UNIVERSIDADE FEDERAL DO PAMPA

CAMPUS ITAQUI

TAYNÁ MELO PATIAS

UM ESTUDO FORMAL SOBRE SEQUÊNCIAS E SÉRIES DE FUNÇÕES

Itaqui-RS

2021

TAYNÁ MELO PATIAS

UM ESTUDO FORMAL SOBRE SEQUÊNCIAS E SÉRIES DE FUNÇÕES

Trabalho de Conclusão de Curso II apresentado ao curso Matemática - Licenciatura da UNIPAMPA, campus Itaqui. Como requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciada em Matemática

Orientador: Alisson Darós Santos

Coorientadora: Patrícia Yukari Sato Rampazo

Itaqui-RS

2021

— Patias, Tayná Melo

Um estudo formal sobre Sequências e Séries de Funções / Tayná Melo Patias. – abril, 2021.

32 f.: il.

Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) – Universidade Federal do Pampa, Campus Itaqui, Matemática, 2021.

“Orientação: Alisson Darós Santos; Co-orientação: Patrícia Yukari Sato Rampazo”.

1. Formatação eletrônica de documentos. 2. LaTeX. 3. ABNT. 4. UNIPAMPA. I. Título.

TAYNÁ MELO PATIAS

UM ESTUDO FORMAL SOBRE SEQUÊNCIAS E SÉRIES DE FUNÇÕES

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso de Licenciatura em Matemática como requisito parcial para a obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Trabalho de Conclusão de Curso defendido e aprovado em: 07 de maio de 2021.

Banca examinadora:

Alisson Darós Santos

Prof. Dr. Alisson Darós Santos
Orientador

Patricia Y S Rampazo

Prof. Dra. Patrícia Yukari Sato Rampazo
IFSul

Leonel Delatorre

Prof. Me. Leonel Giacomini Delatorre
Universidade Federal do Pampa

Dedico esta pesquisa aos meus pais, meus maiores e melhores orientadores na vida.

AGRADECIMENTO

Primeiramente agradeço à Deus por me permitir ultrapassar todos os obstáculos encontrados ao longo da realização deste trabalho. Ao meu orientador, por ter desempenhado tal função com dedicação e amizade, a minha coorientadora pelas correções e ensinamentos que me permitiram apresentar um melhor desempenho e aos meus pais e irmã, que me incentivaram nos momentos difíceis e compreenderam a minha ausência enquanto eu me dedicava à realização deste trabalho.

RESUMO

Este trabalho foi desenvolvido na área da Matemática com ênfase em Análise, visando o desenvolvimento do estudo formal de Sequências e Séries de Funções, incluindo as propriedades da convergência uniforme, séries de potências e a aplicação em funções clássicas. Neste contexto, este trabalho investiga e esclarece conceitos de convergência uniforme, derivação e integração na perspectiva de Sequências e Séries de Funções, específicamente abordando os conceitos que envolvam Sequências de funções, Séries de Funções e limites, trabalhando exemplos sobre o referido tema, detalhando e desenvolvendo demonstrações e resultados presentes no livro Análise real, v1 de Elon Lages Lima para entender formalmente as definições de função Seno, Cosseno, Exponencial e Logaritmo sob a ótica formal da Análise.

Palavras-chave: Análise. Sequências. Séries. Funções. Convergência.

ABSTRACT

This work was developed in the area of Mathematics with an emphasis on Analysis, aiming at the development of the formal study of Sequences and Series of Functions, including the properties of uniform convergence, power series and the application in classical functions. In this context, this work investigates and clarifies concepts of uniform convergence, derivation and integration from the perspective of Sequences and Series of Functions, specifically addressing the concepts involving Sequences of functions, Series of Functions and limits, working examples on the referred theme, detailing and developing demonstrations and results present in the book Real Analysis, v1 by Elon Lages Lima to formally understand the definitions of Sine function , Cosine, Exponential and Logarithm from the formal point of view of Analysis.

Keywords: Analysis. Strings. Series. Functions. Convergence.

Lista de ilustrações

Sumário

1 Introdução

O conceito de função foi construído e aperfeiçoado ao longo de vários séculos. Historicamente, há indícios de que os Babilônios (1900 a.C.-1600 a.C.) e também os Pitagóricos (500c.C) já teriam uma ideia, mesmo que vaga, deste conceito. O registro de alguns destes indícios estão na obra "Almageste" do célebre matemático Ptolomeu, publicada entre os anos 125 e 150 d.C.. Já Nicolas Oresme (1323-1382), bispo francês, relata em um de seus livros, que utilizou de segmentos de reta para representar "tudo o que varia", fazendo alusão a ideias físicas que se expressam através de comportamento de objetos (posição) com relação ao tempo, retratando um uso bastante conhecido das funções.

Com o passar do tempo, o estudo das funções tornou-se mais frequente e, surgiu no séc XVII com o matemático e filósofo René Descartes, a utilização de eixos cartesianos para a sua representação. Esta invenção feita em 1637 permitiu estabelecer a correspondência entre pontos do plano e pares de números, assim como representar graficamente as relações entre duas variáveis. Neste século, surgiram outras contribuições para o desenvolvimento da noção de função, como Keppler (1571-1630), com a descoberta das leis sobre as trajetórias planetárias e Galileu (1564-1642) com o estudo da queda dos corpos e a relação entre espaço e tempo. Entretanto, foi no século XIX que apareceu o significado mais amplo de função, definido por Peter Dirichlet, em 1829, que considera a função com y (variável dependente com os seus valores fixos ou determinados por uma regra) dependendo dos valores atribuídos à variável independente x.

Atualmente, com o desenvolvimento da Análise Matemática, o conceito de função possui uma definição precisa. Por causa de sua generalidade, as funções aparecem em diversos contextos e muitas áreas da matemática baseiam-se no seu estudo. Este conceito é uma generalização da noção comum de fórmula matemática. As funções descrevem relações matemáticas especiais entre dois elementos. Intuitivamente, uma função é uma maneira de associar a cada valor do argumento x (às vezes denominado variável independente) um único valor da função $f(x)$ (também conhecido como variável dependente). Assim como a noção intuitiva de funções não se limita a cálculos usando números individuais e sim a uma relação entre elementos, a noção matemática de funções não se limita a cálculos e nem mesmo a situações que envolvam números. Neste contexto, podemos destacar o uso de Sequências e Séries de Funções, foco deste trabalho, e que apresenta grande aplicabilidade no Cálculo Diferencial e Integral, pois o uso de funções no estudo de sequências e séries vem a generalizar estes conceitos e possibilitar resultados mais amplos acerca de convergência, diferenciabilidade e integrabilidade. Além disso, as Sequências e Séries de Funções complementam e fecham os estudos formais da teoria de Análise na Reta, presente nos cursos de Matemática.

Em vários problemas da Matemática e das suas aplicações busca-se uma função que cumpra certas condições dadas. É frequente, nesses casos, obter-se uma sequência de funções $f_1, f_2, ..., f_n, ...$, cada uma das quais cumpre as condições exigidas apenas aproximadamente, porém com aproximações cada vez melhores. Então a função-limite dessa sequência deverá cumprir as tais condições, caso aconteça o melhor. Isto leva ao estudo de limites de sequência de funções (LIMA, 2007). Diferentemente de sequências numéricas em que há apenas a noção de limite, o conceito de sequências envolvendo funções abrange uma gama maior de propriedades não triviais como a convergência uniforme, diferenciabilidade e integrabilidade que abordaremos neste trabalho.

É pertinente ressaltar que na formação do futuro professor de Matemática, seja na Educação Básica ou no Ensino Superior, é necessário que se trate de forma fundamentada os conceitos acima aludidos, como será ressaltado a partir do Capítulo 2. Tal tarefa passa por um tratamento axiomático, baseado nas propriedades matemáticas, que dão sustentação a tal estudo. Devido a carga horária da componente Fundamentos de Análise I ser de 60horas, muitas vezes não é possível abordar todos os tópicos e algumas informações são omitidas ou não são abordadas nos livros texto. Ademais, percebe-se uma certa dificuldade dos estudantes em compreender conceitos formais de matemática como demonstrações de teoremas, o que dificulta o aprendizado na componente Fundamentos de Análise I.

Diante desta situação, pensou-se na elaboração deste trabalho, visando o estudo formal dos teoremas e exemplos de sequências e séries de funções, com o intuito de auxiliar os próximos discentes que irão cursar a componente e incentivar os mesmos a se interessarem por essa área da matemática. O estudo aprofundado da Análise na Reta complementa os estudos de qualquer estudante do curso Matemática-Licenciatura, pois proporciona um contato direto com o formalismo matemático e possibilita desenvolver melhor a sua linguagem oral e escrita, bem como o pensamento lógico-matemático, além de contribuir na continuação dos estudos a nível de pós-graduação do discente.

Neste contexto, temos como objetivo geral investigar e esclarecer conceitos de convergência uniforme, derivação e integração na perspectiva de sequências e séries de funções, especificamente abordar os conceitos que envolvam sequências de funções, séries de funções e limites, trabalhar exemplos sobre o tema de sequências e séries de funções, detalhar e desenvolver demonstrações e resultados presentes no livro Análise real, v1 de Elon Lages Lima e entender formalmente as definições de função seno, cosseno, exponencial e logaritmo sob a ótica formal da Análise.

