

# EQUAÇÕES A DIFERENÇAS E A DINÂMICA POPULACIONAL<sup>1</sup>

Mariane da Rosa Minhos<sup>3</sup>

Elisa Regina Cara<sup>2</sup>

Alisson Darós Santos<sup>3</sup>

## Resumo

O presente trabalho teve por objetivo principal apresentar modelos matemáticos discretos desenvolvidos com equações a diferenças. Especificamente, analisamos o modelo de Ricker e o modelo logístico, ambos modelos não lineares discretos formados por uma equação a diferenças. Inicialmente, apresentamos os conceitos teóricos mais importantes acerca dos modelos logístico e de Ricker, tais como, soluções de equilíbrio, análise de estabilidade e mudança qualitativa do comportamento como função de um parâmetro. Para isso, encontramos soluções através de simulações numéricas desenvolvidas com o software Matlab. Para tais modelos obtemos diversos cenários de crescimento, dependendo da taxa de crescimento intrínseco considerada. Observamos desde crescimento monotônico até o ponto de equilíbrio de persistência da população, até soluções aperiódicas, caracterizando comportamento caótico. Concluímos que modelos discretos aparentemente simples podem apresentar diversos padrões dinâmicos bastante distintos entre si.

**Palavras-chave:** Equações a Diferenças. Modelo de Ricker. Modelo Logístico. Dinâmica Populacional. Soluções Aperiódicas.

## 1 Introdução

O termo “Modelagem Matemática” surge no início do Século XX, na literatura sobre Engenharia e Ciências Econômicas, com uma definição mais específica relacionada as ações de escrever, formular, modelar e resolver problemas de diversas áreas do conhecimento (BIEMBENGUT, 2009).

---

<sup>1</sup>Trabalho de Conclusão de Curso, requisito parcial para obtenção do título de Especialista em Ciências Exatas e Tecnologia pela Universidade Federal do Pampa - Campus Itaqui

<sup>2</sup>Aluna de Especialização em Ciências Exatas e Tecnologia da Universidade Federal do Pampa - Campus Itaqui.

e-mail: marianeminhos@gmail.com

<sup>3</sup>Orientadora, Professora Adjunta da Universidade Federal do Pampa - Campus Itaqui

e-mail: elisacara@unipampa.edu.br

<sup>3</sup>Co-orientador, Professor Adjunto da Universidade Federal do Pampa - Campus Itaqui

e-mail: alissonsantos@unipampa.edu.br

A modelagem matemática é a área do conhecimento que estuda a simulação de sistemas reais visando descobrir o comportamento dos mesmos, ou seja, consiste na tentativa de se descrever matematicamente um fenômeno. É aplicada em diversas áreas do conhecimento, tais como a Biologia, Física, Engenharias, Economia, dentre outras (EDELSTEIN-KESHET, 1988). Trataremos da aplicação da modelagem matemática à Biologia, denominada Biomatemática.

Segundo Segel e Edelstein-Keshet (2013), um modelo matemático deve ser construído quando existem muitas interações biologicamente complexas, podendo assim a matemática ajudar a desvendar tais complexidades. Desta forma, modelos matemáticos podem ser úteis quando decisões devem ser tomadas, podendo envolver questões qualitativas e quantitativas.

Os modelos matemáticos para processos biológicos podem ser formulados com Equações Diferenciais Ordinárias, Equações Diferenciais Parciais, Equações Íntegro-Diferenciais, Equações a Diferenças, dentre outras. O tipo de formulação depende do processo biológico que está sendo estudado (ALLEN, 2007).

Neste trabalho, pretendemos estudar a teoria dos processos analíticos e simulações de modelos elaborados com equações a diferenças, conhecidos como modelos discretos. Tais equações são perfeitas para descrever a dinâmica vital de populações cujos indivíduos não apresentam sobreposição de gerações, ou ainda, que seu ciclo de vida ocorre em etapas bem definidas de tempo (EDELSTEIN-KESHET, 1988). Esse tipo de modelo pode ser facilmente simulado computacionalmente, trazendo assim, resultados numéricos e gráficos de maneira rápida.

Com base no exposto, os objetivos deste trabalho são: estudar a teoria de equações a diferenças lineares e não lineares, bem como, modelos matemáticos elaborados com tais equações; utilizar conceitos teóricos mais importantes acerca destes modelos, como soluções de equilíbrio, estabilidade e mudança qualitativa do comportamento como função de um parâmetro; explorar as soluções obtidas através de simulações numéricas desenvolvidas com o software Matlab. Finalmente, os resultados matemáticos obtidos serão interpretados no contexto biológico do modelo.

O interesse de estudar novos conceitos matemáticos a cerca das equações, vem da experiência obtida no componente curricular Equações Diferenciais Ordinárias, o qual foi estudado na graduação em Matemática, como a especialização proporciona novos estudos e aprofundamentos logo optou-se pelas Equações a Diferenças.

