UNIVERSIDADE FEDERAL DO PAMPA

VANESSA SCHEEREN

TEORIA DOS GRAFOS: UMA ABORDAGEM PARA A PROGRAMAÇÃO DE HORÁRIOS DE EXAMES FINAIS EM CURSOS UNIVERSITÁRIOS

Bagé
2018

VANESSA SCHEEREN

TEORIA DOS GRAFOS: UMA ABORDAGEM PARA A PROGRAMAÇÃO DE HORÁRIOS DE EXAMES FINAIS EM CURSOS UNIVERSITÁRIOS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Modelagem Computacional em Ensino, Experimentação e Simulação da Universidade Federal do Pampa, como requisito parcial para obtenção do Título de Especialista em Modelagem Computacional em Ensino, Experimentação e Simulação.

Orientadora: Profa. Dra. Francieli Aparecida Vaz

Coorientadora: Profa. Me. Elizangela Dias Pereira

Bagé
2018

Ficha catalográfica elaborada automaticamente com os dados fornecidos
pelo(a) autor(a) através do Módulo de Biblioteca do
Sistema GURI (Gestão Unificada de Recursos Institucionais).

S314t Scheeren, Vanessa
Teoria dos Grafos: uma abordagem para a programação de horários de exames finais em cursos universitário / Vanessa Scheeren.
62 p.

Trabalho de Conclusão de Curso(Especialização) – Universidade Federal do Pampa, ESPECIALIZAÇÃO EM MODELAGEM COMPUTACIONAL EM ENSINO, EXPERIMENAÇÃO E SIMULAÇÃO, 2018.
"Orientação: Francieli Aparecida Vaz".

1. Grafos. 2. Coloração. 3. Programação de Horários de Exames. I. Título.

VANESSA SCHEEREN

TEORIA DOS GRAFOS: UMA ABORDAGEM PARA A PROGRAMAÇÃO DE HORÁRIOS DE EXAMES FINAIS EM CURSOS UNIVERSITÁRIOS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Modelagem Computacional em Ensino, Experimentação e Simulação da Universidade Federal do Pampa, como requisito parcial para obtenção do Título de Especialista em Modelagem Computacional em Ensino, Experimentação e Simulação.

Trabalho de Conclusão de Curso defendido e aprovado em: 11 de junho de 2018.

Banca examinadora:

Prof. Dra. Francieli Aparecida Vaz
Orientadora
UNIPAMPA

Profa. Dra. Catia Maria dos Santos Machado
FURG

Prof. Dr. Anderson Luís Jeske Bihain
UNIPAMPA

Dedico este trabalho a Deus por me proporcionar mais esta conquista e a minha família por estar ao meu lado em todos os momentos da minha vida.

AGRADECIMENTO

A Deus por me conceder mais esta conquista e por estar sempre guiando meus passos.

Aos meus pais, Aloisio e Veranice, por me incentivar a estudar sempre, pela confiança depositada e amor incondicional.

Ao meu companheiro, Rodrigo, por estar sempre ao meu lado, compreender minhas ausências e me apoiar em todos os meus projetos.

Aos familiares e amigos pelo seu apoio e incentivo.

À minha orientadora, Francieli, pelos seus ensinamentos, atenção e dedicação ao meu trabalho, assim como por ter se disponibilizado a me orientar.

À minha orientadora e amiga, Elizangela, pelo seu apoio e incentivo em todos os momentos, pelos seus ensinamentos e conselhos, pela sua paciência e dedicação, assim como por ter se disponibilizado a me orientar.

Aos professores da Especialização pelos seus ensinamentos e comprometimento com a nossa formação.

Aos colegas da especialização pela parceria e pelos momentos alegres vivenciados no decorrer do curso.

À Universidade Federal do Pampa por me proporcionar mais esta conquista através de um ensino público e de qualidade.

“No fim tudo dá certo, se não deu certo é porque ainda não chegou ao fim”.

Fernando Sabino

RESUMO

A crescente procura por formação superior e qualificação profissional resulta no aumento do número de cursos e instituições de ensino para atender a esta demanda, fato que ressalta um problema cada vez mais frequente no meio educacional, o Problema de Programação de Horários. O processo de elaboração de cronogramas de horários de aulas e exames é realizado semestralmente pela maioria das instituições de ensino e, quando realizados de forma manual, demandam o empenho de muitos profissionais que destinam um longo período de suas atividades funcionais a este fim. Nesse sentido, com a intenção de contribuir para o aperfeiçoamento da elaboração de cronogramas de horários de exames nas instituições de ensino, esse trabalho tem como objetivo central desenvolver um modelo de solução para o Problema de Programação de Horários de Exames que atenda a um conjunto de restrições pré-determinadas, possibilitando elaborar um cronograma de exames finais viável para a realidade em questão. Com esta finalidade foram considerados dados reais referentes aos componentes curriculares ofertados aos discentes do curso de Matemática - Licenciatura da Universidade Federal do Pampa, campus Bagé. A abordagem proposta por este estudo, para solucionar o Problema de Programação de Exames, fundamenta-se na Teoria dos Grafos a partir da Coloração de Grafos desenvolvida através do algoritmo de Welsh-Powell adaptado. Estas adaptações foram realizadas a fim de atender as restrições determinadas para este cronograma de exames. O algoritmo desenvolvido em linguagem Fortran para a construção da matriz de adjacência, necessária para a modelagem do problema como um grafo, otimizou consideravelmente o processo de obtenção do cronograma de exames finais. Os resultados alcançados nesta pesquisa mostraram que a Coloração de Grafos, ancorada na Teoria dos Grafos, e realizada por meio do algoritmo de Welsh-Powell adaptado, possibilitou a elaboração de um cronograma de exames finais viável para o curso de Matemática - Licenciatura, atendendo a todas as restrições estabelecidas.

Palavras-Chave: Grafos; Coloração; Programação de Horários de Exames; Otimização.

ABSTRACT

The increasing demand for higher education and professional qualification results in an increase in the number of courses and educational institutions to fulfill that demand, a fact that highlights an increasingly frequent problem in the educational environment, the Timetabling Problem. The process of preparing timetables for classes and exams is done every semester by most educational institutions and, when carried out manually, demand the commitment of many professionals who dedicate a long period of their functional activities for this. In this way, with the intention of contributing to the improvement of the elaboration of exam schedules in educational institutions, this work has the central objective to develop a solution model for the Examination Timetabling Problem that meets a set of constraints, making it possible a feasible final examination schedule for the true facts in the area concerned. For this purpose, real data were considered referring to the curricular components offered to the students of the Mathematics - Licenciatura course of the Federal University of Pampa, Campus Bagé. The approach proposed for this study, to solve the Examination Timetabling Problem, is based on the Graph Theory from the Graph Colouring developed through the adapted Welsh-Powell algorithm. These adaptations were made in order to serve specific restrictions set for this exam schedule. The algorithm developed in Fortran language for the construction of the adjacency matrix, necessary for the modeling of the problem as a graph, considerably optimized the process of obtaining the schedule of final exams. The results obtained in this research showed that Graph Colouring, set on Graph Theory, and performed using the adapted Welsh-Powell algorithm, allowed the elaboration of a viable final examination schedule for the Mathematics - Licenciatura course, considering all restrictions established

Keywords: Graphs; Graph Colouring; Schedule of exams; Optimization.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

UNIPAMPA – Universidade Federal do Pampa

RS – Rio Grande do Sul

CBR – Case Based Reasoning

GDA – Great Deluge Algorithm

MOEA – Algoritmo Evolutivo Multi-Objetivo Híbrido

GURI – Gestão Unificada de Recursos Institucionais

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Esta pesquisa apresenta uma solução para o Problema de Programação de Horários de Exames de cursos universitários a partir de dados reais referentes aos componentes curriculares ofertados aos discentes do curso de Matemática - Licenciatura da Universidade Federal do Pampa (UNIPAMPA), campus Bagé, RS. O método de solução adotado nesta pesquisa fundamenta-se na Teoria dos Grafos, mais precisamente no conceito de Coloração de Grafos, desenvolvido por meio do algoritmo de Welsh-Powell com adaptações.

O Problema de Programação de Horários de Exames universitários vem sendo pauta de muitas discussões no âmbito da matemática aplicada. Isso se deve, principalmente, ao fato de que na maioria das instituições de ensino a elaboração do calendário de exames é realizada semestralmente. Essa tarefa é muitas vezes desenvolvida de forma manual e envolve funcionários, coordenadores de curso e até professores que destinam um importante período de seu tempo funcional para este fim e, ainda assim, os resultados obtidos nem sempre atendem a todas as especificidades da instituição. Dessa forma, a problemática que se apresenta neste estudo se refere à construção de um modelo de solução para o Problema de Programação de Horários de Exames que possibilite a elaboração de um cronograma de exames finais que satisfaça a todas as condições determinadas, otimizando o seu processo de elaboração.

Nesta pesquisa, o Problema de Programação de Horários de Exames é abordado através da Teoria dos Grafos, que de acordo com Boaventura Netto (2006), desenvolveu-se impulsionada pelas aplicações a problemas de otimização organizacional, que compõem um conjunto de técnicas encontradas na Pesquisa Operacional. Esse ramo da Matemática Discreta é pouco explorado no Brasil em todos os níveis de ensino, embora sua aplicação possa ser estendida a diferentes campos do conhecimento. A Teoria dos Grafos proporciona ferramentas simples, acessíveis e poderosas para a construção de modelos e resolução de problemas relacionados com arranjos discretos, servindo como modelo matemático para representar diversos sistemas.

Nessa perspectiva, o problema apresentado caracteriza-se como *Timetabling Problem* (Problema de Horários) que, quando aplicado ao contexto educacional, consiste em agendar uma série de encontros entre alunos, professores e instituições de ensino como, por exemplo, aulas, exames, cursos, entre outras atividades inerentes a este contexto, satisfazendo a um conjunto de restrições (WERRA, 1985; SCHAERF, 1999). Dentre as diferentes classificações existentes para o problema, a mais utilizada é a proposta por Schaerf (1999), que consiste em subdividir o problema em três classes: Problema de Programação de Horários em Escolas; Problema de Programação de Horários de Cursos e Problema de Programação de Horários de Exames. Dentre as classificações apresentadas, esta abordagem está centrada no Problema de Programação de Horários de Exames (*Examination Timetabling Problem*) que consiste em agendar os exames finais satisfazendo uma série de restrições.

1.1 Objetivos

1.1.1 Objetivo geral

O objetivo geral desta pesquisa é desenvolver um modelo de solução para o Problema de Programação de Horários de Exames que atenda a um conjunto de restrições pré-determinadas, possibilitando elaborar um cronograma de exames finais viável para o curso de Matemática – Licenciatura.

1.1.2 Objetivos específicos

- Realizar uma revisão bibliográfica sobre as técnicas utilizadas para a solução do problema;
- Construir um algoritmo de implementação computacional para otimizar o processo de elaboração do cronograma de exames;
- Desenvolver um cronograma de exames finais viável para os dados de referência utilizados;
- Explorar diferentes soluções para o problema de exames através da variação de restrições.

1.2 Justificativa

Devido ao grande número de variáveis envolvidas, a distribuição de encargos didáticos representa um problema antigo nas instituições de ensino. A demanda por formação superior, a grande quantidade de cursos ofertados e a necessidade cada vez maior de professores torna o Problema de Programação de Horários de Exames de cursos universitários cada vez mais complexo.

A Programação de Horários de Exames universitários é realizada semestralmente nas instituições e sua elaboração demanda o envolvimento de muitos funcionários, professores e coordenadores de curso que destinam uma significativa parte de seu tempo para elaborar um cronograma viável que satisfaça as inúmeras determinações e exigências que incidem sobre este objeto. Ainda assim, na maioria das vezes, o calendário obtido não consegue atender a todas as condições impostas, uma vez que é desenvolvido de forma manual sem o suporte de recursos tecnológicos.

Em vista dos fatores supracitados, este trabalho se justifica na possibilidade de desenvolver um método de solução para o cronograma de exames finais de cursos universitários, que otimize o seu processo de elaboração e atenda a todas às condições previamente estabelecidas para o cronograma, resultando, dessa forma, na diminuição considerável da demanda de profissionais empenhados nessa construção.

Os resultados obtidos, embora alcançados através de dados provenientes dos componentes curriculares ofertados ao curso de Matemática - Licenciatura da UNIPAMPA, poderão contribuir para a construção de calendários de exames dos demais cursos da instituição de ensino, assim como, com as devidas adaptações, a outras instituições, conforme seu interesse.

1.3 Metodologia da pesquisa

De acordo com Gil (2002) uma pesquisa pode ser definida como o procedimento racional e sistemático que objetiva proporcionar respostas aos problemas propostos. Na concepção de Lakatos e Marconi (2003) a pesquisa é um procedimento formal que demanda um tratamento científico e se fundamenta no propósito de conhecer a realidade ou descobrir verdades parciais. Uma pesquisa é realizada quando se deseja resolver um problema e não se dispõe das informações necessárias para solucioná-lo (SILVA; MENEZES, 2005). Nesse intuito, este estudo se motiva na possibilidade de contribuir para a realidade em questão através do desenvolvimento de uma ferramenta que auxilie nos processos burocráticos desenvolvidos pela universidade.

Para tanto, tem-se como lócus de pesquisa a Universidade Federal do Pampa, campus Bagé, mais precisamente o curso de Matemática-Licenciatura. A escolha desta realidade se deve à proximidade deste estudo com a instituição em questão, além da constatação da complexidade que envolve, semestralmente, o desenvolvimento da programação de horários pela instituição de ensino, realizada manualmente por professores, coordenadores de curso e coordenador acadêmico.

1.3.1 Classificação da pesquisa

O desenvolvimento de uma pesquisa ocorre a partir de um processo que envolve várias fases, mediante a aplicação cautelosa de métodos, técnicas e outros procedimentos científicos (GIL, 2009). Portanto, evidencia-se a importância do esclarecimento de todo o processo que envolve o desenvolvimento da pesquisa de forma a garantir a credibilidade dos resultados por ela apresentados.

