

INTRODUÇÃO AO ESTUDO DE ESCOAMENTOS DE FLUIDOS SOB UMA ABORDAGEM COMPUTACIONAL

Gleidson Machado Bragança¹

Charles Quevedo Carpes²

Radael de Souza Parolin³

Resumo: O estudo da dinâmica dos fluidos é de relevância para diversas áreas do conhecimento, envolvendo, matematicamente, o trabalho com sistemas de equações diferenciais não lineares, cujas soluções não podem ser facilmente generalizadas e, dessa forma, diversos métodos numéricos têm sido desenvolvidos e aperfeiçoados a fim de buscar soluções para esses sistemas. O presente trabalho busca entender o modelo matemático que descreve o perfil de velocidade do escoamento bidimensional em torno de um cilindro. Buscamos comparar as soluções analítica e numérica para o problema em questão, assim como analisar as implicações das hipóteses necessárias para obtenção dessas soluções. A solução numérica desenvolvida neste estudo apresentou uma boa descrição de uma situação de escoamento em torno de um cilindro, pois, considera os efeitos viscosos e, conseqüentemente, as vorticidades, influenciando no comportamento do escoamento, enquanto a solução analítica tende a ser mais suave no contorno do cilindro, visto que considera apenas escoamentos irrotacionais.

Palavras-chave: Dinâmica dos fluidos; Escoamentos incompressíveis; Métodos numéricos.

1 INTRODUÇÃO

Geralmente, podemos classificar a matéria em três estados distintos, sendo esses: o estado sólido, líquido e gasoso. Desses, líquidos e gases fazem parte de um grupo denominado de fluidos, com origem no latim (*fluidus*) e que significa uma substância que se deforma ininterruptamente, ou seja, que escoar, sob ação de uma força cisalhante (HALLIDAY; RESNICK; WALKER, 2000)

Os fluidos não suportam forças cisalhantes e, em consequência disto, essas forças causam um deslocamento molecular, o qual segue no sentido da força aplicada. Ademais, como esse grupo envolve líquidos e gases, é necessário distinguir essas duas classificações. Os líquidos apresentam forças reativas à compressão, os quais denominamos de incompressíveis. E com relação ao gases, esses não suportam forças compressivas e cisalhantes - forças compressivas são capazes de modificar o estado do gás e forças cisalhantes podem causar escoamento molecular no sentido dessas forças - portanto, denominamos os gases como sendo fluidos compressíveis (NUSSENZVEIG, 1997; HALLIDAY; RESNICK; WALKER, 2000)

Neste trabalho iremos analisar o comportamento de um fluido em uma situação de escoamento considerada padrão na literatura. Assim, o objetivo desse estudo será entender o modelo matemático que descreve o perfil de velocidade do escoamento bidimensional em torno

¹ Discente, Universidade Federal do Pampa, Especialização em Ciências Exatas e Tecnologia, gleidson21mb@gmail.com

² Docente, Universidade Federal do Pampa, Especialização em Ciências Exatas e Tecnologia, charlescarpes@unipampa.edu.br

³ Docente, Universidade Federal do Pampa, Especialização em Ciências Exatas e Tecnologia, radaelparolin@unipampa.edu.br

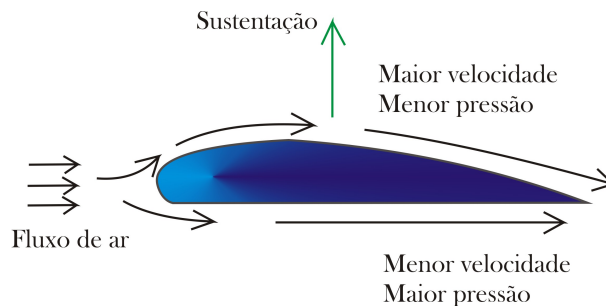
de um cilindro. Buscamos comparar as soluções analítica e numérica para o problema em questão, assim como analisar as implicações das hipóteses necessárias para obtenção dessas soluções.