Sendo assim, na Seção 2, faremos uma breve introdução dos conceitos mais importantes sobre Equações a Diferenças, como é a formulação de um modelo matemático utilizando este tipo de equação e a obtenção de soluções. Na Seção 3, apresentamos o Modelo de Ricker, seus pontos ou soluções de equilíbrio, estabilidade e simulações numéricas para verificar o comportamento das soluções para diferentes valores da taxa de crescimento. Na Seção 4, apresentamos o Modelo Logístico, bem como seus pontos de equilíbrio, estabilidade e simulações numéricas. Na seção 5, apresentamos uma breve discussão a cerca dos resultados obtidos. A Seção 6 é reservada para as considerações finais.

## 2 Equações a Diferenças

O estudo de Equações a Diferenças teve seu primeiro problema registrado em 1202, sendo formulado pelo matemático Leonardo de Pisa (Fibonacci), o qual foi abordado em seu livro “Liber Abaci”. O referido problema envolvendo as equações a diferenças tratava a reprodução de coelhos: “ Quantos pares de coelhos serão produzidos em um ano, começando com um só par, se em cada mês cada par gerar um novo par que se torna produtivo a partir do segundo mês?”.

Este problema gera uma sequência descrita pela equação a diferenças ou equação de recorrência

$$x_n = x_{n-1} + x_{n-2}, \quad (1)$$

ou seja, a quantidade de coelhos no  $n$ -ésimo mês é igual a soma da quantidade de coelhos no mês anterior com a quantidade de coelhos de dois meses antes. Deste modo a equação que modela este problema é linear, homogênea de segunda ordem.

Segundo Luis, 2006 em 1843 Jacques Binet determinou os termos da sequência de Fibonacci, sequência esta gerada pela equação a diferenças, sem que fosse necessário calcular os números antecedentes a esse, concluindo que o  $n$ -ésimo número de Fibonacci é dado pela equação

$$x_n = \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n. \quad (2)$$

No entanto para obter os sucessivos elementos da sequência de Fibonacci, Kepler desenvolveu a seguinte equação

$$n_{k+2} = n_k + n_{k+1}, \quad (3)$$

Sendo assim, a primeira idealização matemática de um fenômeno biológico em termos de uma relação de recursão, ou seja, de uma equação a diferenças (EDELSTEIN-KESHET, 1988).

Tal equação foi associada ao crescimento de coelhos, contudo, existem inúmeros eventos biológicos que podem ser idealizados por modelos nos quais equações discretas semelhantes a esta estão envolvidas. Na natureza, muitas espécies animais e vegetais não apresentam sobreposição de gerações, ou seja, após a reprodução os adultos morrem e são completamente substituídos por seus descendentes, em intervalos fixos de tempo. Em tais casos, os modelos devem relacionar a população no tempo  $t + 1$ , denotada por  $N_{t+1}$ , em termos da população  $N_t$ , no tempo  $t$ .

Isto nos leva ao estudo de modelos discretos ou modelos de equações a diferenças, da forma

$$N_{t+1} = f(N_t), \quad (4)$$

onde  $f(N_t)$  é em geral uma função não linear de  $N_t$ , que determina o comportamento da população (crescimento, mortes, reprodução) (MURRAY, 1989).

Considerando uma população  $N_0$ , soluções para a equação (4) podem ser obtidas de forma recursiva, ou seja,  $N_1 = f(N_0)$ ,  $N_2 = f(N_1)$  e assim sucessivamente. Computacionalmente, esta propriedade permite-nos uma exploração numérica imediata deste tipo de equação.

Equações a diferenças também podem descrever a dinâmica de organismos que sofrem alterações abruptas ou que passam por uma sequência de fases à medida que amadurecem (têm ciclos de vida discretos e bem definidos) (EDELSTEIN-KESHET, 1988).

Os modelos discretos no tempo evoluem em intervalos de tempo, geralmente, fixos e chamados passos. Entende-se que a cada passo o sistema representado possa mudar instantaneamente seu estado. Já, em modelos de tempo contínuo não existem passos, as mudanças acontecem continuamente. Dessa forma, a principal diferença entre modelos populacionais de tempo discreto e contínuo é que o modelo discreto descreve o número de indivíduos no próximo intervalo de tempo, enquanto que o modelo contínuo descreve a taxa de mudança do tamanho da população em questão (GONTIJO, 2009).

No contexto da Dinâmica Populacional, existem diversos modelos discretos que podem ser estudados e que apresentam importância biológica, tais como: o modelo de Ricker, modelo logístico, Beverton-Holt, Nicholson-Bailey, modelos presa-predador, modelos parasitoide-hospedeiro, dentre outros (ALLEN, 2007; EDELSTEIN-KESHET, 1988).

Em alguns modelos discretos, como os modelos de Ricker e logístico, a população apresenta o que chamamos de capacidade suporte do meio ambiente. Ela representa o número total de indivíduos que o ambiente pode suportar, ou seja, em questão de haver alimentação, território, dentre outros fatores. Dessa forma, em tais modelos, é mais concreta a possibilidade de uma população ultrapassar a capacidade suporte de seu ambiente. Neste caso, não existe o ajuste instantâneo no fluxo de crescimento populacional. Os modelos discretos descrevem uma retroalimentação negativa baseada na dependência da densidade populacional, que não é instantânea, ela acontece após atrasos no tempo. Esses atrasos podem ser entendidos como uma demora na resposta da população, ou sistema, em relação à aproximação da capacidade suporte (GONTIJO, 2009).

