

Renan Medke

# **Modelagem Matemática de um Quadrotor**

Alegrete, RS

24 de junho de 2016



Renan Medke

## **Modelagem Matemática de um Quadrotor**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Engenharia Elétrica, Área de Concentração em Controle de Sistemas, da Universidade Federal do Pampa (Unipampa, RS), como requisito parcial para obtenção do grau de **Bacharel em Engenharia Elétrica**.

Universidade Federal do Pampa – Unipampa

Curso de Engenharia Elétrica

Orientador: Prof. Me. Marcelo Durgante

Alegrete, RS

24 de junho de 2016

Ficha catalográfica elaborada automaticamente com os dados fornecidos  
pelo(a) autor(a) através do Módulo de Biblioteca do  
Sistema GURI (Gestão Unificada de Recursos Institucionais) .

MM491m Medke, Renan

Modelagem matemática de um quadrotor / Renan Medke.  
49 p.

Trabalho de Conclusão de Curso(Graduação)-- Universidade  
Federal do Pampa, ENGENHARIA ELÉTRICA, 2016.

"Orientação: Marcelo Durgante".

1. veículo aéreo não tripulado. 2. Modelagem matemática. 3.  
Simulação. I. Título.

RENAN MEDKE

MODELAGEM MATEMÁTICA DE UM QUADROTOR

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Engenharia Elétrica da Universidade Federal do Pampa, como requisito parcial para obtenção do título de Bacharel em Engenharia Elétrica.

Área de Concentração: Modelagem e Otimização de Sistemas

Trabalho de Conclusão de Curso defendido e aprovado em: 24 de junho de 2016.

Banca examinadora:



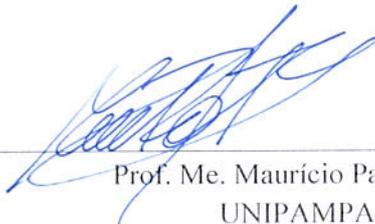
---

Prof. Me. Marcelo Durgante  
Orientador



---

Prof. Dr. Giovani Guarienti Pozzebon  
UNIPAMPA



---

Prof. Me. Maurício Paz França  
UNIPAMPA



*Dedico este trabalho a  
minha família.*



# Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, à minha família, em especial aos meus pais, por acreditar e incentivar a realizar mais esse sonho.



*“A velocidade da luz é um limite absoluto ao qual todas as coisas  
do universo estão submetidas.  
(Albert Einstein)”*



# Resumo

O trabalho de modelagem matemática de um quadrotor visa compreender o funcionamento de um quadrotor, mostrando um detalhamento desde as suas transformações de coordenadas até a obtenção das equações que descrevem seus movimentos num plano tridimensional. Essas equações são utilizadas em simulações onde espera-se um movimento de forma intuitiva e em seguida comprova-se por meio da trajetória obtida na simulação.

**Palavras-chave:** controle de sistemas dinâmicos. modelagem matemática. veículo aéreo não-tripulado.



# Abstract

The work of mathematical modeling of a quadrotor aims to understand the functioning of a quadrotor, showing a detail from its coordinate transformations to obtain the equations describing their movements in three-dimensional plane. These equations are used in simulations where a movement is expected intuitively and then it was proven by means of the trajectory obtained in the simulation.

**Key-words:** dynamic systems control. mathematical modeling. unmanned aircraft systems.



# Lista de ilustrações

Figura 1 – Bloco step do Simulink . . . . .	21
Figura 2 – Bloco Gain do Simulink . . . . .	21
Figura 3 – Bloco function do Simulink . . . . .	22
Figura 4 – Bloco integrator do Simulink . . . . .	22
Figura 5 – Bloco scope do Simulink . . . . .	22
Figura 6 – Bloco To workspace do Simulink . . . . .	22
Figura 7 – Produto escalar A e B. . . . .	23
Figura 8 – Rotação do plano x-y (mantendo z constante). . . . .	24
Figura 9 – Ângulo entre os vetores. . . . .	25
Figura 10 – Ângulo entre os vetores. . . . .	26
Figura 11 – Rotação do plano x-z (mantendo y constante). . . . .	27
Figura 12 – Relação dos ângulos. . . . .	28
Figura 13 – Relação dos ângulos. . . . .	29
Figura 14 – Rotação do plano y-z (mantendo x constante). . . . .	31
Figura 15 – Simplificação do corpo do dispositivo . . . . .	34
Figura 16 – Layout da simulação. . . . .	37
Figura 17 – Rampa de velocidade . . . . .	37
Figura 18 – Detalhe das forças iguais em cada rotor . . . . .	38
Figura 19 – Trajetória nos eixos . . . . .	38
Figura 20 – Trajetória em 3 dimensões com $F1=F2=F3=F4=1$ . . . . .	39
Figura 21 – Detalhe das forças em cada rotor . . . . .	39
Figura 22 – Trajetória nos eixos . . . . .	40
Figura 23 – Trajetória em 3 dimensões com $F1=0.99$ $F2=F3=F4=1$ . . . . .	40
Figura 24 – Detalhe das forças em cada rotor . . . . .	41
Figura 25 – Trajetória nos eixos . . . . .	41
Figura 26 – Trajetória em 3 dimensões com $F2=0.99$ $F1=F3=F4=1$ . . . . .	42
Figura 27 – Detalhe das forças em cada rotor . . . . .	42
Figura 28 – Trajetória nos eixos . . . . .	43
Figura 29 – Trajetória em 3 dimensões com $F3=0.99$ $F1=F2=F4=1$ . . . . .	43
Figura 30 – Detalhe das forças em cada rotor . . . . .	44
Figura 31 – Trajetória nos eixos . . . . .	44
Figura 32 – Trajetória em 3 dimensões com $F4=0.99$ $F1=F2=F3=1$ . . . . .	45
Figura 33 – Detalhe das forças em cada rotor . . . . .	45
Figura 34 – Trajetória nos eixos . . . . .	46
Figura 35 – Trajetória em 3 dimensões com $F1=F2=0.99$ $F3=F4=1$ . . . . .	46



# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>19</b>
<b>2</b>	<b>Metodologia</b>	<b>21</b>
<b>3</b>	<b>Desenvolvimento</b>	<b>23</b>
3.1	Modelagem Matemática	23
3.1.1	Vetores Unitários	23
3.1.2	Produto Escalar	23
3.2	Matriz de Rotação em três Dimensões	24
3.2.1	Mantendo o eixo z constante	24
3.2.2	Mantendo o eixo y constante	27
3.2.3	Mantendo o eixo x constante	30
3.3	Modelagem Dinâmica do Quadrotor	33
<b>4</b>	<b>Resultados</b>	<b>37</b>
<b>5</b>	<b>Conclusão</b>	<b>47</b>
	<b>Referências</b>	<b>49</b>



# 1 Introdução

O surgimento de veículos aéreos não tripulados veio com a necessidade de realizar atividades que oferecem riscos a vida humana. Isso explica a sua grande aplicação e pesquisa para atividades com fins militares. Muitas máquinas foram criadas ao longo da história encaixando-se como não tripuladas, porém foi Nicola Tesla que introduziu o conceito em 1915 (AUSTIN, 2011).

Antes mesmo da primeira guerra os austríacos utilizavam balões com explosivos e sem tripulação para atacar Veneza (UBIRATAN, 2016), o que pode ser considerado o primeiro veículo aéreo não tripulado. Desde então foram realizadas melhoras nessas máquinas, as quais permitiram sua utilização em outras funções e atividades, que desencadearam, sem dúvida, uma revolução em conceitos de transportes de entrega e atendimentos de urgência.

*Unmanned Aircraft Systems (UAS)* ou veículo aéreo não tripulado (VANT) conforme (AUSTIN, 2011), não é apenas uma aeronave sem tripulação, cujo piloto é substituído por um computador. As diferenças começam na construção, pois os espaços alocados para cada parte são distribuídos de formas diferentes. Há vários tipos e classes de VANT, que explicam diferenças construtivas, por exemplo, aviões e helicópteros e diferenças de controle da aeronave, um exemplo seriam os aviões que precisam estar a vista do operador e os telecomandados que necessitam apenas de coordenadas de georreferenciamento para que possa chegar a um destino. Essas classificações variam constantemente conforme pesquisas e avanços tecnológicos que ocorrem na área, conforme a regulamentação de cada país.

A redução de custo para construir esse tipo de veículo está fazendo com que ele se torne cada vez mais popular, possibilitando que ele seja utilizado de muitas maneiras e com várias aplicações, como por exemplo, a utilização por civis para realizar filmagens e também para fins médicos, conforme (MOMONT, 2015), com envio de kits de primeiros socorros para realizar atendimentos de pessoas que sofreram parada cardíaca, onde o tempo de chegada de um primeiro procedimento de desfibrilação, antes mesmo de uma ambulância, pode aumentar muito a chance de sobrevivência de um paciente.

Há uma grande aplicação para este tipo de veículo na área de mapeamento, devido a portabilidade e autonomia que oferecem. Vários estudos que consistem no princípio de fotografar uma determinada área com câmeras fotográficas de alta resolução acopladas a VANT's, em seguida essas imagens são tratadas por algoritmos que as juntam e montam um mapa em alta resolução, o que permite analisar mudanças que ocorrem em determinada área, (MITISHITA et al.,) essas técnicas são aplicadas tanto para fiscalização ambiental

como para a agricultura de precisão.

Na inspeção em linhas de transmissão são utilizados helicópteros, o que aumenta o custo sendo que uma possível falta em uma linha de transmissão muito longa demora um tempo grande para que ser reparada se a inspeção for feita por uma equipe se deslocando por terra. Por isso, uma alternativa de baixo custo é usar um VANT para se deslocar muito rápido sobre a linha com uma câmera acoplada para identificação do local da falta mais rápido, deslocando até a falta a equipe mais próxima ([Centro de Estudos e Sistemas Avançados do Recife, 2014](#)).

É possível adaptar ou realizar as mais variadas atividades com quadrópteros, basta que seja implementado em seu projeto de controle. Para que o quadróptero realize um vôo com uma trajetória pré-definida ou mantenha-se em uma determinada altura é necessário a implementação de uma técnica controle. Um pré-requisito básico para implementação de qualquer técnica de controle sobre um dispositivo é construir seu modelo matemático. Em um quadróptero, são muitos os objetivos de controle possíveis. Podemos trabalhar com rejeição de distúrbio, isto é, manter uma posição ou rota para o dispositivo independente da presença aleatória de vento. Podemos trabalhar com imprecisão de leituras dos sensores, isto é, admitir que os valores dos sensores possuem algum erro e garantir a robustez da estratégia de controle mediante tal erro. Para qualquer dessas abordagens, é necessário dispor do modelo matemático do sistema a controlar.

VANTs englobam muitos tipos diferentes de dispositivos, desde aeroplanos até helicópteros. Será abordado nesse trabalho a modelagem matemática de um quadrotor. Esse dispositivo possui quatro rotores posicionados de maneira simétrica (90 graus), de maneira equidistante do centro, sendo possível controlar somente as velocidades desses rotores.

Desde sua origem até os dias atuais os quadrotors vêm crescendo em relevância para aplicações cotidianas, podendo ser de cunho militar, na área da saúde ou até mesmo para entretenimento. O desenvolvimento de um modelo matemático que represente com precisão suficiente o comportamento do quadróptero na situação em que será utilizado é um passo fundamental para estudar a aplicação de diversas estratégias de controle que oferecem diferentes vantagens e desvantagens, porém para aplicar uma delas é necessário que haja um modelo matemático que represente o quadrotor. Com posse de um modelo matemático que expresse o movimento do sistema físico do veículo.

Este trabalho está organizado como segue: o capítulo 1 apresenta a contextualização do trabalho; - o capítulo 2 apresenta a metodologia utilizada e uma breve descrição do software utilizado; - o capítulo 3 apresenta a matriz de transformação de coordenadas e as equações que descrevem o movimento do quadrotor; - o capítulo 4 apresenta os resultados obtidos na simulação; - o capítulo 5 apresenta as conclusões.

## 2 Metodologia

O trabalho utiliza uma metodologia composta de cinco etapas. A primeira é uma revisão bibliográfica com intuito de verificar o estado da arte na modelagem de quadrotoros. A segunda é a obtenção da matriz de transformação de coordenadas necessária para comunicar o quadrotor com um referencial geostacionário de três dimensões. A terceira é o desenvolvimento do modelo matemático que descreve o movimento do dispositivo no espaço mediante a atuação de forças e a passagem do tempo. A quarta é a definição dos movimentos esperados para o dispositivo mediante a atuação de forças com magnitudes distintas. Na quinta etapa foi realizada uma simulação no software Matlab-Simulink para verificação da validade do modelo.

