k)$$

$$f2_{u_0} = \left( \frac{e^{-\frac{n^2}{2k^2(\text{int})}} n^5 \sqrt{\frac{\pi}{2}}}{2k^4(\text{int})^{9/2}} - \frac{3e^{-\frac{n^2}{2k^2(\text{int})}} n^3 \sqrt{\frac{\pi}{2}}}{k^2(\text{int})^{7/2}} + \frac{3e^{-\frac{n^2}{2k^2(\text{int})}} n \sqrt{\frac{\pi}{2}}}{2(\text{int})^{5/2}} \right) (k_{\text{max}} - k)^2$$

$$f3_{u_0} = \left( \frac{e^{-\frac{n^2}{2k^2(\text{int})}} n^7 \sqrt{\frac{\pi}{2}}}{4k^6(\text{int})^{13/2}} - \frac{15e^{-\frac{n^2}{2k^2(\text{int})}} n^5 \sqrt{\frac{\pi}{2}}}{4k^4(\text{int})^{11/2}} + \frac{45e^{-\frac{n^2}{2k^2(\text{int})}} n^3 \sqrt{\frac{\pi}{2}}}{4k^2(\text{int})^{9/2}} - \frac{15e^{-\frac{n^2}{2k^2(\text{int})}} n \sqrt{\frac{\pi}{2}}}{4(\text{int})^{7/2}} \right) (k_{\text{max}} - k)^3$$

$$f4_{u_0} = \left( \frac{e^{-\frac{n^2}{2k^2(\text{int})}} n^9 \sqrt{\frac{\pi}{2}}}{8k^8(\text{int})^{17/2}} - \frac{7e^{-\frac{n^2}{2k^2(\text{int})}} n^7 \sqrt{\frac{\pi}{2}}}{2k^6(\text{int})^{15/2}} + \frac{105e^{-\frac{n^2}{2k^2(\text{int})}} n^5 \sqrt{\frac{\pi}{2}}}{4k^4(\text{int})^{13/2}} - \frac{105e^{-\frac{n^2}{2k^2(\text{int})}} n^3 \sqrt{\frac{\pi}{2}}}{2k^2(\text{int})^{11/2}} + \frac{105e^{-\frac{n^2}{2k^2(\text{int})}} n \sqrt{\frac{\pi}{2}}}{8(\text{int})^{9/2}} \right) (k_{\text{max}} - k)^4$$



$$f5_{uo} = \left( \frac{e^{-\frac{n^2}{2k^2(int)}} n^{11} \sqrt{\frac{\pi}{2}}}{16 k^{10} (int)^{21/2}} - \frac{45 e^{-\frac{n^2}{2k^2(int)}} n^9 \sqrt{\frac{\pi}{2}}}{16 k^8 (int)^{19/2}} + \frac{315 e^{-\frac{n^2}{2k^2(int)}} n^7 \sqrt{\frac{\pi}{2}}}{8 k^6 (int)^{17/2}} - \right. \\ \left. \frac{1575 e^{-\frac{n^2}{2k^2(int)}} n^5 \sqrt{\frac{\pi}{2}}}{8 k^4 (int)^{15/2}} + \frac{4725 e^{-\frac{n^2}{2k^2(int)}} n^3 \sqrt{\frac{\pi}{2}}}{16 k^2 (int)^{13/2}} - \frac{945 e^{-\frac{n^2}{2k^2(int)}} n \sqrt{\frac{\pi}{2}}}{16 (int)^{11/2}} \right) (k_{max} - k)^5$$

$$A_0 = \frac{\sqrt{2\pi} n}{\sqrt{int}} \text{Exp}\left[-\frac{n^2}{2k^2(int)}\right]$$

$$A_0 = \frac{\sqrt{2\pi} n}{\sqrt{int}} \text{Exp}\left[-\frac{n^2}{2k^2(int)}\right]$$

$$A_1 = f1_{uo} \left( -\frac{e^{-\frac{n^2}{2k^2(int)}} n \sqrt{2\pi} z}{\sqrt{int}} - z S_0 \left( -\frac{k}{\sqrt{R_i}} + \frac{\rho_z}{\rho_0} \right) \right)$$

$$A_2 = \frac{1}{2} f2_{uo} \left( -\frac{e^{-\frac{n^2}{2k^2(int)}} n \sqrt{2\pi} z}{\sqrt{int}} - z S_0 \left( -\frac{k}{\sqrt{R_i}} + \frac{\rho_z}{\rho_0} \right) \right)^2 +$$

$$f1_{uo} \left( \frac{e^{-\frac{n^2}{2k^2(int)}} n \sqrt{\frac{\pi}{2}} z^2 f1_{uo}}{\sqrt{int}} - \frac{k z^2 f1_{uo} S_0}{2 \sqrt{R_i}} + \frac{z^2 f1_{uo} S_0 \rho_z}{2 \rho_0} + \right. \\ \left. \left( \frac{k}{\sqrt{R_i}} - \frac{\rho_z}{\rho_0} \right) \left( -\frac{e^{-\frac{n^2}{2k^2(int)}} n \sqrt{\frac{\pi}{2}} z^2}{\sqrt{int}} + \frac{k z^2 S_0}{2 \sqrt{R_i}} - \frac{z^2 S_0 \rho_z}{2 \rho_0} \right) \right)$$