A classificação de uma pesquisa, segundo Silveira e Córdova (2009), Silva e Menezes (2005) e Prodanov e Freitas (2013) pode ser realizada de acordo com a sua abordagem, sua natureza, seus objetivos e seus procedimentos. Em relação ao tipo de abordagem, uma pesquisa pode ser classificada como qualitativa ou quantitativa. De acordo com Fonseca (2002) a pesquisa quantitativa fundamenta-se na objetividade, seus resultados podem ser quantificáveis uma vez que recorre à linguagem matemática para delinear as causas de um fenômeno, as relações entre variáveis, entre outros. A pesquisa quantitativa tem sua origem no pensamento positivista lógico, visa destacar o raciocínio dedutivo, as regras da lógica e os atributos mensuráveis da experiência humana (SILVEIRA; CÓRDOVA, 2009). Logo, o presente estudo está centrado nos princípios da pesquisa quantitativa uma vez que busca, através de modelos matemáticos, desenvolver recursos que possibilitem o desenvolvimento de um cronograma de exames.

Uma pesquisa pode ser considerada de natureza básica ou aplicada. A pesquisa aplicada objetiva produzir conhecimentos para a aplicação prática, voltados à solução de problemas específicos relacionados a verdades e interesses locais (SILVEIRA; CÓRDOVA, 2009; SILVA; MENEZES, 2005). Estes aspectos que definem a pesquisa aplicada se assemelham às características intrínsecas à pesquisa em questão, tendo em vista o intuito deste estudo em fornecer recursos que contribuam e aprimorem o processo de programação de horários desenvolvido pela universidade, mais especificamente no que tange ao calendário de exames finais.

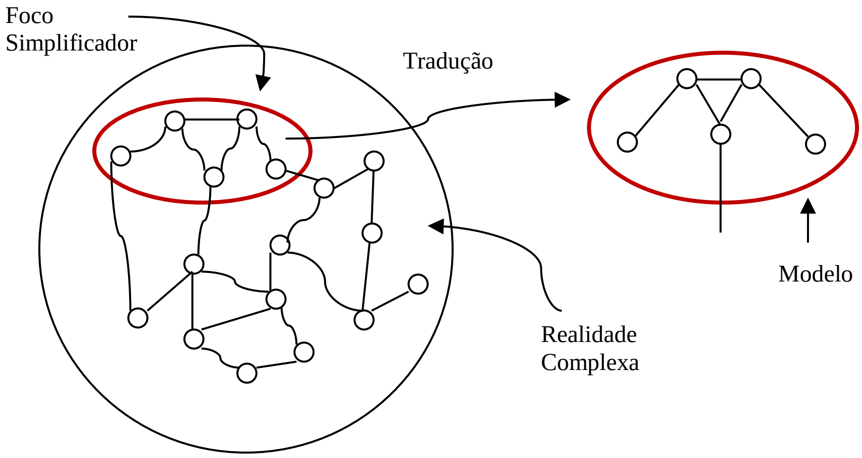
Quanto aos objetivos, é possível classificar uma pesquisa como exploratória, descritiva ou explicativa (GIL, 2009). Nesse sentido, esta pesquisa caracteriza-se como pesquisa exploratória que, na concepção de Gil (2009) tem como propósito assegurar maior familiaridade com o problema, de modo a torná-lo mais claro ou a formar hipóteses. Ainda segundo o autor, “seu planejamento é, portanto, bastante flexível, de modo que possibilite a consideração dos mais variados aspectos relativos ao fato estudado” (GIL, 2009, p. 41). Esses elementos estão presentes também nas intenções desta pesquisa que busca explorar possíveis soluções para o problema de exames baseada nas restrições ora determinadas.

Do ponto de vista dos procedimentos técnicos, esta pesquisa está delineada como modelagem, ao passo que objetiva desenvolver um modelo determinado a partir de um problema real, cuja solução seja possível de ser aplicada na realidade em questão, de modo a contribuir para a organização e distribuição dos horários de exames. Goldbarg e Luna (2000) conceituam um modelo como sendo uma visualização estruturada da realidade, que pode ser visto ainda como uma representação simplificada da mesma, mantendo uma equivalência adequada.

Modelar significa abstrair da situação real um conjunto de variáveis dominantes que conduzem o comportamento do sistema real. Esse modelo deve ainda expressar de maneira tratável as funções matemáticas que representam o funcionamento do mundo real considerado (TAHA, 2008). A Figura 1 descreve esse processo de tradução de uma situação real para a linguagem matemática, evidenciando o aspecto simplificador e estruturador necessário para a elaboração do modelo matemático.

Dessa forma, utilizar um modelo facilita a compreensão do ambiente estudado no que diz respeito à identificação do problema, formulação de estratégias e ao favorecimento do processo de tomada de decisão (MORABITO NETO; PUREZA, 2012).

Figura 1 - Processo de tradução contextual



Fonte: Adaptado de Goldbarg e Luna, 2000.

A seguir é apresentada a organização estrutural do trabalho especificando os assuntos tratados ao longo do texto.

1.4 Estrutura do trabalho

Além da introdução, este trabalho é estruturado a partir de outros cinco capítulos descritos a seguir, assim como das referências.

O Capítulo 2 é destinado à Teoria dos Grafos. Assim, inicialmente é apresentado um breve histórico destacando os marcos principais que influenciaram no desenvolvimento dessa teoria, seguido do Problema de Coloração de Grafos e Coloração de Vértices, que representam a base para esta pesquisa, além das definições e conceitos básicos a este respeito.

No Capítulo 3 é apresentado o Problema de Programação de Horários, especialmente o Problema de Programação de Horários de Exames, foco deste estudo, apresentando a formulação básica do problema e os principais estudos presentes na literatura em relação à programação de exames e os métodos de solução empregados.

O Capítulo 4 traz a Modelagem do Problema a partir da descrição de todas as etapas desenvolvidas para que os dados pudessem ser tratados como um grafo. Para tanto, são especificados a descrição, as restrições, os dados do problema e a construção da matriz de adjacência através do algoritmo desenvolvido em linguagem Fortran 90.

No Capítulo 5 é apresentado o método de solução e a discussão dos resultados com base nos cronogramas de exames obtidos de acordo com as diferentes colorações do grafo G realizadas por meio do algoritmo de Welsh-Powell e as adaptações.

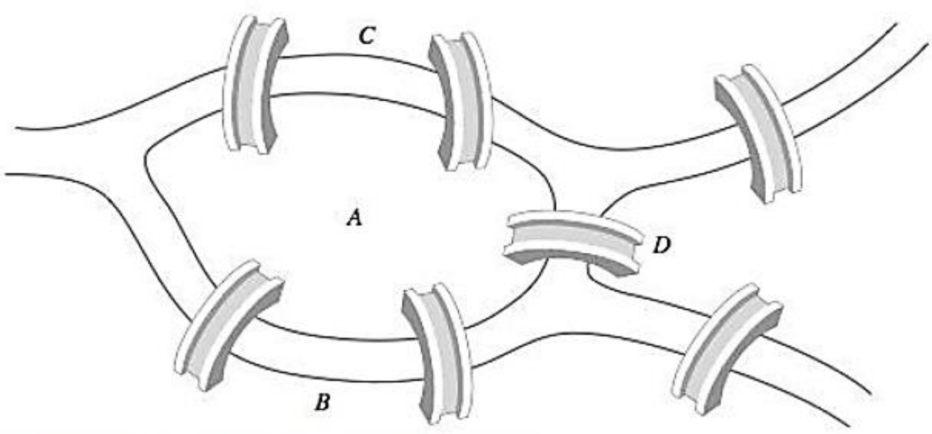
Por fim, as considerações finais são explicitadas no Capítulo 6, onde são apontadas as conclusões obtidas através dos procedimentos e métodos empregados nesta pesquisa, bem como as intenções de trabalhos futuros para o prosseguimento deste estudo.

2 TEORIA DOS GRAFOS

2.1 Breve histórico

O primeiro registro do que hoje é denominada Teoria dos Grafos ocorreu em 1736, através de um importante matemático Suíço chamado Leonard Euler. Ao visitar a cidade Könisberg na então Prússia Oriental, atualmente conhecida como Kaliningrad, na Rússia, Euler tomou conhecimento de um problema que desafiava os moradores da região. A cidade Könisberg era cortada pelo rio Pregel, e neste local haviam duas ilhas, ligadas entre si por uma ponte. Além desta, também haviam outras seis pontes que ligavam as ilhas às demais margens do rio. O problema consistia em encontrar um caminho para um passeio que partisse de qualquer uma das margens do rio atravessando uma única vez cada uma das sete pontes e retornasse ao local de partida visitando todas as regiões (Figura 2) (ROSEN, 2009).

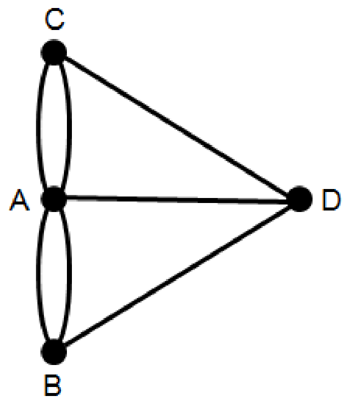
Figura 2 – As sete pontes de Könisberg



Fonte: Rosen, 2009.

Para solucionar o problema, então conhecido como o problema das sete pontes de Könisberg, Euler o representou através de um modelo matemático, tomando as áreas de terra por pontos e as sete pontes por linhas (Figura 3). Esta, possivelmente, foi a primeira representação de um grafo já registrada.

Figura 3 – Grafo das sete pontes de Könisberg



Fonte: Rosen, 2009.

Estudando o modelo construído, Euler concluiu que nas condições especificadas o passeio seria impossível. Para tanto, Euler percebeu que em cada vértice (área de terra) incidiam três arestas (pontes). Dessa forma, ao percorrer cada vértice havia uma aresta de entrada e outra de saída, além de uma terceira que permitia apenas uma entrada, impossibilitando assim a conclusão do percurso sem passar mais de uma vez pela mesma aresta. Euler provou então, que o passeio somente seria possível nos termos enunciados se cada margem do rio fosse ligada a outra por um número par de arestas, ou seja, por um número par de pontes.

Apesar do êxito na solução do problema, Euler não atribuiu muita importância à sua descoberta, visto que sua resolução permaneceu esquecida por mais de 100 anos. Somente um século mais tarde os grafos foram utilizados novamente, primeiro em 1847, pelo físico Alemão Gustav Robert Kirchhoff, onde modelos de grafos foram utilizados para representação de circuitos elétricos e depois, em 1857, pelo matemático inglês Arthur Cayley para a representação de isômeros de hidrocarbonetos alifáticos, que são compostos de carbono e hidrogênio com cadeias abertas (BOAVENTURA NETTO, 2006).

Com o passar dos anos inúmeros problemas passaram a ser solucionados por meio de grafos. Em 1859 o matemático irlandês William Rowan Hamilton inventou um jogo que desafiava seus competidores a percorrer cada um dos 20 vértices de um dodecaedro regular uma única vez, concluindo o percurso no mesmo vértice que iniciou. Antes disso, ainda em 1852, um estudante inglês de matemática abordou matematicamente uma hipótese de cartógrafos, que afirmava que para colorir um mapa eram necessárias no máximo quatro cores. Francis Guthrie representou as regiões do mapa por pontos e atribuiu uma linha entre dois pontos que simbolizavam regiões limítrofes. Esta representação dada pelo matemático é hoje conhecida como grafo e o problema em questão é denominado Problema de Coloração de Grafos. Embora aparentar simplicidade, a prova para este problema é bastante complexa, de modo que sua demonstração somente foi realizada em 1976 por Appel e Haken, com o suporte de computadores. Apesar de necessitar de mais de um século para ser solucionado, as tentativas possibilitaram o avanço nas pesquisas relacionadas à Teoria dos Grafos.

Os problemas citados contribuíram significativamente para o desenvolvimento da Teoria dos Grafos. Entretanto, foi no século XX com a implementação dos computadores e impulsionada pelas aplicações a problemas de otimização organizacional, conjunto de técnicas que constitui o que hoje se denomina Pesquisa Operacional, intensificaram a utilização de grafos para a busca de melhores soluções para seus problemas de projetos, organização e distribuição (BOAVENTURA NETTO, 2006).

Atualmente são vastas as aplicações de Teoria dos Grafos nas mais diversas áreas. Suas aplicações estão presentes no planejamento de rotas, distribuições de serviços, processamentos eletrônicos, planejamento de horários, projetos de códigos, circuitos elétricos, engenharia molecular, projetos de novos compostos químicos, relações hierárquicas e de amizade, entre tantos outros que utilizam as técnicas da Teoria dos Grafos para aprimorar seus serviços.

2.2 Problema de Coloração de Grafos

O Problema de Coloração surgiu em 1852 por meio de Francis Guthrie. O estudante de matemática tentava colorir os vários distritos de um mapa de modo que as regiões vizinhas não fossem coloridas com a mesma cor. Após inúmeras tentativas, ao refletir sobre o problema, Guthrie conjecturou que qualquer mapa pode ser colorido com no máximo quatro cores. Apenas 124 anos mais tarde, em 1976, o problema, conhecido como Problema das Quatro Cores, foi demonstrado por dois matemáticos, Kenneth Appel e Wolfgang Haken, com mais de mil horas de processamento do computador mais potente da época (ROSEN, 2009).

A Coloração de Grafos consiste em atribuir rótulos, chamados de cores, a um elemento de um grafo, que podem ser vértices ou arestas. Esse processo é realizado mediante a observação de algumas restrições e denominado como Coloração de Vértices ou Coloração de Arestas. Na Coloração de Vértices, dois vértices adjacentes não devem ser coloridos com a mesma cor, da mesma forma que, na Coloração de Arestas, uma mesma cor não pode ser atribuída a arestas adjacentes.

Nesse sentido, o presente estudo se concentra no Problema de Coloração no âmbito da Coloração de Vértices. Por essa razão, a Coloração de Vértices receberá uma atenção maior do que a Coloração de Aresta.

2.2.1 Coloração de Vértices

O Problema de Coloração de Vértices de um grafo consiste em atribuir cores aos vértices com a restrição de que uma mesma cor não pode ser atribuída a vértices adjacentes. Entretanto, atribuir cores aos vértices pode ser considerado uma tarefa simples. O problema está em colorir os vértices de um grafo utilizando o menor número possível de cores.

Com base nessa técnica tem-se que, dado um grafo G não direcionado, formado por um conjunto de n vértices $V = v_1, \dots, v_n$ e um conjunto E de arestas ligando vários pares distintos de vértices, o Problema de Coloração de Grafos consiste em atribuir cores a cada vértice pertencente a V de modo que a mesma cor não possa ser atribuída a nenhum par de vértices com arestas em comum e o número de cores utilizadas para a coloração deve ser o mínimo.