1.1 JUSTIFICATIVA

O estudo da dinâmica dos fluidos é de relevância para diversas áreas do conhecimento, desde as mais aplicadas até aquelas consideradas teóricas. Na área das engenharias, por exemplo, o estudo da dinâmica dos fluidos envolve problemas como: a dispersão de medicamentos no corpo humano, a previsão do tempo, o movimento das galáxias, a aerodinâmica de veículos, a extração de petróleo, entre outros.

Um exemplo que pode ser abordado, dentro da dinâmica dos fluidos, é a sustentação na asa de um avião. Quando um fluxo de ar, com determinada velocidade, atinge horizontalmente a asa de um avião, parte do fluido ao percorrer a superfície superior chega ao final de sua extensão com uma velocidade maior, pois as moléculas do fluido percorrem uma distância maior em um mesmo intervalo de tempo se comparado com a superfície inferior da asa, como pode ser visualizado na Figura 1 (NUSSENZVEIG, 1997).

Figura 1 – Sustentação na asa de um avião.



Fonte: do autor.

Desta forma, a velocidade de escoamento do ar é maior acima da asa e, conseqüentemente, a pressão é menor. A diferença entre a pressão acima da superfície da asa e abaixo dela contribui para sua sustentação.

Do ponto de vista teórico, o estudo da dinâmica dos fluidos envolve, matematicamente, o trabalho com sistemas de equações diferenciais não lineares, as quais suas soluções analíticas não podem ser facilmente generalizadas. Desse modo, diversos métodos numéricos têm sido desenvolvidos e aperfeiçoados a fim de buscar soluções para esses sistemas, sendo esse também um ramo de conhecimento que tem se desenvolvido substancialmente nessa área.

1.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

Como objetivos deste trabalho, pontuamos:

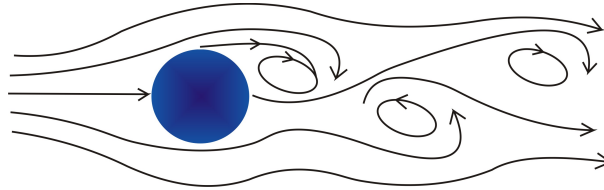
- comparar as soluções analítica e numérica para o problema de escoamento em torno de um cilindro;

- analisar as implicações das hipóteses necessárias para obtenção destas soluções.

2 METODOLOGIA

Neste trabalho iremos abordar a situação de escoamento em torno de um cilindro circular de raio unitário e de altura infinita. Consideramos que o cilindro está posicionado de forma que seu eixo seja perpendicular à direção do escoamento, o que possibilita que a análise do campo de velocidades seja feita de forma bidimensional. Abaixo encontra-se uma ilustração para exemplificar o escoamento abordado:

Figura 2 – Ilustração do escoamento abordado em condições específicas.



Fonte: do autor.

Assumindo que o fluido é incompressível, o campo de velocidades deve satisfazer a equação de Navier-Stokes (PONTES; MANGIAVACCHI, 2016):

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \text{grad } \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p + \nu \text{div}^2 \vec{v} + \vec{g}, \quad (1)$$

em que \vec{v} é o vetor que descreve a velocidade do fluido, t é o tempo, ρ é a massa específica do fluido, p é a pressão, ν é a viscosidade do fluido e \vec{g} é a força da gravidade.

Usando as relações

$$\vec{v} = U_0 \vec{v}^*, \quad x_i = x_i^* d, \quad t = t^* d / U_0, \quad p = p^* \rho U_0^2, \quad (2)$$

em que definimos d como o comprimento característico do escoamento, p_0 a pressão do escoamento, U_0 a velocidade do escoamento, obtemos as variáveis adimensionais identificadas pelos asteriscos. Podemos, assim, substituí-las na equação de Navier-Stokes (1) e multiplicando por d/U_0^2 obtemos:

$$\frac{\partial \vec{v}^*}{\partial t^*} + \vec{v}^* \cdot \text{grad } \vec{v}^* = -\text{grad } p^* + \frac{1}{U_0 d / \nu} \text{div}^2 \vec{v}^* + \frac{g d}{U_0^2} \vec{g}. \quad (3)$$