Além disso, o trabalho têm como metodologia uma pesquisa de caráter bibliográfico e exploratório, permitindo-me obter dados por meio de livros, artigos, dissertações e teses publicados (OTANI; FIALHO, 2011, P. 38). O caráter exploratório se deu por meio da análise dos dados levantados, estimulando-me a reflexão, a compreensão e a conjecturação em busca de métodos de resolução e soluções aos teoremas e exemplos estudados.

Também planeja-se com este estudo, auxiliar os acadêmicos do curso de Matemática - Licenciatura, nas componentes de Teoria Elementar das Funções e Cálculo I e IV, e possibilitar a eles uma visão diferente da tradicional com relação as funções trigonométricas, exponencial e logarítmica.

O presente trabalho apresenta-se da seguinte forma a partir desta introdução: o segundo capítulo ressalta a importância do formalismo na matemática, o capítulo posterior trata do desenvolvimento do estudo formal de sequências e séries de funções, incluindo as subseções sobre as propriedades da convergência uniforme, séries de potências e por fim, o último capítulo apresenta a aplicação em funções clássicas.

2 A importância do formalismo na Matemática

Neste capítulo iremos discutir sobre a importância do formalismo na Matemática, através da visão de educadores e autores de diferentes áreas.

A matemática, como é conhecida hoje, é o resultado de todo um processo de elaboração e redefinição de si mesma. É no processo dessas formas de pensar, principalmente o formalismo, que a Análise Real aparece no contexto das ciências matemáticas. É importante ressaltar que tanto no ensino fundamental ou médio a valorização do raciocínio matemático e da lógica dedutiva deve estar presente no cotidiano dos alunos e pode ser considerada uma estratégia de ensino, a qual o professor pode implementar diariamente e que tem se mostrado benéfica ao longo dos anos.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais[1] (PCN) da educação básica (1998-EF) enfatizam a importância da demonstração matemática e se esforçam para fornecer orientação aos alunos, para que eles possam compreender teoremas e, em seguida, conduzir demonstrações formais e relações que os conectam com o discurso teórico. Essa demonstração de matemática é uma das competências do PCN's que utilizam as habilidades primárias e secundárias como parte do currículo básico.

> Provar um resultado matemático é validar a declaração feita, a partir de hipóteses verificadas e certificadas como verdadeiras. Ensinar por meio de uma prova consiste em mostrar ao educando a validade da declaração feita, exibindo as etapas do processo dedutivo, para assim desenvolver no educando o raciocínio lógico- dedutivo. E com isso possibilitar a construção das habilidades contidas nos PCN. (JR.; NASSER, 2012, p.4)

Silva (2002) afirma que uma demonstração tem a finalidade de estabelecer uma verdade e de nos convencer dessa verdade. São processos relacionados, mas independentes entre si. Uma demonstração, na concepção de Silva, pode desempenhar apenas uma das funções tendo em vista que pode haver uma distância significativa entre a verdade e a convicção. Segundo o autor citado, pode-se persuadir a validade das demonstrações para as quais a verdade ainda não foi determinada. Tal como a convicção envolve a compreensão de que declarações longas podem ser incompreensíveis e, portanto, não se

[1] mesmo os PCN's terem perdido espaço para a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), ainda continua como um documento orientador.

tornam convincentes. Segundo Silva (2002) uma demonstração deve estar passível da compreensão humana não deixando espaço para dúvida de sua veracidade, deve conter um número finito de proposições logicamente encadeadas, onde esses modos de encadeamentos sejam conhecidos, e para isso é necessário que as demonstrações estejam situadas no contexto de um determinado espaço lógico, ou seja, conforme um sistema dedutível, ou mais precisamente inserido em um sistema formal com vocabulários e regras conhecidas, caso contrário não seria possível se ter um encadeamento lógico.

Podemos observar que em uma demonstração em Matemática se dá por um processo de raciocínio lógico e dedutivo para verificar a veracidade de uma proposição. Nesse processo são usados argumentos válidos, ou seja, o que tomamos como hipóteses que concluem afirmações verdadeiras a partir de fatos que também são válidos.

> O ensino da Matemática aos adolescentes simplesmente passou de um extremo a outro: antigamente demonstrava-se demais; hoje se demonstra de menos. Em ambos os casos, esquece-se o verdadeiro objetivo da educação científica, que deve ser o de habituar gradativamente os alunos a pensar por si próprios, de maneira lógico- dedutiva. (GARBI, 2010, p.10)

Garbi (2010) define demonstração ou prova em matemática como "o processo de comprovar a exatidão do enunciado por meio de uma série de conclusões (inferências) a partir da definição."

Segundo os PCN's (BRASIL, 2000), as habilidades de argumentar e provar em Matemática são importantes tanto para o desenvolvimento em Matemática quanto para a formação do cidadão crítico. Porém, percebemos que essa habilidade não é, de modo geral, suficientemente desenvolvida pelos professores de Matemática em suas aulas. Considerando o formalismo matemático de extrema importância, os professores devem promover atividades que estimulem e impliquem a comunicação oral e escrita, levando o aluno a verbalizar os seus raciocínios, a explicar, a discutir e a confrontar processos e resultados.

Em entrevista à Revista Cálculo (03/07/2013, nº 30), Lafayette Spósito Goyano Jota, nomeado a professor de matemática do Colégio e Curso Olimpo de Goiânia foi questionado sobre a situação do uso da demonstração em sala de aula. O professor afirma que as demonstrações raramente são usadas em sua sala de aula, mas sempre usou axiomas e teoremas para ajudar os alunos a se familiarizarem.

> *Você vê uma afirmação matemática e tenta demonstrá-la. Não importa muito se consegue ou não; o que importa é que só depois de tentar conseguirá acompanhar a demonstração incluída no livro, feito à moda de*

> *um matemático profissional. É um exercício solitário que, na maioria dos casos, exige uma tarde, e às vezes exige uma semana ou duas. Descobri que realizar uma coisa dessas em sala de aula é contraproducente. (REVISTA CÁLCULO, n. 30, ano 3, julho de 2013, p.23)*

Lafayette, em sala de aula, procura fazer as demonstrações consideradas fáceis, as que levam instantes para provar. Por vezes, faz uma demonstração mais complicada e quando se depara com uma demonstração mais difícil, que exige um raciocínio maior, ele deixa a serviço dos alunos estudarem a mesma em seus horários extra classe, ele acredita que o professor não deve dar todas as explicações ou soluções nas aulas, devendo sempre medir a quantidade e qualidade dos materiais ministrados para incentivar os estudantes a descobrirem por si próprios.

Penso que Lafayette quis dizer que são importantes as demonstrações, mas é preciso tomar cuidado com o tempo, quando e como trabalhar elas. De maneira geral, percebe-se que o formalismo matemático é imprescindível para o processo de ensino-aprendizagem em matemática e, como toda ferramenta de ensino, deve ser trabalhada e estudada, por parte do professor, de maneira coerente e gradual, para que não impacte o aluno de forma negativa.

> Finalmente, quanto ao ensino, não há mistério nem milagre. O bom professor é aquele que vibra com a matéria que ensina, conhece muito bem o assunto e tem um desejo autêntico de transmitir esse conhecimento, portanto se interessa pelas dificuldades de seus alunos e procura colocar-se no lugar deles, entender seus problemas e ajudar a resolvê-los. Não há fórmulas mágicas para ensinar Matemática. Não há caminhos reais, como Euclides já dizia a Ptolomeu. A única saída é o esforço honesto e o trabalho persistente. Não só para aprender Matemática, mas para tudo na vida. (LIMA, 2007, p.5)

O professor Elon Lages, com sua experiência de ensino e conhecimento em relação ao ensino de Matemática, caracteriza um bom professor de matemática com absoluta precisão e simplicidade. Além de fortalecer também o desenvolvimento de virtudes no cotidiano escolar de quem ensina e de quem aprende.

3 Sequências e Séries de Funções

Neste capítulo, abordaremos conceitos importantes envolvendo o tema de Sequências e Séries de Funções sob a ótica formal da Análise e apresentaremos o desenvolvimento de exemplos e teoremas envolvendo Sequências e Séries de Funções.

Sequências e séries são conceitos essenciais em diversas áreas da matemática e suas aplicações. Alguns problemas importantes na Matemática visam determinar quais funções satisfazem propriedades específicas previamente estabelecidas, por exemplo, problemas que se reduzem a um sistema de equações diferenciais. Uma das maneiras de abordar tais problemas consiste em obter funções que satisfazem as condições apenas aproximadamente, com erro cada vez menor, e depois "passar ao limite". É de se esperar que a "função-limite" seja uma solução exata do problema e tenha as propriedades desejadas. Isto nos dá uma primeira ideia sobre o interesse da noção de limite de uma sequência de funções. Ainda, para resolução destes problemas, por vezes se faz necessário o uso da soma dos termos desta sequência, o que da origem ao conceito de série de funções.

Ao contrário das sequências de números reais, para as quais existe uma única noção de limite, há diferentes maneiras de definir a convergência de uma sequência de funções. Definiremos a seguir a convergência simples e a convergência uniforme, utilizando como texto base Lima (2010).

