UNIVERSIDADE FEDERAL DO PAMPA

KETOLYN RAYLLA MEDEIROS SILVA DIAS

Estudo com Equações Diferenciais Ordinárias e Aplicações

Itaqui-RS
2019

KETOLYN RAYLLA MEDEIROS SILVA DIAS

Estudo com Equações Diferenciais Ordinárias e Aplicações

Trabalho de Conclusão de Curso da
Universidade Federal do Pampa
submetido como requisito parcial para
a obtenção do título de Bacharel
Interdisciplinar em Ciência e Tecnologia

Orientador: Prof^{o}. Dr^{o}. Alisson Darós Santos

Itaqui-RS
2019

Estudo com Equações Diferenciais Ordinárias e Aplicações

por

KETOLYN RAYLLA MEDEIROS SILVA DIAS

Trabalho de Conclusão de Curso submetido ao Curso de Bacharelado Interdisciplinar em Ciência e Tecnologia da Universidade Federal do Pampa, como requisito parcial para a obtenção do título de Bacharel Interdisciplinar em Ciência e Tecnologia

Bacharelado Interdisciplinar em Ciência e Tecnologia

Orientador: Prof^o. Dr^o. Alisson Darós Santos

Banca examinadora:

Alisson Darós Santos
Professor Dr. Alisson Darós Santos
UNIPAMPA/Itaqui

Elisa Regina Cara
Professora Dr^a. Elisa Regina Cara
UNIPAMPA/Itaqui

Caroline Jaskulski Rupp
Professora Dr^a. Caroline Jaskulski Rupp
UNIPAMPA/Itaqui

Ficha catalográfica elaborada automaticamente com os dados fornecidos
pelo(a) autor(a) através do Módulo de Biblioteca do
Sistema GURI (Gestão Unificada de Recursos Institucionais) .

D541e Dias, Ketolyn Raylla Medeiros Silva
Estudo com Equações Diferenciais Ordinárias e Aplicações / Ketolyn Raylla Medeiros Silva Dias.
44 p.

Trabalho de Conclusão de Curso(Graduação)-- Universidade Federal do Pampa, INTERDISCIPLINAR EM CIÊNCIA E TECNOLOGIA, 2019.
"Orientação: Alisson Darós Santos".

1. Cálculo. 2. Equações Diferencias Ordinárias. 3. Aplicações. I. Título.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente gostaria de agradecer a Deus. Agradeço ao meu orientador Alisson Darós Santos por aceitar conduzir o meu trabalho de pesquisa. A todos os meus professores do curso de Bacharelado Interdisciplinar em Ciência e Tecnologia da Universidade Federal do Pampa pela excelência da qualidade técnica de cada um. As minhas irmãs Rúbia, Evellyn e Kemilly que sempre estiveram ao meu lado me apoiando ao longo de toda a minha trajetória, ao Luis David que sempre incentivou minhas ideias e expectativas, acreditando na minha capacidade e aos meus amigos pela compreensão e paciência demonstrada durante o período do projeto. Agradeço a todos que diretamente ou indiretamente contribuíram para a minha formação acadêmica.

RESUMO

Neste trabalho tem como objetivo expor alguns dos principais métodos de resolução de equações diferenciais de primeira ordem e apresentamos algumas aplicações destes em equações diferenciais que modelam problemas físicos, químicos e biológicos. Além disso, apresenta-se os principais matemáticos que contribuíram para o desenvolvimento das equações diferenciais, definindo tal conceito e classificando-as quanto ao seu tipo, ordem e linearidade direcionando este trabalho para as equações diferenciais ordinárias de primeira ordem demonstrando alguns dos métodos utilizados para a resolução dos mesmos. Os métodos estudados para a resolução dessas equações foram as equações separáveis, o método do fator integrante, equações exatas e não-exatas, equações homogêneas e equação de Bernoulli, por fim apresentaremos algumas aplicações para as equações diferenciais ordinárias em outras áreas da ciência que não a matemática. Para p desenvolvimento foi realizado um levantamento bibliográfico, com livros, artigos e trabalhos para desenvolver este trabalho, visando o estudo dos principais conceitos de equações diferenciais e as aplicações possíveis dos mesmos nas diversas áreas da ciência.

Palavras chave: Equações Diferenciais Ordinárias. Cálculo. Aplicações.

ABSTRACT

In this work we expose some of the main methods of solving first order differential equations and we present some applications of these in differential equations that model physical, chemical and biological problems. In addition, we present the main mathematicians that contributed to the development of differential equations, defining this concept and classifying them according to their type, order and linearity, directing this work to the first order ordinary differential equations, demonstrating some of the methods used to solve them. The methods studied for the resolution of these equations were the separable equations, the integral factor method, exact and non-exact equations, homogeneous equations and Bernoulli's equation. Finally, we will present some applications for ordinary differential equations in areas of science other than mathematics. For the development, a bibliographic survey was carried out, with books, articles and works to develop this work, in order to study the main concepts of differential equations and their possible applications in various areas of science.

Keywords: Ordinary Differential Equations. Calculus. Application.

SUMÁRIO

Lista de Figuras

1 INTRODUÇÃO

Neste trabalho iremos abordar o estudo das Equações Diferenciais, mais especificamente as Equações Diferenciais Ordinárias (EDO). Uma Equação Diferencial (ED) é uma equação em que as incógnitas são funções e a equação envolve derivadas destas funções (SANTOS, 2011). O estudo das equações diferenciais teve início no século XVII quando houve a necessidade de se modelar matematicamente alguns problemas reais, inicialmente problemas relacionados à física e posteriormente aplicados em outras ciências. De acordo com Boyce e Diprima (2006), os cientistas que forneceram a base para o estudo das equações diferencias foram Newton (1643-1727), Leibniz (1646-1716) e os irmãos Bernoulli, Jakob (1655-1705) e Johann (1667-1748).

Newton em seu estudo sobre os princípios básicos da mecânica classificou as equações diferenciais de primeira ordem, enquanto Leibniz criou a notação de derivada, assim, como o símbolo da integral, além de desenvolver o método das Equações Diferenciais Separáveis. Esses estudos iniciais foram fundamentais para outros cientistas trabalharem com conceito de Equações Diferenciais (BOYCE e DIPRIMA, 2006).

Os conceitos apresentados em Cálculo possuem grandes aplicações em diversas disciplinas de um curso de engenharia, como por exemplo na física, hidráulica, fenômenos de transporte, dentre outros, mas é notável a dificuldade dos alunos em um curso de graduação em entender assuntos específicos das disciplinas de Cálculo por não conseguirem analisar de forma aplicável os assuntos abordados.

Após cursar algumas disciplinas de Cálculo pude analisar a desmotivação dos alunos quanto ao conteúdo, dando estes mais importância para as disciplinas técnicas do curso sem perceber a utilização e a aplicação dos conceitos aprendidos, isso fez com que eu pesquisasse aplicações das equações diferenciais para demonstrar aos colegas do curso que o as disciplinas de Cálculo e seus conteúdos podem e são ligados aos conteúdos de outras áreas cientificas, sendo estes indispensáveis para a modelagem de problemas reais.

Diante desta situação, pensou-se na elaboração deste trabalho, visando o estudo dos principais conceitos de Equações Diferenciais e as aplicações possíveis dos mesmos nas diversas áreas da ciência. Neste contexto, este trabalho tem como objetivo determinar e classificar as Equações Diferenciais, mostrando os principais métodos utilizados para resolução dessas equações e aplicar esses conceitos em problemas da realidade.

O presente trabalho apresenta-se da seguinte forma estrutura a partir desta introdução: o segundo capítulo trás um breve contexto histórico acerca de como se deu o surgimento do estudo das EDO's; no capítulo seguinte, começamos o estudo do tema deste trabalho por apresentar de maneira explicativa definições e resultados preliminares que envolvem Equações Diferenciais Ordinárias; já no quarto capítulo, apresentamos três aplicações de EDO's em ambientes aparentemente distintos do ponto de vista científico, mas que possuem uma abordagem via Equações Diferenciais; por fim, apresentamos uma conclusão deste trabalho.