Por exemplo, em populações de plantas anuais ou insetos, os indivíduos crescem e se reproduzem simultaneamente, mas as plantas jovens não germinam ou os ovos eclodem até o próximo ano. Por isso, após um ano em que muitos indivíduos foram produzidos, a população pode ultrapassar a capacidade suporte do meio ambiente (GONTIJO, 2009). No caso das formigas, onde podemos observar altas taxas de reprodução associadas a gerações com tempo extremamente curto, podemos perceber fortes associações com os modelos de tempo discreto, como o modelo logístico.

Nas próximas seções apresentaremos os modelos de Ricker e Logístico, formulados com equações a diferenças.

### 3 Modelo de Ricker

Nos grandes aglomerados populacionais poderá ocorrer uma diminuição da reprodução devido ao aumento do stress ou redução na nutrição (diminuição de nutrientes essenciais). Assim, à medida que a população aumenta, a sua taxa de crescimento poderá vir a diminuir. Por exemplo, em algumas espécies, os adultos alimentam-se de seus filhotes, desta forma, em populações de adultos muito grandes poderão surgir alterações no tamanho populacional. Para representar esse tipo de fenômeno, apresentamos o modelo de Ricker.

O modelo de Ricker foi desenvolvido e aplicado por Ricker em 1954 (ALLEN, 2007) e tem origem em problemas relacionados à pesca. Tal modelo também pode ser utilizado para descrever a dinâmica vital de outras espécies em que ocorre competição intraespecífica (entre indivíduos da mesma população) (MURRAY, 1989). O modelo é descrito pela equação (ALLEN, 2007, MURRAY, 1989)

$$f(N_t) = N_t \exp \left[ r \left( 1 - \frac{N_t}{K} \right) \right], \quad (5)$$

onde os parâmetros positivos  $K$  e  $r$  representam, respectivamente, a capacidade suporte do meio ambiente e a taxa de crescimento intrínseca da população. Neste modelo, para grandes valores de  $N_t$  ocorre uma redução na taxa de crescimento da população, devido à competição intraespecífica, mas  $N_{t+1}$  continuará positiva. Isso se deve ao fator de mortalidade  $\exp((-rN_t)/K)$ , que é mais severo quando  $N_t$  é grande.

Fazendo a mudança  $N_t = \frac{n_t}{K}$  no modelo (5), tornamos este modelo adimensional, isto é, todos os termos da equação terão a mesma dimensão. Desta forma, o modelo (5) em sua forma adimensional é

$$n_{t+1} = n_t \exp[r(1 - n_t)]. \quad (6)$$

Assim, aumentamos nossa visão em relação aos parâmetros relevantes (que determinam efetivamente a dinâmica) do modelo e reduzimos o número de parâmetros a grupos adimensionais.

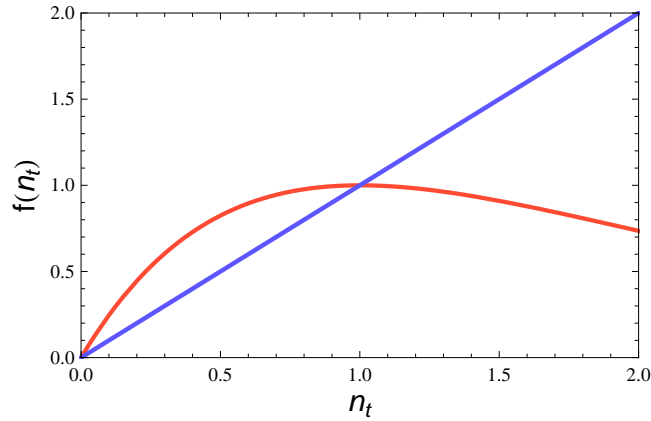
#### 3.1 Análise de Estabilidade

O modelo de Ricker depende da densidade populacional. Dessa forma, a razão  $n_{t+1}/n_t$  é o produto de um fator de crescimento intrínseco,  $\exp(r)$ , pela função  $\exp[-rn_t]$ , fator de mortalidade, que decai exponencialmente com o aumento de  $n_t$ .

Os pontos de equilíbrio do modelo (6), ou seja, os valores que satisfazem

$$n_{t+1} = n_t = n^* \quad (7)$$

são  $n_0^* = 0$  (equilíbrio de extinção) e  $n_1^* = 1$  (equilíbrio de persistência), como representado na Figura 1.



**Figura 1:** Curva de Ricker (vermelho) e  $n_{t+1} = n_t$  (curva azul).

Um ponto de equilíbrio  $n^*$  é estável se satisfaz a seguinte condição

$$|f'(n^*)| < 1. \quad (8)$$

O equilíbrio  $n_0^* = 0$  é instável pois

$$|f'(0)| = e^r < 1 \Leftrightarrow r < 0, \quad (9)$$

visto que  $r > 0$ .