$$\begin{aligned}
A_3 = & \frac{1}{6} f_{3_{uo}} \left( -\frac{e^{-\frac{n^2}{2 \lambda_0 t k^2}} n \sqrt{2 \pi} z}{\sqrt{\text{int}}} - z S_0 \left( -\frac{k}{\sqrt{R_i}} + \frac{\rho_z}{\rho_0} \right) \right)^3 + \\
& f_{2_{uo}} \left( -\frac{e^{-\frac{n^2}{2 \lambda_0 t k^2}} n \sqrt{2 \pi} z}{\sqrt{\text{int}}} - z S_0 \left( -\frac{k}{\sqrt{R_i}} + \frac{\rho_z}{\rho_0} \right) \right) \left( \frac{e^{-\frac{n^2}{2 \lambda_0 t k^2}} n \sqrt{\frac{\pi}{2}} z^2 f_{1_{uo}}}{\sqrt{\text{int}}} - \frac{k z^2 f_{1_{uo}} S_0}{2 \sqrt{R_i}} + \right. \\
& \left. \frac{z^2 f_{1_{uo}} S_0 \rho_z}{2 \rho_0} + \left( \frac{k}{\sqrt{R_i}} - \frac{\rho_z}{\rho_0} \right) \left( -\frac{e^{-\frac{n^2}{2 \lambda_0 t k^2}} n \sqrt{\frac{\pi}{2}} z^2}{\sqrt{\text{int}}} + \frac{k z^2 S_0}{2 \sqrt{R_i}} - \frac{z^2 S_0 \rho_z}{2 \rho_0} \right) \right) + \\
& f_{1_{uo}} \left( -\left( -\frac{k}{\sqrt{R_i}} + \frac{\rho_z}{\rho_0} \right) \left( \frac{e^{-\frac{n^2}{2 \lambda_0 t k^2}} n \sqrt{\frac{\pi}{2}} z^3 f_{1_{uo}}}{3 \sqrt{\text{int}}} - \frac{e^{-\frac{n^2}{2 \lambda_0 t k^2}} k n \sqrt{\frac{\pi}{2}} z^3}{3 \sqrt{\text{int}} \sqrt{R_i}} + \frac{k^2 z^3 S_0}{6 R_i} - \frac{k z^3 f_{1_{uo}} S_0}{6 \sqrt{R_i}} + \right. \right. \\
& \left. \left. \frac{e^{-\frac{n^2}{2 \lambda_0 t k^2}} n \sqrt{\frac{\pi}{2}} z^3 \rho_z}{3 \sqrt{\text{int}} \rho_0} + \frac{z^3 f_{1_{uo}} S_0 \rho_z}{6 \rho_0} - \frac{k z^3 S_0 \rho_z}{3 \sqrt{R_i} \rho_0} + \frac{z^3 S_0 \rho_z^2}{6 \rho_0^2} \right) - \frac{1}{6 \text{int} R_i \rho_0^2} \right. \\
& \left. e^{-\frac{n^2}{2 \lambda_0 t k^2}} z^3 \left( n \sqrt{2 \pi} \sqrt{R_i} \rho_0 - e^{-\frac{n^2}{2 \lambda_0 t k^2}} \sqrt{\text{int}} S_0 (k \rho_0 - \sqrt{R_i} \rho_z) \right) \left( n \sqrt{2 \pi} f_{2_{uo}} \sqrt{R_i} \rho_0 + \right. \right. \\
& \left. \left. e^{-\frac{n^2}{2 \lambda_0 t k^2}} \sqrt{\text{int}} \left( -\left( f_{1_{uo}} (k - f_{1_{uo}} \sqrt{R_i}) + k f_{2_{uo}} S_0 \right) \rho_0 + \sqrt{R_i} (f_{1_{uo}} + f_{2_{uo}} S_0) \rho_z \right) \right) \right) \\
A_4 = & \frac{1}{24} f_{4_{uo}} \left( -\frac{e^{-\frac{n^2}{2 \lambda_0 t k^2}} n \sqrt{2 \pi} z}{\sqrt{\text{int}}} - z S_0 \left( -\frac{k}{\sqrt{R_i}} + \frac{\rho_z}{\rho_0} \right) \right)^4 + \\
& \frac{1}{2} f_{3_{uo}} \left( -\frac{e^{-\frac{n^2}{2 \lambda_0 t k^2}} n \sqrt{2 \pi} z}{\sqrt{\text{int}}} - z S_0 \left( -\frac{k}{\sqrt{R_i}} + \frac{\rho_z}{\rho_0} \right) \right)^2 \left( \frac{e^{-\frac{n^2}{2 \lambda_0 t k^2}} n \sqrt{\frac{\pi}{2}} z^2 f_{1_{uo}}}{\sqrt{\text{int}}} - \frac{k z^2 f_{1_{uo}} S_0}{2 \sqrt{R_i}} + \right. \\
& \left. \frac{z^2 f_{1_{uo}} S_0 \rho_z}{2 \rho_0} + \left( \frac{k}{\sqrt{R_i}} - \frac{\rho_z}{\rho_0} \right) \left( -\frac{e^{-\frac{n^2}{2 \lambda_0 t k^2}} n \sqrt{\frac{\pi}{2}} z^2}{\sqrt{\text{int}}} + \frac{k z^2 S_0}{2 \sqrt{R_i}} - \frac{z^2 S_0 \rho_z}{2 \rho_0} \right) \right) + \\