3.1 Convergências de Sequências de Funções

Seja X um conjunto de números reais, uma sequência de funções $f_n : X \to \mathbb{R}$ é uma correspondência que associa a cada número natural $n \in \mathbb{N}$ uma função f_n, definida em X e tomando valores reais.

Diz-se que a sequência de funções $f_n : X \to \mathbb{R}$ converge simplesmente para a função $f : X \to \mathbb{R}$ quando, para cada $x \in X$, a sequência de números $f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x), ...$ converge para o número $f(x)$. Ou seja, para todo $x \in X$ fixado, tem-se $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$. Para exprimir esta situação, diz-se que "f_n converge simplesmente para f em X". Mais resumidamente, $f_n \to f$ simplesmente em X. A convergência simples às vezes também se chama convergência ponto a ponto ou convergência pontual.

Definição 3.1.1. Dizemos que f_n converge simplesmente para f quando dado qualquer $\varepsilon > 0$, pode-se obter, para cada $x \in X$, um natural $n_0 = n_0(\varepsilon, x)$, o qual pode depender de ε e de x, tal que se $n > n_0$, então $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Exemplo 3.1.1. A sequência de funções $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, onde $f_n(x) = \frac{x}{n}$, converge simplesmente para a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que é identicamente nula.

Devemos mostrar que $f_n(x) \to 0$ simplesmente, ou seja, devemos garantir que dado qualquer $\varepsilon > 0$ e $x \in X$, é possível obter um natural $n_0 = n_0(\varepsilon, x)$, tal que se $n > n_0$, então $|\frac{x}{n} - 0| < \varepsilon$.

Com efeito, para cada $x \in \mathbb{R}$ fixado, e $\varepsilon > 0$, têm-se

$$\left|\frac{x}{n} - 0\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{|x|}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow |x| < \varepsilon.n \Leftrightarrow \frac{|x|}{\varepsilon} < n$$

Agora, considerando $n_0 = \frac{|x|}{\varepsilon}$ temos que para todo $n > n_0$ se verifica o cálculo acima.

Logo $f_n(x) \to 0$, obtendo uma convergência pontual para cada x.

Observação 3.1.1. No exemplo 3.1.1 é possível perceber que para cada x fixado, encontramos um $n_0 = \frac{|x|}{\varepsilon}$, logo esse n_0 muda de valor conforme a variação de $x \in \mathbb{R}$, quanto maior for $|x|$, maior será o valor de n_0. Em consequência disso, a convergência de $(\frac{x}{n})$ para zero não se dá de maneira "uniforme" pois para diferentes valores de $x \in \mathbb{R}$ obtêm-se diferentes valores de $n_0 \in \mathbb{N}$.

Definição 3.1.2. Denotamos que uma sequência de funções $f_n : X \to \mathbb{R}$ converge uniformemente para uma função $f : X \to \mathbb{R}$ quando, para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe $n_0(\varepsilon)$ tal que se $n > n_0$ então $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, para qualquer $x \in X$.

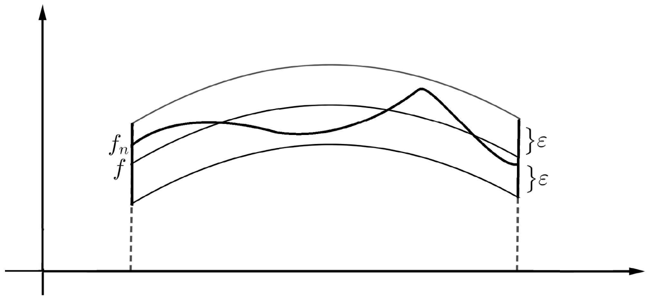
Note que mantendo $\varepsilon > 0$ fixo, pode perfeitamente ocorrer que não exista n_0 algum que sirva simultaneamente para todo $x \in X$.

Geometricamente, dizer que $f_n \to f$ uniformemente em X significa que,para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que o gráfico de f_n, para todo $n > n_0$, está contido na faixa de raio ε em torno do gráfico de f.

Ou seja, a convergência uniforme no plano $\mathbb{R}^2$, significa que a faixa de raio $\varepsilon > 0$ em torno do gráfico de f é o conjunto

$$F(f; \varepsilon) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \in X \text{ e } f(x) - \varepsilon < y < f(x) + \varepsilon\}.$$

Figura 1 – Noção geométrica da convergência uniforme.



Fonte: os autores

Do contrário, a convergência não sendo uniforme, significa que existe pelo menos um $\varepsilon > 0$ tal que, para uma infinidade de valores naturais n, o gráfico de f_n acaba saindo da faixa $(-\varepsilon, \varepsilon)$, centrada no gráfico de f.

Dessa forma, para provar que f_n não converge uniformemente para f em X, devemos exibir um $\varepsilon > 0$ tal que, para uma infinidade de $n \in \mathbb{N}$ se pode achar $x = x(n)$ em X satisfazendo $|f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon$. A convergência uniforme, como se vê, é mais restritiva que a convergência simples no sentido que exige a obtenção de $n_0 = n_0(\varepsilon)$ (dependendo apenas de ε e não de x), por isso possui várias consequências importantes. Tais conceitos de convergência são base para o desenvolvimento de diversas áreas da Matemática, como por exemplo, a Análise Funcional com sua teoria de operadores (OLIVEIRA, 2012).

Exemplo 3.1.2. A função $f_n(x) = \frac{x}{n}$ não converge uniformemente para a função nula.

De fato, geometricamente mostrar isso significa que alguma faixa de raio ε em torno do eixo das abcissas pode conter o gráfico de uma função $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f_n(x) = \frac{x}{n}$, então, qualquer que seja $\varepsilon > 0$, o gráfico de qualquer f_n acaba saindo da faixa $(-\varepsilon, \varepsilon)$, centrada no eixo dos x.

Algebricamente para mostrar que $f_n(x)$ não converge uniformemente para diferentes valores de x, devemos exibir um $\varepsilon > 0$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ pode-se obter $x = x(n)$ nos $\mathbb{R}$ tal que $|\frac{x}{n} - 0| \geq \varepsilon$.

Neste intuito, considere $\varepsilon = 1$ e $x = 3n$. Então, teremos

$$\left|\frac{x}{n} - 0\right| = \left|\frac{x}{n}\right| = \left|\frac{3n}{n}\right| = 3 > \varepsilon \quad \forall \quad n \in \mathbb{N}$$

Logo a sequência (f_n) do exemplo 3.1.1 não converge uniformemente para a função identicamente nula.

Exemplo 3.1.3. Se $X \subset \mathbb{R}$ é um conjunto limitado, então a sequência (f_n) do exemplo anterior converge uniformemente para a função identicamente nula em X.

De fato, se X é um conjunto limitado, então podemos supor que existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $|x| \leq c$ para todo $x \in X$. Assim, para mostrar que neste caso existe convergência uniforme, vejamos que dado $\varepsilon > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow \left|\frac{x}{n} - 0\right| < \varepsilon$ seja qual for $x \in X$.

Note que

$$\left|\frac{x}{n} - 0\right| = \left|\frac{x}{n}\right| = \frac{|x|}{n} \leq \frac{c}{n},$$

ou seja, para se ter

$$\left|\frac{x}{n} - 0\right| < \varepsilon$$

é suficiente considerar $n_0 \in \mathbb{N}$ de modo que tenhamos para todo $n > n_0$,

$$\frac{c}{n} < \varepsilon. \tag{3.1}$$

Isto ocorre quando considerarmos n_0 o primeiro natural maior do que $\frac{c}{\varepsilon}$, pois neste caso a desigualdade da equação (3.1) é verdadeira e, consequentemente,

$$\left|\frac{x}{n} - 0\right| < \varepsilon.$$

Dizemos então que a convergência é uniforme no intervalo $[-c, c]$, visto que conseguimos encontrar um n_0 que independe de x, válido para todo $x \in X \cap [-c, c]$.

Observação: É interessante observar também que, se aumentarmos o valor c, teremos que aumentar também, o valor de n_0. Embora a convergência continue uniforme em qualquer intervalo $|x| \leq c$ ela não é uniforme na união desses intervalos, que é todo eixo real.

Exemplo 3.1.4. A sequência de funções contínuas $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n$, converge simplesmente para a função descontínua $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ 1, & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

Queremos mostrar que a $f_n(x)$ converge simplesmente para a função descontínua $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, ou seja, se $x \in [0, 1]$ então dado qualquer $\varepsilon > 0$ devemos obter um inteiro, positivo $n_0 = n_0(\varepsilon, x)$, tal que se $n > n_0$, então $|x^n - f(x)| < \varepsilon$.