Para o desenvolvimento deste trabalho foram utilizados livros, artigos e trabalhos referentes ao conteúdo de Equações Diferenciais, visando estudos individuais do acadêmico e a realização de encontros semanais com o professor orientador para sanar as possíveis dúvidas encontradas ao longo da revisão bibliográfica. Após um estudo aprofundado sobre as Equações Diferenciais foi aplicado os conceitos aprendidos em problemas relacionados a algumas áreas da ciência.

2 CONTEXTO HISTÓRICO

Para o seguimento deste trabalho é indispensável conhecer a linha temporal do surgimento das Equações Diferenciais, neste capítulo abordaremos a história do tema em questão. Para Boyce (2006, p 15-16) o desenvolvimento das Equações Diferenciais está intimamente ligado ao desenvolvimento geral da matemática e não pode ser separado dele (SANTOS, 2011).

As Equações Diferenciais, de acordo com Boyce e Diprima (2006), começaram com o estudo do Cálculo por Isaac Newton (1642 - 1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716) durante o século XVII. Suas descobertas sobre o Cálculo e as Leis da Mecânica datam de 1665 e forneceram a base para a aplicação das Equações Diferenciais por Euler (1707 - 1783) no século XVIII. Newton classificou as equações diferenciais de primeira ordem de acordo com as formas $\dfrac{dy}{dx} = j(x)$, $\dfrac{dy}{dx} = j(y)$ e $\dfrac{\partial y}{\partial x} = j(x, y)$. Além disso, desenvolveu um método para resolver a última equação, no caso em que $j(x, y)$ é um polinômio em x e y, usando séries infinitas.

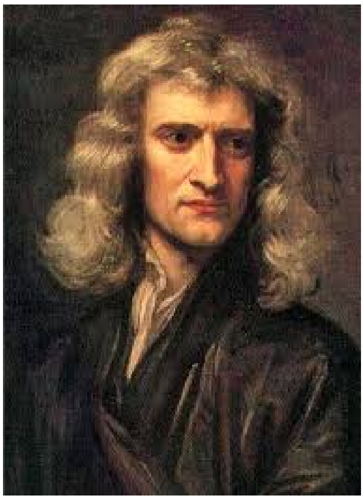

Figura 2.1: Isaac Newton (1643-1727). Fonte: Wikipédia, 2019.

Leibniz, ao longo de sua vida, engajou-se em atividades acadêmicas envolvendo diversos campos da ciência, chegou aos resultados fundamentais do Cálculo independentemente, embora um pouco depois de Newton, mas foi o primeiro a publicá-los, em 1684. Leibniz compreendia o poder de uma boa notação matemática, e a nossa notação para derivada, $\frac{dy}{dx}$, e o sinal de integral são devidos a ele. Descobriu o método de Separação de Variáveis, a redução de Equações Homogêneas a Equações Separáveis em 1691 e o procedimento para resolver equações lineares de primeira ordem em 1694 (BOYCE e DIPRIMA, 2006).

Figura 2.2: Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716). Fonte: Wikipédia, 2019.

Leibniz mantinha correspondência com outros matemáticos, especialmente os irmãos Bernoulli. No decorrer dessas correspondências, foram resolvidos muitos problemas de equações diferenciais durante a parte final do século XVII.

Figura 2.3: Jakob (1654-1705) e Johann (1667-1748). Fonte: Wikipédia, 2019.

De acordo com Boyce e Diprima (2006) Os irmãos Jakob (1654-1705) e Johann (1667-1748) Bernoulli, de Basel, fizeram muito sobre o desenvolvimento de métodos para resolver Equações Diferenciais e para ampliar o campo de suas aplicações. Com a ajuda do Cálculo, resolveram diversos problemas em mecânica, formulando-os como equações diferenciais. Em 1694, Johann Bernoulli foi capaz de resolver a equação $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{ax}$, em que a é uma constante.

Daniel Bernoulli (1700-1782), filho de Johann, emigrou para São Petersburgo na juventude para se incorporar à Academia de São Petersburgo, recém-fundada, mas retomou a Basel em 1733 como professor de botânica e, mais tarde, de física. Seus interesses eram, principalmente, em Equações Diferenciais e suas aplicações. Por exemplo, é seu nome que está associado à Equação de Bernoulli em Mecânica dos Fluidos. Foi, também, o primeiro a encontrar as funções que seriam conhecidas um século mais tarde como funções de Bessel (BOYCE e DIPRIMA, 2006).

Figura 2.4: Daniel Bernoulli (1700-1782). Fonte: Wikipédia, 2019.

Leonhard Euler (1707-1783) foi o matemático mais prolífico de todos os tempos, seus interesses incluíam todas as áreas da matemática e muitos campos de aplicação. Euler identificou a condição para que equações diferenciais de primeira ordem sejam exatas em 1734/1735, desenvolveu a teoria de Fatores Integrantes e encontrou a solução geral para equações lineares homogêneas com coeficientes constantes em 1743 e estendeu esse último resultado para equações não-homogêneas em 1750/1751. Em torno de 1750, Euler usou, ainda, séries de potências para resolver equações diferenciais e fez contribuições importantes na área das Equações Diferenciais Parciais (EDP), dando o primeiro tratamento sistemático do Cálculo de Variações (BOYCE e DIPRIMA, 2006).

Figura 2.5: Leonhard Euler (1707-1783). Fonte: Wikipédia, 2019.

Com o avanço periódico foi possível classificar as equações diferenciais como sendo Ordinárias ou Parciais, além de desenvolver métodos para a obtenção de suas soluções. Esse avanço proporcionou a resolução de inúmeros problemas que puderam ser modelados matematicamente através dessas equações, propiciando uma revolução em diversas áreas da ciência como a física, química, biologia, entre outros.

3 REFERENCIAL TEÓRICO

Neste capítulo apresentaremos alguns dos principais conceitos matemáticos envolvidos no estudo das chamadas Equações Diferenciais Ordinárias e nas aplicações das mesmas nos problemas práticos que serão apresentados no Capítulo 4. O que segue tem como referência Boyce (2016) e Reginal (2011).

Intrinsecamente a palavra "equação" nos remete a, por exemplo, uma expressão da forma

$$x^2 + 2x + 1 \quad = \quad 0, \tag{3.1}$$

que é uma equação envolvendo uma incógnita x, em geral podendo assumir valores reais ou complexos, chamada de *equação algébrica*. Diferentemente deste tipo de equação, abordaremos as chamadas *equações diferenciais* em que as incógnitas são funções reais de variáveis reais e a própria equação envolve derivadas destas funções, como, por exemplo,

1. O movimento de um pêndulo simples de massa m e comprimento l é descrito pela função $\theta(t)$ que satisfaz a equação diferencial

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} sen(\theta) \quad = \quad 0. \tag{3.2}$$

Nesta equação a função incógnita é $\theta(t)$ e t a variável real independente desta função.

2. Em uma região do plano onde não há cargas elétricas, o potencial elétrico $u(x, t)$ em cada ponto (x, y) da região satisfaz a equação diferencial

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} \quad = \quad 0. \tag{3.3}$$

Nesta equação a função incógnita é $u(x, y)$ e x e y são variáveis reais independentes.

De um modo geral, podemos classificar uma equação diferencial quanto ao *tipo* podendo ser ordinária ou parcial, a *ordem* onde verifica-se a derivada de maior ordem e a *linearidade* da função, que pode ser classificada ainda em linear ou não-linear.

3.1 Classificação de uma equação diferencial

Uma equação diferencial pode ser classificada quanto ao seu tipo, em ordinária ou parcial. Ela será dita **ordinária** se apresentar apenas funções incógnitas de uma variável real e derivadas ordinárias destas funções, enquanto que será chamada de **parcial** se apresentar funções incógnitas de mais de uma variável real e derivadas parciais destas.

Exemplo 1. *A expressão*

$$\frac{du}{dx} - \frac{dv}{dx} = 0. \tag{3.4}$$

denota uma equação diferencial ordinária pois aqui temos u e v como funções incógnitas de uma variável real x e derivadas destas funções com relação a esta única variável.