Definindo o número de Reynolds por $Re = U_0 d / \nu$, considerando que os efeitos gravitacionais podem ser desprezados e omitindo os asteriscos chegamos à seguinte representação adimensional da equação de Navier-Stokes:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \text{grad } \vec{v} = -\text{grad } p + \frac{1}{Re} \text{div}^2 \vec{v}. \quad (4)$$

A equação (4) será discretizada para que possamos obter uma aproximação numérica para o problema. A discretização consiste em substituir as derivadas por uma razão incremental que irá convergir para o valor da derivada conforme o incremento tende a zero (CUMINATO; MENEGUETTE JUNIOR, 2013)

Assim, em cada ponto da malha, são calculadas aproximações para uma função $f(x, t)$ e suas derivadas. Utiliza-se a Expansão em Série de Taylor para relacionar as aproximações das derivadas e os valores da função num ponto (x, t) com os valores dessa função numa vizinhança $f(x+h, t+k)$ em torno do ponto (CUMINATO; MENEGUETTE JUNIOR, 2013)

No caso deste estudo, optamos por utilizar as aproximações por diferença central, do Método de Diferenças Finitas (CUMINATO; MENEGUETTE JUNIOR, 2013), sendo descrita por:

$$f_x(x, t) = \frac{f(x+h, t) - f(x-h, t)}{2h} - \frac{h^2}{6} f_{xxx}(\xi, t), \quad (5)$$

$$f_{xx}(x, t) = \frac{f(x+h, t) - 2f(x, t) + f(x-h, t)}{h^2} - \frac{h^2}{12} f_{xxxx}(\xi, t), \quad (6)$$

em que $(x-h < \xi < x+h)$;

$$f_{tt}(x, t) = \frac{f(x, t+k) - 2f(x, t) + f(x, t-k)}{k^2} - \frac{k^2}{12} f_{tttt}(\xi, t), \quad (7)$$

em que $(t-h < \xi < t+h)$;

$$f_{xt}(x, t) = \frac{f(x+h, t+k)}{4hk} - \frac{f(x+h, t-k)}{4hk} - \frac{f(x-h, t+k)}{4hk} + \frac{f(x-h, t-k)}{4hk} - \frac{h^2}{6} f_{xxxt}(\xi_1, \zeta_1) - \frac{k^2}{6} f_{xttt}(\xi_2, \zeta_2), \quad (8)$$

em que $(x-h < \xi_1, \xi_2 < x+h)$, $(t-k < \zeta_1, \zeta_2 < t+k)$.

A equação discretizada via Diferenças Finitas foi resolvida computacionalmente através Método de Newton–Raphson (RUGGIERO; LOPES, 1996).

Analicamente, o problema de escoamento em torno do cilindro foi analisado de forma que o vetor

$$V = u(x; y) + i v(x; y) \quad (9)$$

descreve a velocidade do fluido em um ponto $(x; y)$, do plano z , com $u(x; y)$ e $v(x; y)$ funções reais contínuas, assim como suas derivadas parciais de primeira ordem.

Sendo assim, Brown e Churchill (2015, p. 384) descrevem que o vetor velocidade em (9) é “[...] o gradiente de ϕ e que a derivada direcional de ϕ em qualquer direção representa o componente da velocidade do escoamento nessa direção”. Dessa forma, considerando que o escoamento é irrotacional e o domínio D é simplesmente conexo - D é aberto, dois pontos quaisquer de D podem ser ligados por uma curva contida em D e qualquer curva fechada de D delimita uma região contida em D - podemos reescrever o vetor velocidade (9) como

$$V = \phi_x(x; y) + i \phi_y(x; y) = \text{grad } \phi(x; y), \quad (10)$$

com ϕ determinando a função potencial da velocidade.