Com efeito, vamos separar em dois casos, para $x \in [0, 1)$ fixo, dado $\varepsilon > 0$, tomando $n_0 = \log_x \varepsilon$, tem-se que se $n > n_0$, então

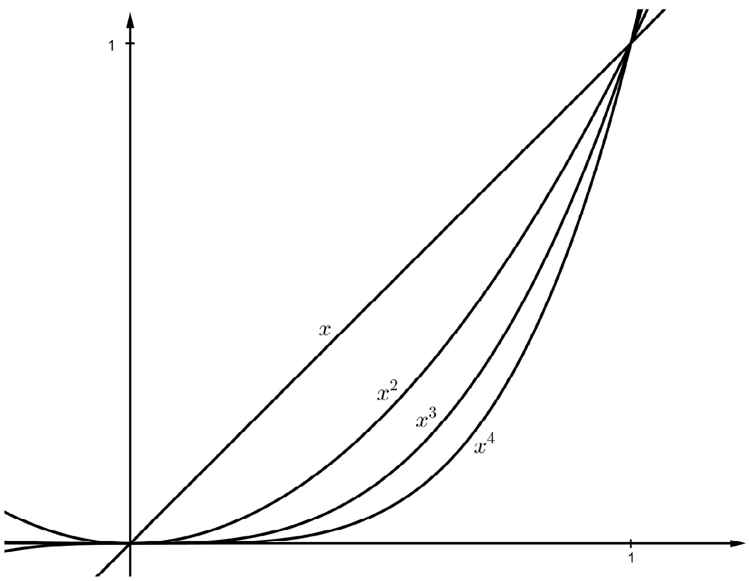
$$|x^n - 0| = x^n < x^n = x^{\log_x \varepsilon} = \varepsilon.$$

Por fim, no caso em que $x = 1$ temos $f(1) = 1$ e $f_n(1) = 1$, então dado $\varepsilon > 0$, temos que

$$|f_n(1) - 1| = |1^n - 1| = 0 < \varepsilon.$$

Portanto, segue que a $f_n(x)$ converge pontualmente no intervalo $[0, 1]$ para uma função descontínua $f(x)$ dada acima.

Figura 2 – $f_n(x) = x^n$



Fonte: os autores

Exemplo 3.1.5. Sendo $f_n(x) = x^n$ a f_n converge uniformemente no intervalo da forma $[0, a]$, sendo a um número real menor que 1.

Com efeito, como $0 < a < 1$, então $\lim_{n\to+\infty} a^n = 0$. Dado $\varepsilon > 0$, seja $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow a^n < \varepsilon$. Daí, se $n > n_0$, então $0 < x^n \leq a^n < \varepsilon$ para todo $x \in [0, a]$. Portanto $f_n \to 0$ uniformemente no intervalo $[0, a]$.

Exemplo 3.1.6. Note que a f_n do Exemplo 3.1.5 não converge uniformemente em todo intervalo [0,1]. Com efeito, tomando $\varepsilon = \frac{1}{2}$, afirmamos que, seja qual for n natural maior que 1, existem pontos $x \in [0, 1)$ tais que $|f_{n_0}(x) - f(x)| \geq \frac{1}{2}$, ou seja, $x^n \geq \frac{1}{2}$.

Podemos observar que para cada $n > 1$ fixo, $\lim_{x\to 1-} x^n = 1$, logo existe $\delta > 0$ tal que se $1-\delta < x < 1$ então $x^n > \frac{1}{2}$.

Isto mostra que f_n não converge uniformemente para f no intervalo $[0,1]$, pois exibimos um $\varepsilon > 0$ tal que, para uma infinidade de n naturais e $x \in [0,1)$ com $|f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon$.

Exemplo 3.1.7. A sequência de funções contínuas $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}, f_n(x) = x^n(1-x^n)$ converge simplesmente para a função identicamente nula em $[0,1]$. Para verificar, basta lembrar do Exemplo 3.1.4, vimos que x^n converge para a função tal que $f(x) = 0$ para $0 \leq x < 1$ e $f(1) = 1$. Logo, para $0 < x < 1$, $0 < x^n(1-x^n) < x^n \to 0$ e para $x = 0$ $f_n(0) = 0(1-0) = 0$, e para $x = 1$, temos $f_n(1) \to 1(1-1) = 0$.

Esta convergência não é uniforme. De fato, note que para todo $n \in \mathbb{N}$, tem-se

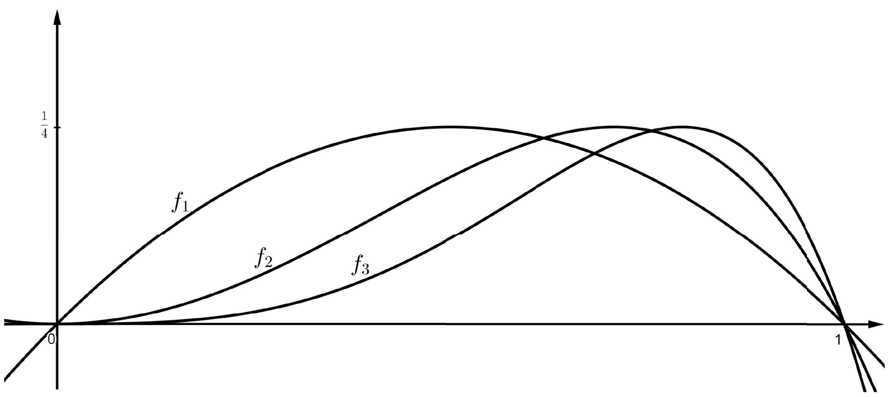
$$f_n\left(\left[\frac{1}{2}\right]^{\frac{1}{n}}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{n}}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{n}}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

. Então, para $\varepsilon < \frac{1}{4}$, nenhuma função f_n tem seu gráfico contido na faixa de raio ε em torno da função 0. Por exemplo, tomando $\varepsilon = \frac{1}{8}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos

$$f_n\left(\left[\frac{1}{2}\right]^{\frac{1}{n}}\right) = \frac{1}{4} > \frac{1}{8} = \varepsilon$$

logo a convergência não é uniforme.

Figura 3 – $f_n(x) = x^n(1-x^n)$



Fonte: os autores

Mas para todo $0 < \delta < 1, f_n \to f$ uniformemente no intervalo $[0, 1-\delta]$, pois como vimos no Exemplo 3.1.4, $x^n \to 0$ uniformemente no intervalo $[0, 1-\delta]$ e $0 \leq x^n(1-x^n) \leq x^n$

para todo $n \in \mathbb{N}$ e $x \in [0,1]$. Ou seja, temos que dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x^n - 0| = x^n < \varepsilon$ para todo $n > n_0$ e $x \in [0, 1-\delta]$, portanto

$$|x^n(1-x^n) - 0| = x^n(1-x^n) \leq x^n < \varepsilon$$

para todo $n > n_0$ e todo $x \in [0, 1-\delta]$.

3.2 Propriedades da convergência uniforme

Historicamente, como relatado em Ávila (2001), os primeiros matemáticos a identificarem o conceito de convergência uniforme parece ter sido Christof Gudermann (1798-1852) em um trabalho de 1838 e Karl Weierstrass (1815-1897), que preparou sua tese (sobre funções elípticas) para a obtenção do diploma de "professor de segundo grau"com Gudermann, que juntos tiraram todas as implicações importantes na teoria das séries de funções.

Em suas preleções em Berlim, Weierstrass sempre enfatizou a importância da convergência uniforme, particularmente para a integração termo a termo de uma série convergente de funções contínuas.

A seguir enunciaremos e demonstraremos teoremas de grande importância envolvendo tais propriedades.

Teorema 3.2.1. *Se uma sequência de funções $f_n : X \to \mathbb{R}$ converge uniformemente para $f : X \to \mathbb{R}$ e cada f_n é contínua no ponto $a \in X$ então f é contínua no ponto a.*

Demonstração. Queremos mostrar que f é contínua no ponto a, ou seja, para todo $\varepsilon > 0$, devemos mostrar que existe $\delta > 0$ tal que se $x \in X$, $|x-a| < \delta$ implica que $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Vejamos que

$$\begin{aligned} |f(x) - f(a)| =& |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(a) + f_n(a) - f(a)| \\ &= |(f(x) - f_n(x)) + (f_n(a) - f(a)) + (f_n(x) - f_n(a))| \\ &\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(a) - f(a)| + |f_n(x) - f_n(a)|. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Agora, como f_n converge para f uniformemente, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que se $n > n_1$, então

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \text{ para todo } x \in X. \tag{3.3}$$

Além disso, como f_n é contínua no ponto a para todo $n \in \mathbb{N}$, existe $\delta > 0$ tal que se $x \in X$ é tal que $|x - a| < \delta$ então

$$|f_n(a) - f_n(a)| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{3.4}$$

Logo, dado $\varepsilon > 0$ e fixando $n > n_1$, temos que se $x \in X$ é tal que $|x - a| < \delta$ então substituindo (3.3) e (3.4) em (3.2) temos

$$|f(x) - f(a)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(a) - f(a)| + |f_n(x) - f_n(a)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Isto prova o teorema. □

Este teorema que acabamos de mostrar nos dá uma ferramenta importante para verificar convergência uniforme, a medida que uma sequência de funções contínuas converge simplesmente para uma função descontínua, então essa convergência simples não pode ser uniforme, pois iria contradizer o Teorema 3.2.1.

Exemplo 3.2.1. A sequência de funções contínuas $f_n(x) = x^n$ não pode convergir uniformemente em $[0, 1]$ pois converge simplesmente para a função descontínua $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 0$ se $0 \leq x < 1$, $f(x) = 1$ se $x = 1$.

Já a sequência de funções contínuas $f_n(x) = x^n(1 - x^n)$ converge simplesmente no intervalo $[0, 1]$ para a função nula, que é contínua mas nem por isso a convergência é uniforme, como vimos no Exemplo 3.1.7. Por isso, a importância de ter clareza ao aplicar o Teorema 3.2.1.