O equilíbrio  $n_1^* = 1$  é estável para  $0 < r < 2$  pois

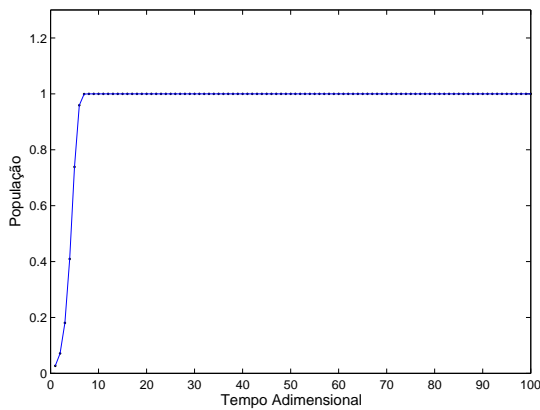
$$|f'(1)| = |1 - r| < 1 \Leftrightarrow 0 < r < 2. \quad (10)$$

## 3.2 Simulações

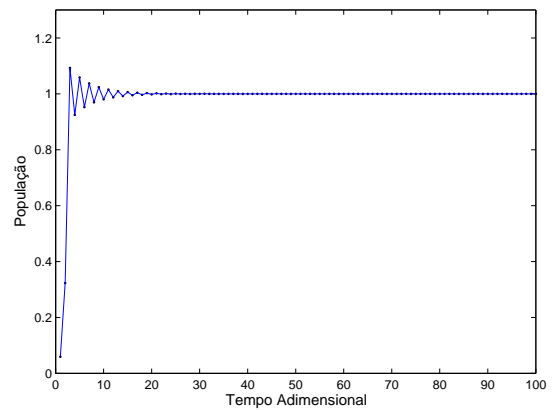
Com o objetivo de analisar como ocorre a evolução temporal do modelo de Ricker, realizamos simulações numéricas cujos resultados gráficos estão em seguida. Considerando o modelo (6), variando o valor da taxa de crescimento intrínseca  $r$ , obtemos diferentes cenários de crescimento da população.

Inicialmente, para  $0 < r < 1$ , a população tende ao equilíbrio  $n_1^* = 1$  monotonicamente, independente da condição inicial, como pode ser observado na Figura 2 (a), para  $r = 1$ . Quando aumentamos o valor de  $r$  ( $0 < r < 2$ ), ou seja, ainda dentro do intervalo de estabilidade, a população tende ao equilíbrio  $n_1^* = 1$ , contudo, ocorrem oscilações antes que o equilíbrio seja atingido, como representado na Figura 2 (b).

Em  $r = 2$  ocorre uma bifurcação, ou seja, surge um ciclo de período 2 (população oscila entre duas densidades), como ilustrado na Figura 3 (a) para  $r = 2,5$ . Ao aumentarmos o valor de  $r$ , surgem soluções com período 4 (Figura 3 (b), para  $r = 2,65$ ), período 8, até que soluções aperiódicas (caóticas) aparecem, ou seja, a população não tende mais para o ponto de

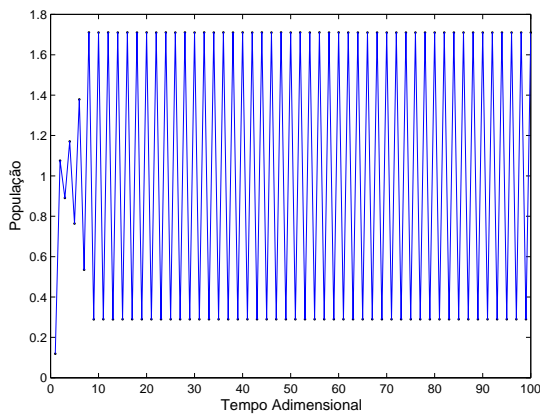


(a)

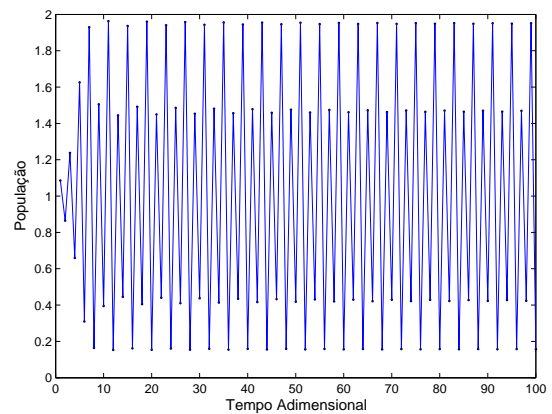


(b)

**Figura 2:** (a) Evolução temporal da população para  $r = 1$ ; (b) Evolução temporal da população para  $r = 1,5$ .



(a)



(b)

**Figura 3:** (a) Evolução temporal da população para  $r = 2,5$  (ciclo de período 2). (b) Evolução temporal da população para  $r = 2,65$  (ciclo de período 4).