Para implementar a simulação foram utilizados blocos. Para modelar a velocidade dos rotores foi utilizado o bloco degrau, esse bloco da figura 1 possui a função de em algum momento passar de nível zero para nível alto de um sinal.

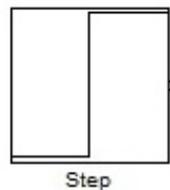


Fig. 1 – Bloco step do Simulink

O bloco Gain é utilizado para multiplicar um sinal por um escalar qualquer, podendo ele aumentar ou diminuir a amplitude do mesmo.

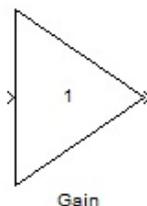


Fig. 2 – Bloco Gain do Simulink

O bloco function é utilizado para programar uma função qualquer com n entradas e n saídas para modificar um determinado sinal.

O bloco da figura 4 é chamado de integrator, serve para integrar um sinal que é colocado na sua entrada.

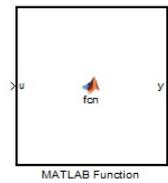


Fig. 3 – Bloco function do Simulink

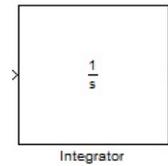


Fig. 4 – Bloco integrator do Simulink

O bloco da figura 5 é chamado de scope, é utilizado para obter as formas de onda em determinados pontos da simulação.

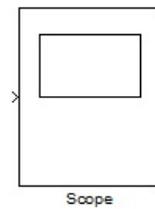


Fig. 5 – Bloco scope do Simulink

O bloco To Workspace da figura 6 é utilizado para transformar um sinal em vetor e mandá-lo para o workspace do matlab, aonde o mesmo pode ser plotado como gráfico.

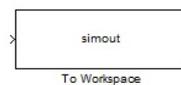


Fig. 6 – Bloco To workspace do Simulink

## 3 Desenvolvimento

### 3.1 Modelagem Matemática

Para que ocorra a comunicação entre o quadrotor e um referencial é necessário que existam transformações de coordenadas entre dois sistemas tridimensionais de coordenadas. Essas transformações são baseadas nos conceitos de vetores unitários, produto escalar e projeção escalar.

#### 3.1.1 Vetores Unitários

O conceito de vetor unitário consiste em dividir suas coordenadas pelo seu módulo. Considerando que  $i = (1, 0, 0)$ ,  $j = (0, 1, 0)$  e  $k = (0, 0, 1)$ , o vetor unitário de  $i$  é representado por  $\hat{i}$  e obtido pela equação 3.1 (STEINBRUCH; WINTERLE, 2007).

$$\hat{i} = \frac{\vec{i}}{\|\vec{i}\|} \quad (3.1)$$

A equação 3.1 é válida para os vetores  $j$  e  $k$ , portanto  $\hat{i} = (1, 0, 0)$ ,  $\hat{j} = (0, 1, 0)$  e  $\hat{k} = (0, 0, 1)$ .

#### 3.1.2 Produto Escalar

O produto escalar de dois vetores A e B é o resultado da multiplicação do comprimento de ambos e resulta um número real, o resultado dessa operação é diretamente ligada com o cosseno do ângulo formado entre eles (STEINBRUCH; WINTERLE, 2007). Observando a figura 7 e a equação 3.2 é possível entender a relação:

$$A \cdot B = \|A\| \cdot \|B\| \cdot \cos(\Theta) \quad (3.2)$$

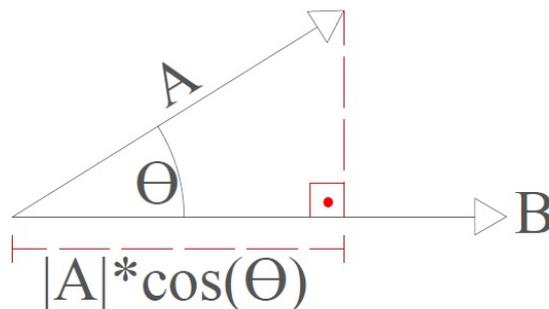


Fig. 7 – Produto escalar A e B.

## 3.2 Matriz de Rotação em três Dimensões

Quando refere-se a um plano em três dimensões considera-se normalmente as coordenadas x, y e z, que são representados por  $\hat{i}$ ,  $\hat{j}$  e  $\hat{k}$ , respectivamente, os eixos são considerados unitários.

### 3.2.1 Mantendo o eixo z constante

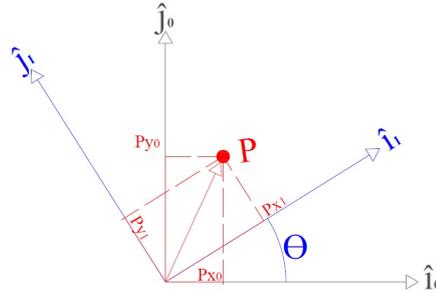


Fig. 8 – Rotação do plano x-y (mantendo z constante).

Do ponto de vista do referencial zero ( $F^0$ ), o vetor  $\vec{P}$  é dado por:

$$\vec{P} = Px^0 \cdot \hat{i}_o + Py^0 \cdot \hat{j}_o + Pz^0 \cdot \hat{k}_o \quad (3.3)$$

Do ponto de vista do referencial 1 ( $F^1$ ),  $\vec{P}$  é dado por:

$$\vec{P} = Px^1 \cdot \hat{i}_1 + Py^1 \cdot \hat{j}_1 + Pz^1 \cdot \hat{k}_1 \quad (3.4)$$

Como o vetor  $\vec{P}$  é o mesmo, podemos igualar as expressões:

$$Px^0 \cdot \hat{i}_o + Py^0 \cdot \hat{j}_o + Pz^0 \cdot \hat{k}_o = Px^1 \cdot \hat{i}_1 + Py^1 \cdot \hat{j}_1 + Pz^1 \cdot \hat{k}_1 \quad (3.5)$$

Fazendo o produto escalar de 3.5 com  $\hat{i}_1$

$$Px^1 \cdot \hat{i}_1 \cdot \hat{i}_1 + Py^1 \cdot \hat{j}_1 \cdot \hat{i}_1 + Pz^1 \cdot \hat{k}_1 \cdot \hat{i}_1 = Px^0 \cdot \hat{i}_o \cdot \hat{i}_1 + Py^0 \cdot \hat{j}_o \cdot \hat{i}_1 + Pz^0 \cdot \hat{k}_o \cdot \hat{i}_1 \quad (3.6)$$

$\hat{i}_1 \cdot \hat{i}_1$  é igual a 1, pois o ângulo entre os vetores é  $0^\circ$ , logo  $\cos(0^\circ) = 1$ , no mesmo raciocínio,  $\hat{j}_1 \cdot \hat{i}_1$  é igual a zero, o ângulo formado entre eles é de  $90^\circ$ , logo  $\cos(90^\circ) = 0$ , o mesmo acontece com  $\hat{k}_1 \cdot \hat{i}_1$ , pois o ângulo entre eles é de  $90^\circ$ . Reorganizando :

$$Px^1 = \begin{bmatrix} \hat{i}_o \cdot \hat{i}_1 & \hat{j}_o \cdot \hat{i}_1 & \hat{k}_o \cdot \hat{i}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Px^0 \\ Py^0 \\ Pz^0 \end{bmatrix}. \quad (3.7)$$

O produto escalar entre  $\hat{i}_o \cdot \hat{i}_1$  é função do ângulo:

$$\hat{i}_o \cdot \hat{i}_1 = \overbrace{\|\hat{i}_o\|}^1 \cdot \underbrace{\|\hat{i}_1\|}_1 \cdot \cos(\Psi) \quad (3.8)$$

logo,  $\hat{i}_o \cdot \hat{i}_1 = \cos(\Psi)$ , Observando a figura 9, pode-se concluir que:

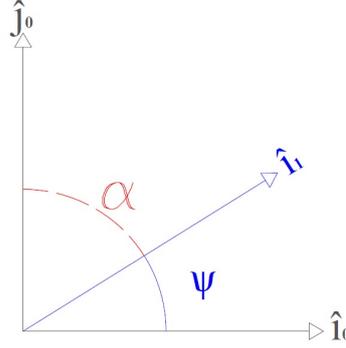


Fig. 9 – Ângulo entre os vetores.

$$\begin{aligned}
 \alpha &= 90^\circ - \Psi \\
 \cos(\Psi) &= \text{sen}(\Psi + 90^\circ) \\
 \cos(90^\circ - \Psi) &= \text{sen}(90^\circ - \Psi + 90^\circ) \\
 \cos(90^\circ - \Psi) &= \text{sen}(180^\circ - \Psi) \\
 \cos(90^\circ - \Psi) &= \text{sen}(\Psi)
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

De forma semelhante a 3.8 :

$$\hat{j}_o \cdot \hat{i}_1 = \overbrace{\|\hat{j}_o\|}^1 \cdot \underbrace{\|\hat{i}_1\|}_1 \cdot \cos(90^\circ - \Psi)$$

De acordo com a dedução de 3.9

$$\hat{j}_o \cdot \hat{i}_1 = \text{sen}(\Psi) \tag{3.10}$$

Como o eixo z foi mantido constante, logo o ângulo entre  $\hat{k}_o$  e  $\hat{i}_1$  é  $90^\circ$ .

$$\begin{aligned}
 \hat{k}_o \cdot \hat{i}_1 &= \overbrace{\|\hat{k}_o\|}^1 \cdot \underbrace{\|\hat{i}_1\|}_1 \cdot \cos(90^\circ) \\
 \hat{k}_o \cdot \hat{i}_1 &= 0
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

Substituindo 3.8, 3.10 e 3.11 em 3.7 conclui-se que:

$$Px^1 = \begin{bmatrix} \cos(\Psi) & \text{sen}(\Psi) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Px^o \\ Py^o \\ Pz^o \end{bmatrix}. \tag{3.12}$$

Fazendo o produto escalar de 3.5 com  $\hat{j}_1$ , e observando os ângulos da figura 10:

$$Px^1 \cdot \hat{i}_1 \cdot \hat{j}_1 + Py^1 \cdot \hat{j}_1 \cdot \hat{j}_1 + Pz^1 \cdot \hat{k}_1 \cdot \hat{j}_1 = Px^o \cdot \hat{i}_o \cdot \hat{j}_1 + Py^o \cdot \hat{j}_o \cdot \hat{j}_1 + Pz^o \cdot \hat{k}_o \cdot \hat{j}_1 \tag{3.13}$$

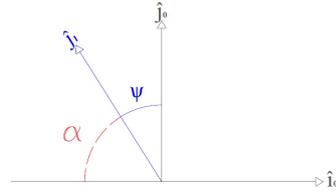


Fig. 10 – Ângulo entre os vetores.

$\hat{j}_1 \cdot \hat{j}_1$  é igual a 1, pois o ângulo entre os vetores é  $0^\circ$ , logo  $\cos(0^\circ) = 1$ , no mesmo raciocínio,  $\hat{j}_1 \cdot \hat{i}_1$  é igual a zero, o ângulo formado entre eles é de  $90^\circ$ , logo  $\cos(90^\circ) = 0$ , o mesmo acontece com  $\hat{k}_1 \cdot \hat{i}_1$ , pois o ângulo entre eles é de  $90^\circ$ . Reorganizando :

$$Py^1 = \begin{bmatrix} \hat{i}_o \cdot \hat{j}_1 & \hat{j}_o \cdot \hat{j}_1 & \hat{k}_o \cdot \hat{j}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Px^o \\ Py^o \\ Pz^o \end{bmatrix}. \quad (3.14)$$

O produto escalar entre  $\hat{j}_o \hat{j}_1$ :

$$\hat{j}_o \cdot \hat{j}_1 = \overbrace{\|\hat{j}_o\|}^1 \cdot \underbrace{\|\hat{j}_1\|}_1 \cdot \cos(\Psi) \quad (3.15)$$

Conforme 3.9 temos:

$$\begin{aligned} -\hat{i}_o \cdot \hat{j}_1 &= \overbrace{\|\hat{i}_o\|}^1 \cdot \underbrace{\|\hat{j}_1\|}_1 \cdot \cos(\Psi - 90^\circ) \\ \hat{i}_o \cdot \hat{j}_1 &= -\text{sen}(\Psi) \end{aligned} \quad (3.16)$$

Como o eixo z foi mantido constante, logo o ângulo entre  $\hat{k}_o$  e  $\hat{j}_1$  é  $90^\circ$ .

$$\begin{aligned} \hat{k}_o \cdot \hat{j}_1 &= \overbrace{\|\hat{k}_o\|}^1 \cdot \underbrace{\|\hat{j}_1\|}_1 \cdot \cos(90^\circ) \\ \hat{k}_o \cdot \hat{j}_1 &= 0 \end{aligned} \quad (3.17)$$