Exemplo 2. *A igualdade*

$$\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + 3y = x^2. \tag{3.5}$$

é uma equação diferencial ordinária cuja função incógnita y depende da variável real x.

Exemplo 3. *A equação*

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-\partial v}{\partial x}. \tag{3.6}$$

é uma equação diferencial parcial pois apresenta as funções incógnitas u e v e derivadas parciais destas, outras variáveis (y e x).

Exemplo 4. *A expressão*

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \quad = \quad x^2 + y. \tag{3.7}$$

representa uma equação diferencial parcial pois possui uma função incógnita z de duas variáveis independentes x e y e derivadas da função z com relação a estas duas variáreis.

Quanto a *ordem*, uma equação diferencial pode ser classificada a partir da derivada de **maior ordem** presente na equação, ou seja, se a maior ordem das derivadas da função incógnita que aparecem na equação diferencial for n, a equação diferencial será dita *de ordem n*.

Exemplo 5. *Um circuito RC é um circuito que tem um resistor de resistência R, um capacitor de capacitância C e um gerador que gera uma diferença de potencial V(t), ligados em série. A carga Q(t) no capacitor satisfaz a equação diferencial*

$$R\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q \quad = \quad V(t). \tag{3.8}$$

A equação diferencial ordinária expressa acima é de primeira ordem pois o maior grau das derivadas da função incógnita presentes nessa equação, é igual a 1.

Exemplo 6. *Em um sistema massa mola composto de um corpo de massa m preso a uma mola com constante elástica k, sujeita a uma força de resistência $F_r = \gamma v = \gamma \frac{dx}{dt}$ e uma força externa $F_{ext}(t) = F_0 cos(wt)$ o deslocamento da massa $x(t)$ satisfaz a equação diferencial*

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma\frac{dx}{dt} + kx \quad = \quad F_0 cos(wt). \tag{3.9}$$

A derivada de maior ordem presente nesta equação diferencial é 2, portanto, esta é uma EDO de segunda ordem.

Exemplo 7. *A derivada de maior ordem presente na equação diferencial parcial*

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0. \tag{3.10}$$

é igual a 2, portanto, esta é uma EDP de segunda ordem.

Por fim, ainda podemos classificar uma equação diferencial como *linear* ou *não-linear*. A linearidade de uma ED se assemelha a das equações algébricas, a única diferença aqui é que estamos trabalhando com funções incógnitas ao invés de variáveis. De um modo geral, uma equação diferencial é linear quando não houver produto entre a função incógnita e suas derivadas. Caso contrário, a equação diferencial é dita não-linear.

Exemplo 8. *A equação diferencial ordinária de 1ª ordem*

$$\frac{dy}{dt} - 2ty(t) = e^t. \tag{3.11}$$

é linear, pois todos os termos envolvendo a função incógnita $y(t)$ possuem potência um e seus coeficientes estão em função apenas da variável t.

Exemplo 9. *A equação geral*

$$a_0(t)y + a_1(t)\frac{dy}{t} + a_2(t)\frac{d^2y}{dt^2} + ... + a_n(t)\frac{d^ny}{dt^n} \quad = \quad f(t). \tag{3.12}$$

representa uma EDO linear de ordem n, já que os coeficientes $a_0, a_1, \cdots, a_n$ e a função $f(t)$ dependem apenas da variável t da função incógnita $y(t)$.

Exemplo 10. *A equação deferencial ordinária a seguir*

$$\frac{d^3y}{dt^3} + 2e^t\frac{d^2y}{dt^2} + y\left(\frac{dy}{dt}\right) = 0. \tag{3.13}$$

é uma EDO não-linear e de terceira ordem, pois verifica-se que há uma potência três em uma das derivadas da função incógnita e, ainda, há um produto entre a função incógnita y e sua função derivada $\frac{dy}{dt}$.

Exemplo 11. *A expressão*

$$x\frac{\partial u}{\partial x} - y\frac{\partial u}{\partial y} = sen(xy). \tag{3.14}$$

é uma equação diferencial parcial de primeira ordem linear, pois as derivadas parciais da função incógnita u possuem potência um e seus coeficientes estão em função das variáveis x e y.

Exemplo 12. *A equação*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + sen(u) = 0. \tag{3.15}$$

é uma equação diferencial parcial não-linear e de segunda ordem, pois observa-se que as derivadas parciais da função incógnita estão elevados na potência dois e a função incógnita u está associada a uma função seno que é não-linear.

3.2 Solução de uma Equação Diferencial

Nesta seção definiremos o que é uma solução de uma equação diferencial e trabalharemos, mais especificamente, a definição de solução para equações diferenciais ordinárias.

Definição 1. *Uma solução de uma equação diferencial em um determinado domínio D é uma função definida neste domínio que, juntamente com suas derivadas, satisfaz a equação diferencial em todo o domínio D.*

Exemplo 13. *Considere a seguinte equação*

$$ay'' + by' + cy = 0, \tag{3.16}$$

sendo $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$ tais que $b^2 - 4ac = 0$. Vamos mostrar que $y(t) = e^{-\frac{b}{2a}t}$ é uma solução da equação (3.16) para todo $t \in \mathbb{R}$. Para tal, de acordo com a definição acima, é suficiente que a função $y(t)$ e suas derivadas satisfaçam a equação (3.16). Primeiro determinaremos $y'(t)$ e $y''(t)$ utilizando a Regra da Cadeia:

$$\begin{cases} y & = & e^{-\frac{b}{2a}t}, \\ y'(t) & = & -\frac{b}{2a}e^{-\frac{b}{2a}t}, \\ y''(t) & = & \frac{b^2}{4a^2}e^{-\frac{b}{2a}t}. \end{cases} \tag{3.17}$$

Substituindo as identidades do sistema acima na equação (3.16) obtemos que

$$\begin{aligned} & ay'' + by' + cy = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & a\left(\frac{b^2}{4a^2}e^{-\frac{b}{2a}t}\right) + b\left(-\frac{b}{2a}e^{-\frac{b}{2a}t}\right) + c\left(e^{-\frac{b}{2a}t}\right) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{b^2}{4a}e^{-\frac{b}{2a}t} - \frac{b^2}{2a}e^{-\frac{b}{2a}t} + ce^{-\frac{b}{2a}t} = 0. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Isolando os termos semelhantes, a equação acima é equivalente a

$$\left(\frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c\right) e^{-\frac{b}{2a}t} = 0 \tag{3.19}$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\frac{b^2 - 2b^2 + 4ac}{4a}\right) e^{-\frac{b}{2a}t} = 0 \tag{3.20}$$

$$\Leftrightarrow \quad -\left(\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right) e^{-\frac{b}{2a}t} = 0. \tag{3.21}$$

Como estamos supondo que $b^2 - 4ac = 0$*, concluímos então que* $y(t) = e^{-\frac{b}{2a}t}$ *é uma solução da equação (3.16).*

Observa-se que a solução acima depende das suas constantes, de modo que a equação (3.16) não possui uma única solução. Para estabelecermos uma solução específica de uma equação diferencial ordinária vamos abordar o conceito de *Problema de Valor Inicial.*

3.3 Problema de Valor Inicial

Um Problema de Valor Inicial (PVI) é um sistema formado por uma equação diferencial e uma *condição inicial* que nada mais é que a exigência de que a solução assuma um valor específico em um determinado ponto do seu domínio.

Exemplo 14. *O sistema*

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = e^{3t}, \\ y\left(\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{e}{3}. \end{cases} \tag{3.22}$$

é considerado um problema de valor inicial. Para resolver este PVI, podemos resolver inicialmente a equação diferencial de forma direta, integrando ambos os lados da igualdade. Então,

$$\frac{dy}{dt} = e^{3t} \quad \Rightarrow \quad dy = e^{3t}dt \quad \Rightarrow \quad \int dy = \int e^{3t}dt \tag{3.23}$$

$$\Rightarrow \quad y(t) = \frac{e^{3t}}{3} + C, \tag{3.24}$$

é uma solução geral da equação diferencial presente no PVI acima.