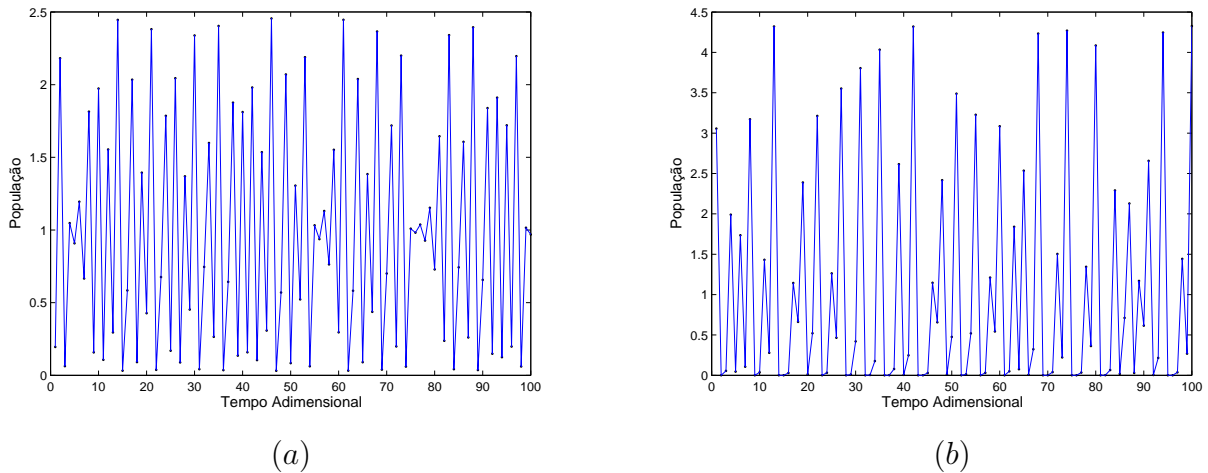
equilíbrio. Essa situação aparentemente caótica é ilustrada na Figura 4 (a) e (b).

## 4 Modelo Logístico

O modelo logístico discreto analisa crescimentos populacionais em que ocorre impossibilidade do crescimento infinito de uma determinada população, levando em consideração que a velocidade depende da população. O modelo é descrito pela equação

$$N_{t+1} = aN_t \left(1 - \frac{N_t}{K}\right), \quad (11)$$

onde  $N_t$  é o número de indivíduos no instante  $t$ ,  $a$  é a taxa de crescimento da população e  $K$  determina a capacidade suporte do meio ambiente, ou seja, o número máximo que um hábitat



**Figura 4:** (a) Evolução temporal da população para  $r = 3$ ; (b) Evolução temporal da população para  $r = 3,8$  (comportamento caótico).

é capaz de suportar.

A equação a diferenças logística (11) pode ser escrita em sua forma adimensional como

$$N_{t+1} = rN_t(1 - N_t), \quad (12)$$

onde  $r = \frac{a}{K}$  representa a taxa de crescimento intrínseca da população, que depende de diversos fatores ambientais como abundância/escassez de alimento, clima, dentre outros. O termo  $(1 - N_t)$  limita o crescimento da população, no sentido de que quando  $N_t$  aumenta,  $(1 - N_t)$  contraria drasticamente esse aumento. Neste modelo adimensional, a população está normalizada, ou seja, é um valor entre zero e um, onde zero representa a extinção e um o número máximo de indivíduos possível.

O modelo logístico é uma das equações a diferenças não lineares mais simples. Contudo, mesmo com tal simplicidade, suas soluções apresentam diversos comportamentos, dependendo dos valores atribuídos a constante  $r > 0$  (MURRAY, 1989). Dentre esses comportamentos, há o comportamento caótico, como apresentaremos nas simulações.

## 4.1 Análise de Estabilidade

Embora a equação logística (12) possa ser uma descrição de uma população cuja taxa de reprodução é limitada, há problemas práticos com esta interpretação. É necessário restringir  $N$  e  $r$  aos intervalos  $0 < N < 1$  e  $0 < r < 4$ .

As soluções de equilíbrio da equação logística (12), são  $N_0^* = 0$  e  $N_1^* = 1 - \frac{1}{r}$ .

O equilíbrio  $N_0^* = 0$  é estável para  $0 < r < 1$  pois

$$|f'(0)| = r < 1 \Leftrightarrow 0 < r < 1, \quad (13)$$



visto que  $r > 0$ .