Ainda, se ϕ for harmônica - qualquer solução não trivial da equação de Laplace, cujas derivadas de primeira e segunda ordem são contínuas - em um domínio D simplesmente conexo, então podemos descrever ψ , denominada função corrente, como uma harmônica conjugada de ϕ nesse domínio. Além disso, com ϕ e ψ , podemos escrever a função analítica, ou seja, uma função complexa cuja derivada existe em um ponto z_0 e em qualquer ponto de sua vizinhança,

$$F(z) = \phi(x; y) + i \psi(x; y) \quad (11)$$

como um potencial complexo do escoamento.

Retornando ao problema de escoamento em torno de um cilindro, que pode ser representado pela equação do círculo $x^2 + y^2 = r^2$, consideramos que o escoamento ocorra da esquerda para a direita e seja paralelo ao eixo x . Dessa forma, ainda podemos delimitar a região do escoamento como sendo acima ($v \geq 0$) e no decorrer do eixo u com relação ao plano uv ou w , este associado ao plano z .

Assim, utilizando a transformação de Kutta-Joukowski (PONTES; MANGIAVACCHI, 2016), definida por

$$w = z + \frac{1}{z}, \quad (12)$$

podemos reescrever o potencial complexo do escoamento na região exterior ao semicírculo e acima do eixo x como

$$F = A \left(z + \frac{1}{z} \right), \quad (13)$$

em que A é uma constante real positiva. Com isso, a velocidade torna-se

$$V = A \left(1 - \frac{1}{z^2} \right), \quad (14)$$

que também representa velocidades de escoamento na região inferior e, segundo a equação (13), ainda podemos reescrever a função corrente, dada em coordenadas polares, como

$$\psi = A \left(r - \frac{1}{r} \right) \text{sen}(\theta). \quad (15)$$

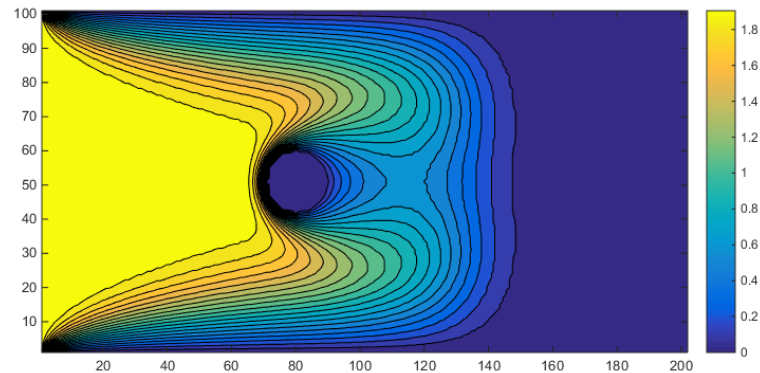
3 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Ao abordar a situação de escoamento em torno de um cilindro, optamos por considerar a sua altura infinita, sendo possível analisar o campo de velocidades - composto pelos vetores que indicam a variação da velocidade, levando em consideração a direção e a dimensão espacial - de forma bidimensional, pois supondo que o escoamento do fluido ocorre identicamente em todos os planos paralelos à xy e o cilindro tem altura infinita, basta tomar apenas um plano bidimensional, assim como desprezar os efeitos gravitacionais.

Além disso, buscamos analisar o caso dos fluidos incompressíveis, em que se pode escrever o gradiente do tensor de tensões, ou seja, deformações de cisalhamento, em torno de $v \nabla^2 v_i$, no qual sua densidade (ρ) não sofre alterações.

Através dos métodos descritos na seção anterior e adotando as variações $dx = \frac{1,4}{202}$, $dy = \frac{0,7}{101}$ e $dt = 0,00001$ em uma malha de 202 por 101 pontos, com $Re = 0,9$, foi possível propor uma solução numérica para a equação de Navier-Stokes (4), a qual pode ser observada na figura 3 abaixo:

Figura 3 – Gráfico da solução numérica.