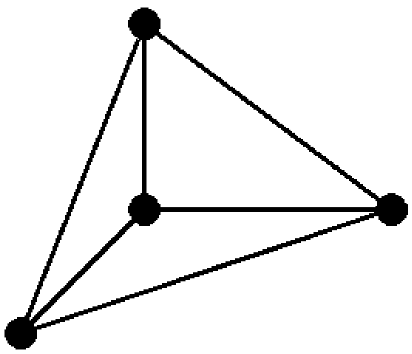
O Problema de Coloração, quando abordado no contexto da programação de exames, passa a ser compreendido de modo que os vértices representam os componentes curriculares ofertados pela instituição de ensino; as arestas que ligam cada par de vértices indicam os componentes curriculares que possuem alunos matriculados em comum; as cores representam os períodos para os quais os exames serão alocados e o número de cores utilizadas para colorir o grafo determina em quantos períodos o cronograma será distribuído.

2.3 Definições e conceitos básicos

Nesta seção são apresentados algumas definições e conceitos básicos sobre a Teoria dos Grafos necessários para a compreensão do que será abordado no decorrer deste trabalho.

O termo grafo, do ponto de vista informal, consiste em um diagrama usado para exibir o relacionamento entre duas grandezas. A terminologia grafo não está totalmente padronizada na literatura, de modo que a definição de grafo abordada neste estudo está relacionada a grafos não orientados. Assim, um grafo é um par $G = (V, E)$, onde V é um conjunto finito e E um conjunto de subconjuntos de dois elementos de V. Os elementos de $V = v_1, v_2, \dots, v_n$ são chamados vértices do grafo e os elementos de $E = e_1, e_2, \dots, e_m$ são chamados de arestas do grafo (Figura 4).

Figura 4 – Grafo simples

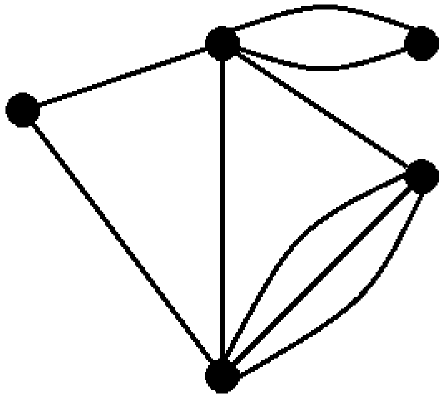


Fonte: Autora, 2018.

A Figura 4 representa um *grafo simples* onde os pontos representam os vértices e as linhas que ligam cada par de vértices representam as arestas. Um grafo simples é um grafo no qual cada aresta conecta dois vértices diferentes e duas arestas nunca conectam o mesmo par de vértices. Dois vértices são *adjacentes* quando existe uma aresta ligando-os. Nesse caso, essa aresta é considerada *incidente* aos vértices. O grau de um vértice v, denotado por $d_G(v)$ ou $gr(v)$, é igual ao número de arestas que incidem sobre v.

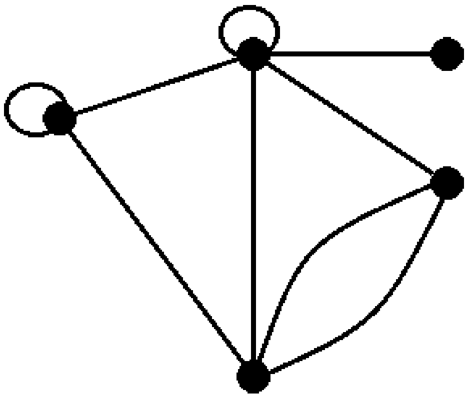
São chamados de *multigrafos* (Figura 5) os grafos que podem conter arestas múltiplas conectando o mesmo par de vértices. Já os grafos que incluem laços, arestas que conectam um vértice a si mesmo, e possivelmente arestas múltiplas que conectam o mesmo vértice, são chamados de *pseudografos* (Figura 6).

Figura 5 - Multigrafo



Fonte: Autora, 2018.

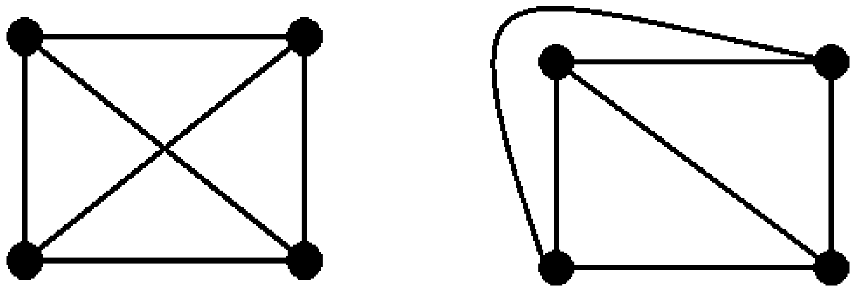
Figura 6 – Pseudografo



Fonte: Autora, 2018.

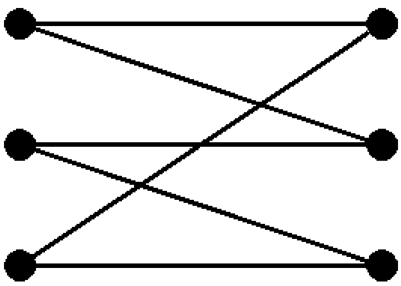
O grafo que puder ser desenhado no plano sem que quaisquer arestas se cruzem é denominado *grafo planar (*Figura 7). Um grafo não orientado é dito *conexo* se existir um caminho entre qualquer par de vértices distintos do grafo. É denominado *bipartido* (Figura 8) um grafo simples cujo conjunto V de vértices pode ser dividido em dois conjuntos disjuntos V_1 e V_2 tal que cada aresta do grafo conecta um vértice em V_1 e um vértice em V_2 (de modo que nenhuma aresta em G conecta dois vértices, seja em V_1, seja em V_2). Quando essa condição é válida, chamamos o par (V_1, V_2) de bipartição do conjunto de vértices V de G.

Figura 7 – Grafo planar



Fonte: Autora, 2018.

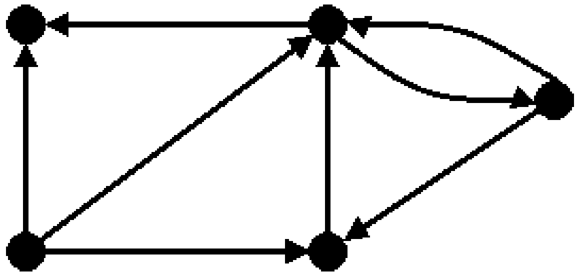
Figura 8 – Grafo bipartido



Fonte: Autora, 2018.

Um *grafo orientado* ou *dígrafo* (V, E) consiste em um conjunto não vazio de vértices V e um conjunto de arestas orientadas ou arcos, E. Cada aresta orientada está associada a um par ordenado de vértices. Pode-se dizer que arestas orientadas associadas ao par ordenado (u, v) começa em u e termina em v, como apresentado na Figura 9.

Figura 9 – Grafo orientado



Fonte: Autora, 2018.

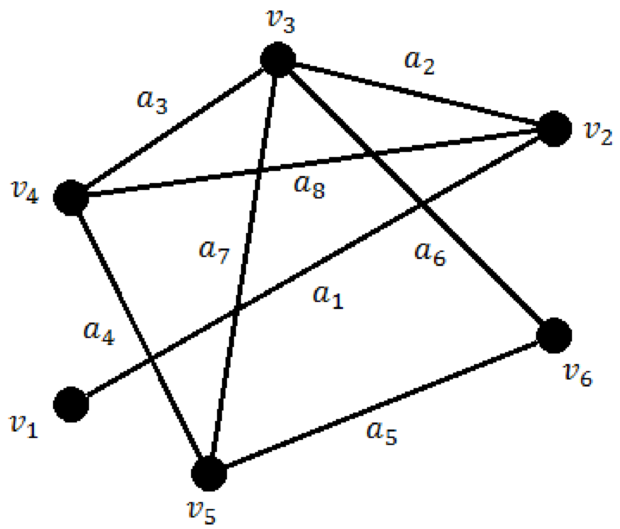
Uma extensão bastante conhecida da Teoria dos Grafos é a *Coloração de Mapas* ou *Coloração de Grafos*, de onde nasceu o conhecido Teorema das Quatro

Cores. Esta proposição surgiu há mais de 160 anos e trouxe, a partir das tentativas de solução, inúmeros avanços na área. A coloração de um grafo simples é a associação de uma cor a cada vértice do grafo de modo que dois vértices adjacentes não estejam associados a uma mesma cor. No entanto, na maioria das vezes, o objetivo não se resume simplesmente em colorir o grafo, mas sim em colori-lo com o menor número de cores possível. Logo, o *número cromático* de um grafo, indicado por $\chi(G)$, é o menor número de cores necessárias para a coloração deste grafo. A busca pela solução desse problema trouxe inúmeras contribuições para a Teoria dos Grafos, mas somente 124 anos depois Appel e Haken conseguiram provar o *Teorema das Quatro Cores*, um dos mais conhecidos teoremas da matemática, que afirma que o número cromático de um grafo planar não é maior do que quatro (ROSEN, 2009).

Em relação às formas de representação de um grafo, um dos métodos mais usuais e ilustrativos é a partir da representação gráfica. No entanto, esta não é a única maneira de expressar as relações contidas em um grafo. A representação esquemática não é a forma mais adequada para fornecer a um computador informações sobre a estrutura de um grafo, estes dados necessitam de uma representação numérica com a qual o computador possa trabalhar. Em decorrência da variedade, em termos de dimensão e de complexidade, dos problemas de grafos, são definidas inúmeras formas de representação (estruturas de armazenamento) que procuram, ora atender a necessidades algébricas ou combinatórias, ora a questões de busca ou armazenamento de caráter essencialmente algorítmico (BOAVENTURA NETTO, 2006).

O grafo da Figura 10 será utilizado para exemplificar três formas de representação.

Figura 10 – Representação gráfica



Fonte: Autora, 2018.

Um grafo pode ser representado através de uma *lista de adjacência*, onde são listados, para cada vértice, os vértices que lhe são adjacentes (Figura 11).

Figura 11 – Lista de adjacência

v_1	v_2
v_2	v_1, v_3, v_4
v_3	v_2, v_4, v_5, v_6
v_4	v_2, v_3, v_5
v_5	v_3, v_4, v_6
v_6	v_3, v_5

Fonte: Autora, 2018.

A *matriz de adjacência* também é uma forma de representação de um grafo. Para tanto, dado um grafo simples, não orientado, $G = (V, E)$ em que $|V| = n$, de modo que os vértices de G sejam listados arbitrariamente como $v_1, v_2, \ldots, v_n$. A *matriz de adjacência* A (ou A_G) de G (Figura 12) com relação a essa listagem dos vértices, é a matriz zero-um $n \times n$, com 1 como seu elemento (i, j) quando v_i e v_j forem adjacentes e 0 como seu elemento (i, j) quando eles não forem adjacentes. Em outras palavras, se a matriz de adjacência é $A = [a_{ij}]$, então

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } \{v_i, v_j\} \text{ for uma aresta de G}, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Figura 12 – Exemplo de uma matriz de adjacência

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Fonte: Autora, 2018.

Outra maneira de representar um grafo é através de uma *matriz de incidência*. Segundo a qual, dado um grafo não orientado $G = (V, E)$, de modo que $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sejam vértices e $e_1, e_2, \ldots, e_m$ sejam as arestas de G. Então a *matriz de incidência* (Figura 13) com relação a esta ordem de V e E, é a matriz $n \times m$, $M = [m_{ij}]$, em que

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{quando a aresta } e_j \text{ for incidente a } v_i \text{ ,} \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Figura 13 – Exemplo de uma matriz de incidência

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
v_1	1	0	0	0	0	0	0	0
v_2	1	1	0	0	0	0	0	1
v_3	0	1	1	0	0	1	1	0
v_4	0	0	1	1	0	0	0	1
v_5	0	0	0	1	1	0	1	0
v_6	0	0	0	0	1	1	0	0

Fonte: Autora, 2018.

O próximo capítulo apresenta o Problema de Programação de Horários e suas diferentes classificações, com ênfase ao Problema de Programação de Horários de Exames, foco central deste estudo, explicitando sua formulação básica. Expõe também, alguns dos principais estudos presentes na literatura em relação às formas de abordagem e solução do Problema de Programação de Exames.

3 PROBLEMA DE PROGRAMAÇÃO DE HORÁRIOS

O Problema de Programação de Horários (*Timetabling Problem)* representa um problema bastante conhecido na área de Pesquisa Operacional e, quando relacionado ao meio educacional, o Problema de Horários exerce uma grande influência sobre os mais diversos segmentos das instituições de ensino, atuando diretamente sobre a rotina diária de alunos, professores e gestores. Para Cooper e Kingston (1995) o Problema de Programação de Horários Educacionais pode ser modelado como um problema de Otimização Combinatória de complexidade NP-Completo.

A Otimização Combinatória representa um ramo da matemática e da ciência da computação que estuda problemas de otimização em conjuntos. Um problema de Otimização Combinatória, em geral, consiste na tarefa de encontrar, a partir de um conjunto de itens e uma série de regras, alguns elementos desse conjunto, tipicamente finito, formando subconjuntos. A possível solução para o problema é a reunião destes itens específicos, na forma de um subconjunto. Este, geralmente, possui algum custo associado. Portanto, o objetivo principal da Otimização Combinatória é encontrar um subconjunto com custo mínimo, isto é, que descreva a solução ótima do problema (SPINDLER, 2010).

Comumente, a Programação de Horários Educacionais representa uma tarefa árdua na maioria das instituições de ensino. O processo de elaboração do cronograma envolve muitas variáveis, bem como possui diversas especificidades que precisam ser consideradas, culminando em um longo período destinado à sua construção. Na perspectiva educacional, a Programação de Horários visa agendar uma sucessão de encontros entre alunos, professores e instituições de ensino como, por exemplo, aulas, exames, cursos, entre outras atividades próprias a este contexto, satisfazendo a um conjunto de restrições (WERRA, 1985; SCHAERF, 1999).