Mas a solução do PVI deve, também, safisfazer a condição inicial $y(\frac{1}{3}) = \dfrac{e}{3}$. *Desse modo, substituindo a solução (3.23) nesta condição inicial, obtemos*

$$y\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{e}{3} \tag{3.25}$$

$$\frac{e^{3(\frac{1}{3})}}{3} + C = \frac{e}{3} \tag{3.26}$$

$$C = \frac{e}{3} - \frac{e}{3} \tag{3.27}$$

$$C = 0. \tag{3.28}$$

Portando, substituindo $C = 0$ *na solução geral (3.23) encontramos a solução*

$$y(t) = \frac{e^{3t}}{3} \tag{3.29}$$

para este PVI.

3.4 Métodos de Resolução de Equações Diferenciais Ordinárias

Existe um número incontável de equações diferenciais ordinárias e que modelam diversos fenômenos naturais. Nesta seção vamos estudar alguns métodos para resolver tipos específicos destas equações.

3.4.1 Equações Separáveis

Uma equação diferencial ordinária *separável* é uma equação que pode ser escrita na forma

$$g(x) + f(y)\frac{dy}{dx} = 0. \tag{3.30}$$

Para resolver este tipo de equação devemos, como sugere o seu nome, separar as variáveis e aplicar o processo de integração direta.

Exemplo 15. *Considere a equação diferencial ordinária*

$$x + y\frac{dy}{dx} = 0. \tag{3.31}$$

Podemos perceber que, fazendo $f(y) = y$ e $g(x) = x$, esta é uma equação separável pois está na forma (3.30).

Para resolvê-la, vamos separar a variável x da variável y juntamente com suas diferenciais dx e dy, ou seja,

$$x + y\frac{dy}{dx} = 0 \;\Rightarrow\; y\frac{dy}{dx} = -x \;\Rightarrow\; ydy = -xdx. \tag{3.32}$$

Aplicando o processo de integração direta em ambos os lados da igualdade acima, temos que

$$\begin{aligned}\int ydy = \int -xdx \;&\Rightarrow\; \frac{y^2}{2} + C_1 = -\frac{x^2}{2} + C_2 \;\Rightarrow\; \frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} = -C_1 + C_2\\ &\Rightarrow\; y^2 + x^2 = 2(-C_1 + C_2) \;\Rightarrow\; y^2 + x^2 = C.\end{aligned}$$

Dessa forma, a solução $y(x)$ é dada implicitamente pela equação $y^2 + x^2 = C$.

3.4.2 Fator Integrante

O método do fator integrante é usado na resolução de uma equação diferencial ordinária linear de primeira ordem da forma

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = g(t). \tag{3.33}$$

Este método consiste do uso de uma função auxiliar, que chamaremos de *fator integrante*, que transformará a equação acima em uma outra equação diferencial equivalente e que pode, então, ser resolvida via integração direta.

Inicialmente, multiplicando a equação (3.33) por uma função fator integrante $\mu(t)$ a determinar, obtemos

$$\mu(t)\frac{dy}{dt} + p(t)\mu(t)y = \mu(t)g(t). \tag{3.34}$$

Agora, impomos que o lado esquerdo da igualdade em (3.34) é a derivada do produto das funções $y(t)$ e $\mu(t)$, ou seja,

$$\frac{d}{dt}[\mu(t)y] = \mu(t)\frac{dy}{dt} + p(t)\mu(t)y. \tag{3.35}$$

Substituindo (3.35) em (3.34) a equação pode ser reescrita como

$$\frac{d}{dt}[\mu(t)y] = \mu(t)g(t). \tag{3.36}$$

Como pela Regra do Produto para derivadas,

$$\frac{d}{dt}[\mu(t)y] = \mu^{'}(t)y(t) + \mu(t)y^{'}(t), \tag{3.37}$$

então, substituindo na equação (3.35), obtemos

$$\mu^{'}(t)y(t) + \mu(t)y^{'}(t) = \mu(t)\frac{dy}{dt} + p(t)\mu(t)y. \tag{3.38}$$

Simplificando esta expressão,

$$\begin{aligned} & \mu^{'}(t)y(t) + \mu(t)y^{'}(t) = \mu(t)\frac{dy}{dt} + p(t)\mu(t)y && (3.39)\\ \Rightarrow\ & \mu^{'}(t)y(t) = p(t)\mu(t)y && (3.40)\\ \Rightarrow\ & \mu^{'}(t) = p(t)\mu(t) && (3.41)\\ \Rightarrow\ & \frac{\mu^{'}(t)}{\mu(t)} = p(t). && (3.42) \end{aligned}$$

Assim, integrando em ambos os lados da igualdade (3.39) com relação a variável t e usando que $\int \frac{\mu^{'}(t)}{\mu(t)}dt = \ln(\mu(t))$, vemos que

$$\int \frac{\mu^{'}(t)}{\mu(t)}\ dt = \int p(t)\ dt + C_1 \ \Rightarrow\ \ln(\mu(t)) = \int p(t)\ dt + C_1. \tag{3.43}$$

Por convenção, vamos assumir $C_1 = 0$ pois mais a frente aparecerá outra constante de integração. Dessa forma,

$$\begin{aligned} \ln(\mu(t)) = \int p(t)\ dt \ &\Rightarrow\ e^{\ln(\mu(t))} = e^{\int p(t)dt} && (3.44)\\ &\Rightarrow\ \mu(t) = e^{\int p(t)dt} && (3.45) \end{aligned}$$

é a função fator integrante que simplifica a equação inicial (3.34).

Substituindo (3.44) em (3.36), podemos determinar a solução $y(t)$ da EDO (3.33) como segue

$$\frac{d}{dt}[\mu(t)y] = \mu(t)g(t) \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}[e^{\int p(t)dt}y] = e^{\int p(t)dt}g(t) \tag{3.46}$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{d}{dt}[e^{\int p(t)dt}y]\ dt = \int e^{\int p(t)dt}g(t)\ dt + C \tag{3.47}$$

$$\Rightarrow \quad e^{\int p(t)dt}y = \int e^{\int p(t)dt}g(t)\ dt + C \tag{3.48}$$

$$\Rightarrow \quad y(t) = \frac{1}{e^{\int p(t)dt}} \cdot \left[\int e^{\int p(t)dt}g(t)\ dt + C\right]. \tag{3.49}$$

De um modo geral, sempre que tivermos que resolver uma EDO da forma (3.33), podemos multiplicar a EDO pelo fator integrante $\mu(t) = e^{\int p(t)dt}$, transformá-la em uma EDO da forma (3.36) e resolver por integração direta.

Exemplo 16. *Para a EDO*

$$\frac{\partial y}{\partial t} - 2ty = t \tag{3.50}$$

a função fator integrante é dada por

$$\begin{cases} \mu(t) = e^{\int p(t)dt} \\ p(t) = -2t \end{cases} \Rightarrow \mu(t) = e^{\int -2tdt} = e^{-t^2}. \tag{3.51}$$

Assim, procedendo como vimos anteriormente ou utilizando (3.36), com $\mu(t) = e^{-t^2}$ e $g(t) = t$, obtemos

$$\frac{d}{dt}(e^{-t^2}y(t)) = e^{-t^2}t. \tag{3.52}$$

Integrando em ambos os lados com relação a variável t, concluímos que

$$\int \frac{d}{dt}\left(e^{-t^2}y\right)\ dt = \int e^{-t^2}t\ dt \quad \Rightarrow \quad e^{-t^2}y = -\frac{1}{2}e^{-t^2} + C$$

$$\Rightarrow \quad y(t) = -\frac{1}{2} + e^{t^2}C$$

é uma solução geral para a EDO (3.50).