& \frac{1}{2} f_{2_{uo}} \left( \frac{e^{-\frac{n^2}{2 \lambda_0 t k^2}} n \sqrt{\frac{\pi}{2}} z^2 f_{1_{uo}}}{\sqrt{\text{int}}} - \frac{k z^2 f_{1_{uo}} S_0}{2 \sqrt{R_i}} + \frac{z^2 f_{1_{uo}} S_0 \rho_z}{2 \rho_0} + \right. \\
& \left. \left( \frac{k}{\sqrt{R_i}} - \frac{\rho_z}{\rho_0} \right) \left( -\frac{e^{-\frac{n^2}{2 \lambda_0 t k^2}} n \sqrt{\frac{\pi}{2}} z^2}{\sqrt{\text{int}}} + \frac{k z^2 S_0}{2 \sqrt{R_i}} - \frac{z^2 S_0 \rho_z}{2 \rho_0} \right) \right)^2 + \\
& f_{3_{uo}} \left( -\frac{e^{-\frac{n^2}{2 \lambda_0 t k^2}} n \sqrt{2 \pi} z}{\sqrt{\text{int}}} - z S_0 \left( -\frac{k}{\sqrt{R_i}} + \frac{\rho_z}{\rho_0} \right) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left( - \left( - \frac{k}{\sqrt{R_i}} + \frac{\rho_z}{\rho_0} \right) \left( \frac{e^{-\frac{n^2}{2 \lambda_0 t k^2}} n \sqrt{\frac{\pi}{2}} z^3 f_{1_{uo}}}{3 \sqrt{\text{int}}} - \frac{e^{-\frac{n^2}{2 \lambda_0 t k^2}} k n \sqrt{\frac{\pi}{2}} z^3}{3 \sqrt{\text{int}} \sqrt{R_i}} + \frac{k^2 z^3 S_0}{6 R_i} - \frac{k z^3 f_{1_{uo}} S_0}{6 \sqrt{R_i}} + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \frac{e^{-\frac{n^2}{2 \lambda_0 t k^2}} n \sqrt{\frac{\pi}{2}} z^3 \rho_z}{3 \sqrt{\text{int}} \rho_0} + \frac{z^3 f_{1_{uo}} S_0 \rho_z}{6 \rho_0} - \frac{k z^3 S_0 \rho_z}{3 \sqrt{R_i} \rho_0} + \frac{z^3 S_0 \rho_z^2}{6 \rho_0^2} \right) - \frac{1}{6 \text{int} R_i \rho_0^2} \right. \\
& \quad \left. e^{-\frac{n^2}{\lambda_0 t k^2}} z^3 \left( n \sqrt{2 \pi} \sqrt{R_i} \rho_0 - e^{\frac{n^2}{2 \lambda_0 t k^2}} \sqrt{\text{int}} S_0 (k \rho_0 - \sqrt{R_i} \rho_z) \right) \left( n \sqrt{2 \pi} f_{2_{uo}} \sqrt{R_i} \rho_0 + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. e^{\frac{n^2}{2 \lambda_0 t k^2}} \sqrt{\text{int}} \left( - (f_{1_{uo}} (k - f_{1_{uo}} \sqrt{R_i}) + k f_{2_{uo}} S_0) \rho_0 + \sqrt{R_i} (f_{1_{uo}} + f_{2_{uo}} S_0) \rho_z \right) \right) \right) + \\
& f_{1_{uo}} \left( - \left( - \frac{k}{\sqrt{R_i}} + \frac{\rho_z}{\rho_0} \right) \left( - \frac{e^{-\frac{n^2}{2 \lambda_0 t k^2}} n \sqrt{\frac{\pi}{2}} z^4 f_{1_{uo}}^2}{12 \sqrt{\text{int}}} - \frac{e^{-\frac{n^2}{\lambda_0 t k^2}} n^2 \pi z^4 f_{2_{uo}}}{12 \text{int}} - \right. \right. \\
& \quad \frac{e^{-\frac{n^2}{2 \lambda_0 t k^2}} k^2 n \sqrt{\frac{\pi}{2}} z^4}{12 \sqrt{\text{int}} R_i} + \frac{e^{-\frac{n^2}{2 \lambda_0 t k^2}} k n \sqrt{\frac{\pi}{2}} z^4 f_{1_{uo}}}{6 \sqrt{\text{int}} \sqrt{R_i}} + \frac{k^3 z^4 S_0}{24 R_i^{3/2}} - \\
& \quad \frac{k^2 z^4 f_{1_{uo}} S_0}{12 R_i} + \frac{k z^4 f_{1_{uo}}^2 S_0}{24 \sqrt{R_i}} + \frac{e^{-\frac{n^2}{2 \lambda_0 t k^2}} k n \sqrt{\frac{\pi}{2}} z^4 f_{2_{uo}} S_0}{6 \sqrt{\text{int}} \sqrt{R_i}} - \frac{k^2 z^4 f_{2_{uo}} S_0^2}{24 R_i} - \\