São inúmeras as formas de classificação na literatura para o Problema de Programação de Horários Educacionais. No entanto, a mais utilizada pela maioria dos autores é a proposta por Schaerf (1999), que consiste em subdividir o problema em três classes: Problema de Programação de Horários em Escolas; Problema de Programação de Horários de Cursos e Problema de Programação de Horários de

Exames. As definições das três classificações, de acordo com Schaerf (1999), são apresentadas a seguir:

- O Problema de Programação de Horários em Escolas estabelece o calendário para as turmas de uma escola de modo que cada professor esteja responsável por uma turma por período. Assim como, cada aluno esteja matriculado em uma turma por período.
- O Problema de Programação de Horários de Cursos consiste em elaborar um cronograma de distribuição dos componentes curriculares para um conjunto de cursos, de modo a minimizar a sobreposição de componentes curriculares com alunos matriculados em comum.
- O Problema de Programação de Horários de Exames compreende o desenvolvimento de um calendário de exames de cursos universitários com o intuito de minimizar a sobreposição de exames com alunos matriculados em comum.

Dentre as classificações apresentadas, esta pesquisa está centrada no Problema de Programação de Horários de Exames (*Examination Timetabling Problem*).

3.1 Problema de Programação de Horários de Exames

Este problema é típico de universidades e pode ser considerado um problema combinatório difícil. É composto por um conjunto de estudantes que precisam realizar exames que devem ser agendados em um conjunto de períodos. Cada exame corresponde a um componente curricular no qual os estudantes estão matriculados e geralmente são aplicados no final do semestre letivo. O objetivo primordial do problema é alocar os exames aos horários, de modo que nenhum estudante tenha mais de um exame destinado para o mesmo período. A Programação de Exames é realizada, normalmente, duas vezes ao ano pelas universidades e outras instituições de ensino que oferecem cursos ou componentes curriculares semestrais aos estudantes. Esse trabalho apresenta um nível de dificuldade crescente, tendo em vista o aumento da demanda por formação acadêmica e profissional que resulta na ampliação do número de instituições de ensino e, consequentemente, de cursos de formação. Assim, as especificidades de cada instituição de ensino e as preferências individuais dos envolvidos são exigências que contribuem para o aumento da complexidade da elaboração do cronograma de exames.

O Problema de Programação de Exames, na concepção de Scheinerman (2009), Rosen (2009) e Santos e Souza (2007), é considerado essencialmente como um problema de Coloração de Grafos, haja vista que o primeiro busca a elaboração de um cronograma de exames livre de conflitos com um número mínimo de períodos, enquanto que o segundo visa à coloração de um grafo com o menor número de cores. Apoiando-se nisso, a abordagem dada ao problema nesta pesquisa é fundamentada na Coloração de Grafos, que foi discutida com maior ênfase no capítulo 2.

3.1.1 Formulação básica do problema

A versão básica do *Examination Timetabling Problem* consiste em atribuir exames a intervalos de tempo, evitando a sobreposição de exames com alunos matriculados em comum. A formulação básica para o problema é apresentada a seguir, conforme Gaspero e Schaerf (2001).

Dado um conjunto n de exames (componentes curriculares) $E = \{e_1, \ldots, e_n\}$, um conjunto de q estudantes $S = \{s_1, \ldots, s_q\}$, e um conjunto de períodos de tempo P (ou períodos) $P = \{1, \ldots, p\}$, existe uma matriz de inscrição binária $C_{n \times q}$, que informa quais os componentes curriculares em que o estudante está matriculado, isto é, $c_{ij} = 1$ se, e somente se, o estudante s_j estiver matriculado no componente curricular e_i.

A atribuição é representada por uma matriz binária $Y_{n \times p}$ tal que $y_{ik} = 1$ se, e somente se, o exame e_i for atribuído ao período k. A formulação matemática correspondente é a seguinte.

$$encontrar \quad y_{ik} \quad (i = 1..n; \; k = 1..p)$$

$$sujeito\ a \quad \sum_{k=1}^{p} y_{ik} = 1 \; (i = 1..q) \tag{1}$$

$$\sum_{h=1}^{q} y_{ik} y_{jk} c_{ih} c_{jh} \leq 1 \qquad (k = 1..p; \quad i, j = 1..n; \quad i \neq j) \tag{2}$$

$$y_{ik} = 0 \text{ ou } 1 \qquad (i = 1..n; \quad k = 1..p) \tag{3}$$

A restrição (1) indica que um exame deve ser alocado exatamente em um único intervalo de tempo. A restrição (2) indica que nenhum estudante fará dois exames agendados no mesmo período, e a restrição (3) garante que as variáveis são binárias.

A versão apresentada do Problema de Programação de Exames é derivada do Problema de Coloração de Grafos, considerado um problema NP-completo, que vem sendo utilizado na literatura como forma de modelar diferentes aplicações práticas.

3.1.2 Principais estudos da literatura

A Programação de Horários de Exames em cursos universitários não é um problema novo. Importantes autores e pesquisadores da área desenvolveram diversas técnicas de solução baseadas, principalmente, em métodos exatos, heurísticos e meta-heurísticos. A seguir são apresentados alguns estudos presentes na literatura que expõem diferentes métodos de solução para o Problema de Programação de Horários de Exames.

Entre as inúmeras técnicas de solução para o *Examination Timetabling*, Woumans et al (2016) utilizaram uma abordagem de geração de colunas a partir de uma perspectiva mais centrada no aluno e buscando diminuir a realização de várias versões do mesmo exame. A solução do problema foi apresentada através de dois modelos de algoritmos que utilizam a abordagem de Geração de Colunas (CG). O primeiro algoritmo é baseado em um esquema de Geração de Colunas padrão, que define uma coluna como sendo um horário de exame completo para cada grupo de alunos. O segundo algoritmo define uma coluna como um cronograma que contém intervalos de tempo de exames ou *slots* de máscaras sem especificar os exames propriamente ditos. Para este modelo foi necessária uma etapa de pós-processamento, utilizando uma abordagem heurística e uma abordagem de Programação Inteira binária para construir os horários finais. De acordo com Woumans et al (2016), os dois modelos apresentados conseguem estabelecer uma relação entre os custos de divulgação e de exame, gerando prazos de boa qualidade, principalmente para problemas de menor tamanho. No entanto, para problemas de maiores dimensões, os modelos apresentados não se mostraram adequados, principalmente quando se prioriza soluções sem exames adicionais.

Para solucionar o problema de tabela-horário de Toronto, Machado e Boeres (2009) propuseram sua modelagem como um Problema de Coloração de Grafos e resolveram-no por um algoritmo baseado na heurística de Busca Tabu para Coloração de Grafos adaptado com modificações para usar vizinhança em cadeia ao invés da vizinhança básica. Como resultado, os autores concluíram que o algoritmo proposto apresentou bons resultados no que se refere a conjuntos de instâncias de pequeno e médio porte. No entanto, em relação a grafos maiores e mais densos os resultados obtidos foram apenas próximos das melhores soluções conhecidas, mas ainda assim, apresentaram um bom comportamento.

A heurística de Busca Tabu também foi utilizada por Gaspero e Schaerf (2001) que apresentaram uma família de algoritmos para a solução do Problema de Programação de Exames, importando vários recursos da Coloração de Grafos. Para este problema de agendamentos de exames para cursos universitários objetivou-se evitar a sobreposição de exames que têm alunos em comum e satisfazer a capacidade das salas. Os algoritmos foram testados em *benchmarks* públicos e instâncias aleatórias, e comparados com resultados anteriores na literatura. Segundo os autores, os resultados não foram satisfatórios em todos os casos, no entanto, os resultados preliminares mostraram-se bastante encorajadores para futuras melhorias.

A Coloração de Grafos aliada a heurística de Busca Tabu foi empregada por Burke et al (2007). Em seu artigo, os autores apresentaram uma abordagem genérica hiper-heurística sobre um conjunto de heurísticas construtivas de Coloração de Grafos. Dentro da estrutura hiper-heurística foi empregada uma abordagem de Busca Tabu para procurar permutações de heurísticas de grafos que são usadas para construir horários de exames e problema de horário. Essas técnicas foram testadas em problemas de exames e horários de referência e comparadas com abordagens atuais personalizadas. Para Burke et al (2007) os resultados obtidos estão dentre os melhores resultados apresentados na literatura.

Mujuni e Mushi (2015) propuseram uma extensão para um trabalho de Selemani, Mujuni e Mushi (2013) que se baseia numa heurística híbrida composta por duas fases que combinam Coloração de Grafos e Recozimento Simulado (*Simulated annealing*) na *Sokoine University of Agriculture (SUA)* na Tânzania. Os autores acrescentaram ao problema uma nova restrição que considera as lacunas entre os exames com o objetivo de desenvolver e implementar um algoritmo que produza uma distribuição de exames livre de colisões, em que os exames de grande porte são agendados o mais cedo possível e que cada exame realizado por um mesmo aluno seja distribuído com um maior intervalo de tempo, dentro dos limites de planejamento estabelecidos. Segundo os autores, o algoritmo desenvolvido foi capaz de gerar cronogramas melhores, considerando as lacunas entre os exames e garantindo que todos os exames de grande porte sejam agendados primeiro.

O Recozimento Simulado também foi utilizado por, Duong e Lam (2004), só que, neste caso, o método de solução apresentado pelos autores combina Programação de Restrições e Recozimento Simulado, essa abordagem consiste em duas fases: uma fase de programação de restrições para fornecer uma solução inicial; e uma fase de Recozimento Simulado para melhorar a qualidade da solução. O Recozimento Simulado aplica a vizinhança da cadeia Kempe e inclui um mecanismo que permite ao usuário definir um determinado período de tempo em que o algoritmo deve ser executado. Para avaliação do método os autores aplicaram o algoritmo em dados reais da *University of Technology* na cidade de *Ho Chi Minh*. Duong e Lam (2004) concluíram que a combinação desses dois métodos apresentou resultados satisfatórios para o problema de agendamento de exames a partir de dados reais. Para os autores, é possível resolver um problema de agendamento muito difícil com o Recozimento Simulado, mas é necessário ter cuidado com a forma escolhida para implementar o conjunto de restrições que dependem do problema.

Já David (1998), utilizou a técnica de satisfação de restrições para gerar o calendário de exames para *École des Mines de Nantes*, com a condição de que o tempo de computação deveria ser inferior a um minuto. Através do método de satisfação de restrições o autor, ao invés de aplicar o método usual de busca exaustiva, implementou um algoritmo incompleto usando técnicas locais de reparo. O programa foi validado em problemas resolvidos manualmente e foi capaz de resolver com êxito os treze problemas reais testados. Dessa forma, o autor concluiu que as técnicas se adaptaram bem as particularidades do problema, sendo capazes de gerar todos os horários pretendidos.

Yang e Petrovic (2005) desenvolveram um sistema *Case Based Reasoning* (CBR) para selecionar uma hibridização apropriada para a inicialização da metaheurística *Great Deluge Algorithm* (GDA) com uma heurística de construção sequencial. Os autores propõem uma nova medida de similaridade entre dois problemas de tempo que é baseado em conjuntos difusos. Para Yang e Petrovic (2005), o resultado das experiências baseadas em problemas do mundo real na programação de exames mostra que as medidas de similaridade levam a uma boa seleção de heurística sequencial para a inicialização do GDA.

Com o intuito de superar o problema de proximidade de exames não preenchidos, Côté, Wong e Sabourin (2005) apresentam um Algoritmo Evolutivo Multi-Objetivo Híbrido (MOEA), considerando que o cronograma precisa oferecer ao aluno o máximo de tempo livre entre os exames. Nessa hibridização, foram utilizados os operadores locais de busca ao invés de operadores de recombinação. Um dos operadores de pesquisa foi projetado para reparar os horários inviáveis produzidos pelo procedimento de inicialização e o operador de mutação. O outro, implementou uma meta-heurística simplificada de desvantagem de vizinhança variável, seu papel foi de melhorar o custo de proximidade. Os autores utilizaram outros métodos de otimização para comparar os horários não dominados usando 15 conjuntos de dados de domínio público.

Um Algoritmo Genético Híbrido foi utilizado por Burke, Elliman e Weare (1995) com o objetivo de solucionar o Problema de Programação de Exames. Os autores combinaram uma representação direta do cromossomo com operadores heurísticos *crossover* para garantir que as restrições mais fundamentais nunca sejam violadas. Esses operadores de *crossover* híbridos foram utilizados para propagar o máximo de características desejáveis do cromossomo a fim de gerar boas soluções mesmo para problemas grandes e altamente restritos. Para Burke, Elliman e Weare (1995) os Algoritmos Evolutivos apresentaram grande capacidade de considerar e otimizar variedades de restrições que podem ser encontradas nas universidades. Os autores mostraram que operadores de cruzamentos híbridos, incorporados a técnicas de Coloração de Grafos podem produzir um cronograma de horários de boa qualidade, mesmo com problemas extremamente restritos.

Através do estudo bibliográfico realizado a respeito do Problema de Programação de Horários de Exames foi possível reconhecer as mais variadas formas de abordagem do problema e os métodos de solução empregados. Este estudo mostra que as técnicas utilizadas assim como as restrições impostas dependem necessariamente dos objetivos a serem alcançados e das especificidades de cada realidade, são esses fatores que determinam as estratégias mais eficientes para cada circunstância particular.

O próximo capitulo dispõe sobre a Modelagem do Problema, onde são explanadas as especificidades inerentes a esta abordagem, a análise e tratamento dos dados, o processo de construção da matriz de adjacência através do algoritmo em Fortran e a modelagem do problema como um grafo.

4 MODELAGEM DO PROBLEMA

4.1 Descrição do problema

A Teoria dos Grafos possibilita meios para modelar e solucionar diversos problemas reais. Uma das aplicações dessa teoria é na programação de horários e tarefas. À vista disso, esta pesquisa se fundamenta nesta perspectiva para buscar uma solução para o Problema de Programação de Horários de Exames.

O problema surgiu das observações realizadas na Universidade Federal do Pampa, campus Bagé, lócus desta pesquisa, no que se refere a constante necessidade de elaboração e planejamento de horários. A UNIPAMPA é uma instituição federal *multicampi*, localizada em dez municípios da metade sul do estado do Rio Grande do Sul. Atualmente, o campus Bagé conta com um total de 11 cursos de graduação com aproximadamente 1596 alunos matriculados, cinco programas de pós-graduação, quatro programas de mestrado e um curso de especialização, que somam aproximadamente 120 alunos e 160 docentes ao todo. Esses dados evidenciam a complexidade em elaborar um cronograma, seja em relação a horários de aulas ou horários de exames, que atenda a todas as especificidades que garantem a viabilidade do cronograma e ainda, na medida do possível, satisfaça as preferências dos professores, alunos e gestores envolvidos (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PAMPA, 2018).