Substituindo 3.16 ,3.15 e 3.17 em 3.14 temos:

$$Py^1 = \begin{bmatrix} -\text{sen}(\Psi) & \cos(\Psi) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Px^o \\ Py^o \\ Pz^o \end{bmatrix}. \quad (3.18)$$

Fazendo o produto escalar de 3.5 com  $\hat{k}_1$ , e observando os ângulos da figura 10:

$$Px^1 \cdot \hat{i}_1 \cdot \hat{k}_1 + Py^1 \cdot \hat{j}_1 \cdot \hat{k}_1 + Pz^1 \cdot \hat{k}_1 \cdot \hat{k}_1 = Px^o \cdot \hat{i}_o \cdot \hat{k}_1 + Py^o \cdot \hat{j}_o \cdot \hat{k}_1 + Pz^o \cdot \hat{k}_o \cdot \hat{k}_1 \quad (3.19)$$

$\hat{i}_1 \cdot \hat{k}_1$  é igual a 0, pois o ângulo entre os vetores é  $90^\circ$ , logo  $\cos(90^\circ) = 0$ , no mesmo raciocínio,  $\hat{j}_1 \cdot \hat{k}_1$  é igual a zero, o ângulo formado entre eles é de  $90^\circ$ , já o ângulo entre  $\hat{k}_1 \cdot \hat{k}_1$  é  $0^\circ$ , sendo  $\cos(0^\circ) = 1$ , temos:

$$Pz^1 = \begin{bmatrix} \hat{i}_o \cdot \hat{k}_1 & \hat{j}_o \cdot \hat{k}_1 & \hat{k}_o \cdot \hat{k}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Px^o \\ Py^o \\ Pz^o \end{bmatrix}. \quad (3.20)$$

Substituindo os valores dos produtos escalares temos:

$$Pz^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Px^o \\ Py^o \\ Pz^o \end{bmatrix}. \quad (3.21)$$

As equações 3.12, 3.18 e 3.21 formam a matriz de rotação que rotaciona o plano xy em torno do eixo z por um ângulo  $\Psi$  que chamaremos de Yaw (guinada).

$$\begin{bmatrix} Px^1 \\ Py^1 \\ Pz^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\Psi) & \sin(\Psi) & 0 \\ -\sin(\Psi) & \cos(\Psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Px^o \\ Py^o \\ Pz^o \end{bmatrix}. \quad (3.22)$$

### 3.2.2 Mantendo o eixo y constante

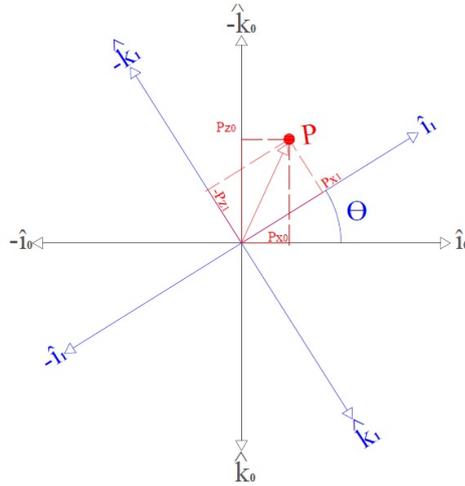


Fig. 11 – Rotação do plano x-z (mantendo y constante).

Fazendo a rotação do plano xz em torno do eixo y, para obter a relação entre os ângulos, é feito o produto escalar de 3.5 com  $\hat{i}_1$ .

$$Px^1 \cdot \hat{i}_1 \cdot \hat{i}_1 + Py^1 \cdot \hat{j}_1 \cdot \hat{i}_1 + Pz^1 \cdot \hat{k}_1 \cdot \hat{i}_1 = Px^o \cdot \hat{i}_o \cdot \hat{i}_1 + Py^o \cdot \hat{j}_o \cdot \hat{i}_1 + Pz^o \cdot \hat{k}_o \cdot \hat{i}_1 \quad (3.23)$$

$\hat{i}_1 \cdot \hat{i}_1$  é igual a 1, pois o ângulo entre os vetores é  $0^\circ$ , logo  $\cos(0^\circ) = 1$ , no mesmo raciocínio,  $\hat{j}_1 \cdot \hat{i}_1$  é igual a zero, o ângulo formado entre eles é de  $90^\circ$ , logo  $\cos(90^\circ) = 0$ , o mesmo

acontece com  $\hat{k}_1 \cdot \hat{i}_1$ , pois o ângulo entre eles é de  $90^\circ$ . Reorganizando :

$$Px^1 = \begin{bmatrix} \hat{i}_o \cdot \hat{i}_1 & \hat{j}_o \cdot \hat{i}_1 & \hat{k}_o \cdot \hat{i}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Px^o \\ Py^o \\ Pz^o \end{bmatrix}. \quad (3.24)$$

O produto escalar entre  $\hat{i}_0 \cdot \hat{i}_1$  é função do ângulo  $\Theta$ :

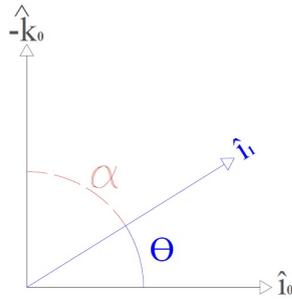


Fig. 12 – Relação dos ângulos.

$$\hat{i}_o \cdot \hat{i}_1 = \overbrace{\|\hat{i}_o\|}^1 \cdot \underbrace{\|\hat{i}_1\|}_1 \cdot \cos(\Theta) \quad (3.25)$$

O produto escalar entre  $\hat{j}_0 \cdot \hat{i}_1$  é zero, pois o ângulo formado entre eles é  $90^\circ$ :

$$\hat{j}_o \cdot \hat{i}_1 = \overbrace{\|\hat{j}_o\|}^1 \cdot \underbrace{\|\hat{i}_1\|}_1 \cdot \cos(90^\circ) \quad (3.26)$$

O produto escalar entre  $\hat{k}_0 \cdot \hat{i}_1$  é função do ângulo  $\alpha + 180^\circ$  da figura 12.

$$\hat{k}_o \cdot \hat{i}_1 = \overbrace{\|\hat{k}_o\|}^1 \cdot \underbrace{\|\hat{i}_1\|}_1 \cdot \cos(\alpha + 180^\circ) \quad (3.27)$$

$$\alpha = 90^\circ - \Theta$$

$$\cos(\alpha) = \cos(90^\circ - \Theta)$$

$$\cos(90^\circ - \Theta) = \text{sen}(\Theta)$$

$$\text{sen}(\Theta + 180^\circ) = -\text{sen}(\Theta) \quad (3.28)$$

Substituindo 3.28 em 3.27:

$$\hat{k}_o \cdot \hat{i}_1 = \overbrace{\|\hat{k}_o\|}^1 \cdot \underbrace{\|\hat{i}_1\|}_1 \cdot -\text{sen}(\Theta) \quad (3.29)$$

Reorganizando os termos temos:

$$Px^1 = \begin{bmatrix} \cos(\Theta) & 0 & -\text{sen}(\Theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Px^o \\ Py^o \\ Pz^o \end{bmatrix}. \quad (3.30)$$

Fazendo o produto escalar de 3.5 com  $\hat{j}_1$ , e observando os ângulos da figura 12:

$$Px^1 \cdot \hat{i}_1 \cdot \hat{j}_1 + Py^1 \cdot \hat{j}_1 \cdot \hat{j}_1 + Pz^1 \cdot \hat{k}_1 \cdot \hat{j}_1 = Px^o \cdot \hat{i}_o \cdot \hat{j}_1 + Py^o \cdot \hat{j}_o \cdot \hat{j}_1 + Pz^o \cdot \hat{k}_o \cdot \hat{j}_1 \quad (3.31)$$

$\hat{j}_1 \cdot \hat{j}_1$  é igual a 1, pois o ângulo entre os vetores é  $0^\circ$ , logo  $\cos(0^\circ) = 1$ , no mesmo raciocínio,  $\hat{j}_1 \cdot \hat{i}_1$  é igual a zero, o ângulo formado entre eles é de  $90^\circ$ , logo  $\cos(90^\circ) = 0$ , o mesmo acontece com  $\hat{k}_1 \cdot \hat{i}_1$ , pois o ângulo entre eles é de  $90^\circ$ . Reorganizando :

$$Py^1 = \begin{bmatrix} \hat{i}_o \cdot \hat{j}_1 & \hat{j}_o \cdot \hat{j}_1 & \hat{k}_o \cdot \hat{j}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Px^o \\ Py^o \\ Pz^o \end{bmatrix}. \quad (3.32)$$

O ângulo formado entre os eixos  $\hat{i}_o$  e  $\hat{j}_1$  é  $90^\circ$ , portanto:

$$\hat{i}_o \cdot \hat{j}_1 = \overbrace{\|\hat{i}_o\| \cdot \|\hat{j}_1\|}^1 \cdot \cos(90^\circ) \quad (3.33)$$

O produto escalar entre  $\hat{j}_o$  e  $\hat{j}_1$ :

$$\hat{j}_o \cdot \hat{j}_1 = \overbrace{\|\hat{j}_o\| \cdot \|\hat{j}_1\|}^1 \cdot \cos(0^\circ) \quad (3.34)$$

O ângulo formado entre os eixos  $\hat{k}_o$  e  $\hat{j}_1$  é  $90^\circ$ , portanto:

$$\hat{k}_o \cdot \hat{j}_1 = \cos(90^\circ) \quad (3.35)$$

Substituindo 3.33, 3.34 e 3.35 em 3.32 temos:

$$Py^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Px^o \\ Py^o \\ Pz^o \end{bmatrix}. \quad (3.36)$$

Fazendo o produto escalar de 3.5 com  $\hat{k}_1$ , e observando os ângulos da figura 13:

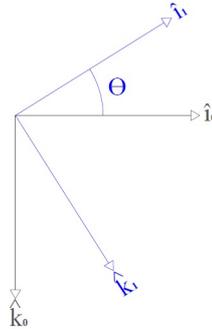


Fig. 13 – Relação dos ângulos.

$$Px^1 \cdot \hat{i}_1 \cdot \hat{k}_1 + Py^1 \cdot \hat{j}_1 \cdot \hat{k}_1 + Pz^1 \cdot \hat{k}_1 \cdot \hat{k}_1 = Px^o \cdot \hat{i}_o \cdot \hat{k}_1 + Py^o \cdot \hat{j}_o \cdot \hat{k}_1 + Pz^o \cdot \hat{k}_o \cdot \hat{k}_1 \quad (3.37)$$

$\hat{k}_1 \cdot \hat{k}_1$  é igual a 1, pois o ângulo entre os vetores é  $0^\circ$ , logo  $\cos(0^\circ) = 1$ , no mesmo raciocínio,  $\hat{i}_1 \cdot \hat{k}_1$  é igual a zero, o ângulo formado entre eles é de  $90^\circ$ , logo  $\cos(90^\circ) = 0$ , o mesmo acontece com  $\hat{j}_1 \cdot \hat{k}_1$ , pois o ângulo entre eles é de  $90^\circ$ . Reorganizando :

$$Pz^1 = \begin{bmatrix} \hat{i}_o \cdot \hat{k}_1 & \hat{j}_o \cdot \hat{k}_1 & \hat{k}_o \cdot \hat{k}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Px^o \\ Py^o \\ Pz^o \end{bmatrix}. \quad (3.38)$$

O produto escalar entre os eixos  $\hat{i}_o$  e  $\hat{k}_1$  é:

$$\hat{i}_o \cdot \hat{k}_1 = \overbrace{\|\hat{i}_o\|}^1 \cdot \underbrace{\|\hat{k}_1\|}_1 \cdot \cos(90^\circ - \Theta) \quad (3.39)$$

O produto escalar entre  $\hat{j}_o$  e  $\hat{k}_1$  é zero, pois:

$$\hat{j}_o \cdot \hat{k}_1 = \overbrace{\|\hat{j}_o\|}^1 \cdot \underbrace{\|\hat{k}_1\|}_1 \cdot \cos(90^\circ) \quad (3.40)$$

O produto escalar entre os eixos  $\hat{k}_o$  e  $\hat{k}_1$  é:

$$\hat{k}_o \cdot \hat{k}_1 = \overbrace{\|\hat{k}_o\|}^1 \cdot \underbrace{\|\hat{k}_1\|}_1 \cdot \cos(\Theta) \quad (3.41)$$

Substituindo 3.39, 3.40 e 3.41 em 3.38 temos:

$$Pz^1 = \begin{bmatrix} \cos(\Theta) & 0 & \cos(\Theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Px^o \\ Py^o \\ Pz^o \end{bmatrix}. \quad (3.42)$$