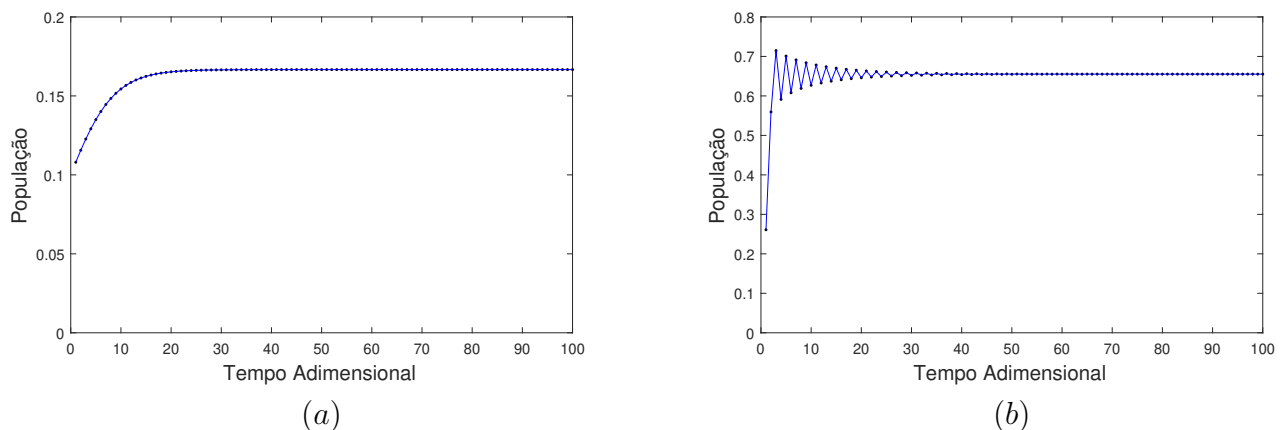
O equilíbrio  $N_1^* = 1 - \frac{1}{r}$  é estável para  $1 < r < 3$  pois

$$|f'(N_1^*)| = |2 - r| < 1 \Leftrightarrow 1 < r < 3. \quad (14)$$

A solução  $N_1^*$  não só é uma solução de equilíbrio, mas também representa a densidade máxima que a população consegue atingir, e por isso é chamada de Nível de Saturação, ou capacidade ambiental de sustentação da espécie. Representa o limite de crescimento buscado pelo modelo logístico. Se a taxa de crescimento da população for muito baixa, inferior a  $r = 1$ , temos que a população tenderá à extinção, ou seja, à  $N_0^*$ . Se  $1 < r < 3$ , a população cresce até atingir o equilíbrio  $N_1^*$ .

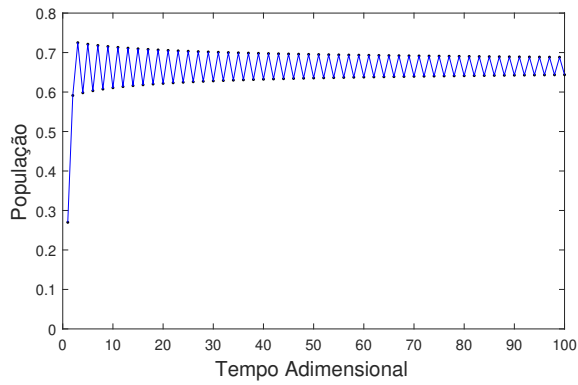
## 4.2 Simulações

Com o objetivo de analisar como ocorre a evolução temporal de uma população que cresce segundo o modelo logístico (12), realizamos simulações numéricas cujos resultados gráficos estão em seguida. Como a existência e estabilidade dos pontos de equilíbrio depende do parâmetro  $r$ , variamos justamente o valor desse parâmetro e mativemos a população inicial em  $N = 0,5$ . Dessa forma, obtivemos diferentes cenários de crescimento da população, dependentes da taxa de crescimento intrínseca. Para  $1 < r < 3$ , a população tende ao equilíbrio  $N_1^*$ , como podemos observar na Figura 5 (a), para  $r = 1,2$  e (b) para  $r = 2,9$ .

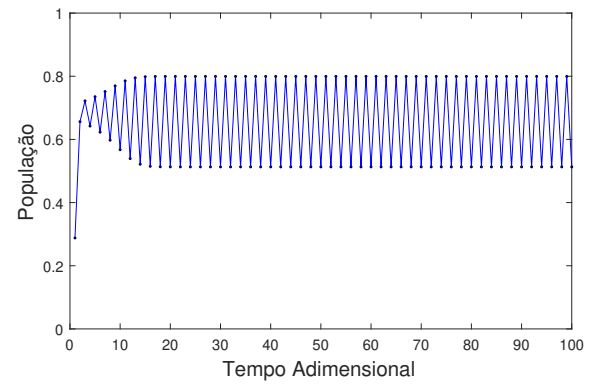


**Figura 5:** (a) Evolução temporal da população para  $r = 1,2$ ; (b) Evolução temporal da população para  $r = 2,9$ .

Quando  $r$  sai da região de estabilidade do ponto de equilíbrio  $N_1^*$ , por volta de  $r = 3$ , surgem ciclos de período 2, ou seja, a população oscila entre dois valores fixos, como ilustrado na Figura 6 (a), para  $r = 3$  e (b) para  $r = 3,2$ . Com o aumento do valor de  $r$ , surgem ciclos de período 4, por volta de  $r = 3,44$ , como ilustrado na Figura 7 (a) para  $r = 3,5$ . Em  $r = 3,55$ , surgem ciclos de período 8, como representado na Figura 7 (b) para  $r = 3,57$ .