A referida universidade ainda não instituiu em suas diretrizes a elaboração de exames finais e, consequentemente, um calendário de exames. Porém, os professores possuem autonomia para realizar esse tipo de avaliação, por eles denominada prova substitutiva, como forma de possibilitar mais uma alternativa para compor as avaliações semestrais dos alunos. Dessa forma, mesmo que extraoficialmente, grande parte dos docentes de graduação da universidade realizam exames ou algum outro instrumento avaliativo no final do semestre letivo.

Portanto, esta pesquisa almeja desenvolver um recurso que, de maneira rápida e eficiente, consiga elaborar um cronograma de exames finais que satisfaça todas as restrições inicialmente determinadas. Para este fim, foram utilizados dados reais referentes aos componentes curriculares ofertados aos alunos do curso de Matemática - Licenciatura no primeiro semestre do ano de 2017, que somam um total de 19 componentes curriculares e 221 alunos matriculados.

4.2 Restrições do problema

O presente estudo traz uma modelo de solução para o Problema de Programação de Horários de Exames diferente das demais identificadas na literatura. Grande parte das abordagens do problema busca um cronograma de exames num menor período de tempo, ou seja, tem como princípio minimizar o cronograma. Nesta abordagem, objetiva-se desenvolver um calendário de exames de acordo com prazos específicos já estabelecidos pela instituição de ensino.

Além disso, na elaboração dos cronogramas de horários de exames, geralmente, são considerados apenas os alunos que pretendem realizar exames finais, isto é, o calendário é desenvolvido no momento em que os discentes já estão a par de sua situação de dependência ou não de exames finais. Esse fato leva a uma diminuição de variáveis a serem consideradas na elaboração do calendário. No entanto, neste caso a solução será desenvolvida com o intuito de que o calendário de exames seja disponibilizado no início do semestre letivo. Portanto, todos os alunos matriculados nos componentes curriculares foram considerados para fins de elaboração do calendário, observando que todos estão propensos a realizar exames finais.

Nesse sentido, a fim de garantir a viabilidade do calendário de exames e satisfazer as condições impostas pelo contexto no qual o problema se insere, as seguintes restrições foram determinadas e devem ser satisfeitas:

I. Exames de componentes curriculares que possuem alunos matriculados em comum não podem ser agendados para o mesmo período;

II. O cronograma deve ser distribuído no tempo de uma semana, cinco dias, considerando que cada dia corresponde a dois períodos;

III. Devem ser alocados no máximo dois exames por período.

A restrição (I) representa a condição básica para garantir a viabilidade do cronograma desenvolvido, a não satisfação dessa implicará na inviabilidade do cronograma elaborado. Já a restrição (II) é fruto de uma condição imposta pelo contexto no qual o cronograma é desenvolvido, tendo em vista que grande parte das universidades dispõe de uma semana para a elaboração dos exames finais. Mas essa restrição não é regra, caso o objetivo seja o desenvolvimento do cronograma em um menor período de tempo essa condição pode ser desconsiderada. A restrição (III) busca uma melhor distribuição dos exames por período, de modo a propiciar um cronograma uniforme, evitando o acúmulo de exames num mesmo período. Esta condição é estabelecida a partir da restrição (II) que determina que o calendário deve ser distribuído em cinco dias, com dois períodos por dia, e também, do número de componentes curriculares considerados para a elaboração do cronograma.

Com a intenção de conceber um cronograma que além da viabilidade, observe também as necessidades dos alunos, novas restrições podem ser acrescentadas as anteriores, como:

IV. Priorizar o agendamento de exames referentes a componentes curriculares de mesma natureza para o mesmo período;

V. Componentes curriculares de natureza Matemática Pura e Aplicada, preferencialmente, podem ser alocados para o primeiro período de cada dia.

As restrições (IV) e (V) são condições que, em caso de não serem satisfeitas, não inviabilizam o cronograma. Estas têm a função de aprimorar o cronograma a fim de atender ao maior número de condições e preferências possíveis para todos os envolvidos no processo.

Nesse sentido, a restrição (IV) busca concentrar para um mesmo período, exames de mesma natureza e assim, distribuir os exames de maneira mais heterogênea com o intuito de evitar que os alunos realizem no mesmo dia, dois exames de igual natureza. A restrição (V) só é considerada após os componentes curriculares já terem sido alocados aos períodos correspondentes atendendo as restrições anteriores, essa condição determina somente a forma como a distribuição dos períodos, e respectivos exames, serão realizados no cronograma de acordo com o dia da semana e o período do dia (primeiro ou segundo). A intenção desta restrição é alocar os exames de natureza pura e aplicada para o primeiro período de cada dia visto que, geralmente, esses componentes curriculares concentram um número maior de alunos em exames finais. Objetiva também complementar a intenção da restrição (IV) uma vez que, alocar para o mesmo período exames de igual natureza e ainda concentrá-los no primeiro período de cada dia, evitará que muitos alunos realizem no mesmo dia, exames de igual natureza.

4.3 Dados do problema

Para este estudo foram considerados somente dados referentes ao curso de Matemática - Licenciatura a fim de diminuir o número de variáveis envolvidas para a construção do modelo de solução. Embora seja de interesse desta pesquisa que o modelo desenvolvido possa ser utilizado pelos demais cursos da instituição com as devidas adaptações.

À vista disso, foram analisados dados referentes ao primeiro semestre de 2017 com relação aos componentes curriculares ofertados aos discentes do curso de matemática, que correspondem a 221 discentes que somam um total de 641 matrículas em 19 componentes curriculares (Tabela 1).

Tabela 1 – Componentes curriculares e número de discentes matriculados

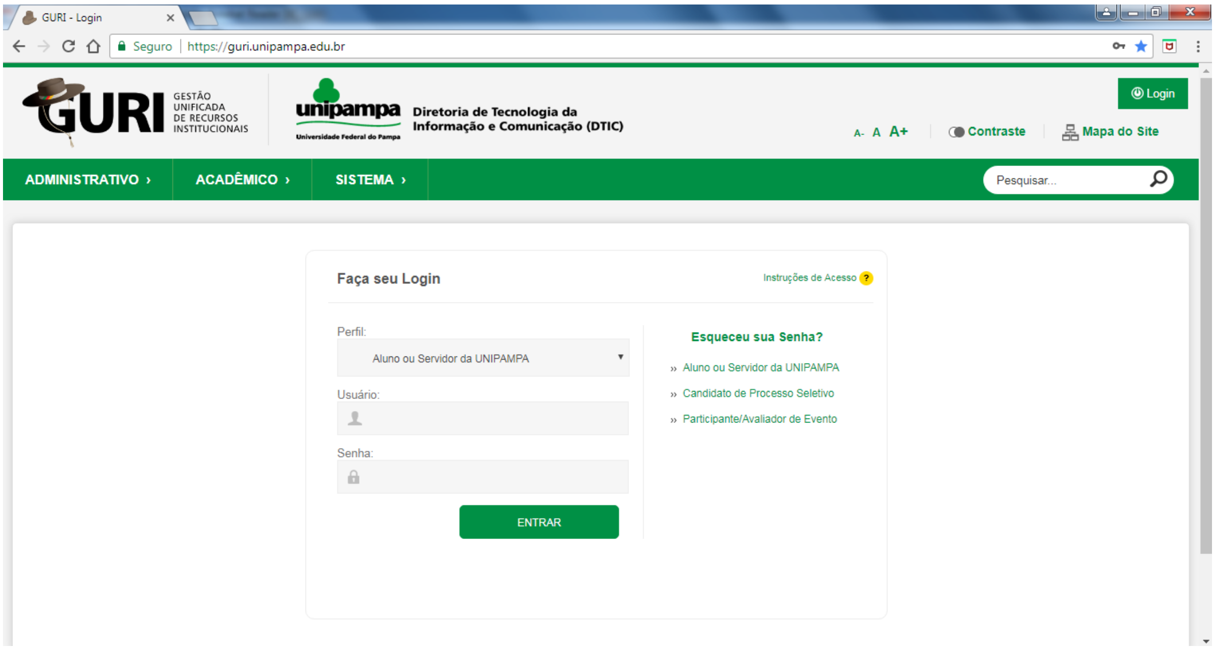
Enumeração	Componentes curriculares	Nº de alunos matriculados
1	Álgebra Linear I	35
2	Álgebra I	35
3	Analise I	12
4	Cálculo II	30
5	Cálculo III	31
6	Cálculo Numérico I	18
7	Equações Diferenciais Ordinárias	21
8	Estágio de Práticas Interdisciplinares	20
9	Fundamentos de Matemática Elementar	71
10	Geometria Plana	70
11	Introdução a Lógica Matemática	69
12	Laboratório para o Ensino Médio	19
13	Libras - Língua Brasileira de Sinais	29
14	Psicologia da Educação	7
15	Políticas Públicas Educacionais no Contexto Brasileiro	20
16	Softwares na Aprendizagem de Matemática	67
17	Teoria Elementar das Funções	69

18	Tendências em Educação Matemática	5
19	Física I	13

Fonte: Elaborada pela autora com base nos dados da Unipampa

A coleta de dados para o estudo foi realizada através do portal eletrônico da universidade por meio do sistema de relatórios disponibilizado no portal de Gestão Unificada de Recursos Institucionais (GURI) (Figura 14). A partir deste, foram gerados relatórios de matrícula individuais para cada componente curricular ofertado ao curso de Matemática – Licenciatura com os respectivos estudantes matriculados nas vagas disponibilizadas ao curso. Os documentos foram obtidos no formato .xls com informações referente a: período, atividade curricular, turma, matrícula, nome, curso e situação.

Figura 14 – Sistema GURI



Fonte: https://guri.unipampa.edu.br/, 2018.

A partir desse sistema foram obtidas 19 planilhas relativas aos 19 componentes curriculares analisados. Com base na disposição das informações se fez necessário realizar uma etapa de tratamento dos dados, extraindo das planilhas apenas as informações relevantes para este estudo. Por conseguinte, foram consideradas informações referentes aos alunos matriculados, identificados por meio do número de matrícula, e aos componentes curriculares nos quais cada estudante está matriculado, identificado através do código do componente curricular. Essas informações foram armazenadas em um arquivo .dat de maneira sequencial.

Uma vez que o presente estudo busca uma solução para o Problema de Programação de Exames através da Teoria dos Grafos, especificamente por meio da Coloração de Grafos, torna-se essencial a realização de uma etapa para modelar os dados do problema como um grafo, o que demanda a construção de uma matriz de adjacência.

4.4 Construção da matriz de adjacência

A matriz de adjacência, cuja definição foi apresentada na subseção 2.3, é uma matriz formada por zero-um. Nessa matriz são especificados os conflitos existentes entre os componentes curriculares, ou seja, se existe ou não discentes matriculados em comum.

A construção da matriz de adjacência por meio de planilhas eletrônicas representa um trabalho exaustivo visto que o processo é todo desenvolvido manualmente. Para a obtenção dessa matriz, muitas etapas precisam ser realizadas, demandando a construção de inúmeras outras planilhas indispensáveis para a análise e o cruzamento dos dados. Assim, para elaborar a matriz de adjacência é necessário o desenvolvimento de 25 planilhas responsáveis por realizar a leitura e análise dos dados.

O trabalho exaustivo e o tempo expressivo destinado à elaboração da matriz de adjacência através de planilhas eletrônicas não condizem com o objetivo desta pesquisa no que tange ao desenvolvimento de uma solução que facilite e otimize o processo de elaboração de um cronograma de exames. Além do mais, esse processo se tornaria impossível se mais dados fossem abarcados pelo estudo, o que é comum no contexto educacional. Portanto, alternativas precisam ser exploradas para que esse processo seja facilitado e produza resultados que atendam aos objetivos desta pesquisa.

Nesse intuito, objetivando desenvolver uma ferramenta que contribua no processo de obtenção da matriz de adjacência, necessária para a modelagem do problema como um grafo, sem que longos e exaustivos períodos de tempo sejam destinados a este fim, e ainda, que possibilite que problemas envolvendo um número maior de variáveis também possam ser solucionados, um algoritmo em

Fortran 90 foi desenvolvido para realizar a análise dos dados e fornecer a matriz de adjacência. Assim, o algoritmo apresentado de forma resumida na Figura 15 substitui o trabalhoso processo de construção da matriz de adjacência, anteriormente desenvolvida através de planilhas eletrônicas.

Figura 15 - Algoritmo para construção da matriz de adjacência

Algoritmo para construção da matriz de adjacência

1. Ler as informações fornecidas pelo sistema e alocar os dados conforme:

   $CC(k)$ - componentes curriculares;

   $D(k,i)$ - discente i matriculado no componente $CC(k)$.
2. Contar os conflitos existentes entre os componentes:

   Se $D(k,i) \ = \ D(k+1,i)$ então $Conflito(k,k+1)$ =1;

   Caso contrário, $Conflito(k,k+1) = 0$.
3. Construir a matriz de adjacência zero-um.

Fonte: Autora

4.4.1 Matriz de adjacência

Os dados extraídos do sistema da universidade, referentes aos componentes curriculares ofertados e os respectivos discentes matriculados, depois de tratados e submetidos a um algoritmo computacional desenvolvido em Fortran 90 geraram uma matriz de adjacência (Tabela 2). Esta matriz fornece informações referentes aos conflitos existentes entre cada componente curricular.

Tabela 2 – Matriz de adjacência

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**
1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0
2	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	1	0	1	0	1	1	1
3	1	1	0	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1
4	1	1	0	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	0	1
5	1	1	1	0	0	0	1	1	0	1	0	1	1	0	1	1	0	0	1
6	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0
7	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1
8	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	0	1	0	0	1	1
9	1	1	1	1	0	0	1	1	0	1	1	0	1	0	1	1	1	0	0

10	1	1	1	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	1	0	1	1	0	1
11	1	0	1	0	0	0	1	1	1	1	0	0	1	0	0	1	1	0	0
12	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1
13	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1
14	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	0	1
15	1	1	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	1	0	1	0	0	1
16	1	0	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	0	1	0	1	0	1
17	1	1	1	0	0	0	1	0	1	1	1	0	1	0	0	1	0	0	0
18	1	1	1	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1
19	0	1	1	1	1	0	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	0	1	0

Fonte: Autora, 2018.