& \quad \frac{e^{-\frac{n^2}{2 \lambda_0 t k^2}} n \sqrt{\frac{\pi}{2}} z^4 f_{1_{uo}} \rho_z}{6 \sqrt{\text{int}} \rho_0} + \frac{e^{-\frac{n^2}{2 \lambda_0 t k^2}} k n \sqrt{\frac{\pi}{2}} z^4 \rho_z}{6 \sqrt{\text{int}} \sqrt{R_i} \rho_0} - \frac{z^4 f_{1_{uo}}^2 S_0 \rho_z}{24 \rho_0} - \\
& \quad \frac{e^{-\frac{n^2}{2 \lambda_0 t k^2}} n \sqrt{\frac{\pi}{2}} z^4 f_{2_{uo}} S_0 \rho_z}{6 \sqrt{\text{int}} \rho_0} - \frac{k^2 z^4 S_0 \rho_z}{8 R_i \rho_0} + \frac{k z^4 f_{1_{uo}} S_0 \rho_z}{6 \sqrt{R_i} \rho_0} + \frac{k z^4 f_{2_{uo}} S_0^2 \rho_z}{12 \sqrt{R_i} \rho_0} - \\
& \quad \left. \frac{e^{-\frac{n^2}{2 \lambda_0 t k^2}} n \sqrt{\frac{\pi}{2}} z^4 \rho_z^2}{12 \sqrt{\text{int}} \rho_0^2} - \frac{z^4 f_{1_{uo}} S_0 \rho_z^2}{12 \rho_0^2} + \frac{k z^4 S_0 \rho_z^2}{8 \sqrt{R_i} \rho_0^2} - \frac{z^4 f_{2_{uo}} S_0^2 \rho_z^2}{24 \rho_0^2} - \frac{z^4 S_0 \rho_z^3}{24 \rho_0^3} \right) - \\
& \quad \frac{1}{24 \text{int}^{3/2} R_i^{3/2} \rho_0^3} e^{-\frac{3n^2}{2 \lambda_0 t k^2}} z^4 \left( n \sqrt{2 \pi} \sqrt{R_i} \rho_0 - e^{\frac{n^2}{2 \lambda_0 t k^2}} \sqrt{\text{int}} S_0 (k \rho_0 - \sqrt{R_i} \rho_z) \right) \\
& \quad \left( -3 e^{\frac{n^2}{2 \lambda_0 t k^2}} \sqrt{\text{int}} f_{2_{uo}} \left( (-k + f_{1_{uo}} \sqrt{R_i}) \rho_0 + \sqrt{R_i} \rho_z \right) \right. \\
& \quad \left. \left( n \sqrt{2 \pi} \sqrt{R_i} \rho_0 - e^{\frac{n^2}{2 \lambda_0 t k^2}} \sqrt{\text{int}} S_0 (k \rho_0 - \sqrt{R_i} \rho_z) \right) - \right. \\
& \quad f_{3_{uo}} \left( n \sqrt{2 \pi} \sqrt{R_i} \rho_0 - e^{\frac{n^2}{2 \lambda_0 t k^2}} \sqrt{\text{int}} S_0 (k \rho_0 - \sqrt{R_i} \rho_z) \right)^2 - e^{\frac{n^2}{2 \lambda_0 t k^2}} \sqrt{\text{int}} \\
& \quad \left. f_{1_{uo}} \left( n \sqrt{2 \pi} f_{2_{uo}} R_i \rho_0^2 + e^{\frac{n^2}{2 \lambda_0 t k^2}} \sqrt{\text{int}} \left( \left( (k - f_{1_{uo}} \sqrt{R_i})^2 - k f_{2_{uo}} \sqrt{R_i} S_0 \right) \rho_0^2 + \right. \right. \right.
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& \left( - \left( - \frac{k}{\sqrt{R_i}} + \frac{\rho_z}{\rho_0} \right) \left( \frac{e^{-\frac{n^2}{2 \lambda_0 t k^2}} n \sqrt{\frac{\pi}{2}} z^3 f_{1_{uo}}}{3 \sqrt{\text{int}}} - \frac{e^{-\frac{n^2}{2 \lambda_0 t k^2}} k n \sqrt{\frac{\pi}{2}} z^3}{3 \sqrt{\text{int}} \sqrt{R_i}} + \frac{k^2 z^3 S_0}{6 R_i} - \frac{k z^3 f_{1_{uo}} S_0}{6 \sqrt{R_i}} + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. \frac{e^{-\frac{n^2}{2 \lambda_0 t k^2}} n \sqrt{\frac{\pi}{2}} z^3 \rho_z}{3 \sqrt{\text{int}} \rho_0} + \frac{z^3 f_{1_{uo}} S_0 \rho_z}{6 \rho_0} - \frac{k z^3 S_0 \rho_z}{3 \sqrt{R_i} \rho_0} + \frac{z^3 S_0 \rho_z^2}{6 \rho_0^2} \right) - \frac{1}{6 \text{int} R_i \rho_0^2} \right. \\