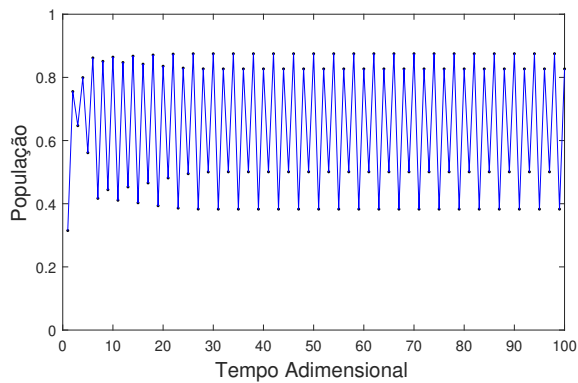


(a)

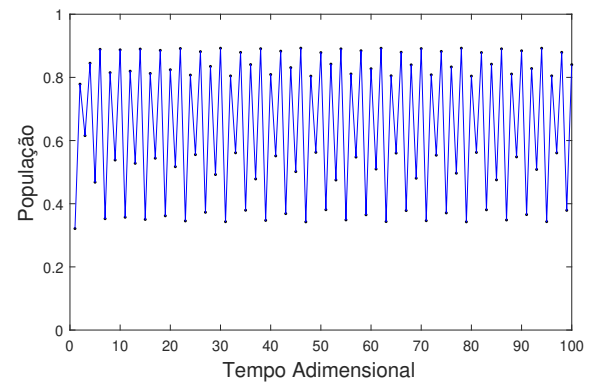


(b)

**Figura 6:** (a) Evolução temporal da população para  $r = 3$ ; (b) Evolução temporal da população para  $r = 3,2$  (ciclo de período 2).

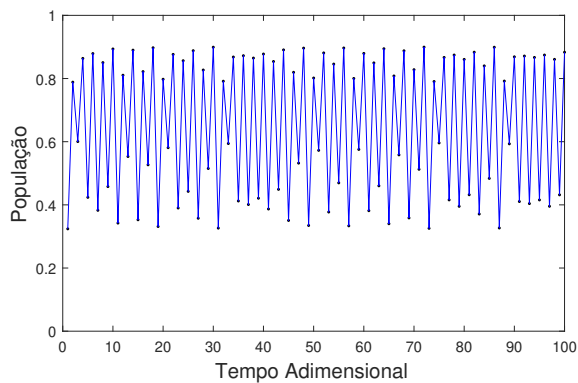


(a)

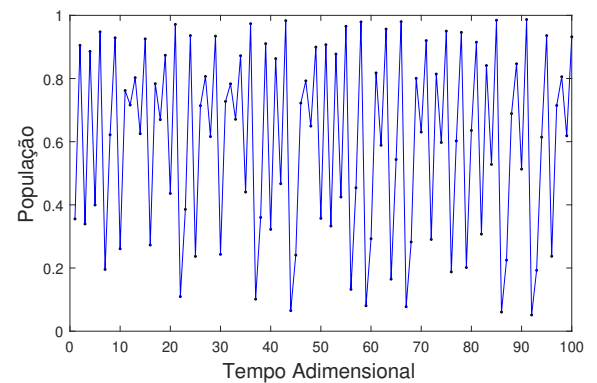


(b)

**Figura 7:** (a) Evolução temporal da população para  $r = 3,5$  (ciclo de período 4); (b) Evolução temporal da população para  $r = 3,57$  (ciclo de período 8).



(a)



(b)

**Figura 8:** (a) Evolução temporal da população para  $r = 3,6$  (comportamento cíclico); (b) Evolução temporal da população para  $r = 3,95$  (comportamento caótico).

Em  $r = 3,6$ , verificamos um comportamento irregular. Observe que à medida que o tempo passa, a população assume valores totalmente distintos a cada iteração, o que caracte-

rizamos como soluções aperiódicas (comportamento caótico), como pode ser visto na Figura 8 (a). Dessa forma, quanto mais se aproximar de  $r = 4$ , o comportamento aperiódico (caótico) fica mais evidente, como ilustrado na Figura 8 (b). Assim, concluímos que fenômenos caóticos são imprevisíveis, necessitando do uso de computador e imagens gráficas capazes de evidenciar a estrutura da complexidade do modelo.

## 5 Resultados e Discussão

Através das simulações com o modelo logístico, percebemos algumas pequenas diferenças para o modelo de Ricker. No caso do modelo logístico, para que a população persistisse, a população inicial deveria estar entre 0 e 1. Além disso,  $r > 1$ , pois caso contrário, tenderia à extinção, ou seja, o equilíbrio  $N_1^*$  não existiria. Outro detalhe que tivemos que considerar em nossas simulações foi que o valor de  $r$  deveria ser menor que 4, caso fosse maior, a população também se extingue. No modelo de Ricker não existem restrições para a condição inicial e nem para valor mínimo e máximo de  $r$ .