As equações 3.30, 3.36 e 3.42 formam a matriz de rotação que rotaciona o plano xz em torno do eixo y por um ângulo  $\Theta$  que chamaremos de pitch (guinada).

$$\begin{bmatrix} Px^1 \\ Py^1 \\ Pz^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\Theta) & 0 & -\sin(\Theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\Theta) & 0 & \cos(\Theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Px^o \\ Py^o \\ Pz^o \end{bmatrix}. \quad (3.43)$$

### 3.2.3 Mantendo o eixo x constante

Fazendo a rotação do plano yz em torno do eixo x, considerando um ponto P qualquer, para obter a relação entre os ângulos, é feito o produto escalar de 3.5 com  $\hat{i}_1$ .

$$Px^1 \cdot \hat{i}_1 \cdot \hat{i}_1 + Py^1 \cdot \hat{j}_1 \cdot \hat{i}_1 + Pz^1 \cdot \hat{k}_1 \cdot \hat{i}_1 = Px^o \cdot \hat{i}_o \cdot \hat{i}_1 + Py^o \cdot \hat{j}_o \cdot \hat{i}_1 + Pz^o \cdot \hat{k}_o \cdot \hat{i}_1 \quad (3.44)$$

$\hat{i}_1 \cdot \hat{i}_1$  é igual a 1, pois o ângulo entre os vetores é  $0^\circ$ , logo  $\cos(0^\circ) = 1$ , no mesmo raciocínio,  $\hat{j}_1 \cdot \hat{i}_1$  é igual a zero, o ângulo formado entre eles é de  $90^\circ$ , logo  $\cos(90^\circ) = 0$ , o mesmo

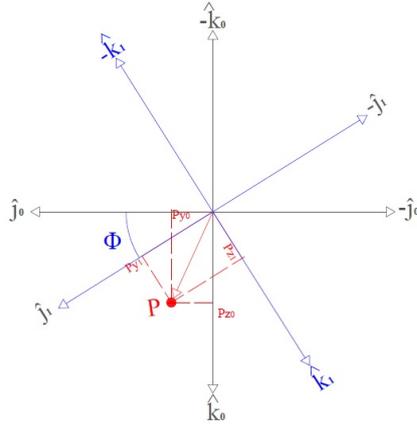


Fig. 14 – Rotação do plano y-z (mantendo x constante).

acontece com  $\hat{k}_1 \cdot \hat{i}_1$ , pois o ângulo entre eles é de  $90^\circ$ . Reorganizando :

$$Px^1 = \begin{bmatrix} \hat{i}_o \cdot \hat{i}_1 & \hat{j}_o \cdot \hat{i}_1 & \hat{k}_o \cdot \hat{i}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Px^o \\ Py^o \\ Pz^o \end{bmatrix}. \quad (3.45)$$

O produto escalar entre  $\hat{i}_o \cdot \hat{i}_1$  é função do ângulo  $\Phi$ :

$$\hat{i}_o \cdot \hat{i}_1 = \overbrace{\|\hat{i}_o\|}^1 \cdot \underbrace{\|\hat{i}_1\|}_1 \cdot \cos(\Phi) \quad (3.46)$$

O produto escalar entre  $\hat{j}_o \cdot \hat{i}_1$  é zero, pois o ângulo formado entre eles é  $90^\circ$ :

$$\hat{j}_o \cdot \hat{i}_1 = \overbrace{\|\hat{j}_o\|}^1 \cdot \underbrace{\|\hat{i}_1\|}_1 \cdot \cos(90^\circ) \quad (3.47)$$

O produto escalar entre  $\hat{k}_o \cdot \hat{i}_1$  é zero, pois o ângulo formado entre eles é  $90^\circ$ :

$$\hat{k}_o \cdot \hat{i}_1 = \overbrace{\|\hat{k}_o\|}^1 \cdot \underbrace{\|\hat{i}_1\|}_1 \cdot \cos(90^\circ) \quad (3.48)$$

Substituindo 3.46, 3.47 e 3.48 em 3.45 obtém-se:

$$Px^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Px^o \\ Py^o \\ Pz^o \end{bmatrix}. \quad (3.49)$$

Fazendo o produto escalar de 3.5 com  $\hat{j}_1$ .

$$Px^1 \cdot \hat{i}_1 \cdot \hat{j}_1 + Py^1 \cdot \hat{j}_1 \cdot \hat{j}_1 + Pz^1 \cdot \hat{k}_1 \cdot \hat{j}_1 = Px^o \cdot \hat{i}_o \cdot \hat{j}_1 + Py^o \cdot \hat{j}_o \cdot \hat{j}_1 + Pz^o \cdot \hat{k}_o \cdot \hat{j}_1 \quad (3.50)$$

$\hat{i}_1 \cdot \hat{j}_1$  é igual a 0, pois o ângulo entre os vetores é  $90^\circ$ , logo  $\cos(90^\circ) = 0$ , no mesmo raciocínio,  $\hat{j}_1 \cdot \hat{k}_1$  é igual a zero, o ângulo formado entre eles é de  $90^\circ$ . Fazendo  $\hat{k}_1 \cdot \hat{k}_1$ , obtém-se 1 pois o ângulo entre eles é de  $0^\circ$ . Reorganizando :

$$Py^1 = \begin{bmatrix} \hat{i}_o \cdot \hat{j}_1 & \hat{j}_o \cdot \hat{j}_1 & \hat{k}_o \cdot \hat{j}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Px^o \\ Py^o \\ Pz^o \end{bmatrix}. \quad (3.51)$$

O produto escalar entre  $\hat{i}_o \cdot \hat{j}_1$  é zero, pois o vetor  $\hat{i}_o$  é perpendicular:

$$\hat{i}_o \cdot \hat{j}_1 = \overbrace{\|\hat{i}_o\|}^1 \cdot \underbrace{\|\hat{j}_1\|}_1 \cdot \cos(90^\circ) \quad (3.52)$$

O produto escalar entre  $\hat{j}_o \cdot \hat{j}_1$  é função do ângulo  $\Phi$ :

$$\hat{j}_o \cdot \hat{j}_1 = \overbrace{\|\hat{j}_o\|}^1 \cdot \underbrace{\|\hat{j}_1\|}_1 \cdot \cos(\Phi) \quad (3.53)$$

O produto escalar entre  $\hat{k}_o \cdot \hat{j}_1$  é em função de  $\Phi$  e baseando-se na dedução de 3.9, temos:

$$\hat{k}_o \cdot \hat{j}_1 = \overbrace{\|\hat{k}_o\|}^1 \cdot \underbrace{\|\hat{j}_1\|}_1 \cdot \sin(\Phi) \quad (3.54)$$

Substituindo 3.52, 3.53 e 3.54 em 3.51 obtém-se:

$$Py^1 = \begin{bmatrix} 0 & \cos(\Phi) & \sin(\Phi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Px^o \\ Py^o \\ Pz^o \end{bmatrix}. \quad (3.55)$$

Fazendo o produto escalar de 3.5 com  $\hat{k}_1$ .

$$Px^1 \cdot \hat{i}_1 \cdot \hat{k}_1 + Py^1 \cdot \hat{j}_1 \cdot \hat{k}_1 + Pz^1 \cdot \hat{k}_1 \cdot \hat{k}_1 = Px^o \cdot \hat{i}_o \cdot \hat{k}_1 + Py^o \cdot \hat{j}_o \cdot \hat{k}_1 + Pz^o \cdot \hat{k}_o \cdot \hat{k}_1 \quad (3.56)$$

$\hat{i}_1 \cdot \hat{k}_1$  é igual a 0, pois o ângulo entre os vetores é  $90^\circ$ , logo  $\cos(90^\circ) = 0$ , no mesmo raciocínio,  $\hat{j}_1 \cdot \hat{k}_1$  é igual a zero, o ângulo formado entre eles é de  $90^\circ$ . Fazendo  $\hat{k}_1 \cdot \hat{k}_1$ , obtém-se 1 pois o ângulo entre eles é de  $0^\circ$ . Reorganizando :

$$Pz^1 = \begin{bmatrix} \hat{i}_o \cdot \hat{j}_1 & \hat{j}_o \cdot \hat{j}_1 & \hat{k}_o \cdot \hat{j}_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Px^o \\ Py^o \\ Pz^o \end{bmatrix}. \quad (3.57)$$

O produto escalar entre  $\hat{i}_o \cdot \hat{k}_1$  é zero, pois o vetor  $\hat{i}_o$  é perpendicular:

$$\hat{i}_o \cdot \hat{k}_1 = \overbrace{\|\hat{i}_o\|}^1 \cdot \underbrace{\|\hat{k}_1\|}_1 \cdot \cos(90^\circ) \quad (3.58)$$

O produto escalar entre  $\hat{j}_0 \cdot \hat{k}_1$  é função do ângulo  $\Phi$ , conforme dedução de ??, temos:

$$\hat{j}_0 \cdot \hat{k}_1 = \overbrace{\|\hat{j}_0\|}^1 \cdot \underbrace{\|\hat{k}_1\|}_1 \cdot -\text{sen}(\Phi) \quad (3.59)$$

O produto escalar entre  $\hat{k}_0 \cdot \hat{k}_1$  é em função de  $\Phi$  e baseando-se na dedução de 3.9, temos:

$$\hat{k}_0 \cdot \hat{k}_1 = \overbrace{\|\hat{k}_0\|}^1 \cdot \underbrace{\|\hat{k}_1\|}_1 \cdot \cos(\Phi) \quad (3.60)$$

Substituindo 3.58, 3.59 e 3.60 em 3.57 obtém-se:

$$Py^1 = \begin{bmatrix} 0 & -\text{sen}(\Phi) & \cos(\Phi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Px^o \\ Py^o \\ Pz^o \end{bmatrix}. \quad (3.61)$$

As equações 3.49, 3.55 e 3.61 formam a matriz de rotação que rotaciona o plano yz em torno do eixo x por um ângulo  $\Phi$  que chamaremos de roll.

$$\begin{bmatrix} Px^1 \\ Py^1 \\ Pz^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\Phi) & \text{sen}(\Phi) \\ 0 & -\text{sen}(\Phi) & \cos(\Phi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Px^o \\ Py^o \\ Pz^o \end{bmatrix}. \quad (3.62)$$

Uma rotação qualquer por ser dada por  $(\Psi, \Theta, \Phi)$ :

$$\begin{bmatrix} Px^1 \\ Py^1 \\ Pz^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\Psi) & \text{sen}(\Psi) & 0 \\ -\text{sen}(\Psi) & \cos(\Psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\Theta) & 0 & -\text{sen}(\Theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \text{sen}(\Theta) & 0 & \cos(\Theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\Phi) & \text{sen}(\Phi) \\ 0 & -\text{sen}(\Phi) & \cos(\Phi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Px^o \\ Py^o \\ Pz^o \end{bmatrix}. \quad (3.63)$$

Realizando as multiplicações da matriz 3.63 temos (sendo c=cosseno e s=seno, respectivamente):

$$\begin{bmatrix} Px^1 \\ Py^1 \\ Pz^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c(\Psi)c(\Theta) & c(\Psi)s(\Theta)s(\Phi) - s(\Psi)c(\Phi) & c(\Psi)s(\Theta)c(\Phi) + s(\Psi)s(\Phi) \\ s(\Psi)c(\Phi) & s(\Psi)s(\Theta)s(\Phi) + c(\Psi)c(\Phi) & s(\Psi)s(\Theta)c(\Phi) - c(\Psi)s(\Phi) \\ -s(\Theta) & c(\Theta)s(\Phi) & c(\Theta)c(\Phi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Px^o \\ Py^o \\ Pz^o \end{bmatrix}. \quad (3.64)$$

Na modelagem dinâmica do quadrotor essa matriz servirá para converter um ponto do sistema de coordenadas do dispositivo para o sistema de coordenadas da terra, a relação inversa também é válida, multiplicando as coordenadas da terra pela matriz inversa de transformação, obtém-se as coordenadas do dispositivo.

### 3.3 Modelagem Dinâmica do Quadrotor

Analisando a figura 15 observa-se que o quadrotor tem 6 movimentos distintos (graus de liberdade), pode-se movimentar na direção de x, y ou z, as outras três possibilidades de

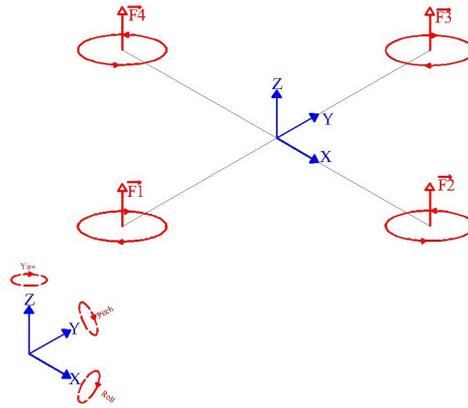


Fig. 15 – Simplificação do corpo do dispositivo

movimentos são justamente a capacidade do dispositivo girar de forma independente sobre esses eixos. Esses movimentos são chamados de yaw ou guinada (rotação sobre o eixo z), roll ou rolagem (rotação sobre o eixo x) e pitch ou arfagem (rotação sobre o eixo y).