3.4.3 Equações Exatas e Não-exatas

Uma equação da forma

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{3.53}$$

em que as funções de duas variáveis $M(x,y)$ e $N(x,y)$ satisfazem a identidade

$$\frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx} \tag{3.54}$$

é chamada *equação exata*. Caso contrário, ela é dita *não-exata*

A solução de uma equação diferencial exata é dada pela equação

$$f(x,y) = C, \tag{3.55}$$

em que C é uma constante e $f(x,y)$ é a função solução do sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} \frac{df}{dx} = M(x,y) \\ \frac{df}{dy} = N(x,y). \end{cases} \tag{3.56}$$

Exemplo 17. *Verificaremos se a equação diferencial ordinária não-linear*

$$(3x^2 + y^2)dx + 2xydy = 0 \tag{3.57}$$

é exata ou não-exata. Em caso afirmativo vamos resolvê-la.

Inicialmente identificando os valores de $M(x,y)$ e $N(x,y)$ na equação (3.57) tem-se que

$$\begin{cases} M(x,y) = 3x^2 + y^2 \\ N(x,y) = 2xy \end{cases} \tag{3.58}$$

1º passo: Verificar se a equação é exata.

$$\begin{cases} \dfrac{dM}{dy} = \dfrac{d}{dy}(3x^2 + y^2) = 2y \\ \dfrac{dN}{dx} = \dfrac{d}{dx}(2xy) = 2y \end{cases}$$

Como as derivadas parciais são iguais, a equação é exata. 2º passo: Encontrar a solução a partir do sistema de equações (3.56), substituindo as expressões de $M(x, y)$ e $N(x, y)$ quando necessários e integrando nas variáveis x e y.

$$\frac{df}{dx} = M(x, y) \tag{3.59}$$

$$\frac{df}{dx} = 3x^2 + y^2 \tag{3.60}$$

$$\int \frac{df}{dx}\, dx = \int (3x^2 + y^2)\, dx \tag{3.61}$$

$$f(x, y) = 3\frac{x^3}{3} + y^2x + h(y) \tag{3.62}$$

$$f(x, y) = x^3 + y^2x + h(y), \tag{3.63}$$

sendo $h(y)$ uma função que depende apenas da variável y, ou seja, é "constante"com relação a variável x.

Agora, resta apenas obter a expressão de $h(y)$ para que a solução $f(x, y)$ do sistema (3.56) esteja completamente determinada. Para isso, substituindo (3.59) na segunda equação do sistema (3.56) concluímos que

$$\frac{\partial f}{\partial y} = N(x, y) \;\Rightarrow\; \frac{\partial}{\partial y}(x^3 + y^2x + h(y)) = 2xy \;\Rightarrow\; 2yx + h'(y) = 2xy \tag{3.64}$$

$$\Rightarrow\; h'(y) = 0 \;\Rightarrow\; \int h'(y)\, dy = C_1 \;\Rightarrow\; h(y) = C_1, \tag{3.65}$$

sendo C_1 uma constante de integração.

Dessa forma, utilizando (3.64) em (3.59) têm-se que,

$$f(x, y) = x^3 + xy^2 + C_1 \tag{3.66}$$

é a solução do sistema (3.56).

Portanto, de (3.55) e (3.66), a solução procurada para a equação diferencial exata (3.57) é dada por

$$x^3 + xy^2 + C_1 = C \;\Leftrightarrow\; x^3 + xy^2 = C. \tag{3.67}$$

Quando uma equação diferencial é não-exata, ou seja, tem a forma (3.53) mas não satisfaz o critério (3.54), é possível torná-la exata e, assim, aplicar o método de resolução acima para obter sua solução. Para isso multiplica-se a equação não-exata por uma determinada função fator integrante que mostraremos a seguir.

Primeiramente, multiplicando a equação (3.53) por uma função $\mu(x) \neq 0$ à determinar, vemos que

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \;\Leftrightarrow\; \mu(x)M(x,y)dx + \mu(x)N(x,y)dy = 0. \tag{3.68}$$

Para (3.68) ser uma equação exata, precisamos que

$$\frac{\partial}{\partial y}[\mu(x)M(x,y)] = \frac{\partial}{\partial x}[\mu(x)N(x,y)]. \tag{3.69}$$

Resolvendo (3.69), obtemos

$$\mu(x)\frac{\partial}{\partial y}M(x,y) = \mu^{'}(x)N(x,y) + \mu(x)\frac{\partial}{\partial x}N(x,y) \tag{3.70}$$

$$\Leftrightarrow\; \mu(x)\frac{\partial}{\partial y}M(x,y) - \mu(x)\frac{\partial}{\partial x}N(x,y) = \mu^{'}(x)N(x,y) \tag{3.71}$$

$$\Leftrightarrow\; \mu(x)\left[\frac{\partial}{\partial y}M(x,y) - \frac{\partial}{\partial x}N(x,y)\right] = \mu^{'}(x)N(x,y) \tag{3.72}$$

$$\Leftrightarrow\; \frac{\mu^{'}(x)}{\mu(x)} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N(x,y)} \tag{3.73}$$

$$\Leftrightarrow\; \frac{d}{dx}[\ln\mu(x)] = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N(x,y)} \tag{3.74}$$

$$\Leftrightarrow\; \int \frac{d}{dx}[\ln\mu(x)]\;dx = \int \left(\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N(x,y)}\right) dx \tag{3.75}$$

$$\Leftrightarrow\; \ln\mu(x) = \int \left(\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N(x,y)}\right) dx \tag{3.76}$$

$$\Leftrightarrow\; \mu(x) = e^{\displaystyle\int \left(\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N(x,y)}\right) dx}. \tag{3.77}$$

Analogamente, se multiplicarmos (3.53) por uma função $\mu(y)$ concluímos

$$\mu(y) = e^{\displaystyle\int \left(\frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M(x,y)}\right) dy}, \tag{3.78}$$

encontrando duas possíveis funções fator integrante μ, uma dada por (3.76) na variável x e outra por (3.78) na variável y. A escolha entre utilizar $\mu(x)$ e $\mu(y)$ fica a cargo do leitor, visto que o uso de uma ou de outra apenas irá simplificar ou não os cálculos para resolver as equações exatas

$$\mu(x)M(x,y)dx + \mu(x)N(x,y)dy = 0 \tag{3.79}$$

e

$$\mu(y)M(x,y)dx + \mu(y)N(x,y)dy = 0, \tag{3.80}$$

que são equivalentes a equação (3.53).

Exemplo 18. *Considere a equação diferencial*

$$(6xy)dx + (4y + 9x^2)dy = 0. \tag{3.81}$$

Vimos que esta equação tem a forma (3.53) com $M(x,y) = 6xy$ e $N(x,y) = 4y + 9x^2$.

Mas (3.81) é não-exata pois

$$\begin{cases} \dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}(6xy) = 6x \\ \dfrac{\partial N}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial x}(4y + 9xy^2) = 18x \end{cases} \tag{3.82}$$

Portanto, para resolvê-la será necessário multiplicar (3.81) por uma das funções fator integrante μ que a torne exata. Como vimos em (3.76) e (3.78) há duas opções para μ, para este exemplo adotaremos μ em função de y.

Dessa forma,

$$\begin{aligned} \mu(y) &= e^{\displaystyle\int \left(\frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M(x,y)} \right) dy} = e^{\displaystyle\int \left(\frac{18x - 6x}{6xy} \right) dy} \\ &= e^{\int \dfrac{12x}{6xy} dy} = e^{2\int \dfrac{1}{y} dy} = e^{2ln(y)} = e^{ln(y)^2} \\ &= y^2. \end{aligned}$$

Reescrevendo a equação (3.81) com seu fator integrante $\mu(y) = y^2$, obtemos

$$\begin{aligned} & \mu(y)(6xy)\partial x + \mu(y)(4y + 9x^2)dy = 0 & (3.83)\\ \Leftrightarrow\ & y^2(6xy)\partial x + y^2(4y + 9x^2)dy = 0 & (3.84)\\ \Leftrightarrow\ & 6xy^3dx + (4y^3 + 9x^2y^2)dy = 0, & (3.85)\end{aligned}$$

que é uma equação exata equivalente à (3.81).