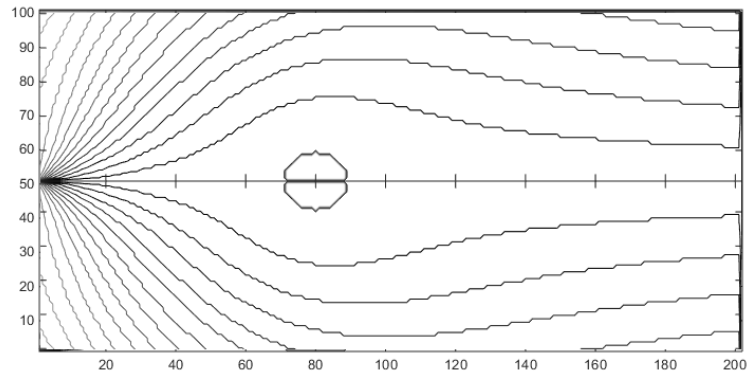
Fonte: do autor.

Com relação à solução analítica, para analisar o problema de escoamentos potenciais incompressíveis e bidimensionais, utilizam-se conceitos do cálculo de funções de variável complexa que satisfazem a equação de Laplace e as condições de Cauchy-Riemann, sendo essas viabilizadoras de uma compreensão matemática do escoamento.

Neste contexto, considerou-se que o escoamento tem carácter irrotacional, ou seja, quando a rotação do fluido (vorticidade) em torno do cilindro for igual a zero e sendo inicialmente irrotacional, permanece sobre toda região. Outro ponto a se destacar é que efeitos viscosos, geralmente, produzem vorticidade e, dessa forma, para manter-se o escoamento irrotacional desconsidera-se a viscosidade do fluido. Quando abordam-se escoamentos irrotacionais, uma característica é dada pela presença de um potencial, no qual o gradiente define o campo de velocidades, ou seja, é uma função da posição e do tempo.

Para obter a solução analítica do fenômeno abordado, utilizou-se a equação (15), em que foi necessário converter as coordenadas cartesianas para coordenadas polares, gerando a Figura 4 abaixo:

Figura 4 – Gráfico da solução analítica.



Fonte: do autor.

Ao analisar os gráficos produzidos pelas soluções numérica e analítica, é perceptível que ambos possuem características distintas de escoamentos, o que pode ser visto pelas isolinhas, pois na Figura 3 observa-se que as mesmas determinam a fronteira entre as regiões com diferenças de velocidades. Já na Figura 4, as linhas são determinadas pelos vetores de direção que o escoamento possui ao longo da malha.

4 CONCLUSÕES

Diante deste estudo pôde-se compreender melhor o modelo matemático que descreve o escoamento de um fluido, assim como os métodos numéricos para tratamento e busca de soluções relacionadas à equações diferenciais.

Ademais, a solução numérica (Figura 3) desenvolvida neste estudo apresentou uma boa descrição de uma situação de escoamento em torno de um cilindro, pois, se comparada com a solução analítica, considera os efeitos viscosos e, conseqüentemente, as vorticidades, influenciando no comportamento do escoamento. Além disto, diante do que pode ser visualizado na Figura 4, a solução analítica tende a ser mais suave no contorno do cilindro, sendo que considera apenas escoamentos irrotacionais.

REFERÊNCIAS

BROWN, James Ward; CHURCHILL, Ruel Vance. **Variáveis complexas e aplicações.**

Tradução de Claus Ivo Doering. 9. ed. Porto Alegre: AMGH, 2015.

CUMINATO, José Alberto; MENEGUETTE JUNIOR, Messias. **Discretização de equações diferenciais parciais:** técnicas de diferenças finitas. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

HALLIDAY, David; RESNICK, Robert; WALKER, Jearl. **Fundamentos de Física:** Gravitação, Ondas e Termodinâmica. v.2. 8. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2000.

NUSSENZVEIG, Herch Moysés. **Curso de Física Básica:** Fluidos, Oscilações e Ondas, Calor. v.2. São Paulo: Blucher, 1997.

PONTES, José; MANGIAVACCHI, Norberto. **Fenômenos de transferência com aplicações às ciências físicas e à engenharia.** v.1. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2016.

RUGGIERO, Márcia Aparecida Gomes; LOPES, Vera Lúcia da Rocha **Cálculo numérico:** aspectos teóricos e computacionais. 2. ed. São Paulo: Pearson; Makron Books, 1996.