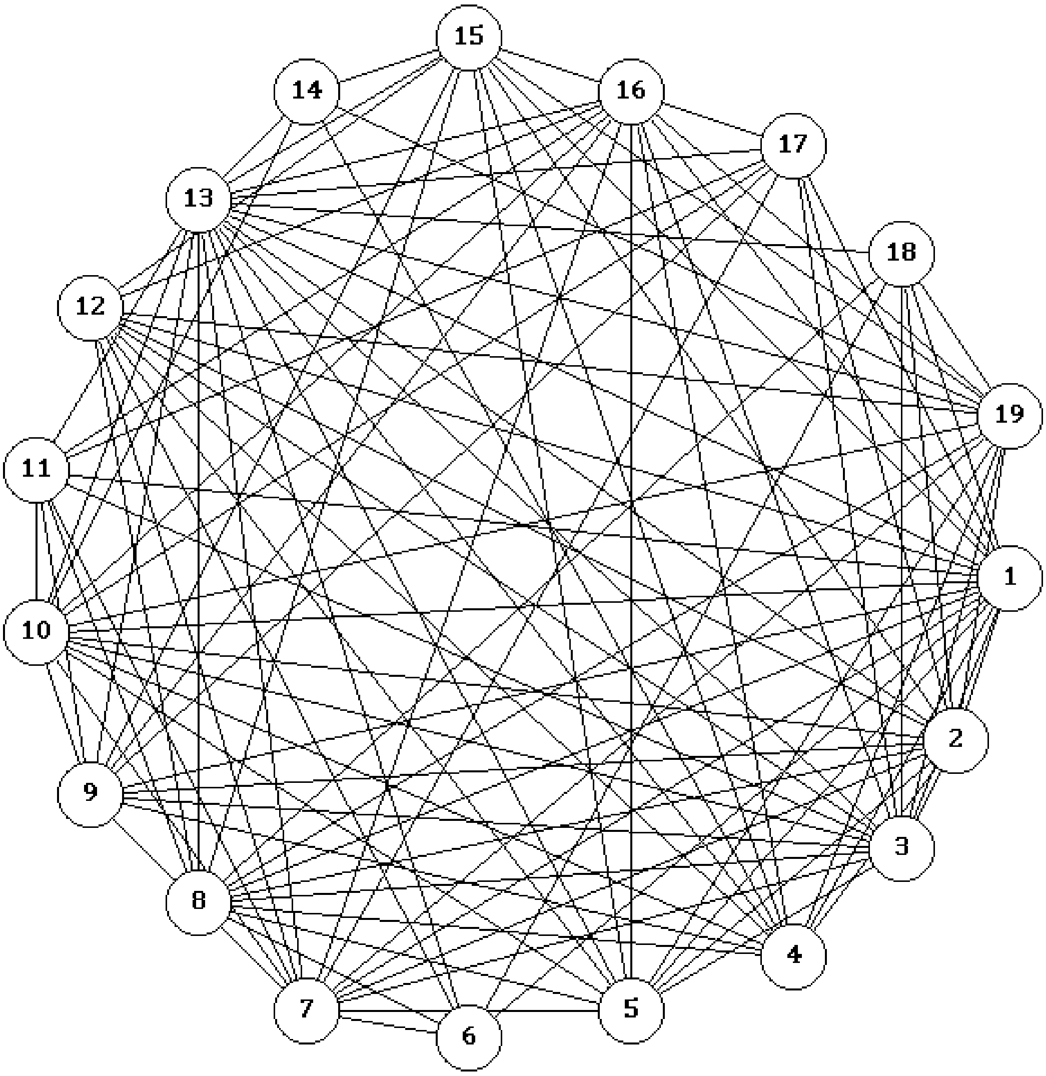
A matriz de adjacência, descrita na Tabela 2, é uma matriz resultante da análise dos conflitos de cada componente curricular, especificados numericamente na primeira linha e primeira coluna da matriz, em relação a todos os demais. Pode-se perceber que se trata de uma matriz simétrica formada por zero e um, onde 0 (zero) indica que não há conflitos entre dois componentes curriculares, e 1 (um) assinala que existe pelo menos um aluno matriculado em comum entre os componentes. É possível observar também, que a diagonal principal é formada por zeros em virtude de representar a não existência de conflitos de um componente curricular em relação a ele mesmo.

4.5 Modelagem do problema como um grafo

Uma fase crucial do processo de solução do problema apresentado neste estudo, decorrente, principalmente, das abordagens pretendidas para solucionar o problema, requerem que o mesmo seja modelado através da representação ilustrativa de um grafo.

Um grafo é um par $G = (V, E)$, onde V é um conjunto finito e E é um conjunto de dois subconjuntos de dois elementos de V. Neste caso, os elementos de V são os vértices, e os elementos de E são as arestas do grafo. Para representar os dados do problema com base nestas definições, os 19 componentes curriculares, representados numericamente de 1 a 19, são tomados como vértices do grafo, e os conflitos entre cada componente curricular, dados pela matriz de adjacência especificada na Tabela 2, representam as arestas de G. Com base nisso, os dados contemplados por este problema podem ser modelado a partir de um grafo, denominado grafo G, conforme Figura 16.

Figura 16 - Grafo G



Fonte: Autora, 2018.

No grafo expresso na Figura 16, cada aresta que liga pares distintos de vértices demostra a existência de pelo menos um aluno matriculado em comum entre os respectivos componentes curriculares.

A seguir é apresentado o método de solução e discussão, onde são apresentados os cronogramas de exames obtidos a partir das colorações do grafo G, alcançados através das diferentes abordagens do algoritmo de Welsh-Powell de acordo com as restrições determinadas para o cronograma.

5. MÉTODO DE SOLUÇÃO E DISCUSSÃO

A presente pesquisa teve como foco de estudo o Problema de Programação de Horário de Exames de cursos universitários. O objetivo principal desta proposta foi desenvolver um modelo de solução para o Problema de Programação de Exames que atenda a um conjunto de restrições pré-determinadas, possibilitando elaborar um cronograma de exames finais viável para a realidade em questão.

Nesse viés, como apresentado na subseção 3.2, são inúmeras as formas de abordagem presentes na literatura para solucionar o problema em questão. Contudo, este estudo busca uma solução através da Coloração de Grafos, técnica oriunda da Teoria dos Grafos, dado que o Problema de Programação de Exames pode ser considerado essencialmente como um problema de Coloração de Grafos (SCHEINERMAN, 2009; ROSEN, 2009; SANTOS E SOUZA, 2007). Cabe ressaltar que, a partir de então, o termo Coloração de Grafos é utilizado no sentido de Coloração de Vértices.

Na técnica de Coloração de Grafos, quando relacionada ao Problema de Programação de Exames, as cores atribuídas aos vértices representam os períodos e, portanto, os vértices coloridos com a mesma cor correspondem aos exames que serão alocados para o mesmo período, sem que nenhuma restrição seja violada. Neste estudo, a Coloração de Vértices será realizada através do algoritmo de Welsh-Powell, uma heurística que tem como objetivo principal minimizar o número de cores necessárias para coloração dos vértices analisando-os em ordem decrescente de grau (ARAÚJO NETO; GOMES, 2014).

Tendo em vista as restrições vinculadas ao cronograma de exames, algumas alterações foram necessárias no algoritmo de Welsh-Powell original, de modo a atender as especificidades do contexto em questão. Em decorrência disso, a seguir serão apresentadas diferentes soluções para o Problema de Programação de Exames com base em adaptações realizadas no algoritmo de Welsh-Powell em conformidade com as condições previamente estabelecidas para o cronograma.

5.1 Algoritmo de Welsh-Powell original

A coloração de um grafo com base no algoritmo de Welsh-Powell pode ser realizada de forma manual conforme o número de variáveis envolvidas. No caso do problema abordado neste trabalho, considerando que os dados se referem a um único curso, tem-se um grafo formado por 19 vértices. Dessa forma, embora represente um trabalho minucioso, tendo em vista o grande número de arestas incidentes aos vértices, é possível aplicar o algoritmo manualmente e obter uma coloração embasada nos passos e condições determinadas por Welsh-Powell.

Figura 17 - Algoritmo de Welsh-Powell

Algoritmo de Welsh-Powell

A entrada é um grafo G.

Passo 1 Ordene os vértices de G em ordem decrescente de grau.

Passo 2 Atribua a primeira cor, C_1, ao primeiro vértice e, então, sequencialmente, atribua C_1 a cada vértice que não é adjacente a algum vértice que o antecedeu e ao qual foi atribuída a cor C_1.

Passo 3 Repita o passo 2 com a segunda cor C_2 e os vértices subsequentes não coloridos.

Passo 4 Repita o passo 3 com a terceira cor C_3, depois com a quarta cor C_4, e assim por diante, até que todos os vértices estejam coloridos.

Passo 5 Saia.

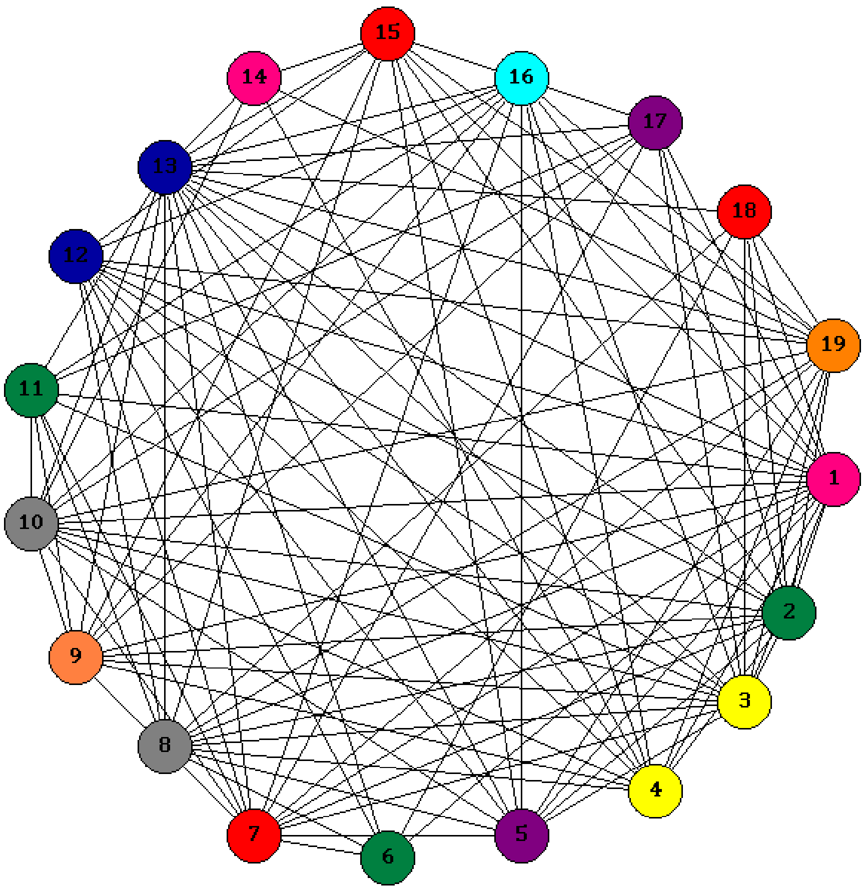
Fonte: Lipschutz; Lipson, 2004.

O algoritmo de Welsh-Powell, em seu formato original, busca a coloração de um grafo com o menor número de cores. Em relação ao problema em questão, significa que o algoritmo almeja a elaboração de um cronograma em um menor número de períodos. Assim, a versão original do algoritmo de Welsh-Powell atenderá apenas as duas primeiras restrições, restrições (I) e (II), determinadas para o cronograma de exames pretendido por este estudo.

De acordo com os passos descritos no algoritmo, primeiramente os vértices do grafo G foram dispostos em ordem decrescente de grau. Logo após, a primeira cor, azul, foi atribuída ao vértice de maior grau, v_{13}. Na sequência, foram analisados os vértices não adjacentes a algum vértice que antecedeu v_{13} e ao qual foi atribuída a cor azul, logo v_{12} recebeu a cor azul. No momento seguinte, a segunda cor, rosa, foi atribuída ao próximo vértice da lista de vértices em ordem decrescentes de grau, por conseguinte v_1. E, então, foram identificados os vértices não adjacentes a v_1, são eles: v_{14} e v_{19}. O primeiro vértice, v_{14}, foi colorido com a cor rosa e v_{19}, no entanto, não pôde ser colorido com a mesma cor uma vez que v_{19} é adjacente a v_{14} e, por definição, vértices adjacentes não podem ser coloridos com a mesma cor. A terceira cor, verde escuro, foi atribuída ao vértice v_2, próximo vértice de maior grau ainda não colorido, e então analisados os vértices não adjacentes a algum vértice que antecedeu v_2 e ao qual foi atribuída a cor verde escuro, assim, v_6 e v_{11} foram coloridos com verde escuro. O processo se repete até que todos os vértices do grafo G sejam coloridos.

Com base nos passos especificados acima, a Figura 18 representa o resultado da coloração do grafo G desenvolvida de forma manual e ilustrada através do *Software* Grafos.

Figura 18 – Coloração do grafo G: algoritmo de Welsh-Powell



Fonte: Autora, 2018.

Através da solução manual obtida por meio do algoritmo de Welsh-Powell original, o grafo G foi colorido com nove cores. Cada cor atribuída aos vértices representa um período e os vértices coloridos com a mesma cor consistem nos exames que podem ser aplicados no mesmo período. Com base na coloração do grafo G foi possível elaborar o cronograma de exames finais, conforme Tabela 3.

Tabela 3 - Cronograma de exames: algoritmo de Welsh-Powell

	Dia 1	Dia 2	Dia 3	Dia 4	Dia 5
Período 1	**12 e 13**	**2, 6 e 11**	**7, 15 e 18**	**9 e 19**	**16**
Período 2	**1 e 14**	**3 e 4**	**8 e 10**	**5 e 17**	

Fonte: Autora, 2018.

Dessa maneira, a coloração do grafo G, ilustrada na Figura 18, gerou um cronograma que distribuiu os 19 exames em cinco dias, sendo que destes quatro contam com dois períodos de exames por dia e um dia com apenas um período, sem que haja sobreposição de exames com alunos em comum, cujos resultados estão dispostos na Tabela 3.