A mesma observação pode ser feita sobre a sequência de funções contínuas $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{x}{n}$ do Exemplo 3.1.2. Com relação a essas últimas observações, isto é, uma possível recíproca do Teorema 3.2.1, podemos destacar o Teorema 3.2.3 que apresentaremos a seguir. Antes de demonstrá-lo, precisamos apresentar uma definição e retomar um resultado conhecido na análise real.

Definição 3.2.1. Diz-se que uma sequência de funções $f_n : X \to \mathbb{R}$ converge monotonicamente para a função $f : X \to \mathbb{R}$ quando, para cada $x \in X$, a sequência $(f_n(x))_{n \in N}$ é monótona e converge para $f(x)$.

Assim, por exemplo, as sequências dos Exemplos 3.1.1 e 3.1.4 convergem monotonicamente.

É claro que se $f_n \to f$ monotonicamente em X então
$|f_{n+1}(x) - f(x)| \leq |f_n(x) - f(x)|$ para todo $x \in X$ e para todo $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 3.2.2. *Dada uma sequência decrescente $X_1 \supset X_2 \supset ...X_n...$ de conjuntos compactos não-vazios, existe (pelo menos) um número real que pertence a todo os X_n.*

Demonstração. Ver em LIMA(2010) pg. 4. □

Teorema 3.2.3 (Dini)**.** *Se a sequência de funções contínuas $f_n : X \to \mathbb{R}$ converge monotonicamente para a função contínua $f : X \to \mathbb{R}$ no conjunto compacto X então a convergência é uniforme.*

Demonstração. Dado $\varepsilon > 0$ queremos mostrar que a convergência de (f_n) para f é uniforme, ou seja, que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n > n_0$ então $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, para todo $x \in X$.

Com este intuito, definimos para cada $n \in \mathbb{N}$ $X_n = \{x \in X; |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}$, ou seja, o conjunto dos pontos $x \in X$, tais que $f_n(x)$ se distancia de $f(x)$ uma distância $\varepsilon > 0$.

Vamos mostrar que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n > n_0$ então $X_n = \emptyset$. Como f_n e f são contínuas e X é compacto, isto é, fechado e limitado, temos que cada X_n é compacto.

Agora, como f_n converge monotonicamente para f, temos $X_1 \supset X_2 \supset X_3...$ pois

$$|f_{n+1}(x) - f(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| \leq ... \leq |f_1(x) - f(x)|.$$

Por fim, como $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ vemos que $\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n = \emptyset$. Com efeito, vamos supor por absurdo que $\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n \neq \emptyset$, então existiria $x_0 \in X_n$ para todo n. Pela definição de X_n, $|f_n(x_0) - f(x_0)| \geq \varepsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$, ou seja, $f_n(x_0)$ não converge para $f(x_0)$ o que é um absurdo, pois por hipótese, f_n converge simplesmente para f.

Segue-se do Teorema 3.2.2, que algum X_{n_0} (e, portanto, todo X_n com $n > n_0$) é vazio. Isto significa que $n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, seja qual for $x \in X$. □

Exemplo 3.2.2. A sequência de funções contínuas $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n$, converge monotonicamente para a função (contínua) identicamente nula no conjunto não compacto $[0, 1)$ mas a convergência não é uniforme.

Primeiramente vejamos que de fato $f_n(x)$ converge monitonicamente. Como vimos no Exemplo 3.1.4, $f_n(x)$ converge simplesmente para a função nula para $x \in [0, 1)$, e claramente é monótona decrescente neste intervalo, pois $x^{n-1} < x^n$.

O fato da convergência não ser uniforme foi provado no Exemplo 3.1.5.

Note que este exemplo não contradiz o Teorema de Dini já que este conjunto não é compacto.

A seguir vamos enunciar o Teorema 3.2.4 para utilizar nos próximos resultados e demonstrações.

Teorema 3.2.4 (Condição imediata de integrabilidade.). *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitada. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(1)*f é integrável.*

(2) *Para todo $\varepsilon > 0$, existem partições P, Q de $[a,b]$ tais que $S(f;Q) - s(f;P) < \varepsilon$.*

(3) *Para todo $\varepsilon > 0$, existe uma partição $P = \{t_0, ...t_n\}$ de $[a,b]$ tal que $S(f;P) - s(f;P) = \sum_{i=1}^{n} w_i(t_i - t_{i-1}) < \varepsilon$.*

Demonstração. Ver em LIMA(2010) pg. 125. □

Teorema 3.2.5 (Passagem ao limite sob o sinal de integral.). *Se a sequência de funções integráveis $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ converge uniformemente para $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ então f é integrável e*

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx.$$

De outra forma: $\displaystyle\int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n$ *se a convergência é uniforme.*

Demonstração. Primeiramente queremos mostrar que f é integrável, então vamos garantir o item (3) do Teorema 3.2.4. Ou seja, dado $\varepsilon > 0$ devemos mostrar que existe uma partição $P = \{t_0, ..., t_n\}$ de $[a,b]$ tal que $S(f;p) - s(f;p) = \sum_{i=1}^{n} w_i(t_i - t_{i-1}) < \varepsilon$, onde w_i é oscilação de f no intervalo $[t_{i-1}, t_i]$. Vejamos que

$$\sum_{i=1}^{n} w_i(t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} M_i(t_i - t_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1}),$$

em que $M_i' = sup\{f(x); t_{i-1} \leq x \leq t_i\}$ e $m_i' = inf\{f(x); t_{i-1} \leq x \leq t_i\}$

Como $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ converge uniformemente para $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n > n_0$ então

$$|f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{4(b-a)}$$

para todo $x \in [a,b]$.

Fixemos $m > n_0$. Agora como hipótese que f_m é integrável, existe uma partição P de $[a,b]$ tal que $S(f;p) - s(f;p) = \sum_{i=1}^{n} w_i'(t_i - t_{i-1}) < \frac{\varepsilon}{2}$, onde w_i' é oscilação referente à f_m no intervalo $[t_{i-1}, t_i]$.

Afirmação: $w_i \leq w'_i + \frac{2\varepsilon}{4(b-a)}$. De fato, note que dados $x, y \in [t_{i-1}, t_i]$, quaisquer, vale:

$$\begin{aligned}
|f(y) - f(x)| &= |f_m(x) - f(x)| + |f_m(y) - f_m(x)| + |f(y) - f_m(y)| \\
&\leq |f_m(x) - f(x)| + |f_m(y) - f_m(x)| + |f(y) - f_m(y)| \\
&\leq |f_m(x) - f(x)| + |f_m(y) - f_m(x)| + |f(y) - f_m(y)| \\
&< \frac{\varepsilon}{4(b-a)} + \frac{\varepsilon}{4(b-a)} + |f_m(y) - f_m(x)|.
\end{aligned}$$

Agora, como por definição $M'_i = sup\{f(x); t_{i-1} \leq x \leq t_i\}$, $m'_i = inf\{f(x); t_{i-1} \leq x \leq t_i\}$ e $w_i = M'_i - m'_i$ temos que $M'_i - m'_i \geq |f_m(y) - f_m(x)|$ para todo $x, y \in [t_{i-1}, t_i]$. Portanto, segue que

$$|f_m(x) - f(x)| + |f_m(y) - f_m(x)| + |f(y) - f_m(y)| < \frac{2\varepsilon}{4(b-a)} + w'_i.$$

Como analisamos para quaisquer $x, y \in [t_{i-1}, t_i]$ vale também para o supremo e ínfimo deles neste intervalo, portanto, $w_i \leq w'_i + \frac{2\varepsilon}{4(b-a)}$.

Agora, aplicando a afirmação $w_i \leq w'_i + 2\varepsilon$, temos

$$\begin{aligned}
&\sum w_i(t_i - t_{i-1}) \leq \sum w'_i(t_i - t_{i-1}) + 2\varepsilon \sum (t_i - t_{i-1}) \\
&\Rightarrow \sum wi(t_i - t_{i-1}) \leq \sum w'_i(t_i - t_{i-1}) + 2\varepsilon \sum (t_n - t_0) \\
&\Rightarrow \sum w_i(t_i - t_{i-1}) \leq \sum w'_i(t_i - t_{i-1}) + 2\varepsilon \sum (b-a) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2\varepsilon(b-a)}{4(b-a)} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Logo, f é integrável. Além disso, queremos mostrar que $\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx$, ou seja, dado $\varepsilon > 0$, devemos mostrar que existe $n_0 > n$ tal que $|x_n - a| < \varepsilon$.

$$\begin{aligned}
&\left| \int_a^b f(x)dx - \int_a^b f_n(x)dx \right| = b \\
&\Rightarrow \left| \int_a^b [f(x) - f_n(x)]dx \right| \leq \int_a^b |f(x) - f_n(x)|dx.
\end{aligned}$$

Como $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ converge uniformemente para $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n > n_0$ então

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{(b-a)}$$

para todo $x \in [a, b]$.

Dessa forma, para todo $n > n_0$, temos

$$\left|\int_a^b f(x)dx - \int_a^b f_n(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x) - f_n(x)|dx$$
$$\leq \int \varepsilon \leq \varepsilon \int 1dx$$
$$\leq \varepsilon \cdot x\Big|_a^b \leq \frac{\varepsilon(b-a)}{(b-a)} < \varepsilon.$$

Consequentemente, $\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx$. □

Observação: Se cada f_n é contínua, a demonstração se simplifica consideravelmente pois pelo Teorema 3.2.1, temos que f também é contínua e portanto integrável.