Para ambos os modelos, obtivemos diferentes cenários de crescimento da população, variando de crescimento monotônico até atingir o ponto de equilíbrio de persistência da população ( $r$  dentro da região de estabilidade); ciclos de período 2, 4, ... para valores de  $r$  pouco acima da região de estabilidade; até que finalmente, soluções aperiódicas aparecem. A descoberta desse tipo de solução em modelos discretos bastante simples, iniciou em 1976, com os estudos de Robert May (FERNANDEZ, 2004).

Em 1976, Robert May, trabalhando com modelos discretos de crescimento populacional extremamente simples, não lineares, mostrou que eles podiam ter um comportamento dinâmico fantásticamente complexo. Este comportamento incluía flutuações populacionais aparentemente aleatórias que eram geradas por modelos determinísticos, o chamado caos determinístico. As descobertas alcançadas por May na ecologia, e por vários outros pesquisadores em uma ampla variedade de outras ciências, provocaram uma das maiores revoluções científicas e filosóficas do século XX (FERNANDEZ, 2004).

Nos anos que seguiram, os estudos realizados pelo físico matemático Mitchell Feigenbaum (1983) revelaram o processo de duplicação de períodos através do qual os sistemas dinâmicos passavam de um regime laminar e bem comportado para um regime de desordem ou caótico (GONTIJO, 2009). Toda essa variação de comportamento da população observamos que ocorre com os modelos de Ricker e logístico, dependendo apenas da variação na taxa de crescimento intrínseca da população em ambos os modelos. Assim, percebemos a riqueza de resultados que podemos obter com o estudo de modelos discretos bastante simples para a dinâmica populacional.

## 6 Considerações Finais

Neste trabalho, tivemos como objetivo apresentar os conceitos que envolvem a teoria das equações a diferenças, bem como, trabalhar com dois modelos matemáticos simples elaborados com tais equações: modelo de Ricker e modelo logístico. Além disso, utilizamos os conceitos importantes, como soluções de equilíbrio, análise de estabilidade e mudança qualitativa do comportamento das soluções em função do parâmetro  $r$ .

Através das simulações numéricas com o modelo Ricker, considerando o modelo (6), na variação do valor da taxa de crescimento intrínseca  $r$ , obtivemos diferentes cenários de crescimento da população. Para  $0 < r < 1$  e  $1 < r < 2$ , a população tende ao equilíbrio  $n_1^* = 1$ , contudo, no segundo caso, ocorrem oscilações (fase transiente) antes que o equilíbrio seja atingido.

Percebemos que quando  $r = 2$  surge um ciclo de período 2 (população oscila entre duas densidades), ou seja, surge uma bifurcação. Contudo, ao aumentarmos o valor de  $r$  para valores fora do intervalo de estabilidade, surgem soluções com período 4 e 8, até que soluções aperiódicas (caóticas) aparecem. Dessa forma, a população não tende para o ponto de equilíbrio. Concluimos que o modelo de Ricker apresenta diferentes cenários de crescimento dependentes da taxa de crescimento intrínseca  $r$ , tais como, crescimento monotônico, oscilações decrescentes, ciclos de período 2, 4 e 8, até surgirem soluções aperiódicas.

No caso do modelo logístico, ocorrem os mesmos comportamentos da população que aparecem no modelo de Ricker. Variando o valor de  $r$ , temos: crescimento monotônico até atingir o equilíbrio  $N_1^*$  (para  $1 < r < 3$ ); ciclos de período 2, 4 e assim por diante para  $3 < r < 3,9$  aproximadamente; e soluções aperiódicas para valores de  $r$  próximos de 4.

Como trabalhos futuros sugerimos o estudo mais aprofundado a respeito dos referidos modelos, incorporação da movimentação dos indivíduos através de Redes de Mapas Acoplados, assim como a comparação deles com outros modelos de equações a diferenças. Existem muitos outros modelos na literatura, os quais não foram explorados e/ou citados neste trabalho.

## Referências Bibliográficas

ALLEN, L. J. S. **An Introduction to Mathematical Biology**. Pearson Prentice Hall, 2007.

BIEMBENGUT, M. S. **30 anos de modelagem na educação brasileira: das propostas primeiras às propostas atuais**. Alexandria, v. 2, n. 2, p. 7-32, 2009.

EDELSTEIN-KESHET, L. **Mathematical Models in Biology**. McGraw-Hill, New York, 1988.

FERNANDEZ, F. **O poema imperfeito: Crônicas de biologia, conservação da natureza e seus heróis.** 2ª EDIÇÃO. Editora UFPR, 2004.

GONTIJO, A. B. **Estudo e modelagem das dinâmicas estruturais de assembleias de formigas tropicais em diferentes escalas ecológicas.** Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Ouro Preto, 2009.

LUÍS, R. D. G. **Equações de diferenças e aplicações.** Dissertação Mestrado, Funchal: Universidade da Madeira, 2006.

MURRAY, J. D. **Mathematical Biology.** Springer-Verlag, Berlin, 1989.

SEGEL, L. A. and EDELSTEIN-KESHET, L. **A Primer on Mathematical Models in Biology.** SIAM, Philadelphia, 2013.