5.2 Algoritmo de Welsh-Powell adaptação 1

O algoritmo de Welsh-Powell original forneceu um cronograma de exames viável que garante a inexistência de conflitos, ou seja, alunos matriculados simultaneamente em componentes curriculares cujos exames estejam alocados para o mesmo período. No entanto, essa versão do algoritmo não atende a todas as restrições determinadas para o cronograma aspirado por esta pesquisa.

Nesse sentido, foram realizadas adaptações no algoritmo original com a intenção de que mais restrições sejam atendidas. Assim, o algoritmo de Welsh-Powell adaptação 1 contempla as restrições (I), (II) e (III) especificadas na subseção 4.2.

Figura 19 - Algoritmo de Welsh-Powell adaptação 1

Algoritmo de Welsh-Powell adaptação 1

A entrada é um grafo G.

Passo 1 Ordene os vértices de G em ordem decrescente de grau.

Passo 2 Atribua a primeira cor, C_1, ao primeiro vértice e, então, atribua C_1 ao vértice de maior grau que não é adjacente a algum vértice que o antecedeu e ao qual foi atribuída a cor C_1.

Passo 3 Repita o passo 2 com a segunda cor C_2 e o vértice subsequente de maior grau não colorido.

Passo 4 Repita o passo 3 com a terceira cor C_3, depois com a quarta cor C_4, e assim por diante, até que todos os vértices estejam coloridos.

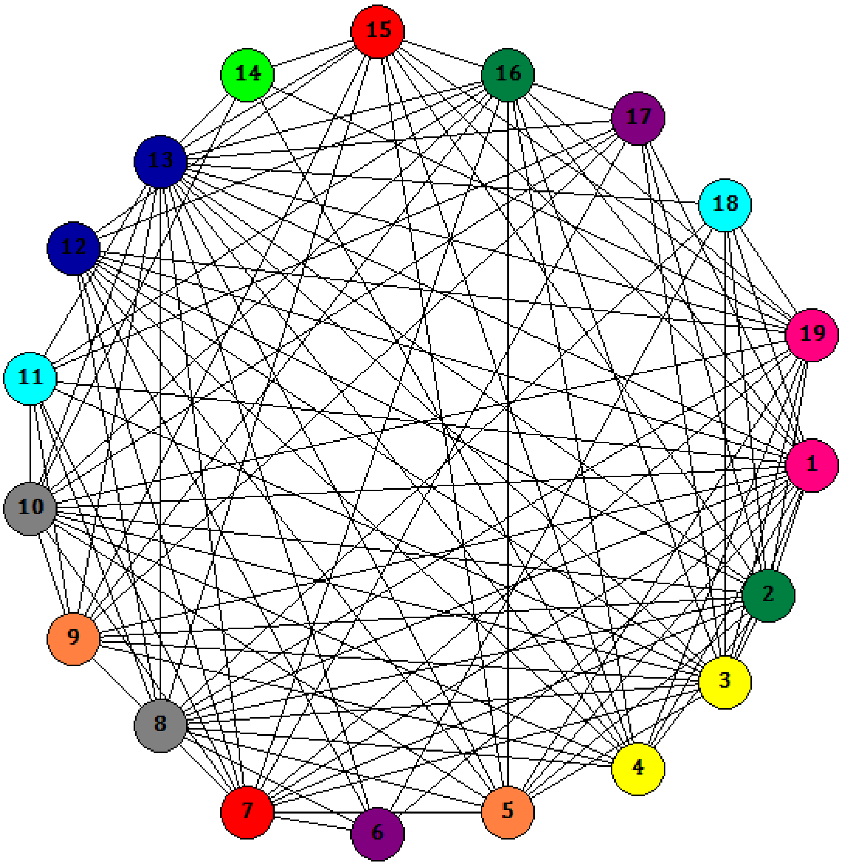
Passo 5 Saia.

Fonte: Adaptado de Lipschutz; Lipson, 2004.

Segundo os procedimentos firmados pelo algoritmo adaptado realizou-se a coloração manual do grafo, agora atendendo a restrição de execução do calendário de exames conforme as restrições (I), (II) e (III). Primeiramente, os vértices do grafo G foram dispostos em ordem decrescente de grau. Logo após, a primeira cor, azul, foi atribuída ao vértice de maior grau, v_{13}. Por conseguinte, a cor azul foi atribuída ao vértice de maior grau que não é adjacente a algum vértice que antecedeu v_{13} e ao qual foi atribuída a cor azul. Dessa forma, v_{12} foi colorido com a cor azul. Na sequência, a segunda cor, rosa, foi atribuída ao vértice v_1 que representa o vértice de maior grau que ainda não foi colorido. Em seguida a cor rosa foi atribuída ao vértice de maior grau ainda não colorido que não é adjacente a algum vértice que antecedeu v_1 e ao qual foi atribuída a cor rosa. Desse modo, a cor rosa foi destinada ao vértice v_{19}. O processo se repete até que todos os vértices do grafo G sejam coloridos.

A Figura 20 apresenta o resultado da coloração do grafo G conforme as prescrições do algoritmo de Welsh-Powell adaptação 1.

Figura 20 - Coloração do grafo $\boldsymbol{G}$: algoritmo de Welsh-Powell adaptação 1



Fonte: Autora, 2018.

O algoritmo de Welsh-Powell adaptado possibilitou a coloração do grafo G com dez cores, uma a mais do que a obtida através do algoritmo original. A Tabela 4 apresenta o cronograma de exames obtido através da coloração realizada nesta abordagem.

Tabela 4 - Cronograma de Exames: algoritmo de Welsh-Powell adaptação 1

	Dia 1	**Dia 2**	**Dia 3**	**Dia 4**	**Dia 5**
Período 1	**12 e 13**	**2 e 16**	**7 e 15**	**5 e 9**	**6 e 17**
Período 2	**1 e 19**	**3 e 4**	**8 e 10**	**11 e 18**	**14**

Fonte: Autora, 2018.

A coloração do grafo G desenvolvida com base nas adaptações realizadas no algoritmo de Welsh-Powell possibilitou a elaboração de um cronograma livre de conflitos, com dez períodos de exames distribuídos em cinco dias. As alterações realizadas no algoritmo viabilizaram também a satisfação da restrição (III) que intencionava a construção de um cronograma em que os exames fossem distribuídos uniformemente de modo que cada período poderia conter no máximo dois exames, uma vez que o problema abarca um total 19 componentes curriculares.

5.3 Algoritmo de Welsh-Powell adaptação 2

Até então, as abordagens utilizadas do algoritmo de Welsh-Powell atenderam as primeiras três restrições descritas na subseção 4.2. A primeira, com o intuito de garantir a viabilidade do cronograma, determina que os componentes curriculares com alunos matriculados em comum não podem ser alocados para o mesmo período. Já a segunda e terceira restrição, dizem respeito ao tempo e a forma de distribuição dos exames no cronograma, estabelecendo, respectivamente, que o mesmo deve ser distribuído em cinco dias, com dois períodos por dia, e pode ser agendado no máximo dois exames por período, com vistas a uma distribuição mais uniforme de exames.

Desse modo, para que todas as restrições inicialmente determinadas para o Problema de Programação de Exames sejam contempladas neste estudo, uma nova adaptação foi realizada no algoritmo de Welsh-Powell que abrange todas as anteriormente realizadas e ainda acrescenta a condição da natureza dos componentes curriculares. Esta nova restrição considerada pelo algoritmo de Welsh-Powell Adaptação 2 prioriza concentrar em um mesmo período os exames relativos a componentes curriculares de mesma natureza, com a intenção de evitar que os discentes realizem no mesmo dia dois exames de igual natureza, atribuindo a esta versão do algoritmo a importância de satisfazer as restrições (I), (II), (III) e (IV) do problema.

Assim, os componentes curriculares especificados na Tabela 1 foram classificados em dois grupos de acordo com a sua natureza. O primeiro grupo, denominado Matemática Pura e Aplicada, compreendeu os componentes curriculares relativos aos vértices: $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_9, v_{10}, v_{11}, v_{17}$ e v_{19}. Enquanto que o segundo, Educação e Ensino de Matemática, incluiu os componentes curriculares referentes aos vértices $v_8, v_{12}, v_{13}, v_{14}, v_{15}, v_{16}$ e v_{18}.

O algoritmo de Welsh-Powell adaptado para atender as quatro primeiras restrições determinadas para o problema está detalhado na Figura 21.

Figura 21 - Algoritmo de Welsh-Powell adaptação 2

Algoritmo de Welsh-Powell adaptação 2

A entrada é um grafo G.

Passo 1 Ordene os vértices de G em ordem decrescente de grau.

Passo 2 Atribua a primeira cor, C_1, ao primeiro vértice e, então, atribua C_1 ao vértice de mesma natureza ao vértice que foi atribuída a cor C_1 que não é adjacente a algum vértice que o antecedeu e ao qual foi atribuída a cor C_1.

Passo 2.1 Caso tenha mais de um vértice que pode receber a cor C_1 e este for de mesma natureza, atribuir C_1 ao vértice de maior grau dentre estes.

Passo 2.2 Caso os vértices que podem receber a cor C_1 sejam de natureza distinta ao vértice que recebeu a cor C_1, atribuir C_1 ao vértice de maior grau dentre estes.

Passo 3 Repita o passo 2 com a segunda cor C_2 e o vértice subsequente de maior grau não colorido, depois com a terceira cor C_3, e assim por diante, até que todos os vértices estejam coloridos.

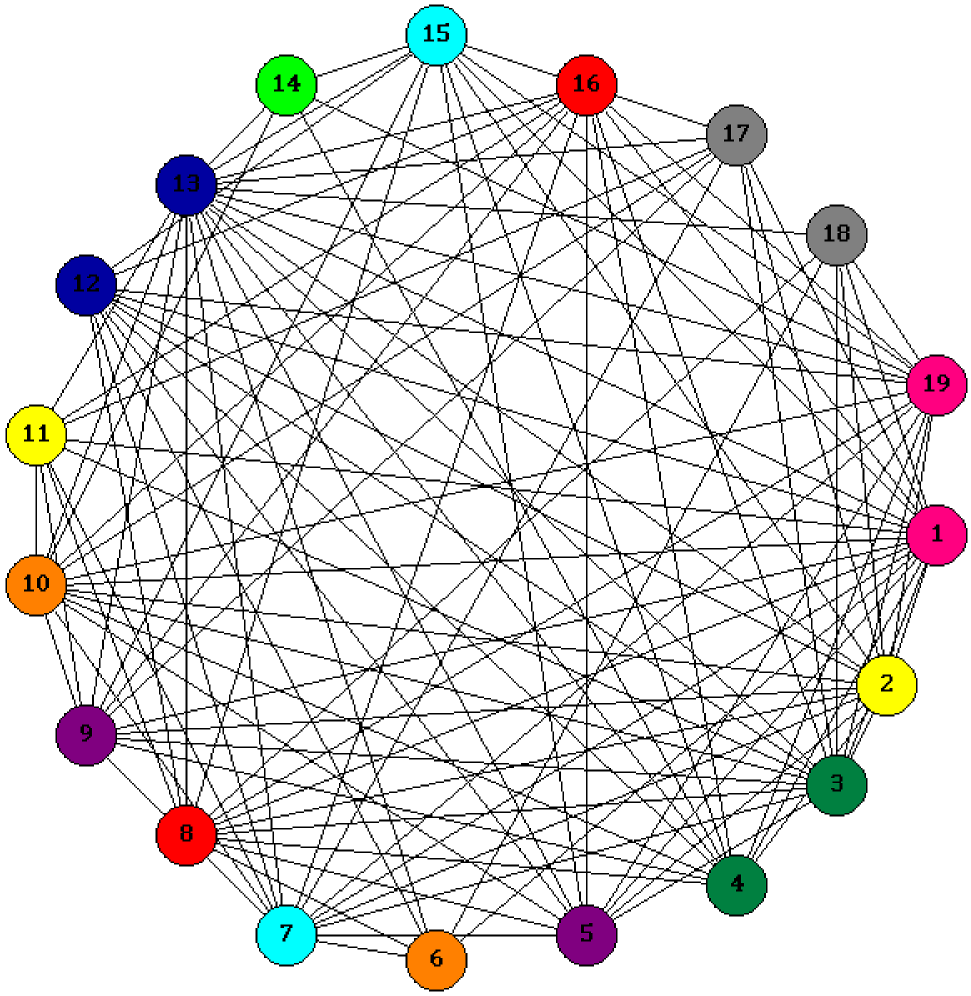
Passo 4 Saia.

Fonte: Adaptado de Lipschutz; Lipson, 2004.

De acordo com os passos descritos no algoritmo, primeiramente os vértices do grafo G foram dispostos em ordem decrescente de grau. Logo após a primeira cor, azul, foi atribuída ao vértice de maior grau, v_{13}. Na sequência, foram analisados os vértices não adjacentes a algum vértice que antecedeu v_{13} e ao qual foi atribuída a cor azul, logo v_{12} recebeu a cor azul. No momento seguinte, a segunda cor, rosa, foi atribuída ao próximo vértice da lista de vértices decrescentes de grau, por conseguinte v_1. E, então, foram identificados os vértices não adjacentes a algum vértice que antecedeu v_1 e ao qual foi atribuída a cor rosa, são eles: v_{14} e v_{19}. No entanto, como restrição, o problema determinou que pode haver no máximo dois exames por período, dessa forma somente um dos vértices não adjacentes a v_1 pode ser colorido com a referida cor. De acordo com o algoritmo, como o vértice v_{19} representa um componente de natureza igual a v_1, foi priorizada a sua coloração em relação a v_{14}. Portanto, v_{19} recebeu a cor rosa. Caso houvesse dois ou mais vértices de mesma natureza a v_1 seria utilizado o critério de maior grau. Por outro lado, caso os vértices não adjacentes a v_1 que podem receber a cor rosa fossem de natureza distinta a v_1 seria também utilizado o critério de maior grau. O processo se repete de acordo com os parâmetros estabelecidos pelo algoritmo de Welsh-Powell adaptado, representado na Figura 21, até que todos os vértices do grafo G foram coloridos.

Com base nos passos especificados acima, a Figura 22 representa o resultado da coloração do grafo G realizada através do algoritmo de Welsh-Powell adaptação 2.