Exemplo 3.2.3. Se uma sequência de funções integráveis $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ converge simplesmente para $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, pode ocorrer que f não seja integrável. Por exemplo, se $\{r_1, r_2, ..., r_n, ...\}$ for uma enumeração dos números racionais de $[a, b]$ e definirmos f_n como a função que assume o valor 1 nos pontos $r_1, ..., r_n$ e é zero nos demais pontos de $[a, b]$ então (f_n) converge simplesmente para uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 1$ se $x \in \mathbb{Q} \cap [a, b]$ e $f(x) = 0$ se x é irracional.

Observe que cada f_n é integrável pois é a função nula a menos de uma quantidade finita de pontos (descontínua a menos de um conjunto de medida nula), mas f não é integrável uma vez que $\underline{\int_a^b} f(x) = 0$ e $\overline{\int_a^b} f(x) = b - a$.

Exemplo 3.2.4. Mesmo quando a sequência de funções integráveis $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ converge simplesmente para a função integrável $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ e as integrais existem, pode ocorrer que $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx \neq \int_a^b f(x)dx$. Por exemplo, para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definida por $f_n(x) = nx^n(1 - x^n)$. Esta sequência converge simplesmente para a função identicamente nula. De fato, para $x = 1$, $f_n(1) = n(1 - 1) = 0$, agora, para cada $x \in [0, 1)$ fixo, utilizaremos o fato que sequências positivas (x_n) que satisfazem $\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} < 1$ convergem para 0 (LIMA 2010 Exemplo 8, Capítulo 3). Neste caso, temos $0 \leq f_n(x) = nx^n(1 - x^n) < nx^n$, e

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)x^{n+1}}{nx^n} = (1 + \frac{1}{n})x = x < 1$$

logo $\lim_{n\to\infty} nx^n = 0$ concluindo a convergência de f_n pelo Teorema do confronto.

Ademais, note que f_n é integrável pois é um polinômio e todo polinômio é uma função contínua e toda função contínua é integrável. Vamos calcular tal integral

$$\int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 (nx^n - nx^{2n})dx = n\int_0^1 (x^n - x^{2n})dx = \frac{n}{(n+1)} - \frac{n}{(2n+1)} = \frac{n^2}{2n^2+3n+1}.$$

Temos que $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{2n^2+3n+1} = \frac{1}{2}$, ou seja,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 nx^n(1-x^n)dx = \frac{1}{2}$$

enquanto

$$\int_0^1 (\lim_{n\to\infty} nx^n(1-x^n))dx = 0.$$

Vamos enunciar o Teorema Fundamental do cálculo, muito importante na parte do estudo de integrais e que será uma ferramenta essencial na demonstração de resultados a seguir.

Teorema 3.2.6 (Teorema Fundamental do Cálculo)**.** *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ contínua no intervalo I. As seguintes afirmações a respeito de uma função $F : I \to \mathbb{R}$ são equivalentes:*

(1) F é uma integral indefinida de f, isto é, existe $a \in I$ tal que $F(x) = F(a) + \int_a^b f(t)dt$, para todo $x \in I$.

(2) F é uma primitiva de f, isto é, $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in I$.

Demonstração. Ver em LIMA(2010) página □

Teorema 3.2.7 (Derivação termo a termo.)**.** *Seja (f_n) uma sequência de funções de classe C^1 no intervalo $[a, b]$. Se, para um certo $c \in [a, b]$, a sequência numérica $(f_n(c))$ converge e se as derivadas f_n' convergem uniformemente em $[a, b]$ para uma função g então (f_n) converge em $[a, b]$ uniformemente para uma função f contínua, com derivada também contínua tal que $f' = g$. Em resumo: $(\lim f_n)' = \lim f_n'$ desde que as derivadas f_n' convirjam uniformemente.*

Demonstração. Por hipótese como as f_n são C^1, isto é, são contínuas e possuem derivadas contínuas em [a,b], então pelo Teorema 3.2.6 para cada $n \in \mathbb{N}$ e todo $x \in [a, b]$ temos

$$f_n(x) = f_n(c) + \int_c^x f_n'(t)dt. \tag{3.5}$$

Como f_n' converge uniformemente para g, pelo Teorema 3.2.5

$$\lim_{n\to\infty} \int_c^x f_n'(t) = \int_c^x \lim_{n\to\infty} f_n'(t) = \int_c^x g(t).$$

Além disso, $f_n(c)$ converge, então, fazendo $n \to \infty$ em (3.5), temos que

$$f(x) = f(c) + \int_c^x g(t). \tag{3.6}$$

Tendo definido f, vamos verificar que f é C^1 e $f' = g$.

Pelo Teorema 3.2.1, temos que g é contínua, logo, pelo Teorema 3.2.6, $f'(x) = g(x)$ para todo $x \in [a, b]$. Logo f é derivável, com $f' = g$ mas como toda função derivável é também contínua, f também é contínua. Segue que f é C^1.

Resta agora provar que a convergência $f_n \to f$ é uniforme.

Como $f'_n \to g$ uniformemente, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que se $n > n_0$ então $|f'_n(t) - g(t)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$, para todo $t \in [a, b]$. Ademais, como $f_n(c)$ converge para $f(c)$, para $n > n_2$ têm-se $|f_n(c) - f(c)| < \frac{\epsilon}{2}$. Seja $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, então utilizando essas estimativas e as expressões em (3.5) e (3.6), temos para $n > n_0$

$$\begin{aligned}
|f_n(x) - f(x)| &= \left| f_n(c) + \int_c^x f'_n(t)dt - f(c) - \int_c^x g(t)dt \right| \\
&\leq |f_n(c) - f(c)| + \left| \int_c^x f'_n(t)dt - \int_c^x g(t)dt \right| \\
&\leq |f_n(c) - f(c)| + \int_a^b |f'_n - g(t)|dt \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \cdot (x - c) < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Concluindo a demonstração. □

Atenção ao teorema anterior, a convergência uniforme da própria sequência de funções não nos dá informações sobre suas derivadas.

Exemplo 3.2.5. A sequência de funções $f_n(x) = \frac{\text{sen}(nx)}{n}$ converge uniformemente para zero em toda a reta.

Vamos verificar que a convergência é uniforme, ou seja, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n > n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ para todo x. Como a função seno é limitada, temos

$$-1 \leq \text{sen}(x) \leq 1 \Rightarrow |\text{sen}(nx)| \leq 1.$$

Assim tomando $n_0 = \frac{1}{\varepsilon}$, para $n > n_0$ temos

$$|\frac{\text{sen}(nx)}{n} - 0| \leq \frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} = \varepsilon,$$

e a convergência uniforme segue.

Mas a sequência de suas derivadas $f_n'(x) = cos(nx)$ não converge, sequer simplesmente, em intervalo algum, note que, $\lim_{n\to\infty} cos(nx)$ diverge por que a função cosseno é definida para todos os reais e é periódica, os valores oscilam no intervalo $[-1, 1]$, então não se aproximam de nenhum valor à medida que n cresce, por isso não existe limite.

3.3 Séries de funções

Da mesma forma que definimos séries numéricas, podemos definir séries de funções $\sum f_n$, sendo que (f_n) é uma sequência de funções. As convergências também se darão de forma simples ou uniforme, isto é, a série $\sum f_n(x)$ convergirá simplesmente ou uniformemente se a sequências de suas somas parciais $s_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f_n(x)$ assim convergir.

Os teoremas acima, no caso de uma série $\sum f_n$, assumem as seguintes formas:

1. Se $\sum f_n$ converge uniformemente para f e cada f_n é contínua no ponto a então f é contínua no ponto a.

2. Se cada termo $f_n : X \to \mathbb{R}$ é uma função contínua, com $f_n \geq 0$ para todo $x \in X$ e a série $\sum f_n$ converge para uma função contínua $f : X \to \mathbb{R}$ no compacto X, então a convergência é uniforme.

3. Se cada $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ é integrável e $\sum f_n$ converge uniformemente para $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ então f é integrável e $\int_a^b \sum f_n(x)dx = \sum \int_a^b f_n(x)dx$.

4. Se cada $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ é de classe C^1, se $\sum f_n'$ converge uniformemente em $[a, b]$ e se, para algum $c \in [a, b]$, a série $\sum f_n(c)$ converge então $\sum f_n$ converge uniformemente para uma função de classe C^1 e $(\sum f_n)' = \sum f_n'$.

3.4 Séries de potências

Algumas das funções mais importantes da Análise podem ser expressas como somas de séries da forma

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0) + ... + a_n(x - x_0)^n + ...$$

Estas séries, que constituem uma generalização natural dos polinômios, são chamadas de séries de potências. Onde x_0 e os coeficientes a_n são constantes. Como se vê, elas são séries de potências de $x - x_o$. Dizemos que elas são centradas em x_0, têm centro em x_0, ou que são séries de potências com referência a x_0.