A dificuldade de se criar um controle para esse tipo de dispositivo é que ele só possui quatro atuadores, ou seja, os quatro motores, essa condição faz com que alguns movimentos sejam acoplados, ou seja, não é possível obter um movimento sem alterar outros em alguns casos, isso porque ocorre um somatório das forças impostas pelos quatro motores.

Para aplicar um controle sobre determinado sistema é necessário se obter um modelo, a sua planta. No caso do quadrotor a sua modelagem matemática é baseada nas leis de Newton. Sendo que a primeira lei de Newton é que nenhum corpo pode sofrer aceleração se nenhuma força resultante está sendo aplicada sobre ele. A segunda lei de Newton diz que a força que atua sobre um corpo é proporcional a aceleração adquirida por ele.

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} \quad (3.65)$$

No caso do quadrotor, observando a figura 15, considera-se que cada rotor aplicará uma força,  $\vec{F}1$  e  $\vec{F}3$  perpendicular ao eixo y,  $\vec{F}2$  e  $\vec{F}4$  perpendicular ao eixo x. O somatório dessas forças será um vetor resultante  $\vec{F}$  no centro do corpo do quadrotor no sentido positivo de z. O quadrotor terá uma trajetória somente no eixo z se o módulo das 4 forças forem iguais, caso contrário ele se deslocará, além do eixo z, nos eixos x e y.

Para saber o módulo da força aplicada em cada eixo basta que se multiplique a matriz 3.64 pelo somatório da força gerada pelos motores que atuam no eixo z do sistema de coordenadas do quadrotor, a força da gravidade é uma força que atua paralela ao eixo z no sistema de coordenadas da terra, por isso a necessidade de conversão de forças para o referencial da terra. Essa conversão ocorre multiplicando o somatório de forças que há no quadrotor (só tem componente z no sistema de coordenadas do dispositivo, ou seja  $\vec{F}1, \vec{F}2, \vec{F}3$  e  $\vec{F}4$  são somados e passam a ser  $\vec{F}z$ ) pela matriz de transformação de

coordenadas, feito isso ainda se soma a gravidade (somente no eixo z da terra).

$$\begin{bmatrix} Fx \\ Fy \\ Fz \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c(\Psi)c(\Theta) & c(\Psi)s(\Theta)s(\Phi) - s(\Psi)c(\Phi) & c(\Psi)s(\Theta)c(\Phi) + s(\Psi)s(\Phi) \\ s(\Psi)c(\Phi) & s(\Psi)s(\Theta)s(\Phi) + c(\Psi)c(\Phi) & s(\Psi)s(\Theta)c(\Phi) - c(\Psi)s(\Phi) \\ -s(\Theta) & c(\Theta)s(\Phi) & c(\Theta)c(\Phi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ Fz \end{bmatrix} \quad (3.66)$$

Realizando essa operação quando houver diferença entre as forças alocadas no mesmo eixo o vetor  $\vec{F}$  terá componentes nos eixos x, y e z, para saber o módulo dessas forças decompostas é só medir o ângulo que há entre o sistema de coordenadas da terra e o sistema de coordenadas do quadrotor, o resultado dessa multiplicação será:

$$\begin{bmatrix} Fx \\ Fy \\ Fz \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c(\Psi)s(\Theta)c(\Phi) + s(\Psi)s(\Phi) \\ s(\Psi)s(\Theta)c(\Phi) - c(\Psi)s(\Phi) \\ c(\Theta)c(\Phi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & Fz^1 \end{bmatrix} \quad (3.67)$$

Se considerar  $Fz^1$  um somatório das forças teremos (BOUSBAINÉ; WU; POYI, 2013):

$$Fx = \sum F_i (s\Psi s\Phi + c\Psi s\Theta c\Phi) \quad (3.68)$$

$$Fy = \sum F_i (s\Psi s\Theta c\Phi + c\Psi s\Theta) \quad (3.69)$$

$$Fz = \sum F_i (c\Theta c\Phi) \quad (3.70)$$

A segunda lei de Newton diz que a força resultante sobre um objeto é igual a sua massa vezes a sua aceleração 3.65. Logo, considerando que a aceleração é a segunda derivada da posição, se pode escrever:

$$m \cdot \ddot{x} = \sum F_i (s\Psi s\Phi + c\Psi s\Theta c\Phi) - C_1 \dot{x} \quad (3.71)$$

$$m \cdot \ddot{y} = \sum F_i (s\Psi s\Theta c\Phi + c\Psi s\Theta) - C_2 \dot{y} \quad (3.72)$$

$$m \cdot \ddot{z} = \sum F_i (c\Theta c\Phi) - mg - C_3 \dot{z} \quad (3.73)$$

As forças aplicadas sofrem perdas por arrasto, essas perdas são expressas pelos coeficientes C, porém para baixas velocidades essas perdas podem ser desprezadas.

Para os movimentos de rotação guinada (yaw), arfagem (pitch) e rolagem (roll) é válida a segunda lei de Newton aplicada a movimentos com rotação, mais conhecidas como equações de Euler. Conforme (HALLIDAY; RESNICK, 2009) um Torque aplicado a um corpo rígido faz com que ele gire. Quando é necessário relacionar a velocidade angular com o torque resultante basta com que se faça um analogia com a segunda lei de Newton (3.65), aonde a força será substituída pelo torque  $\tau$ , a massa pela inércia e a aceleração será a aceleração angular  $\alpha$ :

$$\tau = I \cdot \alpha \quad (3.74)$$

Sendo o torque definido como  $\vec{F} \cdot d$ , tendo  $F_3$  e  $F_1$  atuando no eixo x,  $F_2$  e  $F_4$  no eixo y basta somar os momentos impostos por cada rotor. Considerando que a aceleração angular

é a segunda derivada da posição angular, temos (BOUSBAINÉ; WU; POYI, 2013):

$$I_x \ddot{\Phi} = l(F_3 - F_1 - C_1 \dot{\Phi}) \quad (3.75)$$

$$I_y \ddot{\Theta} = l(F_4 - F_2 - C_2 \dot{\Theta}) \quad (3.76)$$

$$I_z \ddot{\Psi} = M_1 - M_2 + M_3 - M_4 - C_3 \dot{\Psi} \quad (3.77)$$

Do mesmo modo que nas equações da posição, também são considerados coeficientes de perdas C, que para baixas velocidades podem ser desconsiderados (NEMATÍ; KUMAR, 2014).

## 4 Resultados

Após definidas as equações que descrevem o quadrotor foi realizada uma simulação no software simulink, conforme a figura 16.

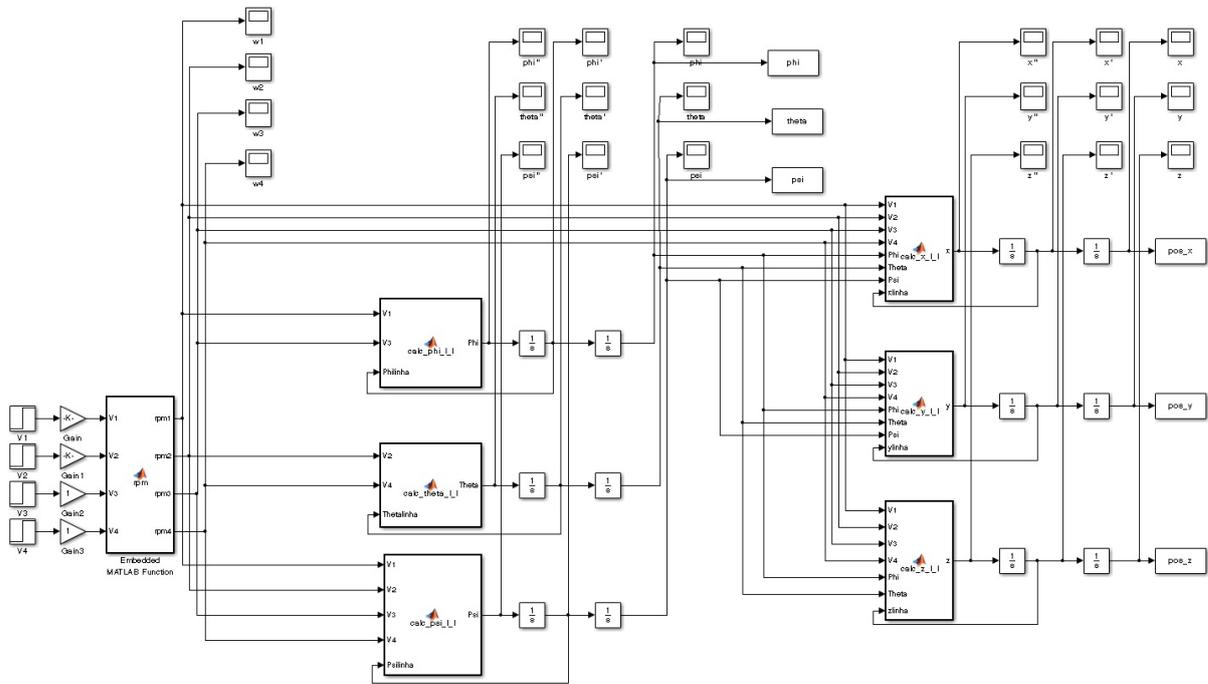


Figura 16 – Layout da simulação.

Para essa simulação foi considerado que a força imposta por cada rotor é proporcional a velocidade que possui, sendo o crescimento dessa velocidade considerado com o formato de uma rampa conforme figura 17: O primeiro teste realizado foi o de definir

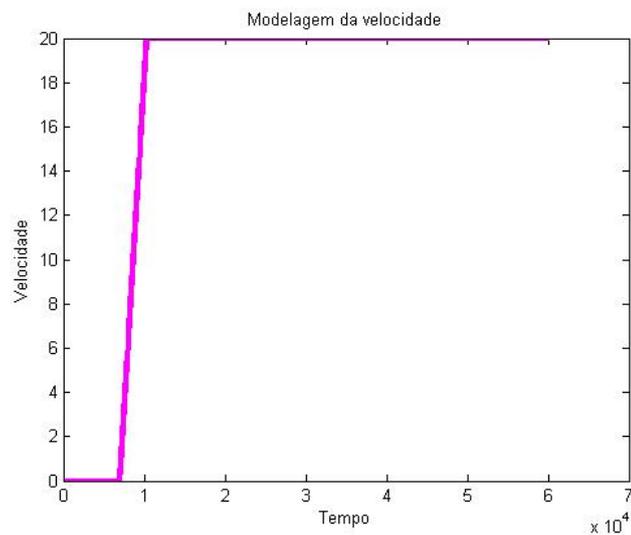


Fig. 17 – Rampa de velocidade

as velocidades dos rotores com valores iguais, conforme indica a figura 18 as forças com módulos iguais, em consequência disso ele deverá ter deslocamento somente no eixo z.

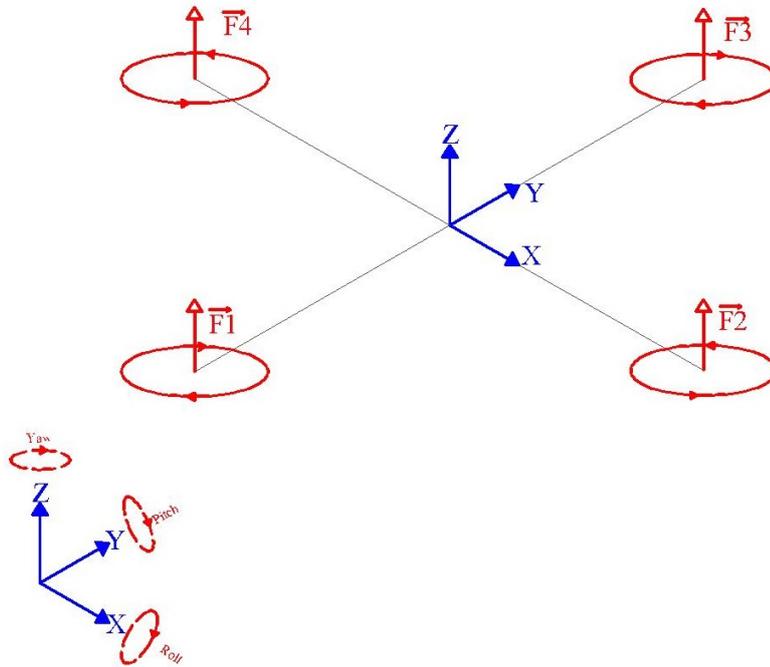


Fig. 18 – Detalhe das forças iguais em cada rotor

Analisando os resultados da figura 19, cujo detalhe do movimento em 3 dimensões está ampliado na figura 20 percebe-se que acontece o esperado, há o deslocamento somente no sentido positivo do eixo z, com o movimento nos eixos x e y permanecendo em zero.