Figura 22 - Coloração do grafo $\boldsymbol{G}$: algoritmo de Welsh-Powell adaptação 2



Fonte: Autora, 2018.

A coloração do grafo G apresenta a solução obtida para o problema de programação de exames considerando as quatro primeiras restrições impostas ao problema. Sendo a primeira, restrição que precisa necessariamente ser satisfeitas sob a pena de inviabilização do cronograma. A segunda é oriunda do contexto no qual o cronograma foi desenvolvido. E a terceira e quarta restrições buscam o aprimoramento do cronograma de exames de modo que na impossibilidade de atendê-las o mesmo não é comprometido.

A última restrição, (V), diz respeito à preferência de que exames de componentes curriculares de natureza Matemática pura e aplicada sejam alocados para o primeiro período de cada dia. Essa condição é considerada no momento de alocação dos exames, já agrupados prioritariamente por natureza, no cronograma.

Finalmente, a Tabela 5 apresenta a disposição dos exames no cronograma satisfazendo as cinco restrições determinadas.

Tabela 5 - Cronograma de Exames: algoritmo de Welsh-Powell adaptação 2

	Dia 1	Dia 2	Dia 3	Dia 4	Dia 5
Período 1	**2 e 11**	**3 e 4**	**1 e 19**	**5 e 9**	**6 e 10**
Período 2	**17 e 18**	**7 e 15**	**12 e 13**	**8 e 16**	**14**

Fonte: Autora, 2018.

Com a intenção de possibilitar uma visualização mais detalhada da disposição dos exames referentes aos componentes curriculares no cronograma, a Tabela 6 apresenta a organização trazida na Tabela 5 acrescida da especificação dos nomes dos componentes curriculares.

Tabela 6 - Cronograma de Exames Finais

	Dia 1	Dia 2	Dia 3	Dia 4	Dia 5
Período 1	**Álgebra I / Introdução a Lógica Matemática**	**Análise I / Cálculo II**	**Álgebra Linear I / Física I**	**Cálculo III / Fundamentos da Matemática Elementar**	**Cálculo Numérico I / Geometria Plana**
Período 2	**Teoria Elementar das Funções / Tendências em Educação Matemática**	**Equações Diferenciais Ordinárias / Políticas Públicas no Contexto Brasileiro**	**Laboratório para o Ensino Médio / Libras**	**Estágio de Práticas Interdisciplinares / Softwares de Aprendizagem de Matemática**	**Psicologia da Educação**

Fonte: Autora, 2018.

Através da Coloração de Grafos desenvolvida a partir do algoritmo de Welsh-Powell e suas adaptações, é apresentado na Tabela 6 o Cronograma de Exames Finais com base nos dados referentes ao curso de Matemática - Licenciatura da UNIPAMPA, atendendo a todas as restrições apontadas na subseção 4.2 determinadas pelo presente estudo.

O próximo capítulo apresenta as considerações finais relativas ao desenvolvimento deste estudo e dos resultados alcançados, assim como as pretensões para trabalhos futuros.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A presente pesquisa teve como objetivo principal desenvolver um modelo de solução para o Problema de Programação de Exames finais de cursos universitários, este muitas vezes desenvolvido de forma manual pelas universidades. Assim, a otimização do processo de elaboração do cronograma é de suma importância. Nessa perspectiva, pode-se considerar que os resultados obtidos com base nos recursos e métodos de solução utilizados nesta abordagem conseguiram atender aos objetivos desta proposta.

Diante dos inúmeros métodos de solução identificados na literatura para o Problema de Programação de Horários de Exames, optou-se, nesta abordagem, por explorá-lo a partir da Coloração de Grafos desenvolvida com base no algoritmo de Welsh-Powell adaptado. Para tanto, o processo de solução compreendeu uma fase de tratamento dos dados para a construção de uma matriz de adjacência, necessária para a modelagem do problema como um grafo.

O algoritmo computacional desenvolvido em Fortran 90 foi essencial para a otimização do processo de elaboração do cronograma, uma vez que possibilitou a construção da matriz de adjacência em um tempo menor do que o construído de forma manual, processo este que, se realizado manualmente, poderia demandar dias de dedicação. A análise realizada pelo algoritmo comparou cada componente curricular com relação a todos os demais, com o objetivo de identificar a existência ou inexistência de conflitos, ou seja, discentes matriculados em comum, alocando essas informações na forma de uma matriz zero-um, chamada matriz de adjacência. A análise é relativa a 19 componentes curriculares e 221 discentes que totalizam 641 matrículas. O algoritmo pode ser utilizado, inclusive, para problemas que envolvam um número maior de componentes curriculares e discentes matriculados, fornecendo um resultado rápido e eficiente para a modelagem desses dados.

A Coloração de Grafos realizada por meio do algoritmo de Welsh-Powell adaptado oportunizou a elaboração de um cronograma de exames finais viável para o curso de Matemática - Licenciatura, atendendo a todas as condições previamente determinadas para o cronograma.

As adaptações realizadas no algoritmo de Welsh-Powell, conforme foram sendo consideradas em cada etapa do estudo, geraram diferentes soluções para o cronograma. Nessa direção, compreende-se que além de obter um resultado condizente com as restrições fundamentais para a elaboração de um cronograma viável, a primeira adaptação realizada no algoritmo permitiu uma distribuição mais uniforme dos exames dentro do prazo estipulado para o cronograma, evitando assim, o acúmulo de exames em um mesmo período. Enquanto que a segunda adaptação contemplou todas as restrições impostas ao cronograma, possibilitando uma alocação mais diversificada quanto à natureza dos exames, evitando que os estudantes realizassem, no mesmo dia, exames de igual natureza.

As soluções apresentadas de acordo com cada uma das adaptações realizadas no algoritmo de Welsh-Powell não são únicas, em virtude de que o algoritmo determina que a coloração seja feita na ordem decrescente de grau. Desse modo, como existem vértices de mesmo grau, a ordem entre estes foi determinada aleatoriamente. Logo, diferentes ordenações dos vértices de mesmo grau resultarão em diferentes colorações.

Portanto, os resultados alcançados com esta proposta mostraram que a Teoria dos Grafos, através da técnica de Coloração de Grafos realizada por meio do algoritmo de Welsh-Powell, possibilitou a elaboração de um cronograma de exames factível para o curso de Matemática - Licenciatura da Universidade Federal do Pampa.

Pelo quantitativo de dados considerados neste estudo, a coloração do grafo G para a elaboração do cronograma pôde ser realizada de forma manual. Como perspectiva de continuação deste estudo, pretende-se em trabalhos futuros desenvolver a implementação computacional do algoritmo de Welsh-powell com as adaptações e, com isso, contemplar um quantitativo maior de dados e, consequentemente, um número maior de cursos simultaneamente.

REFERÊNCIAS

ARAÚJO NETO, A. S.; GOMES, M.J.N. Problema e Algoritmos de Coloração em Grafos - Exatos e Heurísticos. **Revista de Sistemas e Computação**, Salvador, v. 4, n. 2, p. 101-115, jul./dez. 2014. Disponível em: < http://www.revistas.unifacs.br/index.php/rsc/article/view/3028/2497>. Acesso em: 14 ago. 2017.

BOAVENTURA NETTO, P.O. **Grafos**: Teoria, Modelos, Algoritmos. 4. ed. São Paulo: Edgard Blucher, 2006.

BURKE, E.K. et al. A graph based hyper-heuristic for exam timetabling problems. **European Journal of Operational Research**, 176, 2007, p.177-192.

BURKE, E.K.; ELLIMAN, D.G.; WEARE, R. F. A hybrid genetic algorithm for highly constrained timetabling problems. **Proceedings of the 6th International Conference on Genetic Algorithms** (ICGA'95, Pittsburgh, USA, 15th-19th July 1995). Morgan Kaufmann, San Francisco, 1995, p. 605-610.

CARVALHO, R. **Abordagem Heurística para o Problema de Programação de Horários de Cursos**. Dissertação de Mestrado em Engenharia Elétrica. Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais. Belo Horizonte, 2011.

COOPER T.B., KINGSTON J.H. (1996) The complexity of timetable construction problems. In: BURKE E., ROSS P. (eds) **Practice and Theory of Automated Timetabling**. PATAT 1995. Lecture Notes in Computer Science. Springer, Berlin, Heidelberg, 1995, v. 1153, p. 283-295.

CÔTÉ, P.; WONG, T.; SABOURIN, R. **Application of a hybrid multi-objective evolutionary algorithm to the uncapacitated exam proximity problem**. Lecture Notes in Computer Science, 2005, v. 3616, p. 151-168.

DAVID, P. A constraint-based approach for examination timetabling using local repair techniques. In: BURK, E.K.; CARTER, M.W. (eds). **Practice and Theory of Automated Timetabling: Selected Papers from the 2nd International Conference**. Lecture Notes in Computer Science, 1998, v. 1408, p. 169-186.

DUONG, T.A.; LAM, K.H. Combining constraint programming and simulated annealing on university exam timetabling. In: **Proceedings of the 2nd International Conference in Computer Sciences, Research, Innovation & Vision for the Future** (RIVF2004), Hanoi, 2004, p. 205-210.

FONSECA, J.J.S. da. **Metodologia da pesquisa científica**. Fortaleza: UEC, 2002. Apostila.

GASPERO L. DI; SCHAERF A. Tabu Search Techniques for Examination Timetabling. In: BURKE E.; ERBEN W. (eds) **Practice and Theory of Automated Timetabling III**. PATAT 2000. Lecture Notes in Computer Science. Springer, Berlin, Heidelberg, 2001, v. 2079, p. 104-117.

GIL, A.C. **Como Elaborar Projetos de Pesquisa**. 4. Ed. São Paulo: Atlas, 2002.

GOLDBARG, M.C.; LUNA, H.P.L. **Otimização combinatória e programação linear**: modelos e algoritmos. 2. ed. Rio de Janeiro: Campus, 2000.

LAKATOS, E.M; MARCONI, M.A. **Fundamentos de Metodologia Científica**. 5 ed. São Paulo: Atlas, 2003.

LIPSCHUTZ, S.; LIPSON, M. **Matemática Discreta**, coleção Schaum. 2. ed. São Paulo: Bookman, 2004.

MACHADO, A. M.; BOERES, M. C. S. Uma proposta de formulação do problema de programação de tabela-horário de exames de Toronto via coloração de grafos e sua resolução pelo algoritmo de busca tabu. **XLI SBPO - Pesquisa Operacional na Gestão do Conhecimento**, 2009.

MARTINS, R.A. Abordagem Quantitativa e Qualitativa. In: MIGUEL, P. A. C. (Org). **Metodologia de pesquisa em engenharia de produção e gestão operações**. 2. ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2012. p. 47-63.

MORABITO NETO, R.; PUREZA, V. Modelagem e Simulação. In: MIGUEL, P. A. C. (Org). **Metodologia de pesquisa em engenharia de produção e gestão operações**. 2. ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2012. p. 169-198.

MUJUNI, E.; MUSHI, A. **Solving the Examination Timetabling Problem Using a Two-Phase Heuristic**: The case of Sokoine University of Agriculture. Journal of Information and Computing Science. Inglaterra, 2015, v. 10, n. 3, p. 220-227.

PRODANOV, C.C.; FREITAS, E.C. de. **Metodologia do trabalho científico**: métodos e técnicas da pesquisa e do trabalho acadêmico. 2. ed. Novo Hamburgo: Feevale, 2013.

ROSEN, K.H. **Matemática Discreta e suas Aplicações**. Tradução: João Giudice. 6. ed. São Paulo: McGraw-Hill, 2009.

SCHAERF, A. A Survey of Automated Timetabling. **Artificial Intelligence Review**, 1999, v. 13, n. 2, p. 87-127.

SCHEINERMAN, E.R. **Matemática Discreta**: uma introdução. Tradução: Alfredo Alves de Farias. São Paulo: Cengage Learning, 2009.

SILVA, E.L. da, MENEZES, E.M., **Metodologia da pesquisa e elaboração da dissertação**. 4. Ed. ver. Atual. Florianópolis: UFSC, 2005, 118p.

SILVEIRA, D.T.; CÓRDOVA, F.P. A Pesquisa Científica. In: GERHARDT, T. E.; SILVEIRA, D. T. (Org.). **Métodos de Pesquisa**. Coordenado pela Universidade Aberta do Brasil – UAB/UFRGS e pelo Curso de Graduação Tecnológica – Planejamento e Gestão para o Desenvolvimento Rural da SEAD/UFRGS. – Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2009, p. 31-42.

SANTOS, H.G.; SOUZA, M.J.F. Programação de Horários em Instituições Educacionais: Formulações e Algoritmos. In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE PESQUISA OPERACIONAL, 2007, Fortaleza. **Anais..**. Fortaleza: XXXIX SBPO, 2007, p. 1126-1137. Disponível em: <http://www.din.uem.br/sbpo/sbpo2007/minic/idx00.htm>. Acesso em: 17 set. 2017.

SELEMANI M.A.; MUJUNI E.; MUSHI A. An Examination Scheduling Algorithm Using Graph Colouring - The case of Sokoine University of Agriculture, In: **International Journal of Computer Engineering & Applications**, 2013, V. II, Issue I/III, p. 116-127.

SPINDLER, M**. Uma Proposta de Solução para Problemas de Horário Educacional utilizando Busca Dispersa e Reconexão por Caminhos**. Dissertação de Mestrado em Computação Aplicada. Universidade do Vale do Rio dos Sinos. São Leopoldo, 2010.

TAHA, H. **Pesquisa Operacional**. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2008.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PAMPA. A Unipampa: Dados gerais da Universidade Federal do Pampa. Bagé, 2018. Acesso em: 06 fev. 2018. Disponível em: < http://novoportal.unipampa.edu.br/novoportal/universidade>.

WERRA, D. An introduction to timetabling. **European Journal of Operational Research**, 1985, p. 151-162.

WOUMANS, G. et al. A column generation approach for solving the examination-timetabling problem. **European Journal of Operational Research 253**, 2016, p. 178-194.

YANG Y.; PETROVIC S. A Novel Similarity Measure for Heuristic Selection in Examination Timetabling. In: Burke E., Trick M. (eds) **Practice and Theory of Automated Timetabling V**. PATAT 2004. Lecture Notes in Computer Science. Springer, Berlin, Heidelberg, 2005, v. 3616, p. 247-269.