Sem nenhuma perda de generalidade, no estudo dessas séries podemos fazer $x_0 = 0$, considerando então séries do tipo $\sum a_n x^n$. Evidentemente, todos os resultados estabelecidos para estas séries podem ser facilmente traduzidos para aquelas com a substituição de x por $x - x_0$.

A seguir enunciaremos alguns resultados para séries de potências que decorrem da análise de séries numéricas junto com tópicos de sequências de funções vistos na seção anterior.

Teorema 3.4.1. *Uma série de potências $\sum a_n x^n$, ou converge apenas para $x = 0$ ou existe r, com $0 < r \leq +\infty$, tal que a série converge absolutamente no intervalo aberto $(-r, r)$ e diverge fora do intervalo fechado $[-r, r]$. Nos extremos $-r$ e r, a série pode convergir ou divergir.*

Demonstração. Ver em LIMA(2010) página 163. □

Definição 3.4.1. Se existir $L = \lim \sqrt[n]{|a_n|}$ então r do Teorema 3.4.1 é $\frac{1}{L}$. O número r chama-se o raio de convergência da série. Além disso, tem-se $0 < p < r \Leftrightarrow \sqrt[n]{|a_n|} < 1/p$ para todo $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande. Outra forma de encontrar o raio de convergência é pelo teste da razão, isto é, se os coeficientes a_n forem diferentes de zero e existir $\lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = L$, então o raio de convergência da série $\sum a_n x^n$ é $r = \frac{1}{L}$.

Teorema 3.4.2. *Uma série de potências $\sum a_n x^n$ converge uniformemente em todo intervalo compacto $[-p, p]$, onde $0 < p <$ raio de convergência.*

Demonstração. Ver em LIMA(2010) página 164. □

Corolário 3.4.1. *Se $r > 0$ é o raio de convergência da série $\sum a_n x^n$, a função $f : (-r, r) \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \sum a_n x^n$, é contínua.*

Teorema 3.4.3 (Integração termo a termo.). *Seja r o raio de convergência da série de potências $\sum a_n x^n$. Se $[\alpha, \beta] \subset (-r, r)$ então*

$$\int_\alpha^\beta \left(\sum a_n x^n\right) dx = \sum \frac{a_n}{n+1}(\beta^{n+1} - \alpha^{n+1})$$

Demonstração. Ver em LIMA(2010) página 164. □

Teorema 3.4.4 (Derivação termo a termo.). *Seja r o raio de convergência da série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. A função $f : (-r, r) \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, é* *derivável, com* $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n x^{n-1}$ *e a série de potências de* $f'(x)$ *ainda tem raio de convergência* r*.*

Demonstração. Ver em LIMA(2010) página 164. $\square$

4 Aplicação em funções clássicas

A derivabilidade termo a termo das séries de potências fornece a base para uma construção rigorosa das funções trigonométricas, de maneira puramente analítica, sem a necessidade de recorrer à intuição geométrica, como se costuma fazer em trigonometria.

As funções como seno, cosseno, exponencial e logaritmo possuem as seguintes séries:

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + ... = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$$

A obtenção dessas funções por meio da convergência de séries de potência é uma aplicação de toda a teoria destacada anteriormente, visto que contempla temas amplamente conhecidos na graduação com uma abordagem técnica munida de elementos formais da Análise.

4.1 Funções Seno e Cosseno

Nesta seção, provaremos as propriedades básicas das funções Seno e Cosseno utilizando Séries de Funções.

Afirmação 4.1.1. As série de potências

$$c(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \quad \text{e} \quad s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

têm raio de convergência infinito.

Verificando, pelo teste da razão, primeiramente para $c(x)$, sendo $a_n = \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$

$$
\begin{aligned}
L &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^{2n+2}}{(2n+2)!}\cdot\frac{(2n)!}{(-1)^n x^{2n}}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{(-1)x^2(2n)!}{(2n+2)!} = -x^2\lim_{n\to\infty}\frac{(2n)!}{(2n+2)!}\\
&= -x^2\lim_{n\to\infty}\frac{(2n)!}{(2n+2)\cdot(2n+1)\cdot(2n)!} = -x^2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(2n+2)\cdot(2n+1)}\\
&= -x^2\cdot 0\\
&= 0
\end{aligned}
$$

Agora, verificando a série $s(x)$ sendo $a_n = \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

$$
\begin{aligned}
L &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^{2n+3}}{(2n+3)!}\cdot\frac{(2n+1)!}{(-1)^n x^{2n+1}}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{(-1)x^3}{(2n+3)!}\cdot\frac{(2n+1)!}{x}\\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{-x^2(2n+1)!}{(2n+3)!} = -x^2\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)!}{(2n+3)\cdot(2n+2)\cdot(2n+1)!}\\
&= -x^2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(2n+3)\cdot(2n+2)}\\
&= -x^2\cdot 0\\
&= 0
\end{aligned}
$$

Note que nos dois casos, de acordo com o teste da razão, as série são convergentes em toda reta, pois $L = 0 < 1$ para todo valor de x. Pela Definição 3.4.1 $r = \infty$ e pelo Teorema 3.4.1 segue que as séries convergem para todo $x \in \mathbb{R}$. O Corolário 3.4.1 nos garante que $s(x)$ e $c(x)$ são contínuas.

Afirmação 4.1.2. $c(0) = 1, s(0) = 0, c(-x) = c(x)$ e $s(-x) = s(-x)$.

$$c(0) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 0^{2n}}{(2n)!} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 0^{2n}}{(2n)!} = 1 + 0 = 1 \tag{4.1}$$

$$s(0) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 0^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 0}{(2n+1)!} = 0 \tag{4.2}$$

$$c(-x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n (-x)^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = c(x) \tag{4.3}$$

Em (4.3) observe que obtemos o resultado pois, independente da base considerada, quando o expoente é um número par, o resultado é sempre positivo.

$$s(-x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n (-x)^{2n+1}}{(2n+1)!} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = -s(x) \tag{4.4}$$

Agora, quando a base é negativa e o expoente é um número ímpar, o resultado é sempre negativo. Portanto vale (4.4) e provamos a afirmação.

Afirmação 4.1.3. Relações com as derivadas:

$$s'(x) = c(x) \text{ e } c'(x) = -s(x) \tag{4.5}$$

Pelo Teorema 3.4.4 a função definida por $s(x)$ é derivável, para todo $x \in \mathbb{R}$, sendo

$$\begin{aligned} s'(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n+1)x^{2n}}{(2n+1)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n+1)x^{2n}}{(2n+1)(2n)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = c(x) \end{aligned}$$

Analogamente, pelo Teorema 3.4.4, a função por $c(x)$ é derivável em $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} c'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2n x^{2n-1}}{(2n)!} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2n x^{(2n-1)}}{(2n)(2n-1)!} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{(2n-1)}}{(2n-1)!} \end{aligned}$$

Logo, fazendo a mudança de variável $n = k+1$, observe que para $n = 1$ temos $k = 0$, portanto

$$\begin{aligned} c'(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} x^{2(k+1)-1}}{(2(k+1)-1)!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k(-1)^1 x^{2k+2-1}}{((2k+2)-1)!} \\ &= -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k(-x)^{(2k+1)}}{(2k+1)!} = -s(x) \end{aligned}$$

Provamos a afirmação.

Afirmação 4.1.4.

$$c(x)^2 + s(x)^2 = 1. \tag{4.6}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

Note que a função $f(x) = c(x)^2 + s(x)^2$ tem derivada igual a zero, de fato, pela Regra da Cadeia

$$f'(x) = c'2c + s'2s$$

Utilizando (4.5), temos $f'(x) = -s2c + c2s = -2cs + 2cs = 0$, logo é constante. Utilizando (4.1) e (4.2), temos $f(0) = c(0)^2 + s(0)^2 = 1 + 0 = 1$ e concluímos que $c(x)^2 + s(x)^2 = 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Afirmação 4.1.5. Valem as seguintes fórmulas de adição:

$$s(x+y) = s(x) \cdot c(y) + c(x) \cdot s(y) \tag{4.7}$$

$$c(x+y) = c(x) \cdot (y) - s(x) \cdot s(y) \tag{4.8}$$

Consideramos $y \in \mathbb{R}$ e definimos as funções $f(x) = s(x+y) - s(x) \cdot c(y) - c(x) \cdot s(y)$ e $g(x) = c(x+y) - c(x) \cdot c(y) + s(x) \cdot s(y)$, para provarmos esta Afirmação, basta mostrarmos que essas funções são nulas. Por (4.5), a função $f(x)$ tem derivada igual a

$$f'(x) = c(x+y) \cdot 1 - c(x) \cdot c(y) + s(x) \cdot s(y)$$

logo

$$f'(x) = g(x) \tag{4.9}$$

Analogamente a função $g(x)$ tem derivada igual a

$$g'(x) = -s(x+y) \cdot 1 + s(x) \cdot c(y) + c(x) \cdot s(y)$$

logo

$$g'(x) = -f(x) \tag{4.10}$$

Daí resulta que $f(x)^2 + g(x)^2$ tem derivada nula, verificando pela regra da cadeia

$$\frac{d}{dx}(f(x)^2 + g(x)^2) = 2f(x) \cdot f'(x) + 2g(x) \cdot g'(x)$$

Usando (4.9) e (4.10), temos

$$\frac{d}{dx}(f(x)^2 + g(x)^2) = 2f(x) \cdot g(x) - 2f(x) \cdot g(x) = 0$$

Segue que $f^2 + g^2$ é constante. Vamos provar que essa constante é zero, para isso note que

$$\begin{aligned} f(0) &= s(0+y) - s(0) \cdot c(y) - c(0) \cdot s(y) \\ &= s(y) - 0 \cdot c(y) - 1 \cdot s(y) \\ &= s(y) - s(y) = 0 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} g(0) &= c(0+y) - c(0)\cdot c(y) + s(0)\cdot s(y) \\ &= c(y) - 1\cdot c(y) + 0\cdot s(y) \\ &= c(y) - c(y) = 0 \end{aligned}$$

logo $f(0) = g(0) = 0$, segue-se que $f(x)^2 + g(x)^2 = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Portanto $f(x) = g(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e a afirmação das fórmulas de adição está provada.