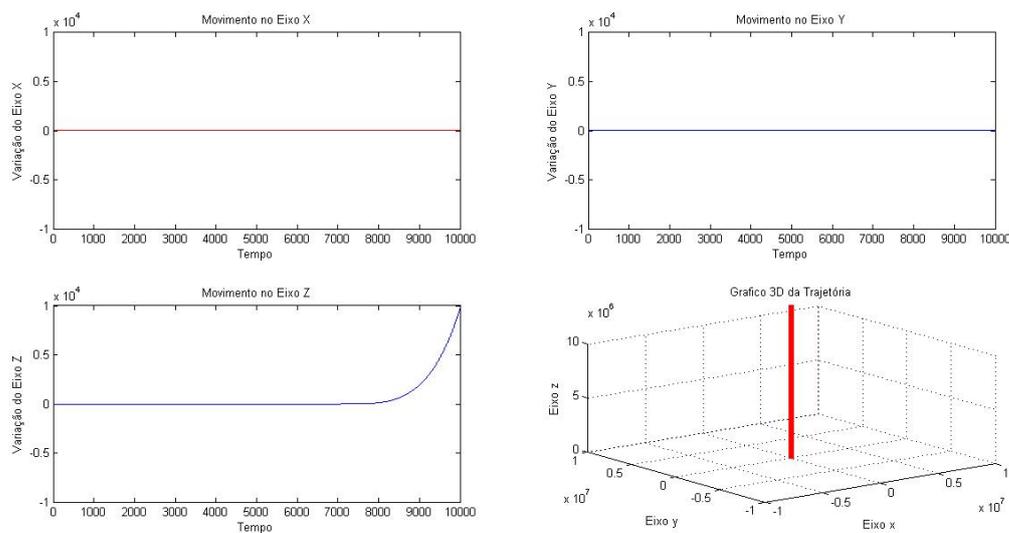


Fig. 19 – Trajetória nos eixos

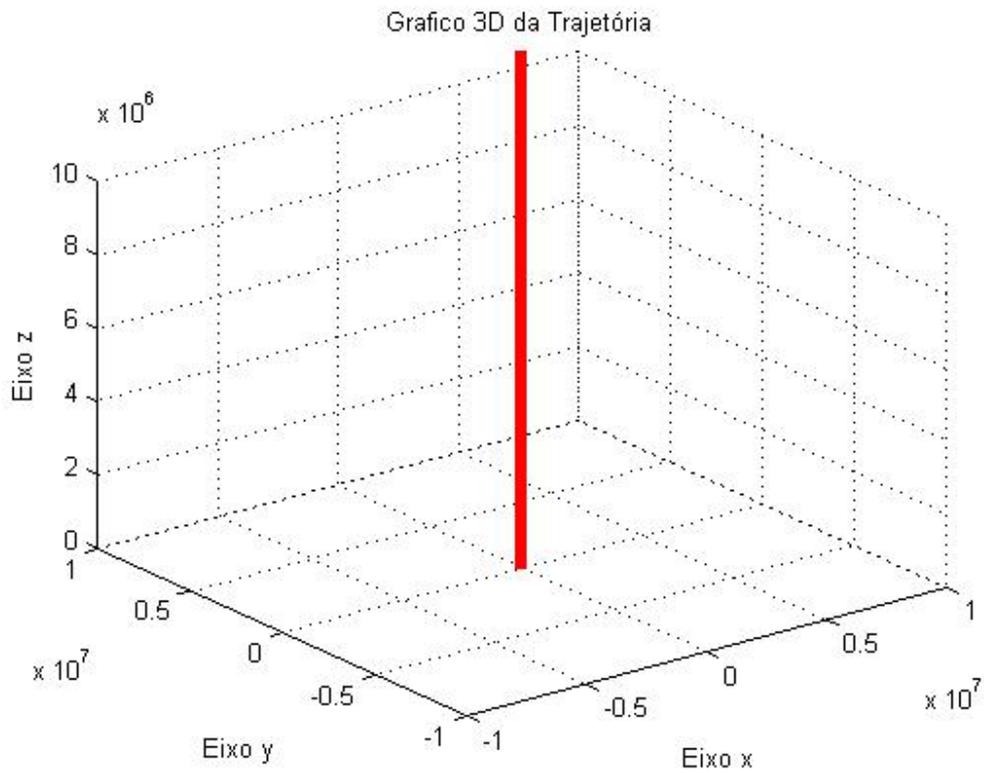


Fig. 20 – Trajetória em 3 dimensões com  $F_1=F_2=F_3=F_4=1$

O teste seguinte aplicado foi deixar a força 1 como a menor (multiplicar por um ganho de 0.99), deixando as forças restantes com o valor máximo. É esperado que o objeto desloque-se no sentido negativo de  $y$  e tenha um deslocamento no sentido negativo de  $x$  também e um movimento no sentido positivo de  $z$ .

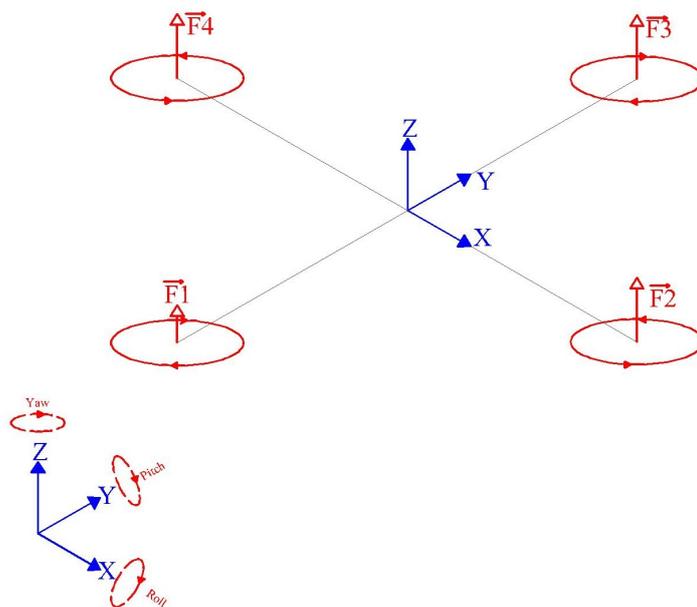


Fig. 21 – Detalhe das forças em cada rotor

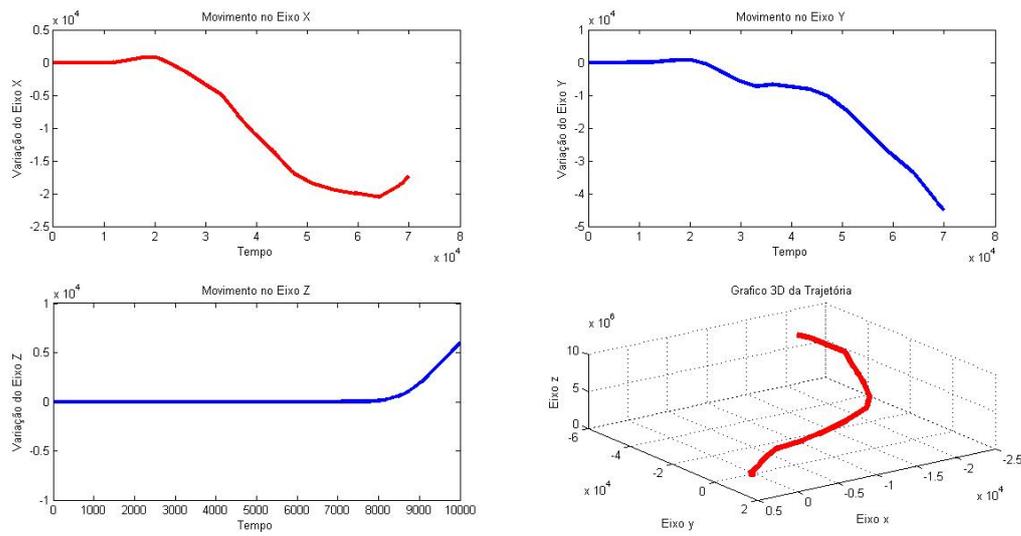
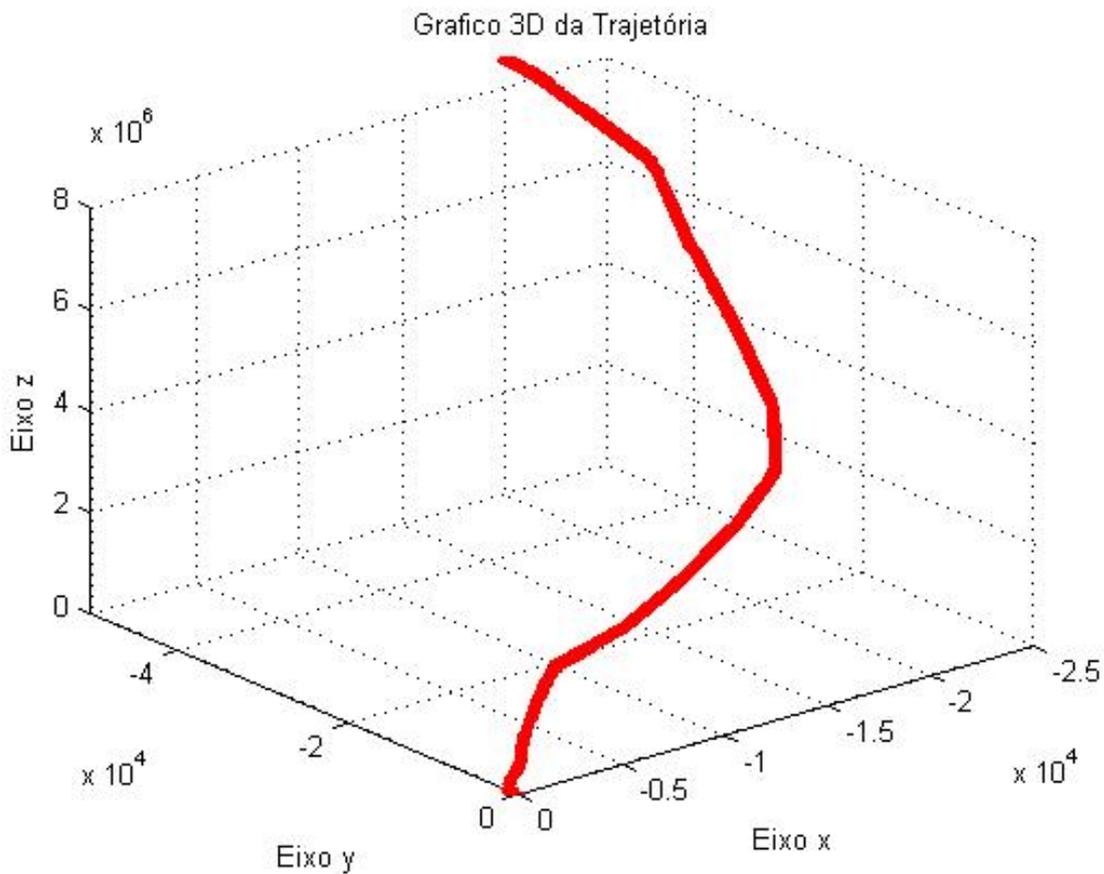


Fig. 22 – Trajetória nos eixos

Fig. 23 – Trajetória em 3 dimensões com  $F1=0.99$   $F2=F3=F4=1$ 

Conforme esperado o objeto se movimenta na direção negativa de x e y e positiva de z, a curva que ocorre durante o deslocamento se dá por causa da diferença de momento

que ocorre devido a força 1 ser menor, logo os momentos não se anulam e alteram a trajetória do quadrotor.

O teste seguinte foi alterar a força 2, deixando essa com o módulo de 0.99 e as demais com a amplitude máxima, conforme ilustra a figura 24. Para que o conjunto de equações seja válido o dispositivo deve andar no sentido positivo x e y e z.