Resolvendo (3.83) pelo método das equações exatas que vimos no início desta Seção, obtemos uma solução para a equação diferencial (3.81) dada por

$$3x^2y^3 + y^4 = C.$$

3.4.4 Equações Homogêneas de 1ª Ordem

Uma equação homogênea de primeira ordem é uma equação que admite ser escrita na forma

$$\frac{dy}{dt} = F\left(\frac{y}{t}\right), \tag{3.86}$$

em que F apesar de depender de t e y, depende apenas do quociente $\frac{y}{t}$.

Vejamos como resolver este tipo de equação através de um exemplo.

Exemplo 19. *Considere a equação diferencial ordinária*

$$\frac{dy}{dt} = \left(\frac{y}{t}\right)^2 + 2\left(\frac{y}{t}\right). \tag{3.87}$$

O primeiro passo para resolver este tipo de equação é fazer uma mudança de variáveis, a saber,

$$v(t) = \frac{y(t)}{t}, \tag{3.88}$$

ou, equivalentemente,

$$y(t) = tv(t). \tag{3.89}$$

Derivando a equação acima em ambos os lados com relação a variável t, obtemos

$$\frac{dy}{dt} = t\frac{dv}{dt} + v(t). \tag{3.90}$$

Então, substituindo as novas variáveis, (3.87) pode ser reescrita da forma

$$t\frac{dv}{dt} = v^2 + v. \tag{3.91}$$

Esta última equação equivalente, pode ser resolvida pelo método de Separação de Variáveis que vimos em seções anteriores. Assim,

$$\begin{aligned} t\frac{dv}{dt} = v^2 + v \quad &\Rightarrow \quad \frac{dv}{v^2+v} = \frac{dt}{t} &(3.92)\\ &\Rightarrow \quad \int \frac{dv}{v^2+v} = \int \frac{dt}{t} &(3.93)\\ &\Rightarrow \quad \int \frac{1}{v(v+1)}dv = \int \frac{dt}{t} &(3.94)\end{aligned}$$

Para resolver a integral acima, vamos utilizar o método de Frações Parciais:

$$\begin{aligned} \frac{1}{v(v+1)} &= \frac{A}{v} + \frac{B}{v+1} = \frac{A(v+1)+Bv}{v(v+1)} &(3.95)\\ \frac{Av + A + Bv}{v(v+1)} &= \frac{A + (A+B)v}{v(v+1)} &(3.96)\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ A + B = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = -1. \end{cases} \tag{3.97}$$

Portando, podemos escrever

$$\frac{1}{v(v+1)} = \frac{1}{v} - \frac{1}{v+1}. \tag{3.98}$$

Assim, (3.92) pode ser resolvido da seguinte forma

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{v(v+1)}dv &= \int \frac{dt}{t}dt &(3.99)\\ \int \left(\frac{1}{v} - \frac{1}{v+1}\right)dv &= \int \frac{1}{t}dt &(3.100)\\ ln(v) - ln(v+1) &= ln(t) + C_1 &(3.101)\\ ln\left(\frac{v}{v+1}\right) &= ln(t) + C_1 &(3.102)\\ e^{ln\left(\frac{v}{v+1}\right)} &= e^{ln(t)+C_1} &(3.103)\\ e^{ln\left(\frac{v}{v+1}\right)} &= e^{ln(t)}e^{C_1} &(3.104)\\ \frac{v}{v+1} &= Ct &(3.105)\end{aligned}$$

Retornando as variáveis pelas iniciais, concluímos que

$$\frac{\frac{y}{t}}{\frac{y}{t}+1} = Ct \tag{3.106}$$

$$\frac{\frac{y}{t}}{\frac{y+t}{t}} = Ct \tag{3.107}$$

$$\frac{y}{t}\cdot\frac{t}{y+t} = Ct \tag{3.108}$$

$$\frac{y}{y+t} = Ct \tag{3.109}$$

Isolando a função incógnita

$$y = Ct(y+t) \tag{3.110}$$

$$y = Cty + Ct^2 \tag{3.111}$$

$$y - Cty = Ct^2 \tag{3.112}$$

$$y(1-Ct) = Ct^2 \tag{3.113}$$

$$y(t) = \frac{Ct^2}{1-Ct} \tag{3.114}$$

é uma solução de (3.87).

3.4.5 Equação de Bernoulli

As *equações de Bernoulli* são equações não-lineares de 1º ordem, este método é para transformar equações do tipo

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n, \tag{3.115}$$

em lineares em que P e Q são funções contínuas na variável x e $n \in \mathbb{N}$.

Para resolver este tipo de equação, dividimos a equação em ambos os lados da igualdade por y^n, a fim de obter, equivalentemente,

$$\frac{\frac{dy}{dx} + P(x)y}{y^n} = Q(x) \Leftrightarrow \frac{1}{y^n}\frac{dy}{dx} + \frac{P(x)y}{y^n} = Q(x) \tag{3.116}$$

$$\Leftrightarrow (y^{-n})\frac{dy}{dx} + P(x)y(y^{-n}) = Q(x) \tag{3.117}$$

$$\Leftrightarrow (y^{-n})\frac{dy}{dx} + P(x)(y^{1-n}) = Q(x). \tag{3.118}$$

Fazemos então $v = y^{1-n}$. Dessa forma, derivando ambos os lados com relação a variável x, temos

$$\frac{dv}{dx} = \frac{d}{dx}(y^{1-n}) \Leftrightarrow \frac{dv}{dx} = (1-n)(y^{-n})\frac{dy}{dx} \tag{3.119}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{(1-n)}\frac{dv}{dx} = (y^{-n})\frac{dy}{dx}. \tag{3.120}$$

Substituindo $v = y^{1-n}$ e (3.119) em (3.116), obtemos que (3.115) é equivalente a

$$\frac{1}{(1-n)}\frac{dv}{dx} + P(x)v = Q(x) \Leftrightarrow \frac{dv}{dx} + (1-n)P(x)v = (1-n)Q(x). \tag{3.121}$$

Portando, a equação (3.121) é equivalente a (3.115) que é linear e poderá ser resolvida pelo método do Fator Integrante que já foi estudado.

Exemplo 20. *Vamos resolver a equação diferencial ordinária*

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y = xy^2. \tag{3.122}$$

Neste caso, vemos que esta é uma equação de Bernoulli com $n = 2$. Então, multiplicando (3.122) por y^{-2}, temos que

$$(y^{-2})\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y^{-1} = x \tag{3.123}$$

Agora, fazendo a mudança de variável $v = y^{1-2} = y^{-1}$, obtemos

$$\frac{dv}{dx} = -1(y^{-2})\frac{dy}{dx} \Rightarrow y^{-2}\frac{dy}{dx} = -\frac{dv}{dx}. \tag{3.124}$$

Substituindo estas novas expressões em (3.122), temos a equação diferencial equivalente

$$\frac{dv}{dx} - \frac{1}{x}v = -x \tag{3.125}$$

Resolvendo (3.125) pelo método do Fator Integrante vemos que

$$v(x) = -x^2 + Cx \tag{3.126}$$

e, portanto, retornando para $y(x)$, concluímos que uma solução de (3.122) é dada por

$$-x^2 + Cx = \frac{1}{y} \tag{3.127}$$

$$\Rightarrow \quad y(x) = \frac{1}{-x^2 + Cx} \tag{3.128}$$

4 APLICAÇÕES

Neste capítulo iremos apresentar algumas aplicações dos conceitos estudados referentes as Equações Diferenciais Ordinárias. Tais aplicações envolvem conhecimentos de diferentes áreas da ciência, como física, biologia e química.

4.1 Circuito Elétrico

Inicialmente, vamos considerar um circuito elétrico formado por um resistor R, uma indutância L e uma força eletromotriz $E(t)$ conforme a figura abaixo, que representa um circuito RL.