& \quad \left. e^{-\frac{n^2}{\lambda_0 t k^2}} z^3 \left( n \sqrt{2 \pi} \sqrt{R_i} \rho_0 - e^{-\frac{n^2}{2 \lambda_0 t k^2}} \sqrt{\text{int}} S_0 \left( k \rho_0 - \sqrt{R_i} \rho_z \right) \right) \left( n \sqrt{2 \pi} f_{2_{uo}} \sqrt{R_i} \rho_0 + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. e^{-\frac{n^2}{\lambda_0 t k^2}} \sqrt{\text{int}} \left( - \left( f_{1_{uo}} \left( k - f_{1_{uo}} \sqrt{R_i} \right) + k f_{2_{uo}} S_0 \right) \rho_0 + \sqrt{R_i} \left( f_{1_{uo}} + f_{2_{uo}} S_0 \right) \rho_z \right) \right) \right) + \\
& f_{2_{uo}} \left( - \frac{e^{-\frac{n^2}{2 \lambda_0 t k^2}} n \sqrt{2 \pi} z}{\sqrt{\text{int}}} - z S_0 \left( - \frac{k}{\sqrt{R_i}} + \frac{\rho_z}{\rho_0} \right) \right) \left( - \left( - \frac{k}{\sqrt{R_i}} + \frac{\rho_z}{\rho_0} \right) \left( - \frac{e^{-\frac{n^2}{2 \lambda_0 t k^2}} n \sqrt{\frac{\pi}{2}} z^4 f_{1_{uo}}^2}{12 \sqrt{\text{int}}} - \right. \right. \\
& \quad \frac{e^{-\frac{n^2}{\lambda_0 t k^2}} n^2 \pi z^4 f_{2_{uo}}}{12 \text{int}} - \frac{e^{-\frac{n^2}{2 \lambda_0 t k^2}} k^2 n \sqrt{\frac{\pi}{2}} z^4}{12 \sqrt{\text{int}} R_i} + \frac{e^{-\frac{n^2}{2 \lambda_0 t k^2}} k n \sqrt{\frac{\pi}{2}} z^4 f_{1_{uo}}}{6 \sqrt{\text{int}} \sqrt{R_i}} + \frac{k^3 z^4 S_0}{24 R_i^{3/2}} - \\
& \quad \frac{k^2 z^4 f_{1_{uo}} S_0}{12 R_i} + \frac{k z^4 f_{1_{uo}}^2 S_0}{24 \sqrt{R_i}} + \frac{e^{-\frac{n^2}{2 \lambda_0 t k^2}} k n \sqrt{\frac{\pi}{2}} z^4 f_{2_{uo}} S_0}{6 \sqrt{\text{int}} \sqrt{R_i}} - \frac{k^2 z^4 f_{2_{uo}} S_0^2}{24 R_i} - \\
& \quad \frac{e^{-\frac{n^2}{2 \lambda_0 t k^2}} n \sqrt{\frac{\pi}{2}} z^4 f_{1_{uo}} \rho_z}{6 \sqrt{\text{int}} \rho_0} + \frac{e^{-\frac{n^2}{2 \lambda_0 t k^2}} k n \sqrt{\frac{\pi}{2}} z^4 \rho_z}{6 \sqrt{\text{int}} \sqrt{R_i} \rho_0} - \frac{z^4 f_{1_{uo}}^2 S_0 \rho_z}{24 \rho_0} - \\
& \quad \frac{e^{-\frac{n^2}{2 \lambda_0 t k^2}} n \sqrt{\frac{\pi}{2}} z^4 f_{2_{uo}} S_0 \rho_z}{6 \sqrt{\text{int}} \rho_0} - \frac{k^2 z^4 S_0 \rho_z}{8 R_i \rho_0} + \frac{k z^4 f_{1_{uo}} S_0 \rho_z}{6 \sqrt{R_i} \rho_0} + \frac{k z^4 f_{2_{uo}} S_0^2 \rho_z}{12 \sqrt{R_i} \rho_0} - \\
& \quad \left. \frac{e^{-\frac{n^2}{2 \lambda_0 t k^2}} n \sqrt{\frac{\pi}{2}} z^4 \rho_z^2}{12 \sqrt{\text{int}} \rho_0^2} - \frac{z^4 f_{1_{uo}} S_0 \rho_z^2}{12 \rho_0^2} + \frac{k z^4 S_0 \rho_z^2}{8 \sqrt{R_i} \rho_0^2} - \frac{z^4 f_{2_{uo}} S_0^2 \rho_z^2}{24 \rho_0^2} - \frac{z^4 S_0 \rho_z^3}{24 \rho_0^3} \right) - \\
& \quad \frac{1}{24 \text{int}^{3/2} R_i^{3/2} \rho_0^3} e^{-\frac{3 n^2}{2 \lambda_0 t k^2}} z^4 \left( n \sqrt{2 \pi} \sqrt{R_i} \rho_0 - e^{-\frac{n^2}{2 \lambda_0 t k^2}} \sqrt{\text{int}} S_0 \left( k \rho_0 - \sqrt{R_i} \rho_z \right) \right) \\
& \quad \left( -3 e^{-\frac{n^2}{2 \lambda_0 t k^2}} \sqrt{\text{int}} f_{2_{uo}} \left( \left( -k + f_{1_{uo}} \sqrt{R_i} \right) \rho_0 + \sqrt{R_i} \rho_z \right) \right. \\