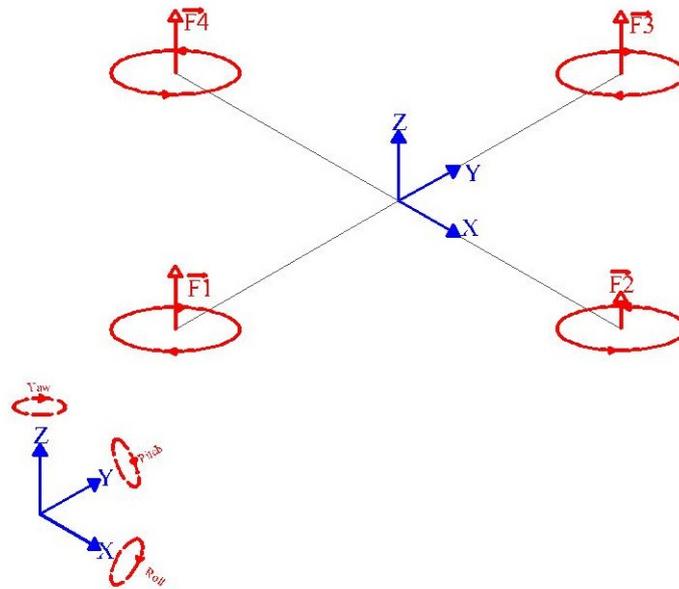


Fig. 24 – Detalhe das forças em cada rotor

Depois de ajustar os parâmetros da simulação foram obtidas as seguintes figuras:

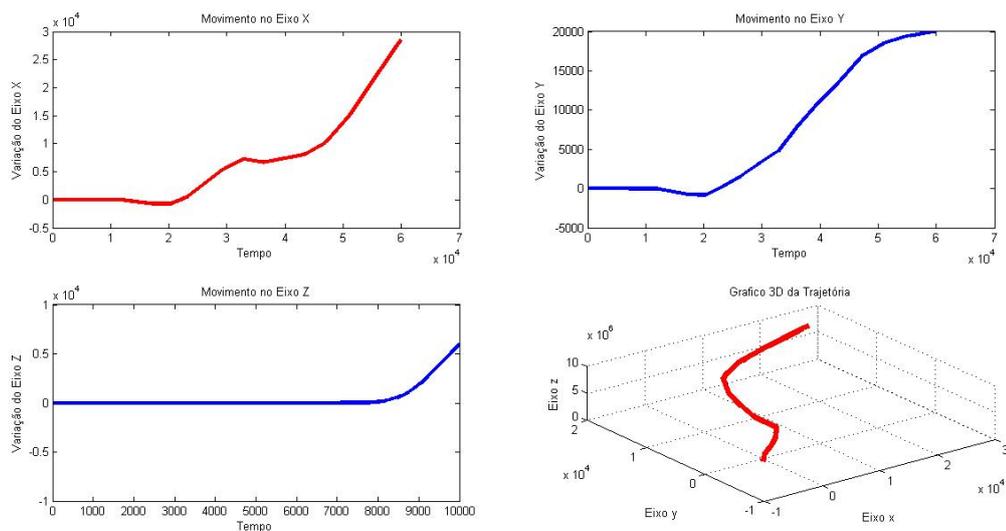


Fig. 25 – Trajetória nos eixos

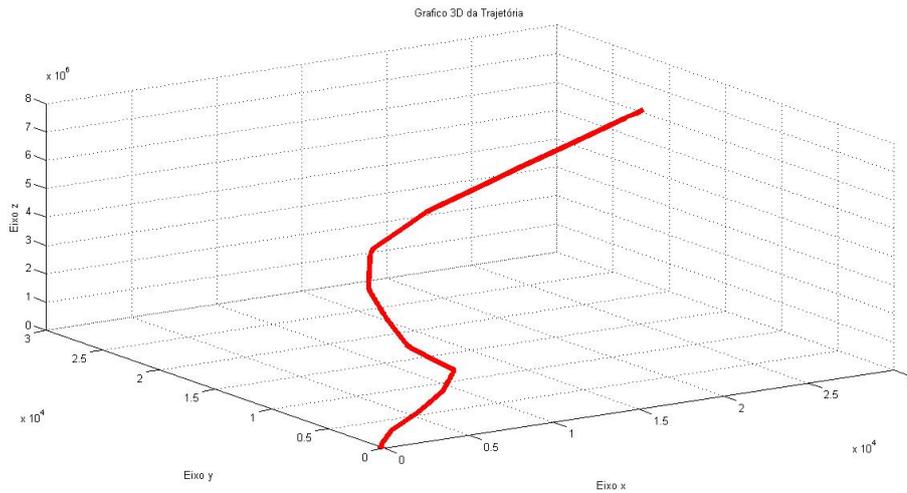


Fig. 26 – Trajetória em 3 dimensões com  $F_2=0.99$   $F_1=F_3=F_4=1$

Analisando os resultados percebe-se que aconteceu o esperado, novamente a trajetória vai nas direções esperadas e ocorre também o desbalanceamento dos momentos o que gera uma curva na sua trajetória, fazendo com que haja deslocamento no eixo y.

O próximo teste aplicado foi diminuir a força 3, conforme ilustração da figura 27.

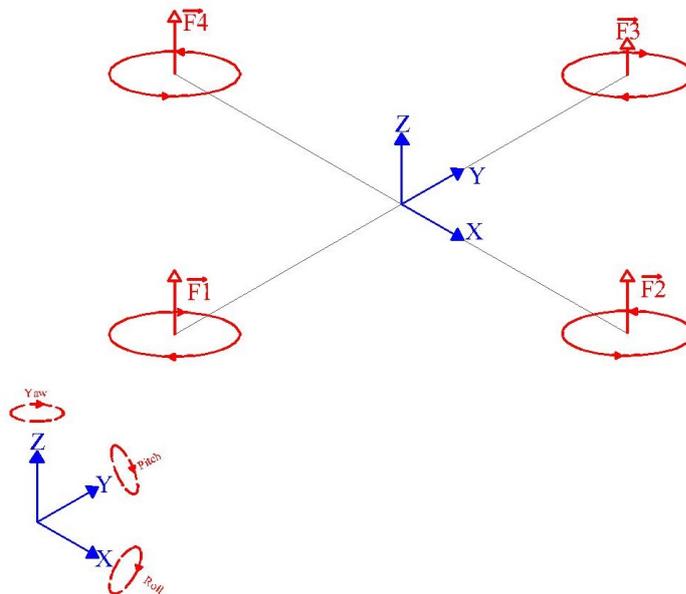


Fig. 27 – Detalhe das forças em cada rotor

Espera-se que a trajetória seja no sentido positivo y e x, pois os torque desbalanceado faz com que ocorra uma curva na direção positiva de x.

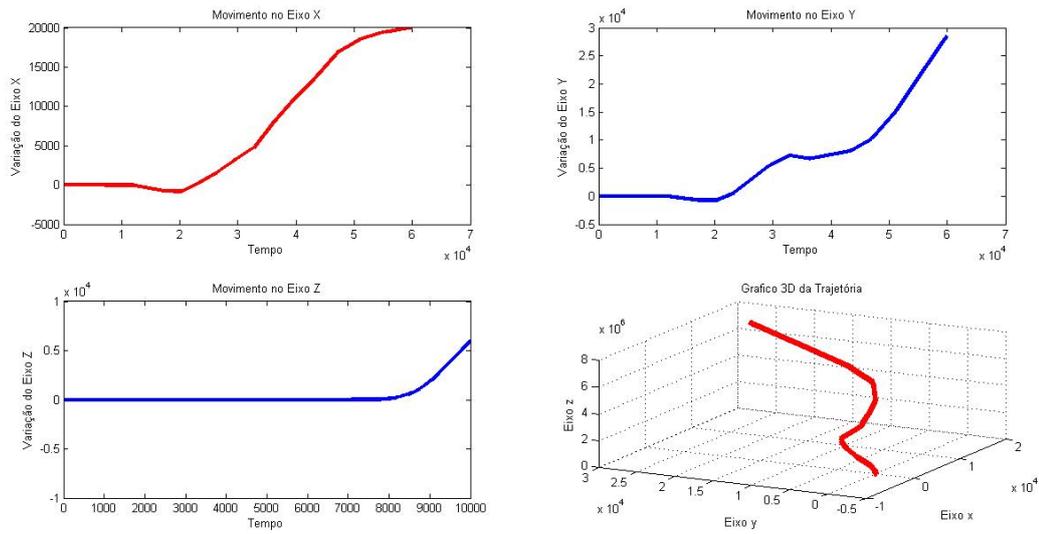
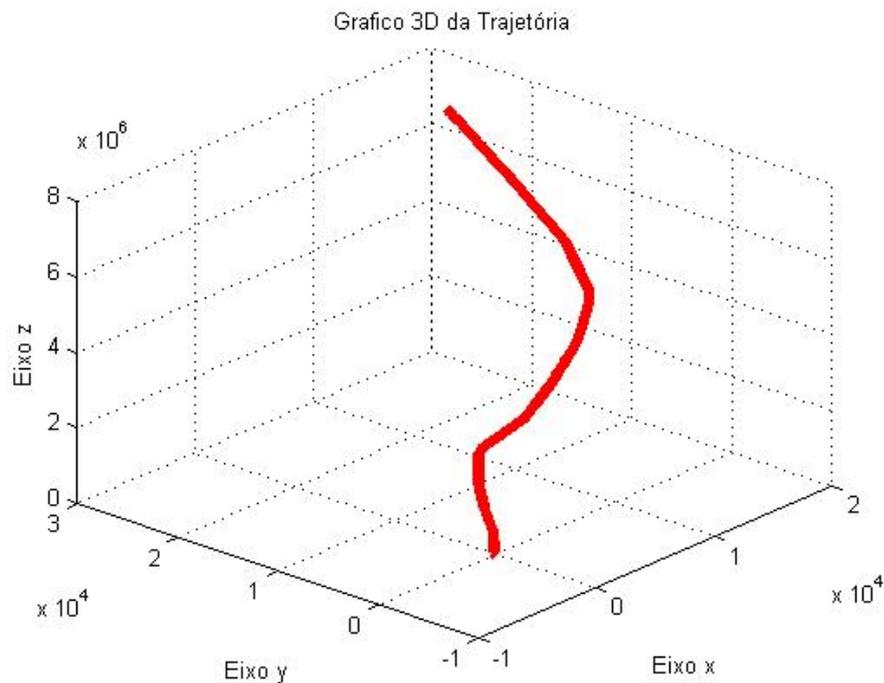


Fig. 28 – Trajetória nos eixos

Figura 29 – Trajetória em 3 dimensões com  $F_3=0.99$   $F_1=F_2=F_4=1$ .

Analisando os resultados das figuras 28 e 29 dos novos parâmetros, novamente acontece o esperado em relação a trajetória do quadrotor.

Diminuindo a força 4 conforme a figura 30 e deixando as restantes com o valor máximo.

Espera-se que o objeto tenha uma trajetória na parte negativa de x e y e positiva na direção de z.

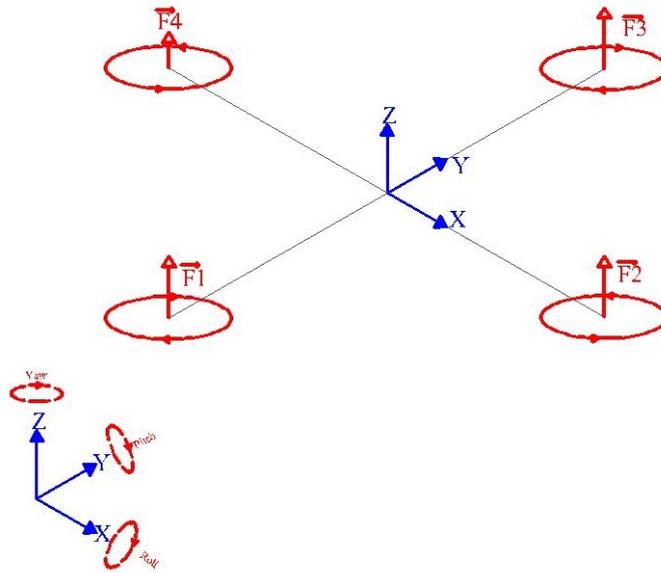


Fig. 30 – Detalhe das forças em cada rotor

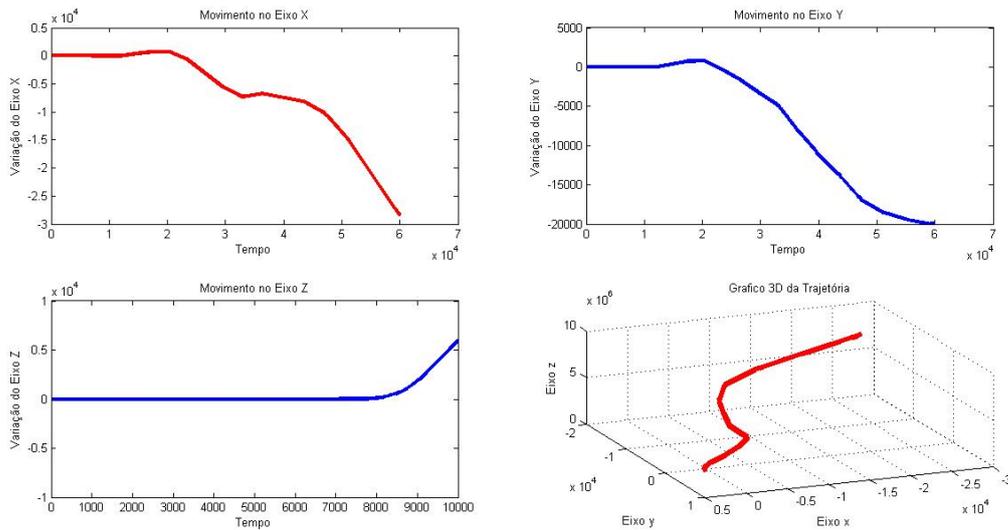


Fig. 31 – Trajetória nos eixos

Analisando os resultados das figuras 31 e 32 novamente ocorre o esperado para as configurações pré-definidas, ou seja, um deslocamento na parte negativa de  $x$  e  $y$  e positiva na direção de  $z$ .