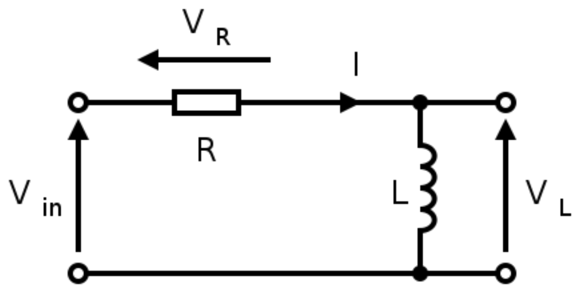

Figura 4.1: Circuito RL

Uma corrente elétrica é circula pelo circuito que é representado por:

$$L\frac{di}{dt} + Ri = E(t), \tag{4.1}$$

em que

$$\begin{cases} L - \text{é a indutância (H)}, \\ R - \text{é a resistência } (\Omega), \\ i - \text{é a corrente (A)}, \\ E - \text{é a força eletromotriz (V)}. \end{cases} \tag{4.2}$$

Problema 1: (ZILL e CULLEN, 2001) Uma força eletromotriz (fem) de 30 volts é aplicada a um circuito em série L-R no qual a indutância é de 0,5 henry e a resistência, 50 ohms. Encontre a corrente $i(t)$ se $i(0) = 0$. Determine também para $i(t \to \infty)$.

Resolução: Para resolver este problema temos os seguintes dados:

$$\begin{cases} L = 0,5 \text{ H}, \\ R = 50 \ \Omega \ , \\ E = 30 \text{ V}, \\ i \text{ é a corrente a determinar}, \\ i(0) = 0 \text{ é a corrente no instante inicial } t = 0. \end{cases} \tag{4.3}$$

Substituindo os dados do problema na equação (4.1), obtemos a equação diferencial

$$0,5\frac{di}{dt} + 50i = 30. \tag{4.4}$$

Dividindo esta equação por 0,5, podemos reescrevê-la como,

$$\frac{di}{dt} + 100i = 60, \tag{4.5}$$

que pode ser resolvida usando o método do Fator Integrante. Para isso, considerando $p(t) = 100$ em (3.33), podemos calcular o fator de integração $\mu(t)$ dado em (3.44), por

$$\mu(t) = e^{\int 100dt} = e^{100t}. \tag{4.6}$$

Multiplicando a equação (4.5) pelo fator de integração obtido acima, vemos que

$$e^{100t}\frac{di}{dt} + 100e^{100t}i = 60e^{100t}, \tag{4.7}$$

ou, equivalentemente como em (3.36),

$$\frac{d}{dt}[e^{100t}i] = 60e^{100t}. \tag{4.8}$$

Daí, integrando em ambos os lados com relação a variável t, obtemos

$$\int \frac{d}{dt}[e^{100t}i]dt = \int 60e^{100t}dt \ \Rightarrow \ e^{100t}i = \frac{60}{100}e^{100t} + C \tag{4.9}$$

Portanto, dividindo a equação acima por e^{100t}, temos uma solução geral $i(t)$ dada por

$$i(t) = \frac{3}{5} + Ce^{-100t}. \tag{4.10}$$

Agora, utilizando a condição inicial $i(0) = 0$, na equação (4.10),

$$0 = \frac{3}{5} + Ce^{-100.0} \Rightarrow C = -\frac{3}{5}. \tag{4.11}$$

concluímos que a solução $i(t)$ do problema em questão é

$$i(t) = \frac{3}{5} - \frac{3}{5}e^{-100t}. \tag{4.12}$$

Além disso, passado um longo período de tempo, ou seja, fazendo $t \to +\infty$, a corrente será igual a $\frac{3}{5}A$.

4.2 Crescimento e/ou Decrescimento Populacional

Problema 2:(ZILL e CULLEN, 2001) A população de bactérias em uma cultura cresce a uma taxa proporcional ao número de bactérias presentes em qualquer tempo. Após 3 horas, observa-se que há 400 bactérias presentes. Após 10 horas, existem 2000 bactérias presentes. Qual era o número inicial de bactérias?

Resolução: Para resolver este problema temos os seguintes dados:

$$\begin{cases} t \text{ variável de tempo,} \\ p(t) \text{ é a população ou número de bactérias no instante } t, \\ p(3) = 400 \text{ número de bastérias em } t = 3, \\ p(10) = 2000 \text{ número de bastérias em } t = 10, \\ p(0) = p_0 \text{ número inicial de bactérias.} \end{cases}$$

Para modelar este problema, lembramos que a derivada pode ser interpretada como taxa de variação, então a taxa no qual a população de bactérias cresce pode ser denotada por $\frac{dp}{dt}$, visto que $p(t)$ representa a população de bactérias no instante de tempo t. Além disso o problema nos diz que esta taxa de crescimento ($\frac{dp}{dt}$) é proporcional ao número de bactérias presente em qualquer tempo t, ou seja, denotando por k esta constante de proporcionalidade, deduzimos que o problema se modela pela equação diferencial ordinária linear de primeira ordem

$$\frac{dp}{dt} = kp(t). \tag{4.13}$$

Portanto, para determinar o número inicial de bactérias p_0, vamos inicialmente resolver o PVI

$$\begin{cases} \dfrac{dp}{dt} = kp(t) \\ p(0) = p_0. \end{cases} \tag{4.14}$$

e, posteriormente, usar os valores $p(3) = 400$ e $p(10) = 2000$ dados no problema.

Para resolver esta equação, vamos utilizar novamente o método do Fator Integrante.

$$\frac{dp}{dt} = kp(t) \Rightarrow \frac{dp}{dt} - kp(t) = 0 \tag{4.15}$$

Calculando o fator integração $\mu(t)$, quando $p(t) = -k$, obtemos

$$\mu(t) = e^{\int -kdt} = e^{-kt}. \tag{4.16}$$

Multiplicando a equação inicial, pelo fator de integração $\mu(t) = e^{-kt}$, temos que

$$e^{-kt}[\frac{dp}{dt} - kp] = 0, \tag{4.17}$$

ou, equivalentemente, aplicando a distributiva,

$$e^{-kt}\frac{dp}{dt} - e^{-kt}kp = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{d}{dt}[e^{-kt}p]dt = 0. \tag{4.18}$$

Agora, integrando esta última equação,

$$\int \frac{d}{dt}[e^{-kt}p]dt = C \;\Rightarrow\; e^{-kt}p = C.$$

Logo, a equação que satisfaz o crescimento da população é dada por

$$p(t) = Ce^{kt}. \tag{4.19}$$

Como $p(0) = p_0$, substituindo em (4.19) obtemos

$$p_0 = Ce^{k(0)} \;\Rightarrow\; p_0 = C.$$

Portanto,

$$p(t) = p_0 e^{kt} \tag{4.20}$$

é a solução do PVI estabelecido acima.

Como o objetivo é determinar o número inicial de bactérias p_0, substituindo os dados do problema $p(3) = 400$ e $p(10) = 2000$ na equação de crescimento populacional (4.20), temos que

$$\begin{cases} p(3) = 400 \\ p(10) = 2000 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 400 = p_0 e^{3k} \\ 2000 = p_0 e^{10k}. \end{cases}$$

Resolvendo este sistema, por isolar p_0 na primeira equação e substituir na segunda equação, vemos que

$$\begin{aligned} p_0 = 400e^{-3k} \;&\Rightarrow\; 2000 = \left(400e^{-3k}\right) e^{10k} \Rightarrow\; 2000 = 400e^{7k} \\ &\Rightarrow\; 5 = e^{7k}. \end{aligned}$$

Usando o logaritmo, encontramos

$$7k = ln(5) \;\Rightarrow\; k = \frac{ln(5)}{7} \simeq 0,23.$$

Se k é aproximadamente igual a 0,23, substituindo esse valor na primeira equação do sistema, encontramos o valor da população inicial p_0,

$$400 = p_0 e^{3(0,23)} \;\Rightarrow\; p_0 = 400e^{-3(0,23)} \simeq 400(0,50) \simeq 200.$$

Portando, a população inicial de bactérias era de aproximadamente 200 bactérias.

4.3 Reação química

Problema 3: (ZILL e CULLEN, 2001) Dois compostos químicos A e B são combinados para formar um terceiro composto C. A taxa ou velocidade da reação é proporcional à quantidade instantânea de A e B não convertida em C. Inicialmente, há 40 gramas de A e 50 gramas de B, e para cada grama de B, 2 gramas de A são usados. É observado que 10 gramas de C são formados em 5 minutos. Quanto é formado em 20 minutos?