Afirmação 4.1.6. Afirmamos agora que existe algum $x > 0$ tal que $c(x) = 0$.

Suponha o contrário, isto é, $c(x) \neq 0$ para todo $x > 0$, mas $c(0) = 1$ e $1 > 0$ e $c(x)$ é contínua então é o mesmo que dizer que teríamos $c(x) > 0$ para todo $x > 0$.

Lembre-se que $c(x)$ é a derivada de $s(x)$, sabendo que $c(x)$ é positivo, logo, nesta situação teríamos que a função s é crescente na semi-reta $\mathbb{R}^+$. Para qualquer $x > 1$ e por $-s(x)$ ser primitiva de $c(x)$ o Teorema 3.2.6 nos dá que

$$c(x) = c(1) - \int_1^x s(t)dt > 0.$$

Como $s(x)$ é crescente, temos que $s(1) < s(t)$ para todo $t \in [1, x]$, logo

$$c(1) > \int_1^x s(t)dt > \int_1^x s(1)dt = s(1)(x-1) > 0.$$

Note que $s(1) > 0$ pois s é crescente e $s(0) = 0$, sendo assim, teríamos a desigualdade $c(1) > s(1)(x-1) \to +\infty$ quando $x \to +\infty$ que é absurda pois c é contínua, logo $c(1) < \infty$. Portanto a afirmação procede, ou seja, deve existir algum $x > 0$ para o qual $c(x) = 0$.

Definimos $F = \{x > 0 : c(x) = 0\} = c^{-1}\{(0)\} \cap [0, +\infty)$ é fechado pois $c(x)$ é contínua e a imagem inversa de fechado por uma f contínua é fechado. Então a f possuirá um menor elemento, o qual não é zero porque $c(0) = 1$. Chamaremos $\frac{\pi}{2}$ este menor número positivo para o qual se tem $c(\frac{\pi}{2}) = 0$.

Afirmação 4.1.7. As funções $c(x)$ e $s(x)$ são periódicas, com período 2π.

Com efeito, sabendo (4.6) e (4.8), temos que

$$\begin{aligned} c(2x) = c(x+x) &= c(x)\cdot c(x) - s(x)\cdot s(x) \\ &= c(x)^2 - s(x)^2 \\ &= c(x)^2 + c(x)^2 - 1 \\ &= 2c(x)^2 - 1 \end{aligned}$$

Usando $x = \frac{\pi}{2}$ e sabendo que $c(\frac{\pi}{2}) = 0$ temos

$$\begin{aligned} c(\pi) &= 2c(\tfrac{\pi}{2})^2 - 1 \\ &= 2 \cdot 0 - 1 = -1 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} c(2\pi) &= 2c(\pi)^2 - 1 \\ &= 2 \cdot (-1)^2 - 1 \\ &= 2 \cdot 1 - 1 = 1 \end{aligned}$$

Da mesma forma, obtemos $s(\pi) = s(2\pi) = 0$. Novamente as fórmulas (4.7) e (4.8) mostram que

$$\begin{aligned} s(x + 2\pi) &= s(x) \cdot c(2\pi) + c(x) \cdot s(2\pi) \\ &= s(x) \cdot 1 + c(x) \cdot 0 \\ &= s(x) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} c(x + 2\pi) &= c(x) \cdot c(2\pi) - s(x) \cdot s(2\pi) \\ &= c(x) \cdot 1 - s(x) \cdot 0 \\ &= c(x) \end{aligned}$$

O que prova a alegação feita.

As notações usuais para estas funções são $c(x) = \cos(x)$ e $s(x) = \operatorname{sen}(x)$. Note que, utilizando apenas resultados envolvendo séries de funções, conseguimos construir as funções seno e cosseno bem como provar diversas propriedades sem utilizar construções geométricas.

4.2 Função exponencial

Nesta seção, apresentaremos a função exponencial como a soma de uma série de funções.

Afirmação 4.2.1. A série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ converge para todo $x \in \mathbb{R}$.

Verificando, pelo teste da razão, sendo $a_n = \frac{x^n}{n!}$

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x^{(n+1)}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{x^{(n+1)}}{(n+1)n!} \cdot \frac{n!}{x^n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{x^{(n+1)}}{(n+1) \cdot x^n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{x}{(n+1)} \\ &= x \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)} = x \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

Logo a f converge pois $L < 1$ e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é de classe C^∞.

Afirmação 4.2.2.

$$f'(x) = f(x)$$

Pelo Teorema 3.4.4 a função definida por $f(x)$ é derivável, para todo $x \in \mathbb{R}$, sendo

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^{(n-1)}}{n!} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^{(n-1)}}{n(n-1)!} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{(n-1)}}{(n-1)!} \end{aligned}$$

Logo, fazendo a mudança de variável $n = k + 1$, observe que para $n = 1$ temos $k = 0$, portanto

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{(k+1)-1}}{((k+1)-1)!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \end{aligned}$$

Afirmação 4.2.3. $f(0) = 1$

$$f(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{0^n}{n!} = 1 + 0 = 1.$$

Para dar continuidade, vamos enunciar o Teorema 10, Capítulo 11 do Livro Análise Real v.1 de Elon Lages Lima.

Teorema 4.2.1. *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ derivável no intervalo I, com $f'(x) = k \cdot f(x)$. Se, para um certo $x_0 \in I$, tem-se $f(x_0) = c$ então $f(x) = c \cdot e^{k(x-x_0)}$ para todo $x \in I$.*

Sabendo agora que $f(0) = 1$ segue pelo Teorema 4.2.1, que $f(x) = e^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Portanto

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ...$$

como queríamos mostrar.

4.3 Função Logaritmica

Nesta seção, a convergência de uma série de funções para a função logarítmica.

Primeiramente, vamos analisar as séries geométricas. Lembre-se que dada uma progressão geométrica $a_n = (a_1 \cdot q^{n-1})$ com razão $q < 1$ têm-se que a fórmula da soma dos termos dessa PG infinita se dá por

$$S_n = \frac{a_1}{(1-q)}.$$

Sendo assim, dado a série de potências $1 + x + x^2 + ...$ (série geométrica). Ela converge para a soma $\frac{1}{(1-x)}$ quando $|x| < 1$. Logo a série converge para a função $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \frac{1}{(1-x)}$.

fDa mesma forma, segue que

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \tag{4.11}$$

Agora, vamos analisar a função logaritmica. Como $\log x$ não tem sentido para $x = 0$, consideraremos a função $\log(1 + x)$, definida para todo $x > -1$. Por definição, sabemos que

$$\log(1 + x) = \int_0^x \frac{1}{(1+t)} dt.$$

Utilizando o Teorema 3.4.3, vamos integrar termo a termo a série de Taylor de $\frac{1}{(1+x)}$, vista acima, obtendo

$$\begin{aligned} \log(1 + x) &= \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x (-1)^n t^n dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{n+1}}{n+1}\Big|_0^x \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \end{aligned}$$

para $|x| < 1$. Concluindo mais uma identificação.

Referências

ÁVILA, Geraldo Severo de Souza. Análise Matemática para licenciatura. São Paulo, SP, ed. 3, Editora Edgard Blucher, 2001.

BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Brasília, 2018.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática, ed. 2, Rio de Janeiro: DPeA, 2000.

DE OLIVEIRA, César Rogério. Introdução à análise funcional. IMPA, 2012.

GARBI, Gilberto Geraldo. Explicações e Demonstrações sobre Conceitos, Teoremas e Fórmulas Essenciais da Geometria. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2010.

GIL, A. C. Como Elaborar Projetos de Pesquisa. São Paulo: Atlas, 2002.

JÚNIOR, Carlos Augusto Aguilar; NASSER, Lilian. Analisando Justificativas e Argumentações Matemática de alunos do ensino fundamental, ed.2, v.32, p.133-147. ISSN0104-270- VIDYA. Santa Maria, RS, 2012.

LIMA, Elon Lages. Análise real v. 1. Funções de uma variável. Rio de Janeiro, ed.10: IMPA, 2010.

LIMA, Elon Lages. Matemática e Ensino. Coleção do Professor de Matemática. Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro-RJ, ed.3, 2007.

OTANI, N.; FIALHO, F. A. P. TCC: métodos e técnicas. 2.ed. Florianópolis: Visual Books, 2011.

REVISTA CÁLCULO, Matéria: Eles não estavam certos, nem tampouco errados. Ano 3,

n. 30, Editora Segmento, julho de 2013.