A última configuração testada foi aplicando para a força 1 e força 2 um ganho de 0.99 e deixando as forças 3 e 4 com a máxima potência, conforme detalhe da figura 33. Para essa configuração de parâmetros espera-se que o dispositivo ande numa linha de 45 graus, progredindo no sentido positivo de  $x$  e negativo de  $y$ , sem que haja curva em sua trajetória, pois não há desbalanceamento de momentos.

Analisando-se as figuras percebe-se que a trajetória do quadrotor não possui

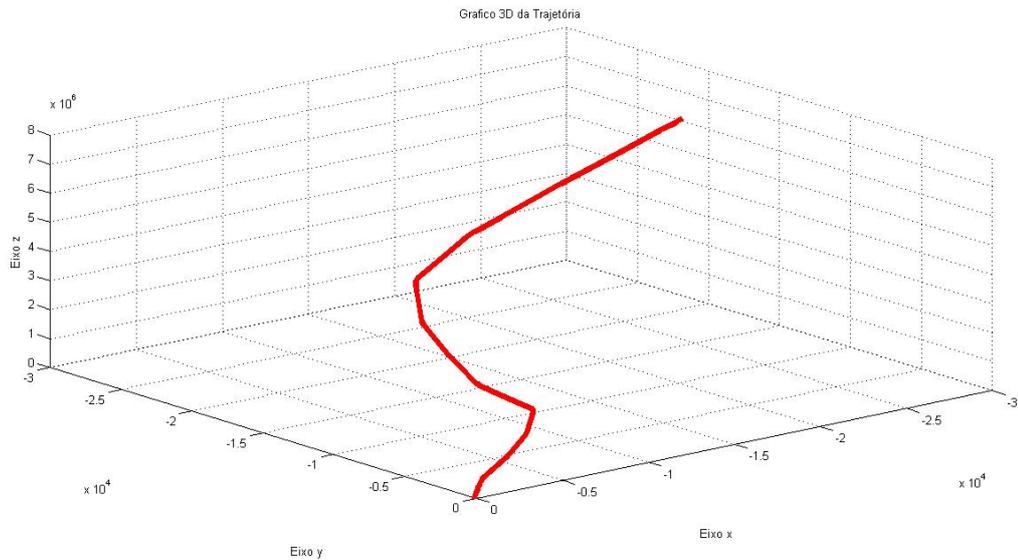


Fig. 32 – Trajetória em 3 dimensões com  $F_4=0.99$   $F_1=F_2=F_3=1$

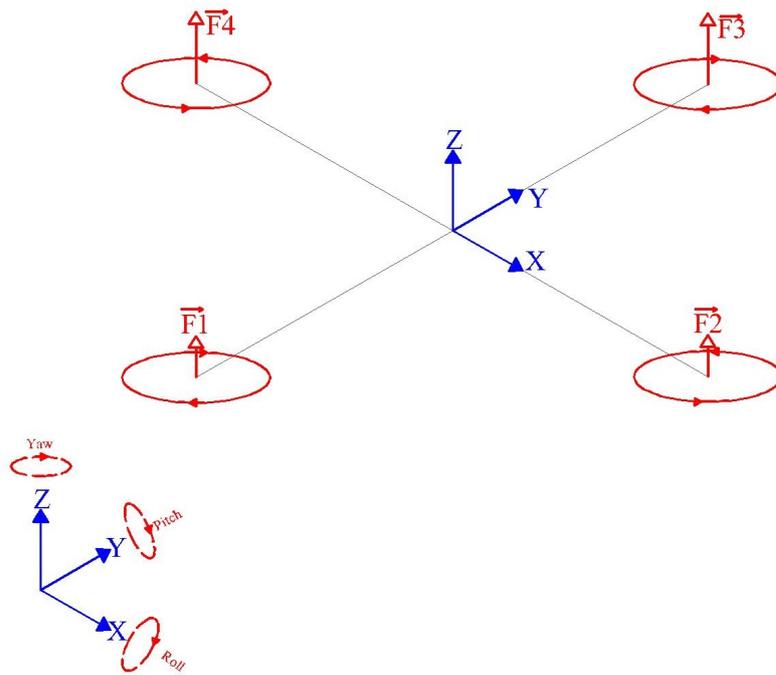


Fig. 33 – Detalhe das forças em cada rotor

curvas nos eixos  $x$  e  $y$ , devido ao balanceamento dos momentos, porém ele não possui uma trajetória de 45 graus conforme esperado, Isso se deve a inicialização da simulação, pois há várias realimentações de blocos, o que faz com que alguns valores sejam considerados zeros, causando uma distorção na trajetória final.

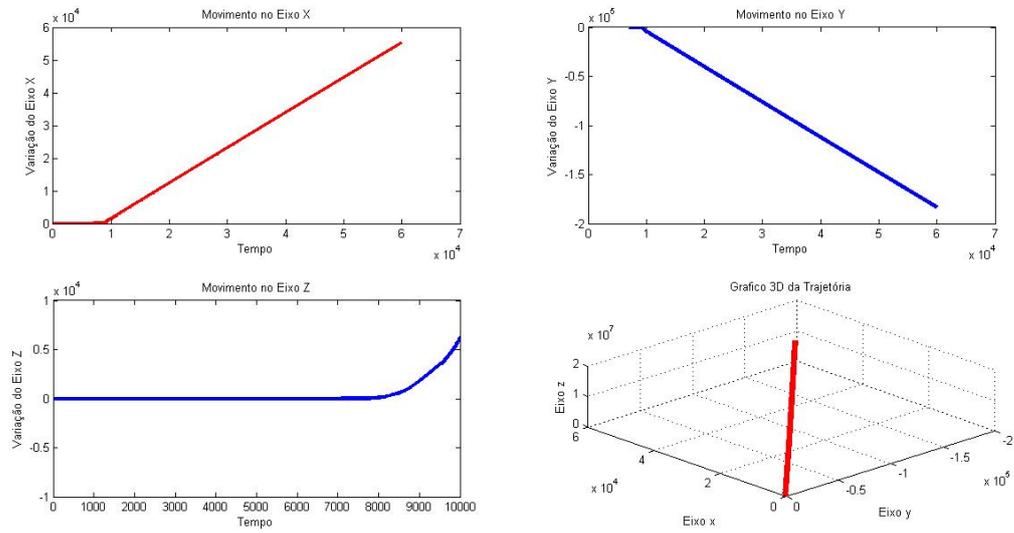


Fig. 34 – Trajetória nos eixos

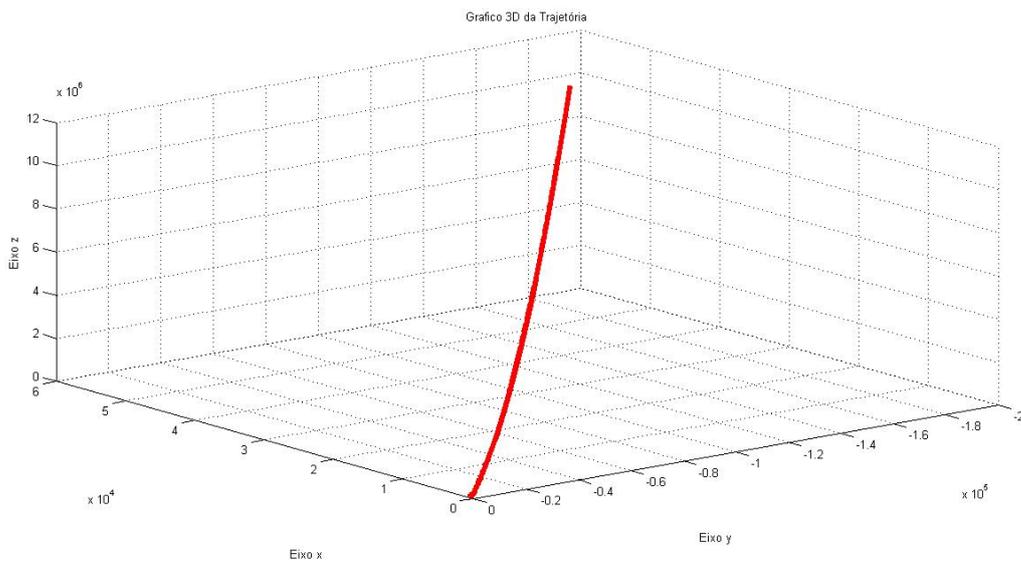


Fig. 35 – Trajetória em 3 dimensões com  $F_1=F_2=0.99$   $F_3=F_4=1$

## 5 Conclusão

Analisando-se os casos foi possível prever de forma intuitiva o movimento do dispositivo. Em seguida foi comprovado a validade com as trajetórias expressas nas figuras. Em alguns casos houve alguns resultados inesperados, como por exemplo as curvas com bastante turbulência nos primeiros segundos nas quatro primeiras simulações, mas isso se deve ao fato de que algumas variáveis foram consideradas zeros durante a inicialização, no entanto existem realimentações nos blocos que em primeiros momentos foram considerados zero.

Outro fator que faz com que ocorram uma certa incoerência nas escalas dos eixos das figuras é o fato de serem atribuídos valores aleatórios para parâmetros do quadrotor que deveriam ser calculados, como por exemplo a inércia de cada eixo, ou medidos, como por exemplo a massa do dispositivo e a força que os motores podem aplicar, isso faz com que surjam valores fora de escala.

De acordo com as simulações feitas, os resultados esperados e os resultados obtidos, pode-se afirmar que as equações que descrevem o movimento do quadrotor são verdadeiras e o modelo é válido.

Para trabalhos futuros seria recomendado a obtenção desses parâmetros do dispositivo, aplicação de controles para estabilização de vôo e trajetória desejada.



# Referências

- AUSTIN, R. *Unmanned aircraft systems: UAVS design, development and deployment*. first. [S.l.]: Wiley, 2011. Citado na página 19.
- BOUSBAINÉ, A.; WU, M. H.; POYI, G. T. Modeling and simulation of a quad-rotor helicopter. 2013. Citado 2 vezes nas páginas 35 e 36.
- Centro de Estudos e Sistemas Avançados do Recife. *Inspecção de linhas de transmissão com VANTS*. 2014. Disponível em: <<http://www.embarcados.com.br/inspecao-de-linhas-de-transmissao-com-vants/>>. Acesso em: 8 out 2015. Citado na página 20.
- HALLIDAY, D.; RESNICK, R. *Física I*. octave. [S.l.]: LTC-Livros Técnicos e Científicos Editora, 2009. Citado na página 35.
- MITISHITA, E. et al. O uso de veículos aéreos não tripulados (vants) em aplicações de mapeamento aerofotogramétrico. Citado na página 19.
- MOMONT, A. *Conheça o drone 'ambulância' que pode salvar vítimas de infarto*. 2015. Revista Galileu. Disponível em: <<http://revistagalileu.globo.com/Ciencia/noticia/2014/11/drone-ambulancia-pode-diminuir-drasticamente-riscos-das-pessoas-com-ataques-cardiacos.html>>. Acesso em: 24 set 2015. Citado na página 19.
- NEMATI, A.; KUMAR, M. Modeling and control of a single axis tilting quadcopter. 2014. Citado na página 36.
- STEINBRUCH, A.; WINTERLE, P. *Geometria Analítica*. second. [S.l.]: Pearson Education, 2007. Citado na página 23.
- UBIRATAN, E. *A origem dos vant*. 2016. AERO Magazine. Disponível em: <[http://aeromagazine.uol.com.br/artigo/origem-dos-vant\\_1907.html](http://aeromagazine.uol.com.br/artigo/origem-dos-vant_1907.html)>. Acesso em: 07 jun 2016. Citado na página 19.