Resolução: Para resolver este problema temos os seguintes dados:

$$\begin{cases} A = 40 \text{ gramas}, \\ B = 50 \text{ gramas}, \\ A = 2B \text{ , pois para cada grama de B, 2 de A são usados}, \\ X(t) : \text{é a quantidade do composto C no instante } t, \\ X(0) = 0 \\ X(5) = 10 \text{ gramas} \\ X(20) : \text{é a quantidade do composto produzido em 20 minutos}, \end{cases}$$

Para modelar este problema usando equações diferenciais, notemos inicialmente que combinando os compostos A e B para formar o composto C, ou seja,

$$A + B = X. \tag{4.21}$$

Agora, como para cada grama do composto B, 2 gramas de A são usados, temos que a quantidade do composto de A usada é o dobro da quantidade do composto de B, ou seja, $A = 2B$, então substituindo na equação (4.21) temos,

$$2B + B = X \Rightarrow B = \frac{X}{3}.$$

Portanto, $\frac{X}{3}$ de B são convertidos no composto C. Com isso,

$$A = 2B \ \Rightarrow \ A = \frac{2X}{3}.$$

Dessa maneira, as quantidades remanescentes de A e B, são

$$A = \left(40 - \frac{2X}{3}\right) \quad \text{e} \quad B = \left(50 - \frac{X}{3}\right).$$

Logo,

$$\frac{dX}{dt} = k_1\left(40 - \frac{2X}{3}\right)\left(50 - \frac{X}{3}\right),$$

ou, equivalentemente, tomando $k = k_1$,

$$\frac{dX}{dt} = k(60 - X)(150 - X).$$

Usando o método de Separação de Variáveis, obtemos:

$$\frac{1}{(60 - X)(150 - X)}dX = kdt.$$

Integrando a equação,

$$\int \frac{1}{(60 - X)(150 - X)}dX = \int kdt. \tag{4.22}$$

Para resolver a integral da equação (4.22), usaremos o método das frações parciais:

$$\frac{1}{(60 - X)(150 - X)} = \frac{A}{60 - X} + \frac{B}{150 - X} = \frac{A(150 - X) + B(60 - X)}{(60 - X)(150 - X)}.$$

Dessa maneira,

$$\begin{cases} 150A + 60B = 1 \\ -A - B = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A = \dfrac{1}{90} \\ B = -\dfrac{1}{90} \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \int \frac{A}{60 - X}dX + \int \frac{B}{(150 - X)}dX &= \int kdt \\ \Rightarrow \int \frac{\frac{1}{90}}{(60 - X)}dX + \int \frac{\frac{-1}{90}}{(150 - X)}dX &= \int kdt. \end{aligned}$$

Calculando as integrais, obtemos

$$-\frac{1}{90}\ln(60-X)+\frac{1}{90}\ln(150-X)=kt+C_1,$$

ou, ainda,

$$\ln(150-X)-\ln(60-X)=90kt+90C_1.$$

Aplicando a propriedade logarítmica,

$$\ln\left(\frac{150-X}{60-X}\right)=90kt+90C$$

e, usando a função exponencial,

$$\frac{150-X}{60-X}=e^{90kt}e^{90C_1}.$$

Considerando $C=e^{90C_1}$, obtemos

$$\frac{150-X}{60-X} = Ce^{90kt}. \tag{4.23}$$

Como $X(0)=0$, resulta em:

$$\frac{150-(0)}{60-(0)}=Ce^{k(0)} \;\Rightarrow\; C=\frac{5}{2}.$$

Substituindo $C=\frac{5}{2}$, na equação (4.23),

$$\frac{150-X}{60-X} = \frac{5}{2}e^{90kt}. \tag{4.24}$$

Usando a equação (4.24), com $X(5)=10$, vamos encontrar a constante arbitrária k

$$\frac{150-10}{60-10}=\frac{5}{2}e^{90k(5)} \;\Rightarrow\; \frac{140}{50}=\frac{5}{2}e^{90k(5)} \;\Rightarrow\; e^{5\cdot 90k}=\frac{28}{25}.$$

$$\Rightarrow\; 5\cdot 90k=\ln\left(\frac{28}{25}\right) \;\Rightarrow\; 90k\simeq 0,023.$$

Substituindo na equação (4.24),

$$\frac{150-X}{60-X}=\frac{5}{2}e^{0,023t}. \tag{4.25}$$

Multiplicando a equação (4.25) por $2(60 - X)$,

$$2(150 - X) = 5e^{0,023t}(60 - X)$$

e usando a distributividade,

$$300 - 2X = 300e^{0,023t} - 5Xe^{0,023t} \Rightarrow (5e^{0,023t} - 2)X = 300e^{0,023t} - 300$$

então X, em um certo instante t, será

$$X(t) = \frac{300e^{0,023t} - 300}{5e^{0,023t} - 2}. \tag{4.26}$$

Passados 20 minutos, vamos calcular quanto é produzido do composto C, por meio da solução (4.26), ou seja,

$$\begin{aligned} X(20) &= \frac{300e^{0,023(20)} - 300}{5e^{0,023(20)} - 2} = \frac{300e^{0,46} - 300}{5e^{0,46} - 2} = \frac{475,22 - 300}{7,92 - 2} \\ \Rightarrow \quad X(20) &= \frac{175,22}{5,92} \simeq 29,6. \end{aligned}$$

Dessa forma, após 20 minutos tem-se uma produção de aproximadamente 29,6 gramas do composto C.

5 CONCLUSÃO

Este trabalho teve como objeto de pesquisa o estudo sobre as equações diferenciais, mais especificamente as equações diferenciais ordinárias de 1ª ordem. Foi abordado o contexto histórico, as definições, todos os métodos necessários para um melhor entendimento acerca do assunto em questão, exemplos e algumas aplicações.

Além das aplicações demonstradas nesse trabalho, há diversas maneiras de se modelar um problema utilizando as Equações Diferenciais Ordinárias, como, por exemplo, modelar a capitalização de investimentos, oscilador harmônico amortecido e também o decaimento radioativo.

A história do cálculo bem como o desenvolvimento da equações diferenciais estarão sempre em constante crescimento, novas descobertas a cerca do assunto é indispensável para o desenvolvimento de outras áreas científicas que precisam de algum modo modelar e expressar fenômenos reais, o que evidencia o avanço das informações ao longo dos anos.

Sabe-se da dificuldade dos alunos que cursam uma graduação que envolve disciplinas de Cálculo, por não visualizarem as aplicação que o mesmo possui ou por não ser o foco do curso. Visando isso, a proposta desta pesquisa foi apresentar problemas relacionados a física, biologia e química, com o propósito de fazer com que o leitor desperte interesse pelas disciplinas de Cálculo.

Diversos problemas do mundo real utiliza as equações diferenciais ordinárias (EDO) como uma forma de modelar matematicamente um fenômeno. Conclui-se que as EDOs são uma ferramenta importante que tem grande potencial e pode descrever inúmeros fenômenos, podendo ser aplicado em Física, Química, Engenharia Nuclear, Arqueologia, Geologia, entre outros.

REFERÊNCIAS

BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. LTC-Livros Tecnicos e Cientificos Editora S.A. 8 Ed. Rio de Janeiro, 2006. 446 p.

NÓBREGA, D. D. **Equações diferenciais ordinárias e algumas aplicações**. Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Caicó-RN: 2016, 60 p.

SANTOS, R. J. **Introdução as equações diferenciais ordinárias**. ICEx-Departamento de Matemática. Universidade Federal de Minas Gerais. Belo Horizonte, 2011. 693 p.

SIMÕES, C. A. E. **Equações diferenciais na física**. Universidade de Évora. 2014, 176 p.

ZILL, D. G; CULLEN, Michael R., **Equações Diferenciais**. Vol 1. 3 ed. São Paulo: Pearson 2007.