& \quad \left. \left( n \sqrt{2 \pi} \sqrt{R_i} \rho_0 - e^{-\frac{n^2}{2 \lambda_0 t k^2}} \sqrt{\text{int}} S_0 \left( k \rho_0 - \sqrt{R_i} \rho_z \right) \right) - \right. \\
& \quad \left. f_{3_{uo}} \left( n \sqrt{2 \pi} \sqrt{R_i} \rho_0 - e^{-\frac{n^2}{2 \lambda_0 t k^2}} \sqrt{\text{int}} S_0 \left( k \rho_0 - \sqrt{R_i} \rho_z \right) \right)^2 - e^{-\frac{n^2}{2 \lambda_0 t k^2}} \sqrt{\text{int}} \right. \\
& \quad \left. f_{1_{uo}} \left( n \sqrt{2 \pi} f_{2_{uo}} R_i \rho_0^2 + e^{-\frac{n^2}{2 \lambda_0 t k^2}} \sqrt{\text{int}} \left( \left( \left( k - f_{1_{uo}} \sqrt{R_i} \right)^2 - k f_{2_{uo}} \sqrt{R_i} S_0 \right) \rho_0^2 + \right. \right. \right.
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& \left. \frac{z^5 f_{1_{uo}} S_0 \rho_z^3}{40 \rho_0^3} - \frac{k z^5 S_0 \rho_z^3}{30 \sqrt{R_i} \rho_0^3} + \frac{z^5 f_{2_{uo}} S_0^2 \rho_z^3}{30 \rho_0^3} + \frac{z^5 f_{3_{uo}} S_0^3 \rho_z^3}{120 \rho_0^3} + \frac{z^5 S_0 \rho_z^4}{120 \rho_0^4} \right) - \\
& \frac{1}{40 \text{int} R_i^2 \rho_0^4} e^{-\frac{n^2}{2 \text{int} k^2}} z^5 f_{2_{uo}} \left( (-k + f_{1_{uo}} \sqrt{R_i}) \rho_0 + \sqrt{R_i} \rho_z \right)^2 \\
& \left( n \sqrt{2 \pi} \sqrt{R_i} \rho_0 - e^{\frac{n^2}{2 \text{int} k^2}} \sqrt{\text{int}} S_0 (k \rho_0 - \sqrt{R_i} \rho_z) \right)^2 - \\
& \frac{1}{20 \text{int}^{3/2} R_i^2 \rho_0^4} e^{-\frac{3n^2}{2 \text{int} k^2}} z^5 f_{3_{uo}} \left( (-k + f_{1_{uo}} \sqrt{R_i}) \rho_0 + \sqrt{R_i} \rho_z \right) \\
& \left( n \sqrt{2 \pi} \sqrt{R_i} \rho_0 - e^{\frac{n^2}{2 \text{int} k^2}} \sqrt{\text{int}} S_0 (k \rho_0 - \sqrt{R_i} \rho_z) \right)^3 - \frac{1}{120 \text{int}^2 R_i^2 \rho_0^4} \\
& e^{-\frac{2n^2}{2 \text{int} k^2}} z^5 f_{4_{uo}} \left( n \sqrt{2 \pi} \sqrt{R_i} \rho_0 - e^{\frac{n^2}{2 \text{int} k^2}} \sqrt{\text{int}} S_0 (k \rho_0 - \sqrt{R_i} \rho_z) \right)^4 - \\
& \frac{1}{30 \text{int}^{3/2} R_i^2 \rho_0^4} e^{-\frac{3n^2}{2 \text{int} k^2}} z^5 f_{3_{uo}} \left( n \sqrt{2 \pi} \sqrt{R_i} \rho_0 - e^{\frac{n^2}{2 \text{int} k^2}} \sqrt{\text{int}} S_0 (k \rho_0 - \sqrt{R_i} \rho_z) \right)^2 \\
& \left( n \sqrt{2 \pi} f_{2_{uo}} R_i \rho_0^2 + e^{\frac{n^2}{2 \text{int} k^2}} \sqrt{\text{int}} \left( \left( (k - f_{1_{uo}} \sqrt{R_i})^2 - k f_{2_{uo}} \sqrt{R_i} S_0 \right) \rho_0^2 + R_i \rho_z^2 + \right. \right. \\
& \left. \left. \rho_0 (-2 k \sqrt{R_i} \rho_z + R_i (2 f_{1_{uo}} + f_{2_{uo}} S_0) \rho_z) \right) \right) - f_{1_{uo}} \left( \frac{1}{120 \text{int} R_i^2 \rho_0^4} e^{-\frac{n^2}{2 \text{int} k^2}} z^5 \right. \\
& \left. (-k \rho_0 + \sqrt{R_i} \rho_z) \left( -e^{\frac{n^2}{2 \text{int} k^2}} \text{int} k^3 S_0 \rho_0^3 + \sqrt{R_i} \rho_0^2 \left( \left( e^{\frac{n^2}{2 \text{int} k^2}} \sqrt{\text{int}} k^2 n \sqrt{2 \pi} + \right. \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. 2 e^{\frac{n^2}{2 \text{int} k^2}} \text{int} k^2 f_{1_{uo}} S_0 + e^{\frac{n^2}{2 \text{int} k^2}} \text{int} k^2 f_{2_{uo}} S_0^2 \right) \rho_0 + 3 e^{\frac{n^2}{2 \text{int} k^2}} \text{int} k^2 S_0 \rho_z \right) \right) - \\
& e^{\frac{n^2}{2 \text{int} k^2}} \sqrt{\text{int}} k R_i \rho_0 \left( e^{\frac{n^2}{2 \text{int} k^2}} \sqrt{\text{int}} f_{1_{uo}}^2 S_0 \rho_0^2 + 2 f_{2_{uo}} S_0 \rho_0 \left( n \sqrt{2 \pi} \rho_0 + \right. \right. \\
& \left. \left. e^{\frac{n^2}{2 \text{int} k^2}} \sqrt{\text{int}} S_0 \rho_z \right) + 2 f_{1_{uo}} \rho_0 \left( n \sqrt{2 \pi} \rho_0 + 2 e^{\frac{n^2}{2 \text{int} k^2}} \sqrt{\text{int}} S_0 \rho_z \right) + \right. \\
& \left. \rho_z \left( 2 n \sqrt{2 \pi} \rho_0 + 3 e^{\frac{n^2}{2 \text{int} k^2}} \sqrt{\text{int}} S_0 \rho_z \right) \right) + R_i^{3/2} \left( e^{\frac{n^2}{2 \text{int} k^2}} \sqrt{\text{int}} n \sqrt{2 \pi} \rho_0 \rho_z^2 + \right. \\
& \left. e^{\frac{n^2}{2 \text{int} k^2}} \text{int} S_0 \rho_z^3 + f_{1_{uo}}^2 \left( e^{\frac{n^2}{2 \text{int} k^2}} \sqrt{\text{int}} n \sqrt{2 \pi} \rho_0^3 + e^{\frac{n^2}{2 \text{int} k^2}} \text{int} S_0 \rho_0^2 \rho_z \right) + \right. \\
& \left. f_{2_{uo}} \rho_0 \left( 2 n^2 \pi \rho_0^2 + 2 e^{\frac{n^2}{2 \text{int} k^2}} \sqrt{\text{int}} n \sqrt{2 \pi} S_0 \rho_0 \rho_z + e^{\frac{n^2}{2 \text{int} k^2}} \text{int} S_0^2 \rho_z^2 \right) + \right. \\
& \left. f_{1_{uo}} \left( 2 e^{\frac{n^2}{2 \text{int} k^2}} \sqrt{\text{int}} n \sqrt{2 \pi} \rho_0^2 \rho_z + 2 e^{\frac{n^2}{2 \text{int} k^2}} \text{int} S_0 \rho_0 \rho_z^2 \right) \right) \left. \right) - \\
& \frac{1}{120 \text{int}^{3/2} R_i^{3/2} \rho_0^3} e^{-\frac{3n^2}{2 \text{int} k^2}} z^5 \left( n \sqrt{2 \pi} \sqrt{R_i} \rho_0 - e^{\frac{n^2}{2 \text{int} k^2}} \sqrt{\text{int}} S_0 (k \rho_0 - \sqrt{R_i} \rho_z) \right) \\
& \left( -3 e^{\frac{n^2}{2 \text{int} k^2}} \sqrt{\text{int}} f_{2_{uo}} \left( (-k + f_{1_{uo}} \sqrt{R_i}) \rho_0 + \sqrt{R_i} \rho_z \right) \right. \\
& \left. \left( n \sqrt{2 \pi} \sqrt{R_i} \rho_0 - e^{\frac{n^2}{2 \text{int} k^2}} \sqrt{\text{int}} S_0 (k \rho_0 - \sqrt{R_i} \rho_z) \right) \right) -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& f3_{u0} \left( n \sqrt{2\pi} \sqrt{R_i} \rho_0 - e^{-\frac{n^2}{2\lambda_0 t k^2}} \sqrt{\text{int}} S_0 (k \rho_0 - \sqrt{R_i} \rho_z) \right)^2 - e^{-\frac{n^2}{2\lambda_0 t k^2}} \sqrt{\text{int}} \\
& f1_{u0} \left( n \sqrt{2\pi} f2_{u0} R_i \rho_0^2 + e^{-\frac{n^2}{2\lambda_0 t k^2}} \sqrt{\text{int}} \left( \left( (k - f1_{u0} \sqrt{R_i})^2 - k f2_{u0} \sqrt{R_i} S_0 \right) \rho_0^2 + \right. \right. \\
& \left. \left. R_i \rho_z^2 + \rho_0 \left( -2 k \sqrt{R_i} \rho_z + R_i (2 f1_{u0} + f2_{u0} S_0) \rho_z \right) \right) \right) \right)
\end{aligned}$$

$$u_0 = S_0$$

$$u_1 = z \left( -\frac{e^{-\frac{n^2}{2\lambda_0 t k^2}} n \sqrt{2\pi}}{\sqrt{\text{int}}} + \frac{k S_0}{\sqrt{R_i}} - \frac{S_0 \rho_z}{\rho_0} \right)$$

$$u_2 = \frac{e^{-\frac{n^2}{2\lambda_0 t k^2}} n \sqrt{\frac{\pi}{2}} z^2 f1_{u0}}{\sqrt{\text{int}}} - \frac{k z^2 f1_{u0} S_0}{2 \sqrt{R_i}} +$$

$$\frac{z^2 f1_{u0} S_0 \rho_z}{2 \rho_0} + \left( \frac{k}{\sqrt{R_i}} - \frac{\rho_z}{\rho_0} \right) \left( -\frac{e^{-\frac{n^2}{2\lambda_0 t k^2}} n \sqrt{\frac{\pi}{2}} z^2}{\sqrt{\text{int}}} + \frac{k z^2 S_0}{2 \sqrt{R_i}} - \frac{z^2 S_0 \rho_z}{2 \rho_0} \right)$$

$$u_3 = \left( -\frac{k}{\sqrt{R_i}} + \frac{\rho_z}{\rho_0} \right) \left( \frac{e^{-\frac{n^2}{2\lambda_0 t k^2}} n \sqrt{\frac{\pi}{2}} z^3 f1_{u0}}{3 \sqrt{\text{int}}} - \frac{e^{-\frac{n^2}{2\lambda_0 t k^2}} k n \sqrt{\frac{\pi}{2}} z^3}{3 \sqrt{\text{int}} \sqrt{R_i}} + \frac{k^2 z^3 S_0}{6 R_i} - \frac{k z^3 f1_{u0} S_0}{6 \sqrt{R_i}} + \right.$$

$$\left. \frac{e^{-\frac{n^2}{2\lambda_0 t k^2}} n \sqrt{\frac{\pi}{2}} z^3 \rho_z}{3 \sqrt{\text{int}} \rho_0} + \frac{z^3 f1_{u0} S_0 \rho_z}{6 \rho_0} - \frac{k z^3 S_0 \rho_z}{3 \sqrt{R_i} \rho_0} + \frac{z^3 S_0 \rho_z^2}{6 \rho_0^2} \right) - \frac{1}{6 \text{int} R_i \rho_0^2}$$

$$\begin{aligned}
& e^{-\frac{n^2}{2\lambda_0 t k^2}} z^3 \left( n \sqrt{2\pi} \sqrt{R_i} \rho_0 - e^{-\frac{n^2}{2\lambda_0 t k^2}} \sqrt{\text{int}} S_0 (k \rho_0 - \sqrt{R_i} \rho_z) \right) \left( n \sqrt{2\pi} f2_{u0} \sqrt{R_i} \rho_0 + \right. \\
& \left. e^{-\frac{n^2}{2\lambda_0 t k^2}} \sqrt{\text{int}} \left( - (f1_{u0} (k - f1_{u0} \sqrt{R_i}) + k f2_{u0} S_0) \rho_0 + \sqrt{R_i} (f1_{u0} + f2_{u0} S_0) \rho_z \right) \right)
\end{aligned}$$